F2557

1
TOMUL 24
1 9 6 7

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI** – *redactor responsabil,*
Acad. **D. DUMITRESCU** – *redactor responsabil adjunct,*
Prof. **I. ANTON,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **Șt. BĂLAN,**
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CR. MATEESCU,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **N. TIPEI,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Conf. **RADU C. BOGDAN** – *secretar de redacție.*

Pentru a se asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1967.
În țară, abanomentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.
Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134–135, sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN
Redacția : **București,**
str. Const. Mille 15, tel. 14.89.07

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 24, nr. 1 1967

SUMAR

STUDII

Pag.

S. CRIŞAN, GH. SECARĂ şi GH. BONCOI, Cercetarea durităţii corpurilor abrazive 3

GEORGE BĂRĂNESCU şi RODICA MANIŢIU, O generalizare a formulelor de analiză armonică a mărimilor cinematice ale bielei unui mecanism bielă-manivelă . . . 27

R. C. BOGDAN şi T. V. HUNCHER, Analiza armonică complexă a grupelor structurale binare de aspectul IV şi V în construcţia mecanismelor 53

P. CSONKA, Plăci curbe subţiri intersectate cu margini libere în consolă 63

V. FLORIAN, Calculul la forţe orizontale al pereţilor cu un şir de goluri în poziţie pronunţat disimetrică 71

DECEBAL ANASTASESCU şi ION MUNTEANU, Efectul precomprimării în calculul cadrelor spaţiale 109

V. DROBOTĂ, Calculul de stabilitate al grinzilor continue pendulare susţinute prin tendoane articulate şi încărcate cu convoaie de forţe 129

EUGEN STĂNESCU, ALA MUNTEANU şi AL. MILITARU, Metodologia determinării în laborator a rezistenţei la forfecare a rocilor stîncoase 139

N. N. PATRAULEA, Echilibrul relativ al unui sistem de ioni faţă de un reper rotitor . 161

V. TOMA şi ŞT. N. SĂVULESCU, Studiul experimental al optimizării repartiţiei de viteze în macheta unui electrofiltru 173

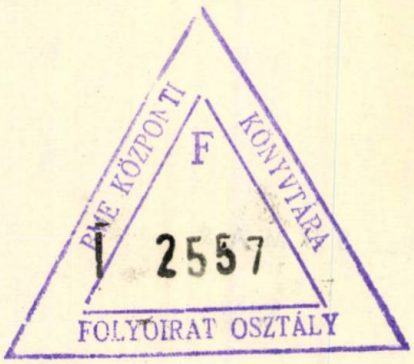
C. TEODORESCU-ŢINTEA, Asupra unui nou principiu funcţional în teoria turbinelor cu gaze bazat pe efectul Coandă: Turbina cu palete depresive 187

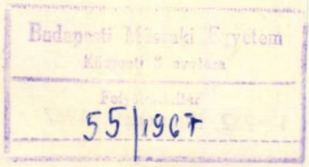
V. N. CONSTANTINESCU, FL. DIMOFTE şi GH. MARIN, Asupra influenţei unor condiţii la limită în lubrificaţia cu gaze 203

AL. MARINESCU, Consideraţii asupra unei probleme variaţionale pentru manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite circulare 233

RECENZII 247

1989





CERCETAREA DURITĂȚII CORPURILOR ABRAZIVE [1)]

de S. CRIȘAN, GH. SECARĂ și GH. BONCOI
Institutul politehnic, Brașov

621.92

Se prezintă o nouă metodă de determinare dinamică a durității corpurilor abrazive. Aceasta constă în determinarea lucrului mecanic specific consumat pentru desprinderea unei granule abrazive din complexul abraziv cu ajutorul unei scule care execută o mișcare oscilatorie imprimată de un pendul fizic. Energia necesară efectuării lucrului mecanic de desprindere este imprimată sculei de către pendulul tip Charpy. Criteriul de apreciere a durității corpurilor abrazive îl constituie lucrul mecanic consumat pentru desprinderea unei granule din complexul abraziv. Experimentările s-au făcut pe corpuri abrazive de durități și granulații diferite. Se studiază influența formei și lățimii sculei, precum și a adîncimii de lucru asupra preciziei măsurătorilor.
Pe baza rezultatelor influenței acestor parametri se studiază în continuare influența granulației, liantului și porozității asupra durității corpurilor abrazive. Rezultatele cercetărilor experimentale sînt ilustrate printr-un mare număr de diagrame. Se trag concluzii asupra dependenței durității corpurilor abrazive de diferiți factori care o influențează și se precizează că porozitatea poate constitui un alt criteriu de apreciere a durității corpurilor abrazive.

În stadiul actual al tehnicii, în rîndul sculelor așchietoare corpurile abrazive ocupă un loc din ce în ce mai important. Corpul abraziv este compus din granule abrazive și punți de legătură, formate din liant și pori. Structura geometrică internă a corpului abraziv depinde de mărimea granulelor, de raporturile volumetrice ale cotelor de granule și lianți etc. Tăișurile granulelor individuale nu prezintă în general o geometrie posibilă de definit. De asemenea granulele abrazive sînt dispuse spațial, conform unor distribuții statistice.

Pe lîngă aceasta, înseși dimensiunile granulelor și a punților de legătură dintre acestea nu sînt uniforme, ci prezintă o anumită dispersie. Dacă se ia în vedere și proprietățile granulelor abrazive, natura și compoziția liantului, precum și condițiile de fabricație, se poate aprecia complexitatea problemelor care se pun la determinarea însușirilor fizice ale corpuri-

[1] Prezentată la Conferința de mecanică, București, septembrie 1965

lor abrazive. Cercetările efectuate printre alții de prof. dr. ing. G. Pahlitzsch și de dr. ing. J. Peklenik au elucidat unele dintre aceste probleme.

Lucrarea de față se ocupă de una dintre însușirile fizice ale corpurilor abrazive, și anume de duritatea corpurilor abrazive.

1. METODA PROPUSĂ PENTRU DETERMINAREA DURITĂȚII CORPURILOR ABRAZIVE

Conform cunoștințelor actuale, prin duritatea statică a unui corp abraziv se înțelege rezistența pe care o opune liantul la desprinderea unei granule din acesta. Rezultă că măsura durității este forța de legare a gra-

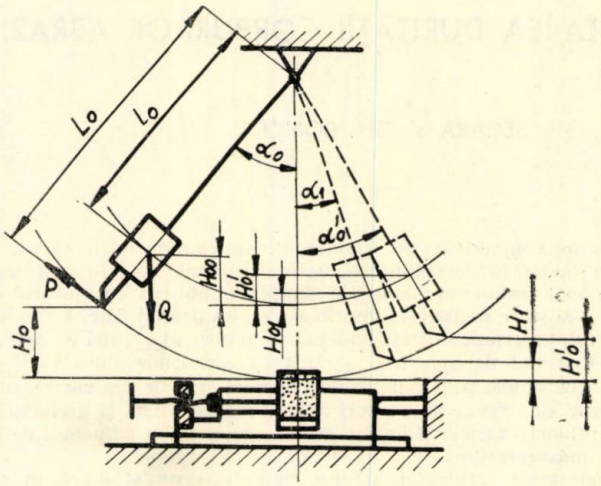


Fig. 1. — Schema aparatului.

nulelor în corpul abraziv. Măsurînd aceste forțe, se măsoară implicit duritatea [4].

Autorii au dezvoltat în lucrarea [9] o nouă metodă de determinare a durității corpurilor abrazive, determinînd *duritatea dinamică* a acestor corpuri. Măsura durității, conform acestei metode, este lucrul mecanic necesar pentru îndepărtarea unei granule din corpul abraziv. Duritatea corpului abraziv H_{ca} este deci o funcție a lucrului mecanic necesar pentru desprinderea granulelor $H_{ca} = f(W_g)$.

Aparatul cu care s-a măsurat lucrul mecanic consumat pentru desprinderea unei granule este reprezentat schematic în figura 1. Din figură se vede că forța de rezistență P, opusă de granule la desprindere, se poate exprima în funcție de forța activă Q pentru poziția de lucru prin următoarea relație :

$$P = \frac{Q \cdot l_0}{L_0} \text{ [kgf]}. \tag{1}$$

Relația de calcul a lucrului mecanic consumat pentru desprinderea granulelor la o trecere a sculei de lucru este următoarea :

$$W = P \cdot L_0 \, (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0')[\text{kgfmm}]. \tag{2}$$

Lucrul mecanic consumat pentru desprinderea numai a unei granule este dat de relația

$$W_g = \frac{W}{n} \text{ [kgfmm]}. \tag{3}$$

unde n este numărul de granule desprinse la o trecere a sculei. Pentru determinarea lui n este necesar să se cunoască volumul total desprins la o trecere a sculei, porozitatea și cota de liant a corpului abraziv cercetat.

Pentru determinarea acestor parametrii se pleacă de la ecuația volumetrică a corpurilor abrazive, exprimată prin

$$V_t = V_a + V_l + V_p \text{ [mm}^3\text{] sau [\%]}. \tag{4}$$

Volumul total desprins la o trecere a sculei se determină cu relația

$$V_t = l \cdot t \cdot l_c \text{ [mm}^3\text{]}. \tag{5}$$

Parametrii din această relație pot fi observați în figura 2. Conform definiției clasice, porozitatea este raportul dintre volumul ocupat de aer și volumul total, adică

$$v_p = p = \frac{V_p}{V_t} \text{ [\%]}. \tag{6}$$

Volumul ocupat de aer (V_p) este dat de relația

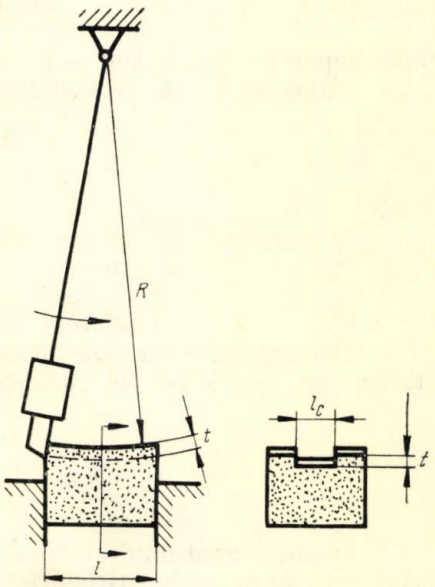


Fig. 2. — Parametrii de lucru.

$$V_p = V_t - V_{ca} \text{ [mm}^3\text{]} \tag{7}$$

unde

V_{ca} este volumul de abraziv și liant din corpul abraziv desprins, adică

$$V_{ca} = \frac{m}{\rho} \text{ [mm}^3\text{]}, \tag{8}$$

unde m este masa complexului abraziv-liant în aer, iar ρ — densitatea complexului abraziv-liant, dată de relația

$$\rho = \frac{m}{m_a} \cdot \rho_a \text{ [g/cm}^3\text{]}, \tag{9}$$

în care

m_a este masa complexului abraziv-liant în apă distilată.

ρ_a — densitatea apei distilate la temperatura de t°C. Cota de liant din corpul abraziv cercetat se determină în felul următor. Se cunoaște că

$$V_a + V_l = V_{ca}, \tag{10}$$

în care V_a este cota de granule abrazive iar V_l este cota de liant.

Pe de altă parte,

$$\frac{V_a}{V_l} = K,$$

unde K este raportul cotelor de granule și liant.

Din aceste două relații rezultă că

$$v_l = \frac{V_{ca}}{K+1} \ [\%], \tag{11}$$

mai departe : $V_{ca} = 100 - p \ [\%]$.

Valoarea lui K se calculează din relația

$$\frac{\gamma_l \cdot G_a}{\gamma_a \cdot G_l} = \frac{V_a}{V_l} = K, \tag{12}$$

unde

γ_l reprezintă greutatea specifică a liantului,
γ_a — greutatea specifică a granulelor abrazive,
G_a — greutatea granulelor abrazive,
G_l — greutatea liantului.

Deoarece liantul este un amestec din mai mulți constituenți, greutatea specifică a lui se calculează cu relația

$$\gamma = \frac{G_1 + G_2 + G_3 + \dots}{\frac{G_1}{\gamma_1} + \frac{G_2}{\gamma_2} + \frac{G_3}{\gamma_3} + \dots} \ [\mathrm{g/cm^3}]. \tag{13}$$

În cazul cînd unul dintre constituenții acestuia este format, la rîndul său, din mai mulți constituenți, greutatea specifică a acestuia se calculează cu aceeași relație.

Calculele s-au executat luînd în considerare greutatea specifică a granulelor abrazive ca egală cu $\gamma_a = 3{,}9 \ \mathrm{g/cm^3}$, valoare dedusă experimental.

Cunoscînd valoarea cotei de liant și a celei de pori, se poate calcula, conform relației (4), cota de abraziv din volumul total desprins la trecerea sculei :

$$V_a = 100 - V_l - V_p \ [\%] \tag{14}$$

sau

$$V_{ca} = V_t (1 - p) \ [\mathrm{mm^3}],$$

iar

$$V_a = V_{ca} - V_l \ [\mathrm{mm^3}] \text{ în care } V_l = \frac{V_{ca}}{K+1} [\mathrm{mm^3}]. \tag{15}$$

Numărul de granule cuprins în V_a se determină din

$$n = \frac{V_a}{V_g}, \tag{16}$$

unde V_g este volumul unei granule.

Volumul unei granule, conform lucrării [9], s-a luat cu aproximație egal cu volumul mediu dintre volumul unui cub cu latura egală cu lăți-

mea b a granulei (valoarea care dă granulația) și volumul unei sfere înscrise în cubul cu latura b, adică

$$V_g = \frac{V_c + V_s}{2} = \frac{b^3 + 0{,}523\, b^3}{2} = 0{,}76\, b^3. \qquad (17)$$

Cunoscînd toate aceste valori, se poate calcula lucrul mecanic consumat pentru desprinderea din corpul abraziv a unei granule.

Bazați pe metoda de determinare a durității corpurilor abrazive dezvoltată în lucrarea [9] și pe metoda de calcul descrisă, prezentele cercetări s-au îndreptat în direcția analizării factorilor care influențează lucrul mecanic consumat la desprinderea granulelor.

Din cercetările efectuate s-au desprins două grupe de factori :
— factori externi, independenți de corpul abraziv cercetat,
— factori interni dependenți de corpul abraziv cercetat.

Din prima grupă de factori s-a cercetat :
— influența lățimii sculei,
— influența adîncimii de lucru,
— influența formei sculei.

Din grupa a doua de factori s-a cercetat :
— influența durității corpului abraziv cercetat,
— influența granulației,
— influența porozității.

În cele ce urmează se analizează pe baza cercetările efectuate influența factorilor amintiți.

2. DETERMINAREA FACTORILOR CE INFLUENȚEAZĂ LUCRUL MECANIC (DURITATEA DINAMICĂ) NECESAR PENTRU DESPRINDEREA GRANULELOR

2.1. INFLUENȚA LĂȚIMII SCULEI

Pentru stabilirea influenței lățimii sculei asupra lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule, s-au făcut o serie de încercări cu diverse lățimi de sculă. Aceste lățimi au primit crescător valori de la lățimea l_c a sculei egală cu lățimea $b = d_g$ (care dă granulația conf. STAS) a granulelor pînă la l_c egală cu 8 mm. Adîncimea de lucru s-a păstrat constantă și a fost egală cu $t = b = d_g$.

Lucrul mecanic consumat pentru desprindera unei granule conform experiențelor a variat în limite apreciabile cu varierea lățimii sculei. Această variație se poate vedea în figura 3.

Explicația scăderii lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule cu creșterea lățimii sculei constă în următoarele. La trecerea sculei, datorită dispunerii spațiale neuniforme a granulelor și mărimii lor diferite, nu toate granulele sînt desprinse din liant, ci unele dintre ele sînt sparte. Spargerea acestor granule este posibilă numai la marginile laterale ale sculei și pe suprafața de fund a șanțului.

Poziția granulelor față de cîmpul de acțiune a sculei de lucru arată ca în figura 4. Din multitudinea de poziții a acestora (față de cîmpul de acțiune a sculei), patru sînt mai reprezentative : poziția A și B indică gra-

nulele ce se găsesc total în cîmpul sculei și care la trecerea acesteia se desprind în totalitate ; poziția D indică granulele ce se găsesc numai parțial în dreptul sculei și care parte se desprind, parte se sparg ; și, în fine, pozi-

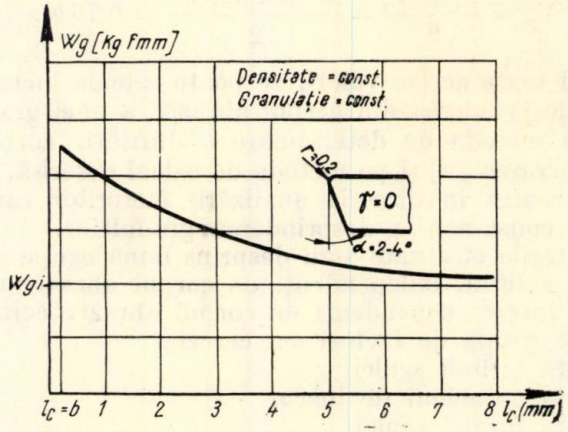


Fig. 3. — Variația lucrului mecanic funcție de lățimea sculei.

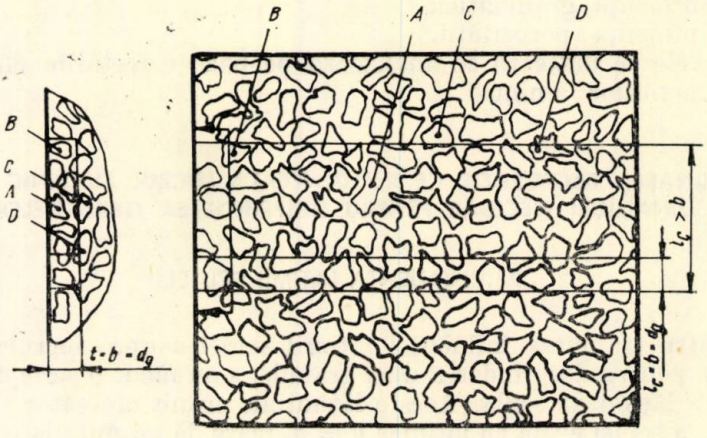


Fig. 4. — Desprinderea granulelor.

ția C arată granulele care la trecerea sculei sînt doar deplasate în corpul abraziv, după care revin la poziția inițială. Aceste considerente sînt valabile atît pentru părțile laterale ale zonei de acțiune ale sculei, cît și pentru partea de fund a șanțului lasat de sculă în corpul abraziv.

La lucru cu scula de lățime $l_c = b = d_g$ (fig. 4), sînt trei plane de separație unde pot să apară cazuri de rupere a granulelor pentru un singur rînd de granule (cel puțin teoretic). Cu cît lățimea sculei crește, cu atît numărul planurilor de separație raportate la numărul rîndurilor de granule desprinse este mai mic, deci și numărul granulelor eventual sparte, raportate la cele desprinse, scade. Cunoscînd faptul că secțiunea granulelor este mult mai mare în comparație cu a punților de legătură care o reții în corpul abraziv și că în general rezistența mecanică a granulelor este mai

mare ca cea a liantului, se deduce că și lucrul mecanic consumat pentru spargerea granulei este mai mare în comparație cu cel de desprindere a acestei granule. Acest lucru este valabil numai pentru granule care se sparg după o secțiune apreciabilă în comparație cu secțiunea lor normală (fig. 4, *D*). În rest poate să existe situații cînd lucrul mecanic consumat pentru ruperea unei porțiuni din granulă să fie egal cu cel de desprindere a acelei granule sau chiar mai mic.

De aici se deduce că, scăzînd numărul granulelor sparte prin mărirea lățimii de lucru al sculei, lucrul mecanic ce revine pentru desprinderea unei granule scade, apropiindu-se de valoarea W_{gi} (fig. 3), considerată ca ideală.

Pentru cercetările ulterioare s-a ales lățimea sculei $l_c = 6$ mm ca optimă, pe de o parte datorită faptului că, crescînd în continuare lățimea, scăderea lucrului mecanic devine mult mai înceată, cît și datorită capacității dispozitivului cu care s-au executat experiențele de a dezvolta un lucru mecanic limitat.

2.2. INFLUENȚA FORMEI SCULEI

Cercetarea influenței acestui factor s-a făcut prin executarea de numeroase experiențe cu mai multe forme pentru scula de lucru.

La alegerea acesteia s-a avut în vedere următoarele condiții de îndeplinit :

— stabilitatea pentru muchia aşchietoare ;

— apropierea condițiilor de desprindere a granulelor de condițiile de lucru ale corpurilor abrazive ;

— consum minim de lucru mecanic pentru desprinderea unei granule abrazive.

Conform acestor condiții s-au efectuat experiențe cu patru forme ale sculei, așa cum se vede în figura 5.

Experiențele s-au efectuat pe corpuri abrazive de granulație 16 și 50 (sistem metric) și duritate *K* și *P* (scara Norton).

Pentru fiecare granulație și duritate s-au încercat loturi de corpuri abrazive în număr de 12 pînă la 45 de bucăți. Încercările s-au considerat încheiate pentru o formă de sculă și un anumit tip de corp abraziv, cînd lucrul mecanic consumat pentru desprinderea unei

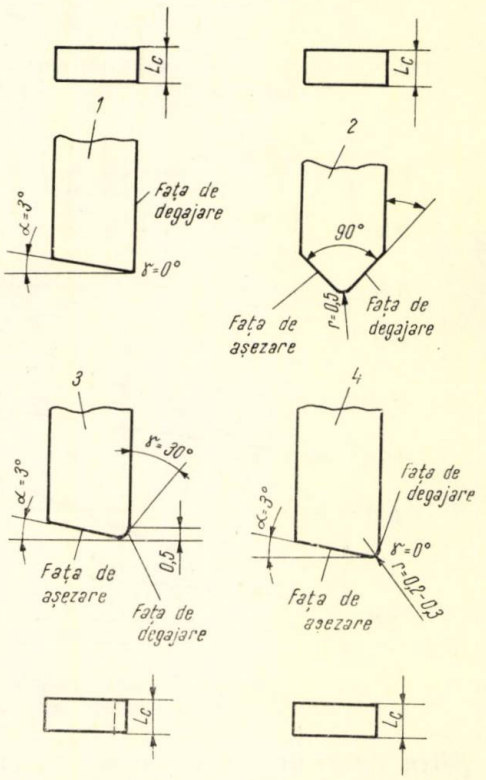


Fig. 5. — Forma sculelor experimentate.

granule, la ultima încercare, a crescut în comparație cu prima încercare cu cel puțin 50%.

Variația lucrului mecanic în funcția de forma sculei pentru cele

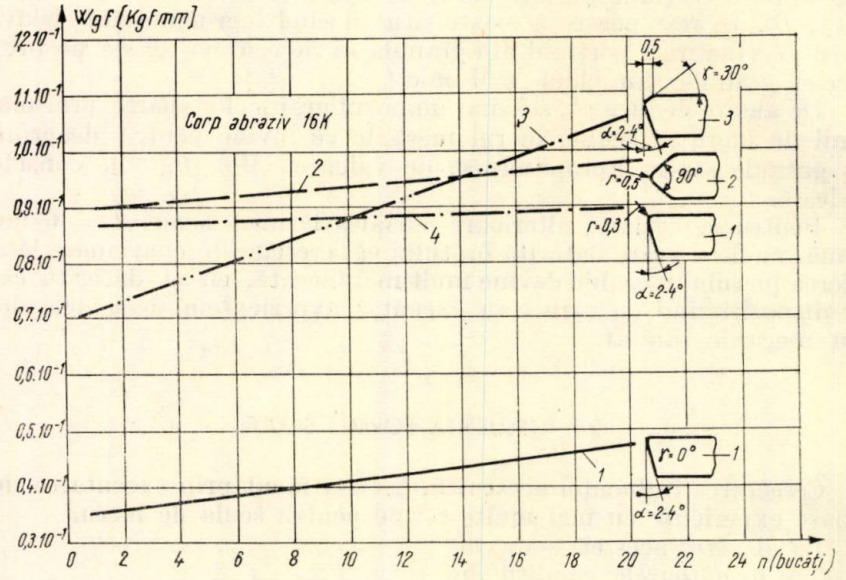


Fig. 6. — Dependența lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule de forma sculei cu care s-a făcut încărcarea. Corpul abraziv 16 *k*.

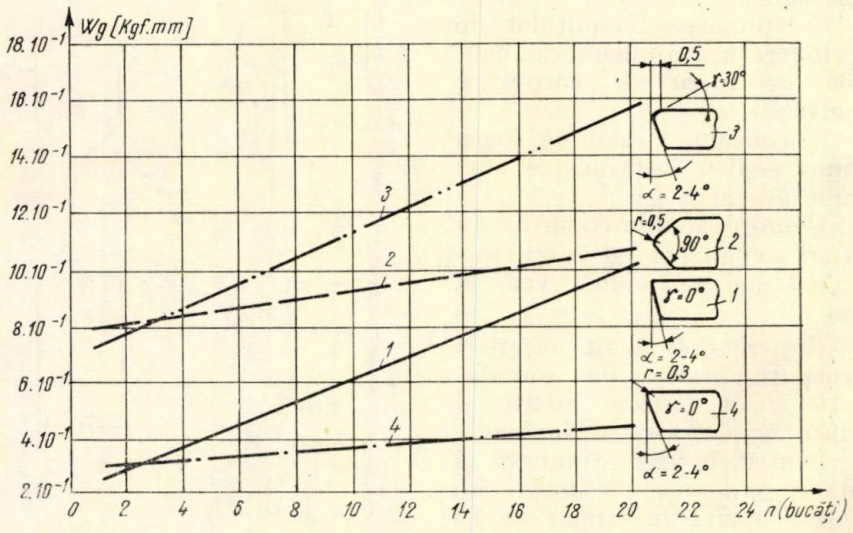


Fig. 7. — Dependența lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule de forma sculei cu care s-au efectuat încercările. Corpul abraziv 50 *k*.

patru tipuri de corpuri abrazive cercetate arată ca în figurile 6, 7, 8 și 9. În fiecare dintre acestea se vede că, deși corpul abraziv este același,

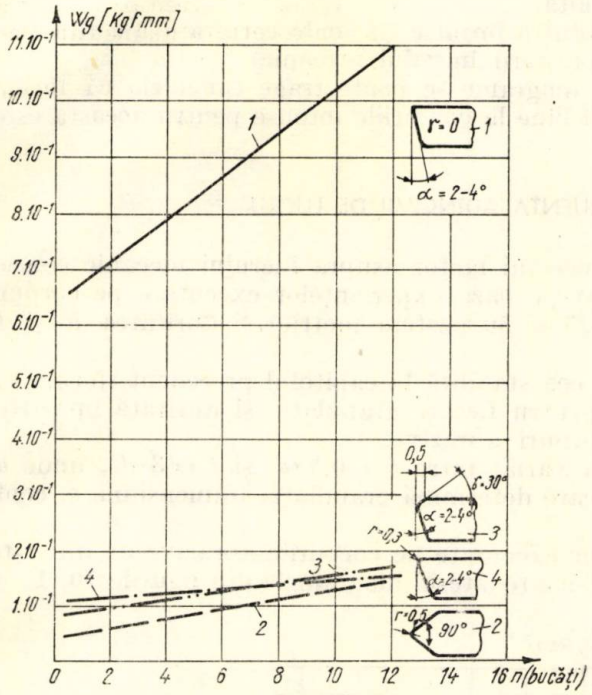


Fig. 8. — Dependența lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule de forma sculei cu care s-a încercat. Corpul abraziv 16 *P*.

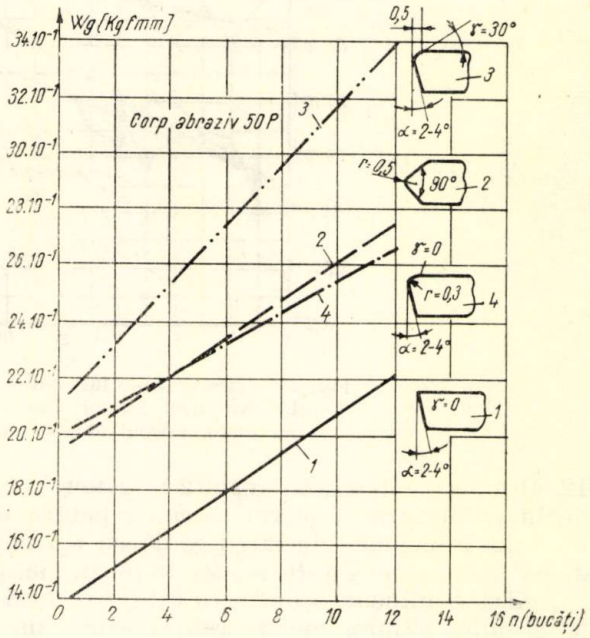


Fig. 9. — Dependența lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule de forma sculei cu care s-a încercat. Corpul abraziv 50 *P*.

lucrul mecanic consumat pentru desprinderea unei granule este diferit de la o formă de sculă la alta.

De asemenea fiecare dintre formele de scule cercetate au altă stabilitate a muchiei (panta creșterii lucrului mecanic).

Din studierea acestor diagrame se poate trage concluzia că forma sculei care răspunde cel mai bine la condițiile impuse pentru aceasta este forma 4.

2.3. INFLUENȚA ADÎNCIMII DE LUCRU

Cercetarea influenței acestui factor asupra lucrului mecanic consumat pe granulă s-a efectuat pe baza experiențelor executate pe corpuri abrazive de granulație 16,25 și 50 (sistem metric) și duritatea K și P (scara Norton).

Scula utilizată a fost cea stabilită la capitolul precedent (forma 4). Încercările s-au efectuat, pentru fiecare granulație și duritate în parte, pe loturi de 10 bucăți corpuri abrazive.

Adîncimea de lucru a variat între $t = 0{,}5 \cdot d_g$ și $t = 3 \cdot d_g$, unde d_g este dimensiunea granulei care determină granulația (dimensiune b, conf. STAS 1753-60).

Rezultatele încercărilor executate pe corpurile abrazive de duritate K și granulație 16,25 și 50 sînt redate în diagramele din figurile 10, 11 și

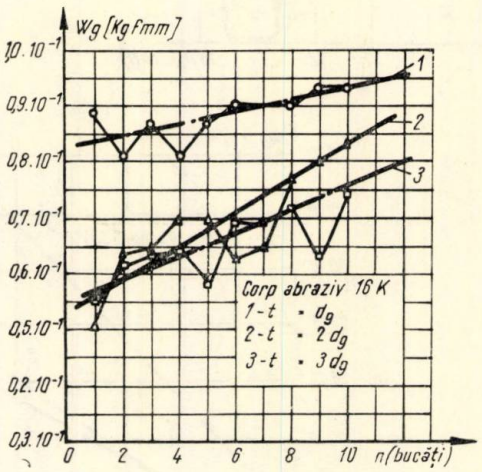


Fig. 10. — Dependența lucrului mecanic pentru desprinderea unei granule de adîncimea de lucru. Corpul abraziv 16 k.

12. Din aceste diagrame rezultă în general că o dată cu variația adîncimii de lucru variază și lucrul mecanic pentru desprinderea unei granule.

La adîncimea de lucru egală cu d_g, lucrul mecanic pentru desprinderea unei granule este relativ mare în comparație cu celelalte adîncimi.

Dacă adîncimea de lucru este mai mică decît $t = d_g$, lucrul mecanic pe granulă e mult mai mare decît în cazul precedent, ceea ce arată că în acest caz numărul granulelor sparte este relativ mare.

Crescînd adîncimea de lucru peste $t = d_g$, lucrul mecanic consumat la desprinderea unei granule scade simțitor. Acest lucru se explică prin

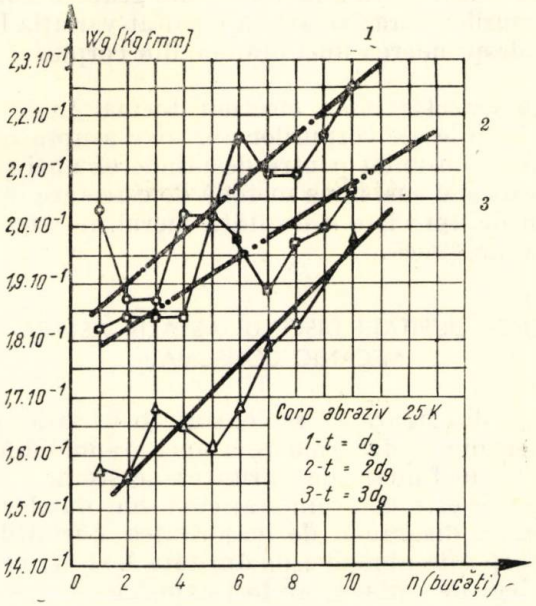


Fig. 11. — Dependența lucrului mecanic pentru desprinderea unei granule de adîncimea de lucru. Coprul abraziv 25 *k*.

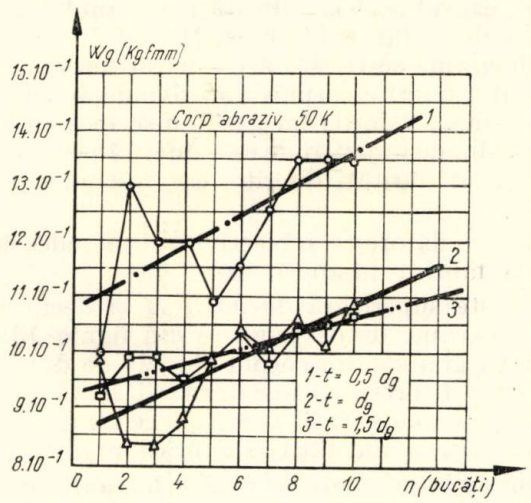


Fig. 12. — Dependența lucrului mecanic pentru desprinderea unei granule de adîncimea de lucru. Corpul abraziv 50 *k*.

aceea că, dacă adîncimea de lucru este mai mare decît d_g, scula desprinde împreună complexe de granule prinse în liant, pentru care se consumă un total de lucru mecanic mai mic decît le-ar desprinde pe fiecare în parte.

De aici se desprinde concluzia că adîncimea de lucru optimă este de $t = d_g$, deoarece în acest caz numărul granulelor sparte este minim. Influența calitativă și cantitativă a factorilor din grupa a doua asupra structurii interne a corpurilor abrazive are ca rezultat variația lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule din corpuri abrazive calitativ diferite.

O parte din cercetări s-au efectuat tocmai în scopul constatării acestor influențe interne ale corpurilor abrazive asupra mărimii și variației lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule, deoarece așa cum a fost arătat mai sus, noua metodă de cercetare propusă de autori adoptă ca criteriu de apreciere a durității lucrul mecanic consumat, stabilit prin metoda dinamică.

2.4. INFLUENȚA DURITĂȚII DISCULUI ABRAZIV ASUPRA LUCRULUI MECANIC CONSUMAT

Din diagrama din figura 13 se constată o variație direct proporțională a lucrului mecanic de desprindere a unei granule din corpurile abrazive (granulație 25) în funcție de duritatea acestora.

Legea de variație este determinată, conform datelor experimentale prezentate în această diagramă, de majoritatea durităților cercetate (J, K, N, O, P, Q). Corpurile abrazive de duritate L și M, care prezintă abateri de la această lege de variație, au fost expediate la uzina productoare de la care am primit confirmarea asupra acestor erori. Abaterile de la legea la variație a lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule în funcție de duritate se explică prin cîmpul de împrăștiere a lucrului mecanic în cadrul aceleiași durități și granulații, așa cum se prezintă în diagramele din figurile 14, 15 și 16.

Din aceste diagrame se constată că lucrul mecanic pentru desprinderea unei granule din diferite corpuri abrazive de aceeași duritate și granulație nu este constant, valorile lui găsindu-se într-un cîmp de împrăștiere. Mărimea cîmpului de împrăștiere este diferită pentru corpuri abrazive de aceeași granulație și durități diferite, ea crescînd o dată cu creșterea durității.

Acest fenomen se datorește subiectivității metodei de control a corpurilor abrazive la fabrica producătoare.

Duritatea N este superioară durității M și deci, conform legii de variație a lucrului mecanic de desprindere din figura 13, lucrul mecanic de desprindere a unei granule din corpul abraziv de duritate N ar trebui să fie mai mare decît cel corespunzător durității M. Cercetările arată însă, conform diagramelor de mai sus, că această lege nu este respectată, datorită aprecierii subiective a durității la fabrica producătoare.

Astfel, cîmpul de împrăștiere a lucrului mecanic corespunzător durității M este foarte mult distanțat de cel corespunzător durității L, ceea ce confirmă abaterile mari de la legea de variație a lucrului mecanic stabilită în figura 13. Datorită acestui fapt, cîmpurile de împrăștiere a lucrului mecanic corespunzătoare durității N și M se suprapun peste cîmpurile corespunzătoare altor durități. Această afirmație este confirmată de cîmpul de împrăștiere a durității N, care, deși respectă legea de variație

din figura 13, se situează între cîmpurile corespunzătoare durităților L și M, tocmai datorită faptului că ultimele două durități nu respectă legea

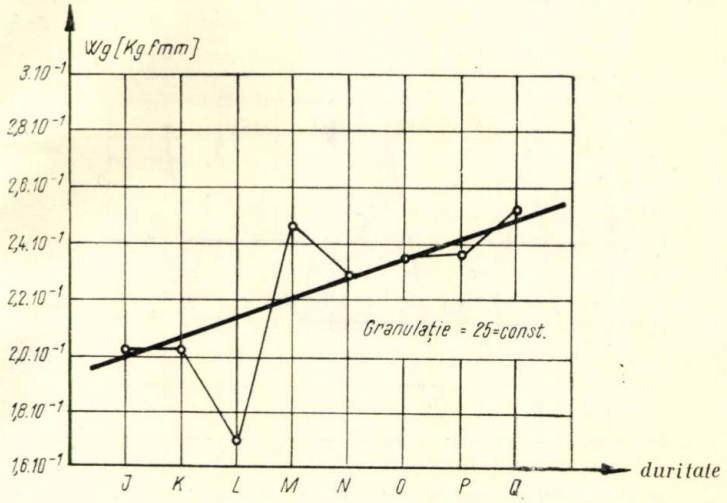


Fig. 13. — Variația lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule în funcție de duritate. Corpuri abrazive de granulație 25.

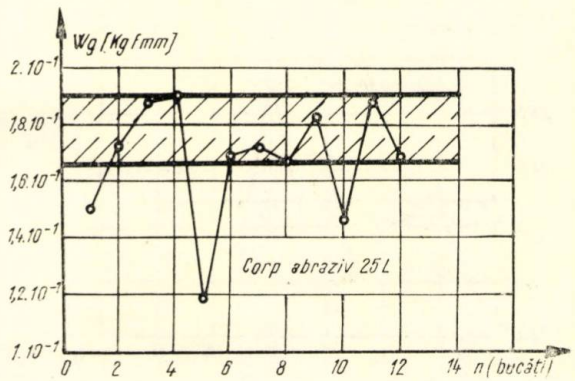


Fig. 14. — Cîmpul de variație a lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule în funcție de numărul corpurilor abrazive cercetate. Corpul abraziv 25 L.

de variație a lucrului mecanic stabilită în figura 13. De fapt, poziția cîmpului durității N ar trebui să fie superioară celei al durității M.

Acest fenomen se explică prin faptul că variația condițiilor de fabricație ale corpurilor abrazive cu aceeași duritate conduce la deplasarea întregului cîmp de variație a lucrului mecanic de desprindere. Datorită acestui fapt, domeniul de variație a lucrului mecanic al unuia dintre aceste corpuri abrazive se suprapune parțial sau se intercalează peste sau între domeniile celorlalte corpuri abrazive fabricate în condiții diferite, ceea ce provoacă fenomene identice și pentru durităților acestora.

Sesizarea diferențelor destul de mici a lucrului mecanic consumat demonstrează sensibilitatea aparatului utilizat și deci precizia metodei propuse, care din punct de vedere practic este suficient de mare.

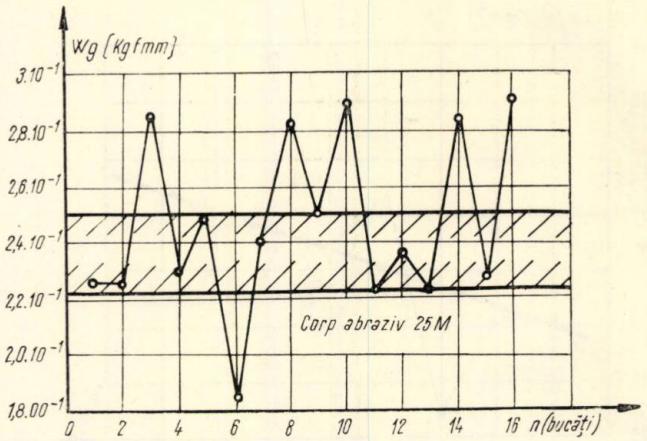


Fig. 15. — Cîmpul de variație a lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule în funcție de numărul corpurilor abrazive cercetate. Corpul abraziv 25 *M*.

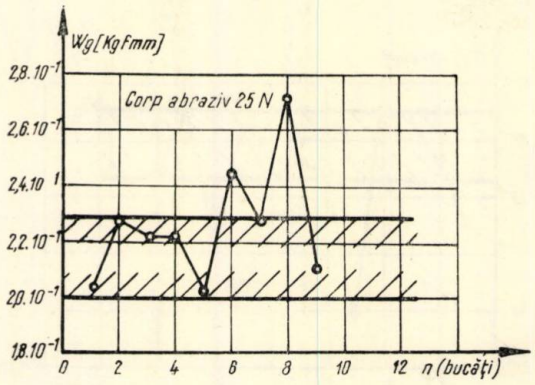


Fig. 16. — Cîmpul de variație a lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule în funcție de numărul corpurilor abrazive cercetate. Corpul abraziv 25 *N*.

2.5. INFLUENȚA GRANULAȚIEI ASUPRA LUCRULUI MECANIC DE DESPRINDERE

Factorii cunoscuți care influențează lucrul mecanic de desprindere a granulelor de mărimi diferite din corpuri abrazive de aceeași duritate sînt :

— mărimea granulei,
— participarea volumetrică a liantului,
— calitatea liantului,
— presiunea de lucru și alți parametrii de fabricație.

Dintre toți acești factori, cea mai mare influență asupra valorii lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule o exercită mărimea acesteia.

Din diagrama figurii 17 se constată că lucrul mecanic consumat pentru desprinderea unei granule din corpuri abrazive de aceeași duritate

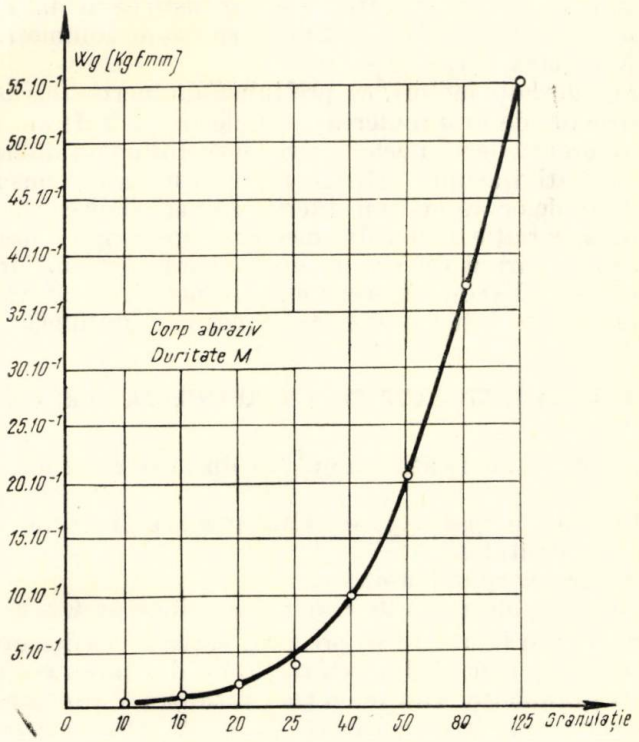


Fig. 17. — Variația lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule în funcție de granulație. Corpuri abrazive de duritate *M*.

crește o dată cu creșterea mărimii granulei. Legea de variație a lucrului mecanic de desprindere a unei granule din corpuri abrazive de aceeași duritate în funcție de granulație nu este o dreaptă, ci o curbă, deci lucrul mecanic de desprindere nu variază proporțional cu variația mărimii granulei.

Această constatare este de o deosebită importanță pentru cercetările ulterioare bazate pe această metodă deoarece ea arată că, „în cazul aceluiași grad de duritate pentru aprecierea căreia s-a adoptat drept criteriu lucrul mecanic consumat pentru desprinderea unei granule, acesta variază în funcție de granulație, după o anumită lege".

Aceasta înseamnă că o dată cu creșterea gradului de duritate curba din figura 17 se va deplasa după direcția și sensul pozitiv al axei ordonatelor cu un salt, iar panta sa va crește corespunzător creșterii gradului de duritate și de granulație. Saltul pentru o granulație constantă va respecta

legea de variație a lucrului mecanic de desprindere, stabilită în diagrama din figura 13.

Influența participării volumetrice și a calității liantului este mai puțin cunoscută datorită faptului că atît literatura de specialitate, cît și fabrica producătoare de corpuri abrazive pun la dispoziție o serie de date insuficient de clare atît din punct de vedere calitativ, cît și cantitativ. Totuși, din datele fabricii producătoare se cunoaște că o dată cu creșterea mărimii granulelor scade coeficientul de participare volumetrică a liantului și totodată variază și calitatea lui.

Influența celorlalți factori, ca presiunea de lucru etc., asupra variației lucrului mecanic de desprinderea granulelor de mărimi diferite este și mai puțin cunoscută decît a celor precedenți. Influența diferiților factori calitativi și cantitativi asupra mărimii lucrului mecanic consumat pentru desprinderea granulelor de mărimi diferite se materializează prin variația acestuia. Această variație a lucrului mecanic reprezintă consecința apariției unor forțe de mărimi diferite la desprinderea granulelor de mărimi diferite, ca rezultat al creșterii secțiunii punților de legătură și variației rezistenței acestora o dată cu creșterea mărimii granulei.

3. ANALIZA FACTORILOR CARE INFLUENȚEAZĂ DURITATEA

Factorii care influențează gradul de duritate a corpurilor abrazive sînt :

— coeficientul de participare volumetrică a liantului,
— calitatea liantului,
— porozitatea corpului abraziv,
— presiunea de lucru și alte condiții specifice de fabricație.

În diagrama din figura 18 se prezintă variația coeficientului de participare volumetrică a liantului în funcție de duritatea corpurilor abrazive cu aceeași granulație. Din diagramă rezultă că duritatea corpurilor abrazive crește cu creșterea cantității de liant. Abaterile constatate la variația lucrului mecanic de desprindere în funcție de duritate pentru durităților L și M (vezi fig. 13) constituie consecința abaterilor coeficientului de participare volumetrică a liantului de la legea de variație a acestuia în funcție de duritate (vezi fig. 18).

Confruntînd abaterile de la legile din figura 13 și 18 și avînd în vedere că lucrul mecanic pentru desprinderea unei granule crește proporțional cu creșterea gradului de duritate pentru aceeași granulație, rezultă concluzia foarte importantă pentru fabrica producătoare, și anume : *controlul intermediar asupra durității corpurilor abrazive se poate face încă din timpul procesului de fabricație a acestora prin controlul dozării corecte a liantului care să respecte legea de variație din figura 18, menținînd constanți toți ceilalți factori care au influență asupra durității*, precum și concluzia teoretică : *gradele de duritate ale corpurilor abrazive variază după aceeași lege calitativă atît în funcție de lucrul mecanic de desprindere a unei granule, cît și de coeficientul de participare volumetrică a liantului pentru aceeași granulație*, iar ca o consecință a acestuia : *lucrul mecanice de desprindere a unei granule din corpurile abrazive de aceeași granulație variază liniar în funcție de coeficientul de participare a liantului.*

În diagrama din figura 19 se prezintă dependența durității corpurilor abrazive cu granulația 25 de porozitatea acestora. Din diagramă rezultă că duritatea diferitelor corpuri abrazive variază liniar în funcție de

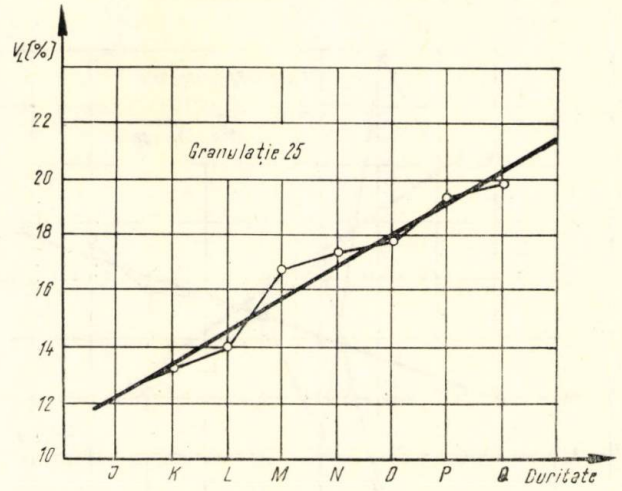


Fig. 18. — Variația coeficientului de participare volumetrică a liantului în funcție de duritate. Corpuri abrazive de granulație 25.

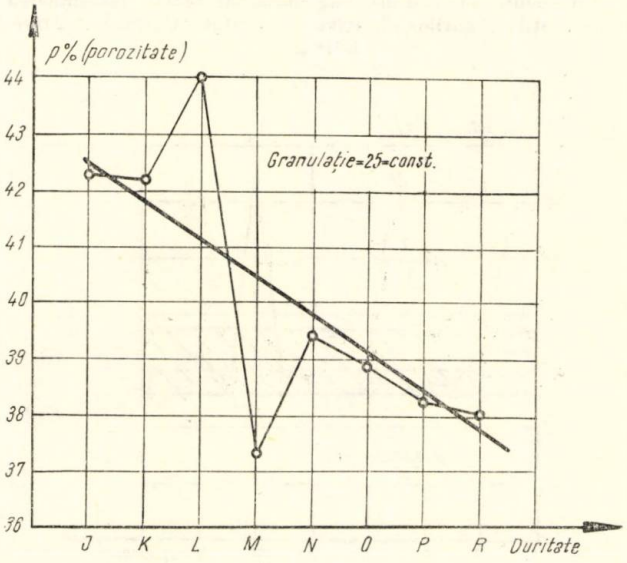


Fig. 19. — Variația porozității corpurilor abrazive în funcție de duritate. Corpuri abrazive de granulație 25.

variația porozității, astfel duritatea crește o dată cu scăderea porozității. Abaterile de la legea de variație constatate în figura 13 pentru durităților *L* și *M* se repetă și în figura 19 pentru aceleași durități.

Avînd în vedere că porozitățile corpurilor abrazive cercetate au fost determinate cu ajutorul unei metode fizice suficient de precise, așa

cum s-a arătat la începutul lucrării, precum și concordanța abaterilor lucrului mecanic de desprindere a unei granule și a porozității pentru durită-

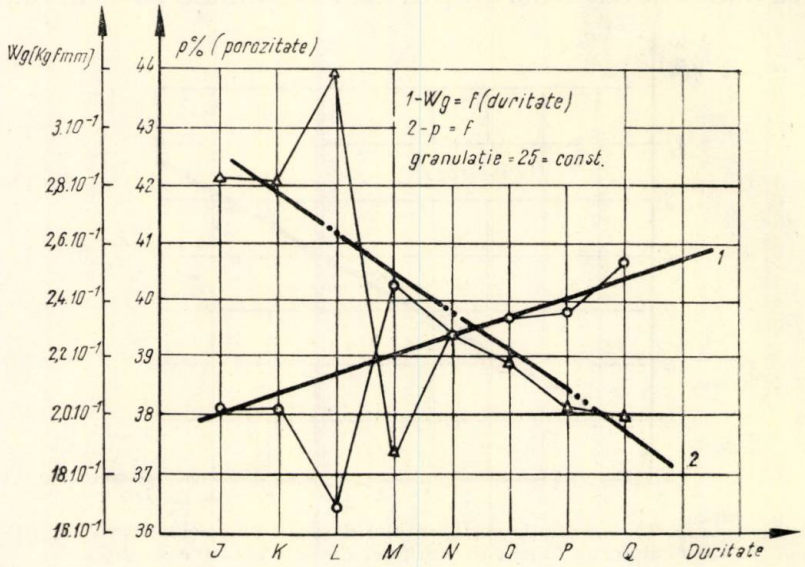


Fig. 20. — Dependența lucrului mecanic consumat pentru desprinderea unei granule și a porozității corpurilor abrazive de duritate. Corpuri abrazive de granulație 25.

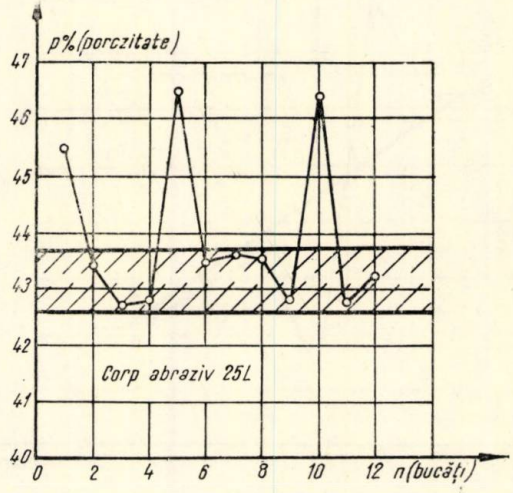


Fig. 21. — Cîmpul de variație a porozității în funcție de numărul de corpuri abrazive cercetate. Corpuri abrazive 25 *L*.

țile *L* și *M* de la legile de variație a acestora (vezi fig. 20), rezultă că precizia de măsurare a lucrului mecanic de desprindere cu aparatul prezentat este suficient de mare.

Pentru a constata că abaterile de la legea de variație a lucrului mecanic de desprindere a unei granule, prezentată în figura 13, precum și existența și poziția cîmpurilor de împrăștiere a lucrului mecanic de desprindere

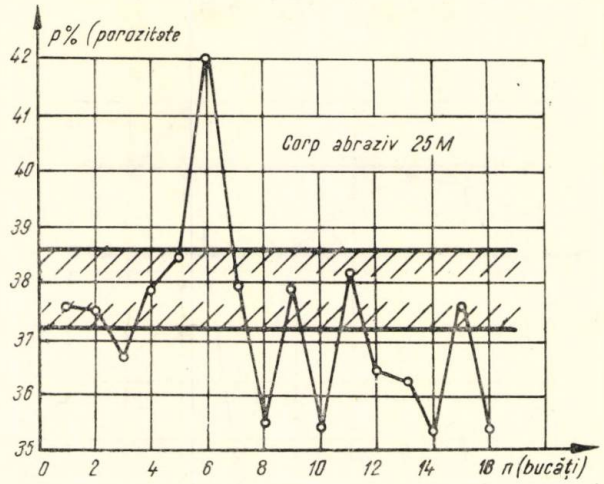


Fig. 22. — Cîmpul de variație a porozității în funcție de numărul corpurilor abrazive cercetate. Corpuri abrazive 25 *M*.

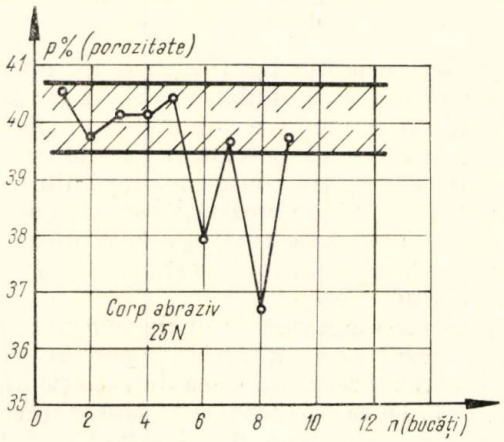


Fig. 23. — Cîmpul de variație a porozității în funcție de numărul corpurilor abrazive cercetate. Corpuri abrazive 25 *N*.

pentru corpurile abrazive 25 *L*, 25 *M* și 25 *N* din figurile 14, 15 și 16 nu sînt provocate de corpuri abrazive izolate, ci că aceste abateri constituie efectul subiectivității metodei de control la fabrica producătoare asupra întregului lot de fabricație, s-a determinat porozitatea unui număr mare de corpuri abrazive cu granulația 25 și durități *L*, *M*, *N*.

Rezultatele acestor determinări sînt prezentate în diagramele din figurile 21, 22 și 23.

Din studiul acestor diagrame rezultă că porozitatea, ca și lucrul mecanic de desprindere pentru corpuri abrazive cu aceeași granulație și grad de duritate, variază într-un cîmp de împrăștiere a valorilor acesteia a cărui mărime depinde de duritatea corpurilor abrazive.

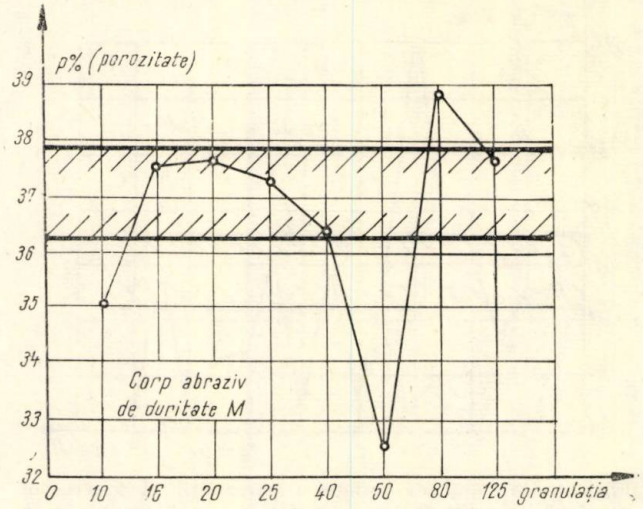


Fig. 24. — Cîmpul de variație a porozității în funcție de granulație. Corpuri abrazive de duritate *M*.

Confruntînd diagramele din figurile 19 și 18, rezultă că porozitatea unui corp abraziv cu aceeași granulație variază invers proporțional cu variația coeficientului de participare volumetrică a liantului. Aceasta înseamnă, după cum e și firesc, că porozitatea scade cu creșterea cantității de liant, concluzie care reprezintă consecința legii din figura 20. Deci existența cîmpurilor de împrăștiere a porozității este provocată, pe de o parte, de variația cantității de liant care participă la fabricarea corpurilor abrazive respective, iar pe de altă parte de variația altor parametri de fabricație ca presiunea de lucru etc.

Comparînd între ele diagramele din figurile 21, 22 și 23, rezultă că poziția reciprocă a cîmpurilor de împrăștiere a porozității pentru granulația 25 și durităţile *L*, *M* și *N* nu respectă legea de variație din figura 19 tocmai datorită abaterilor de la legea de variație a acestor durități din figura 18.

Abaterile de la legea de variație din figurile 13, 14, 15 și 16 reprezintă o consecință a abaterilor de la legile din figurile 18, 19, 21, 22 și 23.

Cîmpul de variație a porozității pentru duritatea *N* se situează între cele corespunzătoare durităților *L* și *M* tocmai datorită abaterilor sus-menționate ale ultimelor două durități.

Verificînd precizia de măsurare a lucrului mecanic de desprindere prin intermediul porozității corpurilor abrazive, rezultă că metoda propusă de autori pentru determinarea durității corpurilor abrazive este suficient de precisă.

Așa cum a fost prezentată în lucrarea precedentă *Cercetări asupra corpurilor abrazive* [9], porozitatea nu depinde de granulație. Acest fapt este ilustrat prin diagrama din figura 24, în care se prezintă cîmpul de îm-

prăștiere a porozității în funcție de granulație pentru duritatea *M*. După cum rezultă din diagramă, porozitatea în funcție de granulație pentru aceeași duritate variază într-un cîmp de împrăștiere datorită cauzelor expuse mai sus.

Trebuie remarcat că, conform abaterilor de la legea de variație a porozității din figura 19, acest cîmp, corespunzător corpurilor abrazive de duritate *M*, se situează mai jos decît poziția lui normală.

Aceasta constituie efectul cauzelor arătate mai sus.

Din diagramă (fig. 20) rezultă concluzia importantă pentru cercetările ulterioare, și anume : *criteriul de apreciere al durității corpurilor abrazive poate fi lucrul mecanic consumat pentru desprinderea unei granule sau porozitatea acestora.*

Importanța porozității ca criteriu de apreciere a durității este cu atît mai mare cu cît aceasta nu depinde de granulație.

4. CONCLUZII

În urma cercetărilor și studiilor efectuate asupra corpurilor abrazive prezentate în lucrarea [9] și în prezenta lucrare, rezultă următoarele :

1. Metoda propusă pentru determinarea durității corpurilor abrazive, prin care duritatea se exprimă prin lucrul mecanic necesar pentru desprinderea granulelor abrazive din corpul abraziv cu ajutorul unui pendul, dă rezultate sigure în vederea determinării durității dinamice a corpurilor abrazive.

2. Scula cu care este echipat pendulul cu ajutorul căreia se face desprinderea granulelor trebuie să fie dintr-un metal rezistent la uzură. Încercările făcute cu scule din plăcuțe din aliaj dur arată că plăcuțele din acest aliaj sînt suficient de rezistente la uzură. Rămîne încă de cercetat care este acel aliaj dur care poate satisface cerințele practice.

Forma sculei cea mai adecvată pentru desprinderea granulelor din corpuri abrazive care prezintă o stabilitate la uzură în timp relativ mare este scula tip IV, adică aceea la care muchia de acțiune este puțin rotunjită. Oricare altă formă a muchiei de lucru a sculei prezintă o uzură rapidă în timp, iar la încercarea corpurilor abrazive cu granulație mare muchiile acestora primește forma muchiei tip IV.

3. Adîncimea de lucru optimă este egală cu mărimea granulei corpului abraziv de încercat.

4. Cu cît lățimea sculei este mai mare, cu atît lucrul mecanic de desprindere a unei granule este mai puțin influențat de proprietățile mecanice ale granulelor și de frecări.

5. Lucrul mecanic de desprindere a unei granule din corpuri abrazive cu aceeași granulație crește o dată cu creșterea gradului de duritate, legea de variație fiind liniară. Pentru granulații crescătoare, dreptele care reflectă variația lucrului mecanic de desprindere a unei granule în funcție de duritate se deplasează în sensul creșterii lucrului mecanic o dată cu aceasta, crescînd și panta lor. Lucrul mecanic de desprindere a unei granule din corpuri abrazive de aceeași granulație și grad de duritate, aparent, nu este constant, acesta variind într-un cîmp de împrăștiere a cărui mărime crește cu creșterea gradului de duritate.

6. Lucrul mecanic de desprindere a unei granule din corpuri abrazive de aceeași duritate crește cu creșterea mărimii granulei, legea de variație fiind o parabolă.

Pentru gradele de duritate crescătoare, curbele care reflectă variația lucrului mecanic de desprindere a unei granule în funcție de mărimea granulei se deplasează în sensul creșterii lucrului mecanic, o dată cu aceasta crescînd și panta lor.

7. Variația lucrului mecanic pentru desprinderea unei granule din corpuri abrazive cu aceeași granulație în funcție de duritate reprezintă consecința variației participării volumetrice a liantului în structura internă a complexului abraziv în funcție de duritate, care arată că o dată cu creșterea coeficientului de participare volumetrică a liantului crește și duritatea corpului abraziv.

Cîmpurile de împrăștiere a lucrului mecanic de desprindere a unei granule din corpuri abrazive cu aceeași duritate și granulație reprezintă consecința, pe de o parte, a dozării incorecte a liantului la fabricarea diferitelor loturi de corpuri abrazive și a amestecului incorect (neomogen) al diferiților constituenți ai complexului abraziv în procesul de fabricație, care conduc la o structură internă neuniformă chiar în interiorul aceluiași corp abraziv, iar pe de altă parte consecința metodei neștiințifice și subiective de determinare a durității corpurilor abrazive ce se aplică azi în industrie.

8. Porozitatea corpurilor abrazive scade cu creșterea gradului de duritate după o lege liniară. Variația invers proporțională a durității corpurilor abrazive în funcție de porozitatea acestora constituie efectul legii de variație a participării volumetrice a liantului în funcție de duritate. Porozitatea corpurilor abrazive nu variază cu creșterea granulației, ea situîndu-se într-un cîmp de împrăștiere datorită abaterilor de la legea de variație a coeficientului de participare volumetrică în funcție de duritate.

9. Ca criteriu de apreciere a durității corpurilor abrazive se poate adopta lucrul mecanic necesar pentru desprinderea unei granule, determinat prin metoda dinamică cu ajutorul aparatului cu pendul.

În vederea stabilirii metodei practice de determinare a durității, aplicabilă în laborator și în atelierele de producție, cercetările continuă.

Primită la redacție la 15 aprilie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. H. Brückner, *Betrachtungen zum Verschleissvorgang beim Schleifen*, Untersuchungen an Schleifscheiben, 18. Forschungsbericht, des Laboratoriums für Werkzeugmaschinen und Betriebslehre der Rhein.-Westf., Technischen Hochschule Aachen, 1961.
2. L. V. Colwell, R. O. Lane, K. N. Soderlung, *On Determining the Hardness of Grinding Wheeale*, I, An ASME Publication, 1961.
3. L. V. Colwell, *On Determining the Hardness of Grinding Wheele*, II, An ASME Publication, 1962.
4. Pahlitsch, *Vergleichende Härteprüfung von Schleifkörpern*, Schleif—Polier—und Oberflächentechnik, 1943.
5. J. Peklenik, *Über einige Gesetzmässigkeiten des Aufbaues von Schleifkörpern als Zerspanungswerkzeuge*, Untersuchungen an Schleifscheiben, 18. Forschungsbericht des Laboratoriums für Werkzeugmaschinen und Betriebslehre der Rhein-Westf., Technischen Hochschule Aachen, 1960.

6. J. PEKLENIK, *Beitrag zur Zähigkeitsprüfung von Schleifkörpern*, Untersuchungen an Schleifscheiben, 18. Forschungsbericht des Laboratoriums für Werkszeugmaschinen und Betriebslehre der Rhein-Westf., Technische Hochschule Aachen, 1960.
7. — *Neue statische und dynamische Prüfmethoden der physikalische-mechanischen Eigenschaften von Schleifkörp*, Untersuchungen an Schleifscheiben, 19. Forschungsbericht des Laboratorium für Werkzeugmaschinen und Betriebslehre der Rhein-Westf., Technischen Hochschule Aachen, 1960.
8. — *Untersuchung der Härte von Schleifkörpern*, Untersuchungen an Schleifscheiben, 18. Forschungsbericht des Laboratoriums für Werkzeugmaschinen und Betriebslehre der Rhein-Westf., Technischen Hochschule Aachen, 1960.
9. S. CRIȘAN, GH. SECARĂ, GH. BONCOI, *Cercetări asupra durității corpurilor abrazive*, Comunicare la sesiunea științifică a Institutului politehnic Brașov, februarie 1964. (Publicată în Lucrări științifice, VII, Fac. de mecanică, I.P.Bv.).

O GENERALIZARE A FORMULELOR DE ANALIZĂ ARMONICĂ A MĂRIMILOR CINEMATICE ALE BIELEI UNUI MECANISM BIELĂ-MANIVELĂ [1)]

de GEORGE BĂRĂNESCU,
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
și RODICA MANIȚIU

531.1

Pentru rezolvarea unor probleme de dinamică ale motoarelor cu ardere internă este necesar să se dispună de seriile Fourier ale mărimilor cinematice ale mecanismului bielă-manivelă.

Din literatura de specialitate sînt cunoscute aceste serii pentru unele mecanisme bielă-manivelă particulare, cu deosebire pentru mecanismul bielă-manivelă normal. În cele ce urmează se stabilesc seriile Fourier ale vitezei și accelerației unghiulare ale bielei pentru cel mai general mecanism bielă-manivelă. Formulele obținute sînt particularizate pentru tipurile uzuale de mecanisme bielă-manivelă.

1. ANALIZA ARMONICĂ A MĂRIMILOR CINEMATICE ALE BIELEI UNUI MECANISM BIELĂ-MANIVELĂ GENERAL

Cel mai general mecanism bielă-manivelă este mecanismul cu biele articulate dezaxat la care axele cilindrilor cu biele secundare intersectează axa cilindrului cu bielă principală (fig. 1). Pe fiecare cot al arborelui cotit al unui motor echipat cu un astfel de mecanism lucrează $q+1$ biele, dintre care una este principală. Pentru mecanismul cu bielă principală și pen-

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. — Mécanique Appliquée", **11**, *6* (1966) (în limba germană).

tru unul dintre cele q mecanisme cu bielă secundară se folosesc următoarele notații:

R — lungimea manivelei;
L — lungimea bielei principale;
r — lungimea brațului bielei secundare;
l — lungimea bielei secundare;
H — dezaxarea cilindrului cu bielă principală;
H_l — dezaxarea cilindrului cu bielă secundară;
$h = \frac{H}{R}$ — coeficientul de dezaxare al cilindrului cu bielă principală;
$h_l = \frac{H_l}{R}$ — coeficientul de dezaxare al cilindrului cu bielă secundară;
α, α_l — unghiuri descrise de manivelă măsurate față de poziția manivelei paralelă cu axa cilindrului respectiv;
β — înclinarea bielei principale față de axa BO_m;
β_l — înclinarea bielei secundare față de axa B_lO_m;
γ — unghiul dintre axa cilindrului cu bielă principală și axa cilindrului cu bielă secundară, măsurat în sensul de rotație al manivelei;
δ — unghiul de calaj al brațului bielei secundare față de biela principală, măsurat în sensul de rotație al manivelei;
ω — viteza unghiulară a manivelei.

Deplasarea unghiulară a bielei secundare est precizată de unghiul β_l. Proiectînd conturul poligonal OAA_lB_l pe normala la axa O_mB_l, se obține

$$l \sin \beta_l + r \sin (\beta - \psi) \pm H_l = R \sin \alpha_l$$

sau

$$\sin \beta_l = \frac{R}{l} \sin \alpha_l - \frac{r}{l} \sin (\beta - \psi) \mp \frac{R}{l} h_l. \qquad (1)$$

În formula (1), termenul $\frac{R}{l} h_l$ se consideră cu primul semn cînd axa O_mB_l este plasată la dreapta punctului O (fig. 1); acest fel de dezaxare se numește dezaxare în sensul de rotație. Pentru dezaxarea în sens invers sensului de rotație (axa O_mB_l se găsește la stînga punctului O), termenul $\frac{R}{l} h_l$ se consideră cu al doilea semn.

Prin proiectarea conturului OAB pe o direcție normală la O_mB se obține

$$L \sin \beta \pm H = R \sin \alpha$$

sau

$$\sin \beta = \lambda (\sin \alpha \mp h) = \lambda [\sin (\alpha_l + \gamma) \mp h], \qquad (2)$$

unde

$$\alpha_l + \gamma = \alpha \quad \text{și} \quad \lambda = \frac{R}{L}.$$

Din formulele (1) și (2) rezultă prin transformări

$$\sin\beta_l = \frac{R}{l}\left(1 - \frac{r}{L}\cos\psi\cos\gamma\right)\sin\alpha_l - \frac{r}{L}\frac{R}{l}\cos\psi\sin\gamma\cos\alpha_l - \\ - \frac{r}{l}\left(\pm\frac{h_l R}{r} - \sin\psi\cos\beta \mp \lambda h\cos\psi\right). \tag{3}$$

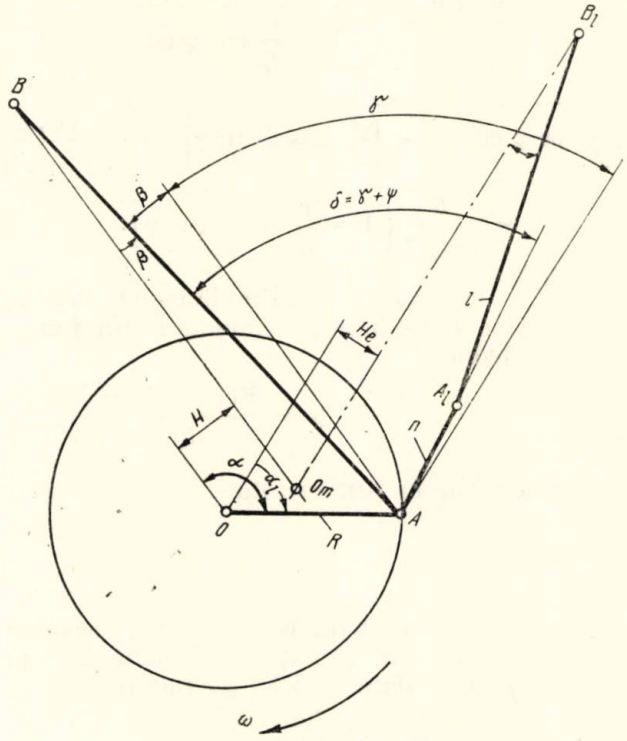


Fig. 1. — Schema mecanismului bielă-manivelă general.

Dacă se notează

$$\lambda_l\cos\zeta = \frac{R}{l}\left(1 - \frac{r}{L}\cos\psi\cos\gamma\right), \tag{4}$$

$$\lambda_l\sin\zeta = \frac{r}{L}\cdot\frac{R}{l}\cos\psi\sin\gamma, \tag{5}$$

$$f_l = \frac{1}{\lambda_l}\frac{r}{l}\left(\pm\frac{h_l R}{r} - \sin\psi\cos\beta \mp \lambda h\cos\psi\right), \tag{6}$$

formula (3) devine

$$\sin\beta_l = \lambda_l[\sin(\alpha_l - \zeta) - f_l] \tag{7}$$

sau

$$\beta_l = \text{arc sin}\,\lambda_l[\sin(\alpha_l - \zeta) - f_l].$$

Din compararea formulelor (2) și (7) rezultă că mecanismul cu bielă articulată dezaxat este echivalent din punct de vedere cinematic cu un mecanism bielă-manivelă normal dezaxat, la care coeficientul de dezaxare este variabil; mărimea f_l se numește coeficient de dezaxare echivalent.

Pentru mărimile ζ și λ_l se deduc din formulele (4) și (5) următoarele expresii:

$$\zeta = \operatorname{arc\ tg} \frac{r}{l} \frac{\cos \psi \sin \gamma}{1 - \frac{r}{L} \cos \psi \cos \gamma}, \tag{8}$$

$$\lambda_l = \frac{R}{l} \sqrt{\left(1 - \frac{r}{L} \cos \psi \cos \gamma\right)^2 + \left(\frac{r}{L} \cos \psi \sin \gamma\right)^2} = \frac{r}{l} \lambda \frac{\cos \psi \sin \gamma}{\sin \zeta} = \tag{9}$$

$$= \frac{R}{l \cos \zeta} \left(1 - \frac{r}{L} \cos \psi \cos \gamma\right).$$

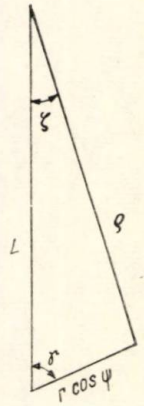


Fig. 2. — Schemă pentru determinarea mărimii expresiei λ_l.

O expresie mai simplă pentru mărimea λ_l se poate obține considerînd triunghiul din figura 2, din care se deduce

$$\rho = \frac{r \cos \psi \sin \gamma}{\sin \zeta};$$

înlocuind în (9), rezultă

$$\lambda_l = \lambda \frac{\rho}{l}.$$

Viteza unghiulară a bielei secundare se obține prin derivarea în raport cu timpul a expresiei deplasării unghiulare a bielei secundare:

$$\omega_l = \frac{\mathrm{d}\beta_l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\beta_l}{\mathrm{d}\alpha_l} \frac{\mathrm{d}\alpha_l}{\mathrm{d}t} = \omega \frac{\mathrm{d}\beta_l}{\mathrm{d}\alpha_l}. \tag{10}$$

Prin derivarea formulei (1) în raport cu variabila α_l rezultă

$$\cos \beta_l \frac{\mathrm{d}\beta_l}{\mathrm{d}\alpha_l} = \frac{R}{l} \cos \alpha_l - \frac{r}{l} \cos (\beta - \psi) \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha_l}. \tag{11}$$

Viteza unghiulară ω_L a bielei principale se deduce din formula (2):

$$\omega_L = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \omega \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = \omega \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha_l} = \omega \lambda \frac{\cos (\alpha_l + \gamma)}{\cos \beta}. \tag{12}$$

Din formulele (10), (11), (12) rezultă

$$\omega_l = \frac{\omega}{\cos \beta_l} \left[\frac{R}{l} \cos \alpha_l - \frac{\omega_L}{\omega} \frac{r}{l} \cos (\beta - \psi)\right]. \tag{13}$$

Prin eliminarea raportului $\frac{\omega_L}{\omega}$ între formulele (12) și (13), se obține după transformări

$$\omega_l = \omega\left[\left(\frac{R}{l} - \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\cos\gamma\right)\frac{\cos\alpha_l}{\cos\beta_l} + \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\sin\gamma\frac{\sin\alpha_l}{\cos\beta_l} - \right.$$

$$- \frac{\lambda^2}{2}\frac{r}{l}\sin\psi\sin 2(\alpha_l + \gamma)\frac{1}{\cos\beta\cos\beta_l} \pm \tag{14}$$

$$\left. \pm \lambda^2\frac{r}{l}h\sin\psi\cos(\alpha_l + \gamma)\frac{1}{\cos\beta\cos\beta_l}\right].$$

Din formulele (2) și (7) se deduce

$$\frac{1}{\cos\beta} = \left\{1 - \lambda^2[\sin(\alpha_l + \gamma) \mp h]^2\right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

$$\frac{1}{\cos\beta_l} = \left\{1 - \lambda_l^2[\sin(\alpha_l - \zeta) - f_l]^2\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Aplicînd formula binomului, expresia (15) devine

$$\frac{1}{\cos\beta} = \left\{1 - \lambda^2[\sin(\alpha_l + \gamma) \mp h]^2\right\}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \lambda\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}\lambda^{2j-1}[\sin(\alpha_l + \gamma) \mp h]^{2j}.$$

Dezvoltînd și expresia din paranteză, se obține

$$\frac{1}{\cos\beta} = \lambda\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}\lambda^{2j-1}\sum_{q=0}^{q=2j}(\mp 1)^q\binom{2j}{q}h^q\sin^{2j-q}(\alpha_l + \gamma).$$

Se pune în evidență din suma de mai sus termenul pentru $q = 2j$:

$$\frac{1}{\cos\beta} = \lambda\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}\lambda^{2j-1}h^{2j} +$$

$$+ \lambda\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}\lambda^{2j-1}\sum_{q=0}^{q=2j-1}(\mp 1)^q\binom{2j}{q}h^q\sin^{2j-q}(\alpha_l + \gamma). \tag{17}$$

Ultima dintre sume conține toți termenii în $\sin(\alpha_l + \gamma)$ la puteri pare sau impare. Pentru o valoare oarecare a lui j se obține

$$\sum_{q=0}^{q=2j-1} (\mp 1)^q \binom{2j}{q} h^q \sin^{2j-q}(\alpha_l + \gamma) = (\mp 1)^1 \binom{2j}{1} h \sin^{2j-1}(\alpha_l + \gamma) +$$

$$+ (\mp 1)^3 \binom{2j}{3} h^3 \sin^{2j-3}(\alpha_l + \gamma) + \ldots + (\mp 1)^{2j-1} \binom{2j}{2j-1} h^{2j-1} \sin(\alpha_l + \gamma) +$$

$$+ (\mp 1)^0 \binom{2j}{0} h^0 \sin^{2j}(\alpha_l + \gamma) + (\mp 1)^2 \binom{2j}{2} h^2 \sin^{2j-2}(\alpha_l + \gamma) +$$

$$+ \ldots + (\mp 1)^{2j-2} \binom{2j}{2j-2} h^{2j-2} \sin^2(\alpha_l + \gamma)$$

sau

$$\sum_{q=0}^{q=2j-1} (\mp 1)^q \binom{2j}{q} h^q \sin^{2j-q}(\alpha_l + \gamma) = \sum_{n=1}^{n=j} (\mp 1)^{2n-1} \binom{2j}{2n-1} h^{2n-1} \sin^{2j-2n+1}(\alpha_l + \gamma) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{n=j-1} (\mp 1)^{2n} \binom{2j}{2n} h^{2n} \sin^{2j-2n}(\alpha_l + \gamma).$$

Notînd în prima sumă $j - n = k - 1$, iar în a doua sumă $j - n = k$, rezultă

$$\sum_{q=0}^{q=2j-1} (\mp 1)^q \binom{2j}{q} h^q \sin^{2j-q}(\alpha_l + \gamma) = \sum_{k=j}^{k=1} \mp \binom{2j}{2j-2k+1} h^{2j-2k+1} \sin^{2k-1}(\alpha_l + \gamma) +$$

$$+ \sum_{k=j}^{k=1} \binom{2j}{2j-2k} h^{2j-2k} \sin^{2k}(\alpha_l + \gamma).$$

Înlocuind în (17) expresia dedusă mai sus, se obține

$$\frac{1}{\cos\beta} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} h^{2j} +$$

$$+ \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \sum_{k=j}^{k=1} \mp \binom{2j}{2j-2k+1} h^{2j-2k+1} \sin^{2k-1}(\alpha_l + \gamma) + \quad (18)$$

$$+ \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \sum_{k=j}^{k=1} \binom{2j}{2j-2k} h^{2j-2k} \sin^{2k}(\alpha_l + \gamma).$$

În formula (18), al doilea și al treilea termen reprezintă puterile impare și, respectiv, pare ale funcției $\sin(\alpha_l + \gamma)$. Dacă, de exemplu, în termenul al doilea se dau valori lui j în intervalul $1 < j < \infty$ și se reține

numai puterile $2k-1$ ale sinusului (unde k are o valoare determinată), rezultă o expresie de forma

$$\lambda \sin^{2k-1}(\alpha_l+\gamma)\sum_{j=k}^{\infty}\mp(-1)^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{2j}{2j-2k+1}\lambda^{2j-1}h^{2j-2k+1}.$$

Pentru a obține toate puterile impare se aplică relația precedentă pentru toate valorile lui k, adică

$$\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\sin^{2k-1}(\alpha_l+\gamma)\sum_{j=k}^{\infty}\mp(-1)^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{2j}{2j-2k+1}\lambda^{2j-1}h^{2j-2k+1}.$$

Această expresie este echivalentă cu al doilea termen din formula (18).

Transformînd în mod analog al treilea termen, formula (18) devine

$$\frac{1}{\cos\beta}=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}\lambda^{2j-1}h^{2j}+$$

$$+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\sin^{2k-1}(\alpha_l+\gamma)\sum_{j=k}^{\infty}\mp(-1)^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{2j}{2j-2k+1}\lambda^{2j-1}h^{2j-2k+1}+$$

$$+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\sin^{2k}(\alpha_l+\gamma)\sum_{j=k}^{\infty}(-1)^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{2j}{2j-2k}\lambda^{2j-1}h^{2j-2k}.$$

Folosind formulele

$$\sin^{2k-1}(\alpha_l+\gamma)=\frac{1}{2^{2k-2}}\sum_{p=1}^{p=k}(-1)^{p-1}\binom{2k-1}{k-p}\sin(2p-1)(\alpha_l+\gamma),$$

$$\sin^{2k}(\alpha_l+\gamma)=\frac{1}{2^{2k-1}}\sum_{p=1}^{p=k}(-1)^p\binom{2k}{k-p}\cos 2p(\alpha_l+\gamma)+\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k},$$

rezultă

$$\frac{1}{\cos\beta}=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}\lambda^{2j-1}h^{2j}+$$

$$+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\sum_{j=k}^{\infty}(-1)^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{2j}{2j-2k}\lambda^{2j-1}h^{2j-2k}+ \qquad (19)$$

$$+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k-2}}\sum_{p=1}^{p=k}(-1)^{p-1}\sin(2p-1)(\alpha_l+\gamma)\times$$

$$\times \sum_{j=k}^{\infty} \mp (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k+1} \lambda^{2j-1} h^{2j-2k+1} +$$

$$+ \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^p \binom{2k}{k-p} \cos 2p(\alpha_l + \gamma) \times \tag{19}$$

$$\times \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k} \lambda^{2j-1} h^{2j-2k} = B + C + D.$$

În expresia

$$B = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} h^{2j} +$$

$$+ \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k} \lambda^{2j-1} h^{2j-2k},$$

se pune în evidență limita $j = 0$ pentru primul termen și limita $j = k$ pentru al doilea termen; expresia devine

$$B = 1 + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \binom{2k}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} h^{2j} +$$

$$+ \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{j=k+1}^{\infty} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k} \lambda^{2j-1} h^{2j-2k}. \tag{20}$$

Se observă că prima sumă are valoarea 1 pentru $k = 0$.
Cu notația

$$A_0 = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \binom{2k}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1},$$

se poate scrie

$$1 + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \binom{2k}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \binom{2k}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} = 1 - \lambda A_0.$$

Notînd $j - k = u$, în ultima sumă a formulei (20) se obține

$$B = 1 - \lambda A_0 + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} h^{2j} + \tag{21}$$

$$+ \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^{k+u} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2u} \lambda^{2k+2u-1} h^{2u}.$$

Ultimul termen al acestei formule poate fi grupat; pentru o valoare determinată a lui u se obține expresia

$$\frac{\lambda}{2} (-1)^u \lambda^{2u} h^{2u} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2u} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1},$$

care, sumată pentru toate valorile lui u, dă

$$\frac{\lambda}{2} \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u} h^{2u} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2u} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1}.$$

Dacă se notează $j = u$ în prima sumă din (21), se consideră egalitatea

$$\binom{2k+2u}{2u} = \binom{2k+2u}{2k} \tag{22}$$

și se folosește notația

$$A_0^* = A_0 - \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \binom{-\frac{1}{2}}{u} \lambda^{2u} h^{2u} \left[\frac{1}{\lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\binom{-\frac{1}{2}}{u}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1}\right],$$

expresia B devine

$$B = 1 - \lambda A_0^*. \tag{23}$$

În mod analog se procedează cu expresia C din formula (19). Ținînd seama de egalitatea

$$\binom{2j}{2j-2k+1} = \binom{2j}{2k-1},$$

grupînd primele două sume și notînd $j-k = u$ în a treia sumă, expresia C devine

$$C = \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \sin(2p-1)(\alpha_l + \gamma) \sum_{k=p}^{\infty} \frac{(-1)^1}{2^{2k-2}} \binom{2k-1}{k-p} \times$$

$$\times \sum_{u=0}^{\infty} \mp (-1)^{k+u} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k-1} \lambda^{2k+2u-1} h^{2u+1}.$$

Grupînd ultimele două sume și folosind notația

$$A^*_{2p-1} = -\sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u+1} h^{2u+1} \times$$

$$\times \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k-1}{k-p} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k-1} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-2},$$

rezultă

$$C = -\lambda \sum_{p=1}^{\infty} \pm (-1)^p A^*_{2p-1} \sin (2p-1)(\alpha_l + \gamma). \tag{24}$$

Pentru a obține expresia D se grupează primele două sume, se folosește în a treia sumă notația $j - k = u$ și se ia în considerație egalitatea (22). Rezultă

$$D = \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos 2p(\alpha_l + \gamma) \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} \binom{2k}{k-p} \times$$

$$\times \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^{k+u} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \lambda^{2k+2u-1} h^{2u}.$$

Se grupează ultimele două sume

$$D = \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos 2p(\alpha_l + \gamma) \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u} h^{2u} \times$$

$$\times \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k-p} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1}$$

și se pune în evidență limita $u = 0$:

$$D = \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos 2p(\alpha_l + \gamma) \left[\sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k-p} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u} h^{2u} \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k-p} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} \right].$$

Folosind notațiile

$$A_{2p} = -\sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k-p} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1},$$

$$A^*_{2p} = A_{2p} - \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u} h^{2u} \times$$

$$\times \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k-p} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1},$$

se obține pentru D formula

$$D = -\lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A^*_{2p} \cos 2p\,(\alpha_l + \gamma). \tag{25}$$

Prin înlocuirea expresiilor (23), (24) și (25) în formula (19) rezultă

$$\frac{1}{\cos\beta} = 1 - \lambda A^*_0 - \lambda \sum_{p=1}^{\infty} \pm (-1)^p A^*_{2p-1} \sin (2p-1)(\alpha_l+\gamma) -$$

$$- \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A^*_{2p} \cos 2p\,(\alpha_l + \gamma). \tag{26}$$

Coeficienții A^* din seria (26) au expresiile

$$\left.\begin{aligned}
A^*_0 &= A_0 - \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \binom{-\frac{1}{2}}{u} \lambda^{2u} h^{2u} \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\binom{-\frac{1}{2}}{u}} \times \right.\\
&\left. \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1}\right],\\
A^*_{2p-1} &= -\sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u+1} h^{2u+1} \times\\
&\times \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k-1}{k-p} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k-1} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-2},\\
A^*_{2p} &= A_{2p} - \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u} h^{2u} \times\\
&\times \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k-p} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1},\\
A_0 &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \binom{2k}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1},\\
A_{2p} &= -\sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k-p} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1},
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Prin dezvoltarea sumelor din formulele (27) rezultă

$$
\left.\begin{aligned}
A_0^* &= A_0 - \frac{1}{2}\lambda^2 h^2\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{9}{4}\lambda + \frac{225}{64}\lambda^3 + \ldots\right) - \\
&\quad - \frac{1}{8}\lambda^4 h^4\left(\frac{3}{\lambda} + \frac{75}{4}\lambda + \ldots\right) - \ldots \\
A_1^* &= -\lambda h\left(1 + \frac{9}{8}\lambda^2 + \frac{75}{64}\lambda^4 + \ldots\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2}\lambda^3 h^3\left(3 + \frac{75}{8}\lambda^2 + \ldots\right) - \frac{15}{8}\lambda^5 h^5 - \ldots \\
A_2^* &= A_2 - \frac{3}{8}\lambda^3 h^2\left(3 + \frac{25}{4}\lambda^2 + \ldots\right) - \frac{75}{32}\lambda^5 h^4 - \ldots \\
A_3^* &= -\frac{3}{8}\lambda^3 h\left(1 + \frac{25}{16}\lambda^2 + \ldots\right) - \frac{25}{16}\lambda^5 h^3 - \ldots \\
A_4^* &= A_4 - \frac{75}{128}\lambda^5 h^2 - \ldots \\
A_5^* &= -\frac{15}{128}\lambda^5 h - \frac{245}{256}\lambda^7 h^3 - \ldots \\
A_6^* &= A_6 - \frac{245}{512}\lambda^7 h^2 - \ldots \\
A_7^* &= -\frac{35}{1024}\lambda^7 h - \ldots \\
A_8^* &= A_8 - \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (28)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
A_0 &= -\frac{\lambda}{4} - \frac{9}{64}\lambda^3 - \frac{25}{256}\lambda^5 - \frac{1225}{16\,384}\lambda^7 - \ldots \\
A_2 &= -\frac{\lambda}{4} - \frac{3}{16}\lambda^3 - \frac{75}{512}\lambda^5 - \frac{245}{2048}\lambda^7 - \ldots \\
A_4 &= -\frac{3}{64}\lambda^3 - \frac{15}{256}\lambda^5 - \frac{245}{4096}\lambda^7 - \ldots \\
A_6 &= -\frac{5}{512}\lambda^5 - \frac{35}{2048}\lambda^7 - \ldots \\
A_8 &= -\frac{35}{16\,384}\lambda^7 - \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (29)
$$

Pentru termenii din formula (26) care au două semne, se consideră primul semn cînd cilindrul cu bielă principală este dezaxat în sensul de

rotație și al doilea semn cînd cilindrul cu bielă principală este dezaxat în sensul invers sensului de rotație ales; în aceste condiții, coeficienții A^* se calculează considerînd totdeauna coeficientul de dezaxare h ca o mărime pozitivă.

Din compararea formulelor (15) și (16) se constată că formula (16) se deduce din formula (15) prin înlocuirile

$$\beta \to \beta_l,$$

$$\lambda \to \lambda_l,$$

$$\gamma \to -\zeta,$$

$$\mp h \to -f_l.$$

Dacă mărimea f_l este considerată constantă, seria Fourier a funcției $\frac{1}{\cos \beta_l}$ se obține efectuînd aceste înlocuiri în seria (26):

$$\frac{1}{\cos \beta_l} = 1 - \lambda_l a_0^* - \lambda_l \sum_{p-1}^{\infty} \pm (-1)^p a_{2p-1}^* \sin (2p-1)(\alpha_l - \zeta) -$$

$$- \lambda_l \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p a_{2p}^* \cos 2p (\alpha_l - \zeta). \tag{30}$$

Deoarece coeficientul de dezaxare echivalent f_l poate fi pozitiv sau negativ (formula 6), înaintea termenilor seriei (30) care au două semne trebuie păstrat primul sau al doilea semn, după cum f_l rezultă din formula (6) pozitiv sau negativ. Expresiile coeficienților a^* se obțin din expresiile coeficienților A^* prin înlocuirile $\lambda \to \lambda_l$ și $h \to |f_l|$.

Din expresia coeficientului a_{2p-1}^*

$$a_{2p-1}^* = -\sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u \lambda_l^{2u+1} f_l^{2u+1} \times$$

$$\times \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k-1}{k-p} \binom{-\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k-1} \left(\frac{\lambda_l}{2}\right)^{2k-2},$$

se constată că semnul se schimbă o dată cu semnul mărimii f_l. Dacă la calculul acestui coeficient se consideră mărimea f_l cu semnul cu care rezultă din formula (6), seria (30) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{1}{\cos \beta_l} = 1 - \lambda_l a_0^* - \lambda_l \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p a_{2p-1}^* \sin (2p-1)(\alpha_l - \zeta) -$$

$$- \lambda_l \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p a_{2p}^* \cos 2p (\alpha_l - \zeta). \tag{31}$$

Coeficienții a_0^*, a_{2p-1}^*, a_{2p}^* din seria (31) se obțin din formulele (27) și, respectiv, (28) și (29) prin înlocuirile $\lambda \to \lambda_l$ și $h \to f_l$, mărimea f_l fiind considerată cu semnul cu care rezultă din formula (6).

Seria (31) este numai formal o serie Fourier. În realitate, coeficienții a^* sînt variabili, deoarece coeficientul de dezaxare echivalent f_l este variabil. Întrucît valorile maxime ale unghiurilor β și ψ sînt mici, se poate considera în formula (6) $\cos\beta \approx 1$ sau valoarea medie a funcției $\cos\beta$; în acest caz, precum și în cazul $\psi = 0$, coeficientul de dezaxare echivalent devine constant.

Pentru obținerea seriei Fourier a vitezei unghiulare a bielei secundare se consideră relația (14) sub forma

$$\omega_l = \omega\,(T_1 + T_2 + T_3 + T_4), \tag{32}$$

unde $T_1 \ldots T_4$ sînt cei patru termeni din (14).

Dezvoltînd formula (31) și folosind notațiile

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= 2\,(1-\lambda_l\, a_0^*),\\ m_{2p-1} &= (-1)^p\,\lambda_l\, a_{2p-1}^* \sin(2p-1)\,\zeta,\\ m_{2p} &= -(-1)^p\,\lambda_l\, a_{2p}^* \cos 2p\,\zeta,\\ q_{2p-1} &= -(-1)^p\,\lambda_l\, a_{2p-1}^* \cos(2p-1)\,\zeta,\\ q_{2p} &= -(-1)^p\,\lambda_l\, a_{2p}^* \sin 2p\,\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

se obține expresia

$$\frac{1}{\cos\beta_l} = \frac{m_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (m_p \cos p\alpha_l + q_p \sin p\alpha_l). \tag{34}$$

Folosind expresia (34), termenul T_1 devine

$$T_1 = \frac{m_0}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\cos\gamma\right)\cos\alpha_l +$$

$$+\left(\frac{R}{l} - \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\cos\gamma\right)\sum_{p=1}^{\infty} m_p \cos\alpha_l \cos p\alpha_l +$$

$$+\left(\frac{R}{l} - \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\cos\gamma\right)\sum_{p=1}^{\infty} q_p \cos\alpha_l \sin p\alpha_l.$$

Cu ajutorul sumelor trigonometrice

$$\left.\begin{aligned} \cos a\,\cos b &= \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b),\\ \sin a\,\cos b &= \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b), \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

se deduce

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\cos\gamma\right)\left\{m_0\cos\alpha_l + \sum_{p=1}^{\infty} m_p\left[\cos(p+1)\alpha_l + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos(p-1)\alpha_l\right] + \sum_{p=1}^{\infty} q_p\left[\sin(p+1)\alpha_l + \sin(p-1)\alpha_l\right]\right\}.$$

Prin dezvoltarea expresiilor trigonometrice de sub sume se obţine după gruparea termenilor

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\cos\gamma\right)\{m_1 + (m_0 + m_2)\cos\alpha_l + q_2\sin\alpha_l +$$

$$+ [(m_1 + m_3)\cos 2\alpha_l + (m_2 + m_4)\cos 3\alpha_l + (m_3 + m_5)\cos 4\alpha_l + \ldots] +$$

$$+ [(q_1 + q_3)\sin 2\alpha_l + (q_2 + q_4)\sin 3\alpha_l + (q_3 + q_5)\sin 5\alpha_l + \ldots]$$

sau

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\cos\gamma\right)\left[m_1 + (m_0 + m_2)\cos\alpha_l + q_2\sin\alpha_l + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=2}^{\infty}(m_{p-1} + m_{p+1})\cos p\alpha_l + \sum_{p=2}^{\infty}(q_{p-1} + q_{p+1})\sin p\alpha_l\right].$$

Folosind notaţiile

$$\left.\begin{aligned}
G_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\cos\gamma\right)m_1,\\
G_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\cos\gamma\right)(m_0 + m_2),\\
G_p &= \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\cos\gamma\right)(m_{p-1} + m_{p+1}),\ p = 2,\ 3,\ 4\ \ldots\\
J_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\cos\gamma\right)q_2,\\
J_p &= \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda\frac{r}{l}\cos\psi\cos\gamma\right)(q_{p-1} + q_{p+1}),\ p = 2,\ 3,\ 4\ \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

rezultă pentru T_1 expresia

$$T_1 = G_0 + \sum_{p=1}^{\infty}(G_p\cos p\alpha_l + J_p\sin p\ \alpha_l). \quad (37)$$

Cu ajutorul formulelor trigonometrice

$$\left.\begin{aligned}
\cos a\ \sin b &= \frac{1}{2}\sin(a+b) - \frac{1}{2}\sin(a-b),\\
\sin a\ \sin b &= \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b),
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

și folosind notațiile

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= \frac{\lambda}{2}\frac{r}{l} q_1 \cos\psi \sin\gamma, \\ U_1 &= \frac{\lambda}{2}\frac{r}{l} q_2 \cos\psi \sin\gamma, \\ U_p &= -\frac{\lambda}{2}\frac{r}{l}(q_{p-1} - q_{p+1}) \cos\psi \sin\gamma, \quad p = 2,\ 3,\ 4\ldots \\ V_1 &= \frac{\lambda}{2}\frac{r}{l}(m_0 - m_2) \cos\psi \sin\gamma, \\ V_p &= \frac{\lambda}{2}\frac{r}{l}(m_{p-1} - m_{p+1}) \cos\psi \sin\gamma, \quad p = 2,\ 3,\ 4\ldots \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

se obține pentru T_2 următoarea expresie:

$$T_2 = U_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (U_p \cos p\alpha_l + V_p \sin p\alpha_l). \tag{40}$$

Folosind formula (26), termenul T_3 devine

$$T_3 = -\frac{\lambda^2}{2}\frac{r}{l}\sin\psi\Big[(1 - \lambda A_0^*)\sin 2(\alpha_l + \gamma) \mp$$
$$\mp \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A_{2p-1}^* \sin 2(\alpha_l + \gamma)\sin(2p-1)(\alpha_l + \gamma) -$$
$$- \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A_{2p}^* \sin 2(\alpha_l + \gamma)\cos 2p(\alpha_l + \gamma)\Big]\frac{1}{\cos\beta_l}.$$

Transformînd această expresie cu ajutorul relațiilor trigonometrice (38) și folosind notațiile

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= \mp\frac{\lambda^3}{4}\frac{r}{l}(A_1^* - A_3^*)\sin\psi\cos\gamma, \\ W_2 &= -\frac{\lambda^2}{2}\frac{r}{l}\left(1 - \lambda A_0^* + \frac{\lambda}{2}A_4^*\right)\sin\psi\sin 2\gamma, \\ W_{2p+1} &= \mp(-1)^p\frac{\lambda^3}{4}\frac{r}{l}(A_{2p-1}^* - A_{2p+3}^*)\sin\psi\cos(2p+1)\gamma, \\ W_{2(p+1)} &= (-1)^p\frac{\lambda^3}{4}\frac{r}{l}(A_{2p}^* - A_{2p+4}^*)\sin\psi\sin(2p+1)\gamma, \\ Y_1 &= \pm\frac{\lambda^3}{4}\frac{r}{l}(A_1^* - A_3^*)\sin\psi\sin\gamma, \\ Y_2 &= -\frac{\lambda^2}{2}\frac{r}{l}\left(1 - \lambda A_0^* + \frac{\lambda}{2}A_4^*\right)\sin\psi\cos 2\gamma, \\ Y_{2p+1} &= \pm(-1)^p\frac{\lambda^3}{4}\frac{r}{l}(A_{2p-1}^* - A_{2p+3}^*)\sin\psi\sin(2p+1)\gamma, \\ Y_{2(p+1)} &= (-1)^p\frac{\lambda^3}{4}\frac{r}{l}(A_{2p}^* - A_{2p+4}^*)\sin\psi\cos 2(p+1)\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

se obține după gruparea termenilor

$$T_3 = \frac{1}{\cos\beta_l} \sum_{p=1}^{\infty} (W_p \cos p\alpha_l + Y_p \sin p\alpha_l).$$

Avînd în vedere expresia (34), rezultă după transformări

$$T_3 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (W_p m_p + Y_p q_p) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \cos p\alpha_l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [W_n (m_{n+p} + m_{n-p}) + Y_n (q_{n+p} + q_{n-p})] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \sin p\alpha_l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [W_n (q_{n+p} - q_{n-p}) - Y_n (m_{n+p} - m_{n-p})]. \qquad (42)$$

În formula (42) s-a considerat

$$m_{-k} = m_k \quad \text{și} \quad q_{-k} = -q_k.$$

Folosind formula (26), termenul T_4 devine:

$$T_4 = \pm \lambda^2 \frac{r}{l} h \sin\psi \Big[(1 - \lambda A_0^*) \cos(\alpha_l + \gamma) \mp$$

$$\mp \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A_{2p-1}^* \cos(\alpha_l + \gamma) \sin(2p-1)(\alpha_l + \gamma) -$$

$$- \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A_{2p}^* \cos(\alpha_l + \gamma) \cos 2p(\alpha_l + \gamma) \Big] \frac{1}{\cos\beta_l}.$$

Transformînd această expresie cu ajutorul relațiilor (35), grupînd termenii și folosind notațiile

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= \pm \lambda^2 \frac{r}{l} h \left(1 - \lambda A_0^* + \frac{\lambda}{2} A_2^*\right) \sin\psi \cos\gamma, \\
M_{2p} &= -(-1)^p \frac{\lambda^3}{2} \frac{r}{l} h (A_{2p-1}^* - A_{2p+1}^*) \sin\psi \sin 2p\gamma, \\
M_{2p+1} &= \mp (-1)^p \frac{\lambda^3}{2} \frac{r}{l} h (A_{2p}^* - A_{2p+2}^*) \sin\psi \cos(2p+1)\gamma, \\
Q_1 &= \mp \lambda^2 \frac{r}{l} h \left(1 - \lambda A_0^* + \frac{\lambda}{2} A_2^*\right) \sin\psi \sin\gamma, \\
Q_{2p} &= -(-1)^p \frac{\lambda^3}{2} \frac{r}{l} h (A_{2p-1}^* - A_{2p+1}^*) \sin\psi \cos 2p\gamma, \\
Q_{2p+1} &= \pm (-1)^p \frac{\lambda^3}{2} \frac{r}{l} h (A_{2p}^* - A_{2p+2}^*) \sin\psi \sin(2p+1)\gamma,
\end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

se obține după înlocuire lui $\frac{1}{\cos\beta_l}$ din (34)

$$T_4 = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(M_p m_p + Q_p q_p) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty}\cos p\alpha_l \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}[M_n(m_{n+p} + m_{n-p}) + Q_n(q_{n+p} + q_{n-p})] + \quad (44)$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty}\sin p\alpha_l \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}[M_n(q_{n+p} - q_{n-p}) - Q_n(m_{n+p} - m_{n-p})],$$

unde s-a considerat de asemenea $m_{-k} = m_k$ și $q_{-k} = -q_k$.

Înlocuind în (32) expresiile (37), (40), (42) și (44), se obține seria Fourier a vitezei unghiulare a bielei :

$$\omega_l = \omega\left\{G_0 + U_0 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(W_p m_p + Y_p q_p) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(M_p m_p + Q_p q_p) + \right.$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty}\left\{G_p + U_p + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(W_n + M_n)(m_{n+p} + m_{n-p}) + (Y_n + Q_n)(q_{n+p} + \right.$$

$$\left.\left. + q_{n-p})]\right\}\cos p\alpha_l + \sum_{p=1}^{\infty}\left\{J_p + V_p + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(W_n + M_n)(q_{n+p} - q_{n-p}) - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - (Y_n + Q_n)(m_{n+p} - m_{n-p})]\right\}\sin p\alpha_l\right\}. \quad (45)$$

Această expresie este o serie Fourier dacă se neglijează variația vitezei unghiulare a manivelei.

În formulele (41) și (43), coeficienții care au două semne se consideră cu primul semn cînd cilindrul cu bielă principală este dezaxat în sensul de rotație și cu al doilea semn cînd cilindrul cu bielă principală este dezaxat în sens invers sensului de rotație.

Seria Fourier a accelerației unghiulare a bielei secundare se obține prin derivarea formulei (45) în raport cu timpul. Neglijînd variația vitezei unghiulare a manivelei rezultă :

$$\theta_l = \omega^2\left\{\sum_{p=1}^{\infty} p\left\{J_p + V_p + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(W_n + M_n)(q_{n+p} - q_{n-p}) - (Y_n + \right.\right.$$

$$\left.\left. + Q_n)(m_{n+p} - m_{n-p})]\right\}\cos p\alpha_l - \sum_{p=1}^{\infty} p\left\{G_p + U_p + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(W_n + \right.\right.$$

$$\left.\left. + M_n)(m_{n+p} + m_{n-p}) + (Y_n + Q_n)(q_{n+p} + q_{n-p})]\right\}\sin p\alpha_l\right\}.$$

2. CAZUL MECANISMULUI CU BIELE SECUNDARE DEZAXAT CU AXELE CILINDRILOR PARALELE

Acest mecanism se foloseşte pentru doi cilindri paraleli. În vederea micşorării forţei maxime dintre pistonul acţionat de biela principală şi cilindrul respectiv, cilindrul cu bielă secundară se dezaxează în sensul de rotaţie.

Dacă axele cilindrilor sînt paralele, $\gamma = 0$. Din formula (8) rezultă $\zeta = 0$. Cu aceste condiţii se obţine din formulele (33), (36), (41) şi (43)

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= 2(1 - \lambda_l a_0^*),\\ m_{2p-1} &= 0,\\ m_{2p} &= -(-1)^p \lambda_l a_{2p}^*,\\ q_{2p-1} &= -(-1)^p \lambda_l a_{2p-1}^*,\\ q_{2p} &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} G_0 &= 0,\\ G_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda \frac{r}{l}\cos\psi\right)(m_0 + m_2),\\ G_{2p} &= 0,\\ G_{2p+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda \frac{r}{l}\cos\psi\right)(m_{2p} + m_{2p+2}),\\ J_1 &= 0,\\ J_{2p} &= \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda \frac{r}{l}\cos\psi\right)(q_{2p-1} + q_{2p+1}),\\ J_{2p+1} &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= \frac{\lambda^3}{4}\frac{r}{l}(A_1^* - A_3^*)\sin\psi,\\ W_2 &= 0,\\ W_{2p+1} &= (-1)^p \frac{\lambda^3}{4}\frac{r}{l}(A_{2p-1}^* - A_{2p+3}^*)\sin\psi,\\ W_{2(p+1)} &= 0,\\ Y_1 &= 0,\\ Y_2 &= -\frac{\lambda^2}{2}\frac{r}{l}\left(1 - \lambda A_0^* + \frac{\lambda}{2}A_4^*\right)\sin\psi,\\ Y_{2p+1} &= 0,\\ Y_{2(p+1)} &= (-1)^p \frac{\lambda^3}{4}\frac{r}{l}(A_{2p}^* - A_{2p+4}^*)\sin\psi, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -\lambda^2 \frac{r}{l} h\left(1 - \lambda A_0^* + \frac{\lambda}{2} A_2^*\right) \sin \psi, \\ M_{2p} &= 0, \\ M_{2p+1} &= (-1)^p \frac{\lambda^3}{2} \frac{r}{l} h(A_{2p}^* - A_{2p+2}^*) \sin \psi, \\ Q_1 &= 0, \\ Q_{2p} &= -(-1)^p \frac{\lambda^3}{2} \frac{r}{l} h(A_{2p-1}^* - A_{2p+1}^*) \sin \psi, \\ Q_{2p+1} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Coeficienții U și V sînt nuli. Coeficienții A^* sînt dați de formulele (27), unde h este considerat pozitiv. Coeficienții a^* sînt dați de aceeași formulă, în care se înlocuiește $\lambda \to \lambda_l$ și $h \to f_l$, coeficientul de dezaxare echivalent fiind considerat cu semnul cu care rezultă din formula (6) pentru dezaxarea mecanismului bielei secundare în sensul de rotație.

Seria Fourier a vitezei unghiulare a bielei secundare rezultă din înlocuirea coeficienților determinați cu formulele (46)—(49) în expresia (45). Ținînd seama de coeficienții care sînt nuli, seria (45) devine

$$\omega_l = \omega \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ G_{2p-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(W_{2n-1} + M_{2n-1})(m_{2n+2p-2} + m_{2n-2p}) + (Y_{2n} + \right.\right.$$

$$+ Q_{2n})(q_{2n+2p-1} + q_{2n-2p+1})] \Big\} \cos(2p-1)\,\alpha_l + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ J_{2p} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(W_{2n-1} + \right.$$

$$+ M_{2n-1})(q_{2n+2p-1} - q_{2n-2p-1}) + (Y_{2n} + Q_{2n})(m_{2n+2p} -$$

$$\left.\left. - m_{2n-2p})] \right\} \sin 2p\alpha_l \right\}, \tag{50}$$

unde s-a considerat $m_{-k} = m_k$ și $q_{-k} = -q_k$. Expresia (50) este o serie Fourier dacă se neglijează variația vitezei unghiulare a manivelei.

Seria Fourier a accelerației unghiulare a bielei secundare se obține prin derivarea formulei (50) în raport cu timpul. Neglijînd variația vitezei unghiulare a manivelei, rezultă

$$\theta_l = \omega^2 \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} 2p \left\{ J_{2p} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(W_{2n-1} + M_{2n-1})(q_{2n+2p-1} - q_{2n-2p-1}) + \right.\right.$$

$$+ (Y_{2n} + Q_{2n})(m_{2n+2p} - m_{2n-2p})] \Big\} \cos 2p\alpha_l - \sum_{p=1}^{\infty} (2p-1) \left\{ G_{2p-1} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(W_{2n-1} + M_{2n-1})(m_{2n+2p-2} + m_{2n-2p}) + (Y_{2n} + Q_{2n})(q_{2n+2p-1} +$$

$$\left.\left. + q_{2n-2p+1})] \right\} \sin(2p-1)\,\alpha_l \right\}.$$

3. CAZUL MECANISMULUI CU BIELE SECUNDARE AXAT CU $\psi \neq 0$

Acest mecanism este un caz particular, caracterizat prin condițiile $h = 0$ și $h_l = 0$. Formula (6) devine

$$f_l = -\frac{1}{\lambda_l}\frac{r}{l}\sin\psi\cos\beta, \tag{51}$$

unde pentru $\cos\beta$ se poate lua $\cos\beta \approx 1$ sau valoarea sa medie. Introducînd aceste condiții în formula (27), rezultă $A_0^* = A_0$, $A_{2p-1}^* = 0$ și $A_{2p}^* = A_{2p}$.

Coeficienții a^* se obțin din formulele (27) prin înlocuirile $\lambda \to \lambda_l$ și $h \to f_l$; coeficientul de dezaxare echivalent f_l se consideră cu semnul cu care rezultă din formula (51). În coeficienții seriei (45) care sînt dați de formulele (33), (36), (39), (41) și (43) intervin următoarele modificări: coeficienții m, q, G, J, U și V rămîn neschimbați, coeficienții M și Q sînt nuli, iar coeficienții W și Y au expresiile

$$\begin{aligned}
W_1 &= 0,\\
W_2 &= -\frac{\lambda^2}{2}\frac{r}{l}\left(1 - \lambda A_0 + \frac{\lambda}{2}A_4\right)\sin\psi\sin 2\gamma,\\
W_{2p+1} &= 0,\\
W_{2(p+1)} &= (-1)^p\frac{\lambda^3}{4}\frac{r}{l}(A_{2p} - A_{2p+4})\sin\psi\sin 2(p+1)\gamma,\\
Y_1 &= 0,\\
Y_2 &= -\frac{\lambda^2}{2}\frac{r}{l}\left(1 - \lambda A_0 + \frac{\lambda}{2}A_4\right)\sin\psi\cos 2\gamma,\\
Y_{2p+1} &= 0,\\
Y_{2(p+1)} &= (-1)^p\frac{\lambda^3}{4}\frac{r}{l}(A_{2p} - A_{2p+4})\sin\psi\cos 2(p+1)\gamma.
\end{aligned}$$

În aceste condiții, formula (45) devine

$$\begin{aligned}
\omega_l = \omega\Big\{ & G_0 + U_0 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(W_{2p}\,m_{2p} + Y_{2p}\,q_{2p}) + \\
& + \sum_{p=1}^{\infty}\Big\{G_p + U_p + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}[W_{2n}(m_{2n+p} + m_{2n-p}) + \\
& + Y_{2n}(q_{2n+p} + q_{2n-p})]\Big\}\cos p\alpha_l + \sum_{p=1}^{\infty}\Big\{J_p + V_p + \\
& + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}[W_{2n}(q_{2n+p} - q_{2n-p}) - Y_{2n}(m_{2n+p} - m_{2n-p})]\Big\}\sin p\alpha_l\Big\}.
\end{aligned} \tag{52}$$

Această expresie este o serie Fourier dacă se neglijează variația vitezei unghiulare a manivelei.

Seria Fourier a accelerației unghiulare a bielei secundare se obține prin derivarea expresiei (52) în raport cu timpul. Neglijînd variația vitezei unghiulare a manivelei rezultă

$$\theta_l = \omega^2 \Big\{ \sum_{p=1}^{\infty} p \Big\{ J_p + V_p + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [W_{2n} (q_{2n+p} - q_{2n-p}) - Y_{2n} (m_{2n+p} - m_{2n-p})] \Big\} \cos p\alpha_l - \sum_{p=1}^{\infty} p \Big\{ G_p + U_p + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [W_{2n} (m_{2n+p} + m_{2n-p}) + Y_{2n} (q_{2n+p} + q_{2n-p})] \Big\} \sin p\alpha_l \Big\}.$$

4. CAZUL MECANISMULUI CU BIELE SECUNDARE AXAT CU $\psi = 0$

Acest mecanism este un caz particular al mecanismului precedent. Seria Fourier a vitezei unghiulare a bielei secundare se obține din formula (52). Coeficienții acestei serii sînt dați de formulele (33), (36), (39), (41) și (43), în care coeficienții a^* se obțin din formulele (27) prin înlocuirile $\lambda \to \lambda_l$ și $h \to f_l$. Deoarece la $\psi = 0$, $f_l = 0$, rezultă $a_0^* = a_0$, $a_{2p-1}^* = 0$ și $a_{2p}^* = a_{2p}$; coeficienții W, Y, M și Q din formulele (41) și (43) sînt deci nuli, iar formulele (33), (36) și (39) devin

$$m_0 = 2(1 - \lambda a_0),$$

$$m_{2p-1} = 0,$$

$$m_{2p} = -(-1)^p \lambda_l a_{2p} \cos 2p\zeta,$$

$$q_{2p-1} = 0,$$

$$q_{2p} = -(-1)^p \lambda_l a_{2p} \sin 2p\zeta,$$

$$G_0 = 0,$$

$$G_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda \frac{r}{l} \cos\gamma\right)(m_0 + m_2) = \frac{\lambda_l}{2}(m_0 + m_2)\cos\zeta,$$

$$G_{2p} = 0,$$

$$G_{2p+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda \frac{r}{l} \cos\gamma\right)(m_{2p} + m_{2p+2}) = \frac{\lambda_l}{2}(m_{2p} + m_{2p+2}) \cos\zeta,$$

$$J_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda \frac{r}{l} \cos\gamma\right) q_2 = \frac{\lambda_l}{2} q_2 \cos\zeta,$$

$$J_{2p} = 0$$

$$J_{2p+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{l} - \lambda \frac{r}{l} \cos\gamma\right)(q_{2p} + q_{2p+2}) = \frac{\lambda_l}{2}(q_{2p} + q_{2p+2}) \cos\zeta,$$

$$U_0 = 0,$$

$$U_1 = \frac{\lambda}{2}\frac{r}{l} q_2 \sin\gamma = \frac{\lambda_l}{2} q_2 \sin\zeta,$$

$$U_{2p} = 0,$$

$$U_{2p+1} = -\frac{\lambda}{2}\frac{r}{l}(q_{2p} - q_{2p+2}) \sin\gamma = -\frac{\lambda_l}{2}(q_{2p} - q_{2p+2}) \sin\zeta,$$

$$V_1 = \frac{\lambda}{2}\frac{r}{l}(m_0 - m_2) \sin\gamma = \frac{\lambda_l}{2}(m_0 - m_2) \sin\zeta,$$

$$V_{2p} = 0,$$

$$V_{2p+1} = \frac{\lambda}{2}\frac{r}{l}(m_{2p} - m_{2p+2}) \sin\gamma = \frac{\lambda_l}{2}(m_{2p} - m_{2p+2}) \sin\zeta.$$

Avînd în vedere coeficienţii nuli, seria (52) devine

$$\omega_1 = \omega\left\{\sum_{p=1}^{\infty}[(G_{2p-1} + U_{2p-1})\cos(2p-1)\alpha_l + (J_{2p-1} + V_{2p-1})\sin(2p-1)\alpha_l]\right\}. \tag{53}$$

Explicitînd coeficienţii şi efectuînd transformări asupra produselor trigonometrice, seria (53) devine

$$\omega_l = \omega\lambda_l \sum_{p=1}^{\infty} X_{2p-1}\cos(2p-1)(\alpha_l - \zeta), \tag{54}$$

în care

$$X_1 = 1 - \lambda_l a_0 + \frac{\lambda_l}{2} a_2,$$

$$X_{2p+1} = -(-1)^p \frac{\lambda_l}{2}(a_{2p} - a_{2p+2}).$$

Seria Fourier a acceleraţiei unghiulare a bielei secundare se obţine prin derivarea formulei (53) în raport cu timpul. Considerînd că viteza unghiulară nu variază în timp, se obţine

$$\theta_l = \omega^2\left\{\sum_{p=1}^{\infty}(2p-1)[(J_{2p-1} + V_{2p-1})\cos(2p-1)\alpha_l - (G_{2p-1} + U_{2p-1})\sin(2p-1)\alpha_l]\right\}.$$

Dacă se pleacă de la formula (54), se deduce

$$\theta_l = -\omega^2\lambda_l \sum_{p=1}^{\infty}(2p-1) X_{2p-1}\sin(2p-1)(\alpha_l - \zeta).$$

5. CAZUL MECANISMULUI BIELĂ-MANIVELĂ NORMAL DEZAXAT

Condițiile particulare ale acestui mecanism sînt $l = L$, $r = 0$, $h_l = h$. Înlocuind aceste condiții în formulele (6), (8) și (9), se deduce $f_l = \pm h$, $\zeta = 0$ și $\lambda_l = \lambda$.

Coeficienții a^* se deduc din formulele (27) prin înlocuirile $\lambda \to \lambda_l$ și $h \to f_l$; rezultă $a_0^* = A_0^*$, $a_{2p-1}^* = \pm A_{2p-1}^*$ și $a_{2p}^* = A_{2p}^*$. Din formulele (33) și (36) se obține

$$
\begin{aligned}
m_0 &= 2\,(1 - \lambda A_0^*),\\
m_{2p} &= -\,(-1)^p\,\lambda A_{2p}^*,\\
q_{2p-1} &= \mp\,(-1)^p\,\lambda A_{2p-1}^*,\\
G_1 &= \lambda\left(1 - \lambda A_0^* + \frac{\lambda}{2} A_2^*\right),\\
G_{2p+1} &= \frac{\lambda}{2}\,(m_{2p} + m_{2p+2}),\\
J_{2p} &= \frac{\lambda}{2}\,(q_{2p-1} + q_{2p+1}).
\end{aligned}
$$

Coeficienții m_{2p-1}, q_{2p}, G_0, G_{2p}, J_{2p-1}, M, Q, U, V, W și Y sînt nuli.

Efectuînd înlocuirile în formula (45), se obține

$$
\omega_L = \omega\left[G_1 \cos\alpha + \frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(m_{2p} + m_{2p+2})\cos(2p+1)\alpha + \right.
$$
$$
\left. + \frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(q_{2p-1} + q_{2p+1})\sin 2p\alpha\right].
$$

Prin dezvoltarea sumelor rezultă

$$
\begin{aligned}
\omega_L = \omega\,\lambda\Big\{&\left(1 - \lambda A_0^* + \frac{\lambda}{2} A_2^*\right)\cos\alpha + \frac{\lambda}{2}\,[(A_2^* - A_4^*)\cos 3\alpha - \\
&- (A_4^* - A_6^*)\cos 5\alpha + (A_6^* - A_8^*)\cos 7\alpha - + \ldots] \pm \\
&\pm \frac{\lambda}{2}\,[(A_1^* - A_3^*)\sin 2\alpha - (A_3^* - A_5^*)\sin 4\alpha + (A_5^* - A_7^*)\sin 6\alpha - + \ldots]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Seria Fourier a accelerației unghiulare a bielei se obține prin derivarea în raport cu timpul a expresiei (55) a vitezei unghiulare. Neglijînd variația vitezei unghiulare a manivelei, se obține

$$
\begin{aligned}
\theta_L = -\,\omega^2\,\lambda\Big\{&\left(1 - \lambda A_0^* + \frac{\lambda}{2} A_2^*\right)\sin\alpha + \\
&+ \frac{\lambda}{2}\,[3\,(A_2^* - A_4^*)\sin 3\alpha - 5\,(A_4^* - A_6^*)\sin 5\alpha + \\
&+ 7\,(A_6^* - A_8^*)\sin 7\alpha - + \ldots] \mp \frac{\lambda}{2}\,[2\,(A_1^* - A_3^*)\cos 2\alpha - \\
&- 4\,(A_3^* - A_5^*)\cos 4\alpha + 6\,(A_5^* - A_7^*)\cos 6\alpha - + \ldots]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

6. CAZUL MECANISMULUI BIELĂ-MANIVELĂ NORMAL AXAT

Acest mecanism este un caz particular al mecanismului precedent, caracterizat prin condiţia suplimentară $h = 0$. Din formulele (27) rezultă $A_0^* = A_0$, $A_{2p-1}^* = 0$ şi $A_{2p}^* = A_{2p}$; formulele (55) şi (56) devin

$$\omega_L = \omega\,\lambda\left\{\left(1 - \lambda A_0 + \frac{\lambda}{2} A_2\right)\cos\alpha + \frac{\lambda}{2}\left[(A_2 - A_4)\cos 3\alpha - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (A_4 - A_6)\cos 5\alpha + (A_6 - A_8)\cos 7\alpha - + \ldots\right]\right\},$$

$$\theta_L = -\omega^2\,\lambda\left\{\left(1 - \lambda A_0 + \frac{\lambda}{2} A_2\right)\sin\alpha + \frac{\lambda}{2}\left[3(A_2 - A_4)\sin 3\alpha - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 5(A_4 - A_6)\sin 5\alpha + 7(A_6 - A_8)\sin 7\alpha - + \ldots\right]\right\}.$$

7. CONCLUZII

Formulele stabilite anterior permit analiza armonică a vitezei şi acceleraţiei unghiulare a bielei oricărui tip de mecanism bielă-manivelă.

Datorită valorilor mici ale puterilor superioare ale mărimilor λ, λ_l, h şi λ_l, în majoritatea cazurilor se pot neglija armonicile de ordin $p > 4$, iar la calculul coeficienţilor armonicilor se pot neglija termenii cu grad mai mare decît 5—6.

Primită la redacţie la 20 ianuarie 1966.

ANALIZA ARMONICĂ COMPLEXĂ A GRUPELOR STRUCTURALE BINARE DE ASPECTUL IV ŞI V ÎN CONSTRUCŢIA MECANISMELOR [1]

de R. C. BOGDAN şi T. V. HUNCHER
Centrul de mecanica solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

531.1

Pe baza metodei seriilor armonice complexe se completează studiul grupelor binare cu cel al diadelor de aspect IV şi V. Pornind de la legile de mişcare cunoscute ale cuplelor potenţiale, se determină cinematic mişcarea oricărui punct al grupei în cazul cel mai general. Se adaptează studiul diadelor de aspect IV şi V pe modelul grupelor I şi II.

Cercetări efectuate anterior [5], [6], [7] au condus la obţinerea unor soluţii generale în determinarea cinematică a grupelor structurale binare — grupe assurice — de aspectul I, II şi III. În continuare, în prezenta lucrare, ne propunem să tratăm grupele structurale de aspectele IV şi V, cu care completăm categoria acestor grupe binare.

Legarea diadelor la două manivele ne permite obţinerea unor mecanisme cu cinci elemente, aşa cum se reprezintă, de exemplu, în figurile 1—5.

După cum s-a arătat [6], [7], considerîndu-se cunoscuţi vectorii de poziţie complecşi ai punctelor A_1 şi A_2 în cazul în care reprezintă cuple de rotaţie sau mişcarea dreptelor suport 3 şi 4 în cazul cînd A_1 sau A_2 reprezintă cuple de translaţie, se stabilesc legile de determinare cinematică a oricărui punct al diadei respective.

---

[1] Publicată şi în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **12**, *1* (1967) (în limba engleză)

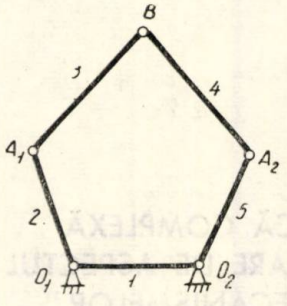


Fig. 1

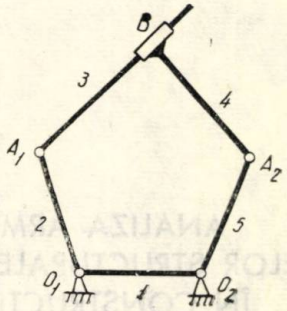


Fig. 2

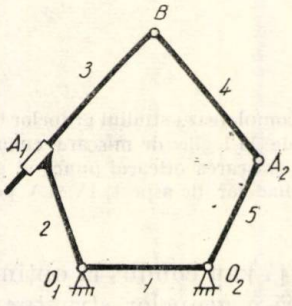


Fig. 3

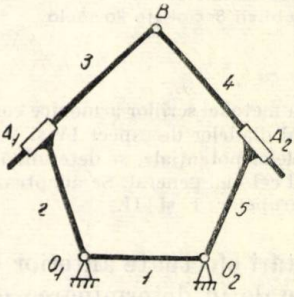


Fig. 4

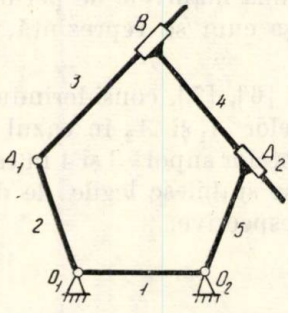


Fig. 5

DIADA DE ASPECT IV

Considerăm cunoscute mișcările suporturilor celor două cuple de translație din A_1 și A_2 (fig. 6), precum și vectorii de poziție complecși z_1^* și z_2^* a două puncte oarecare A_1^* și A_2^*; de asemenea unghiurile λ_1

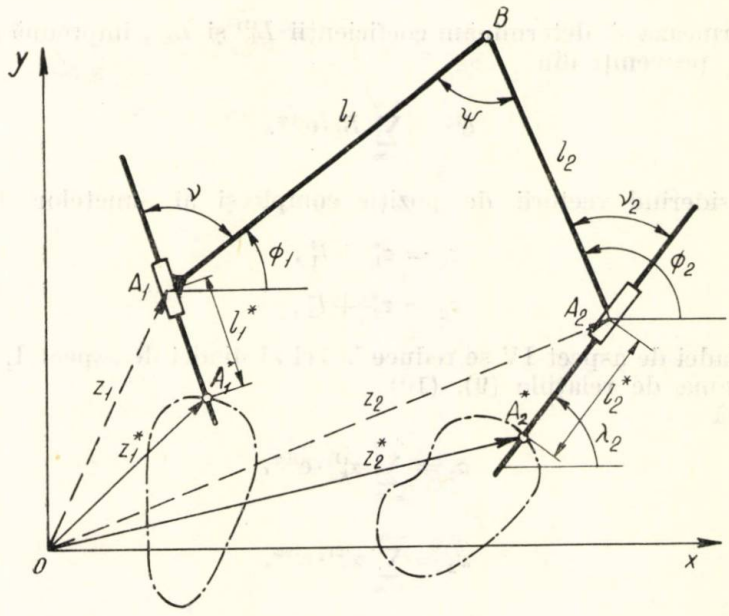


Fig. 6

și λ_2 pe care le fac suporturile cu sensul pozitiv al axei ox. Unghiurile ν_1 și ν_2 sînt constante, corespunzătoare cuplelor de translație:

$$z_1^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)*} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{1}$$

$$z_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)*} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{2}$$

$$e^{i\lambda_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{3}$$

$$e^{i\lambda_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{4}$$

$$\Phi_1 = \lambda_1 - \nu_1 \quad \text{și} \quad \Phi_2 = \lambda_2 + \nu_2. \tag{5}$$

Rezultă

$$\psi = \Phi_2 - \Phi_1 = \lambda_2 + \nu_2 - \lambda_1 + \nu_1. \tag{6}$$

Pentru lungimile l_1^* şi l_2^* avem următoarele dezvoltări:

$$l_1^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{7}$$

$$l_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{8}$$

în care urmează să determinăm coeficienţii $L_k^{(1)}$ şi $L_k^{(2)}$, împreună cu coeficienţii B_k proveniţi din

$$e^{i\psi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k \cdot e^{ik\varphi}.$$

Considerînd vectorii de poziţie complecşi ai punctelor A_1 şi A_2

$$z_1 = z_1^* + l_1^*, \tag{9}$$

$$z_2 = z_2^* + l_2^*, \tag{10}$$

studiul diadei de aspect IV se reduce la cel al diadei de aspect I, A_1BA_2, ţinînd seama de relaţiile (9), (10).

Dacă

$$z_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{11}$$

$$z_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{12}$$

atunci între coeficienţii seriilor Fourier, conform ecuaţiilor (9), (10), vor exista relaţiile de legătură

$$\alpha_k^{(1)} = \alpha_k^{(1)^*} + L_k^{(1)}, \tag{13}$$

$$\alpha_k^{(2)} = \alpha_k^{(2)^*} + L_k^{(2)}. \tag{14}$$

Din triunghiul A_1BA_2 rezultă

$$|A_1A_2|^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\psi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k \cdot e^{ik\varphi}, \tag{15}$$

dar

$$A_1A_2 = z_2 - z_1 = z_2^* + l_2^* - z_1^* - l_1^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k \cdot e^{ik\varphi}. \tag{16}$$

Din relaţia

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k \cdot e^{ik\varphi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)^*} \cdot e^{ik\varphi} + \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi} - \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)^*} \cdot e^{ik\varphi} - \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi} \tag{17}$$

avem legătura între coeficienţii Fourier

$$\beta_k = \alpha_k^{(2)^*} + L_k^{(2)} - \alpha_k^{(1)^*} - L_k^{(1)}. \tag{18}$$

De asemenea vom obține

$$A_1 A_2 = l_1 \cdot e^{i\Phi_1} - l_2 \cdot e^{i\Phi_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k \cdot e^{ik\varphi}. \tag{19}$$

Din relațiile (5) rezultă legătura între coeficienții A_k, λ_k și ν

$$A_k^{(1)} = e^{-i\nu_1} \cdot \lambda_k^{(1)}, \tag{20}$$

$$A_k^{(2)} = e^{i\nu_2} \cdot \lambda_k^{(2)}. \tag{21}$$

Cum

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k \cdot e^{ik\varphi} = l_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi} - l_2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{22}$$

rezultă

$$\beta_k = l_1 A_k^{(1)} - l_2 A_k^{(2)} \tag{23}$$

sau

$$\beta_k = l_1 \cdot e^{-i\nu_1} \cdot \lambda_k^{(1)} - l_2 \cdot e^{i\nu_2} \cdot \lambda_k^{(2)}. \tag{24}$$

Pe baza relației (6) vor fi determinați și coeficienții B_k:

$$B_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{k+m}^{(2)} \overline{A}_k^{(1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu_2} \cdot \lambda_{k+m}^{(2)} \cdot e^{i\nu_1} \cdot \overline{\lambda}_k^{(1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{k+m}^{(2)} \cdot \overline{\lambda}_k^{(1)} e^{i(\nu_1+\nu_2)}. \tag{25}$$

De asemenea avem

$$\begin{aligned}
A_m^{(1)} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{k+m}^{(2)} \cdot \overline{B}_k, \\
e^{-i\nu_1} \cdot \lambda_m^{(1)} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{k+m}^{(2)} \cdot e^{i\nu_2} \cdot \overline{B}_k, \\
\lambda_m^{(1)} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{k+m}^{(2)} \cdot \overline{B}_k \cdot e^{i(\nu_1+\nu_2)},
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
A_m^{(2)} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{k+m}^{(1)} \cdot B_{-k}, \\
e^{i\nu_2} \cdot \lambda_m^{(2)} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{k+m}^{(1)} \cdot e^{-i\nu_1} \cdot B_{-k}, \\
\lambda_m^{(2)} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{k+m}^{(1)} \cdot B_{-k} \cdot e^{-i(\nu_1+\nu_2)}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Din ecuațiile (18) și (24) rezultă

$$L_k^{(2)} - L_k^{(1)} = \alpha_k^{(1)^*} + l_1 \cdot e^{-i\nu_1} \cdot \lambda_k^{(1)} - (\alpha_k^{(2)^*} + l_2 \cdot e^{i\nu_2} \cdot \lambda_k^{(2)}) = \alpha_k^{(1)^*} - \alpha_k^{(2)^*} + \beta_k. \tag{28}$$

Considerînd vectorii V_1 și V_2

$$V_1 = A_1 A_2 \cdot e^{-i\Phi_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{ik\varphi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{A}_k^{(1)} e^{-ik\varphi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi} \tag{29}$$

$$V_2 = A_1 A_2 \cdot e^{i\Phi_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k \cdot e^{ik\varphi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{A}_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{30}$$

găsim

$$C_m^{(1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m} \overline{A}_k^{(1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m} \cdot \overline{\lambda}_k^{(1)} e^{i\nu_1}, \tag{31}$$

$$C_m^{(2)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m} \overline{A}_k^{(2)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m} \cdot \overline{\lambda}_k^{(2)} \cdot e^{-i\nu_2}. \tag{32}$$

Din efectuarea produselor $l_1 V_1$ și $l_2 V_2$ și apoi a diferenței lor, obținem în final, mergînd după metoda indicată la diada de aspect I,

$$l_1 C_k^{(1)} - l_2 \cdot C_k^{(2)} = \gamma_k. \tag{33}$$

Din relația (15), scoțînd pe $\cos\psi$,

$$\cos\psi = \frac{l_1^2 + l_1^2 - \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ik\varphi}}{2 l_1 l_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\kappa \cdot e^{ik\varphi}, \tag{34}$$

unde

$$\Delta_k = \overline{\Delta}_{-k},$$

rezultă

$$\Delta_k = -\frac{\gamma_k}{2 l_1 l_2} \quad ; \quad k \neq 0, \tag{35}$$

$$\Delta_0 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - \gamma_0}{2 l_1 l_2} \quad ; \quad k = 0. \tag{36}$$

Mai departe se pot considera și coeficienții D_k ai dezvoltării în serie a funcției $\sin\psi$, în final diada de aspect IV fiind complet determinată. Se poate deci observa că, mergînd pe calea indicată în lucrările anterioare [6], [7] pentru studiul cinematic al diadei de aspect I, diada de aspect IV redusă la cea de aspect I se poate ușor rezolva, transpunînd formulele respective în acest sens și ținînd cont în același timp de relațiile suplimentare care intervin :

$$\beta_k = l_1 \cdot e^{-i\nu_1} \cdot \lambda_k^{(1)} - l_2 \cdot e^{i\nu_2} \cdot \lambda_k^{(2)}$$

și

$$\begin{aligned} L_k^{(2)} - L_k^{(1)} &= \alpha_k^{(1)*} - \alpha_k^{(2)*} + \beta_k, \\ L_k^{(1)} &= \overline{L}_k^{(1)}, \\ L_k^{(2)} &= \overline{L}_k^{(2)} \end{aligned} \tag{37}$$

DIADA DE ASPECT V

Considerăm cunoscut vectorul de poziție complex z_1 al punctului A_1 (fig. 7) :

$$z_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{38}$$

De asemenea este determinată mișcarea suportului cuplei A_2, deci vectorul de poziție complex z_2^* al punctului A_2^*, precum și unghiul λ_2 al suportului cu sensul pozitiv al axei ox:

$$z_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)*} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{39}$$

$$e^{i\lambda_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{40}$$

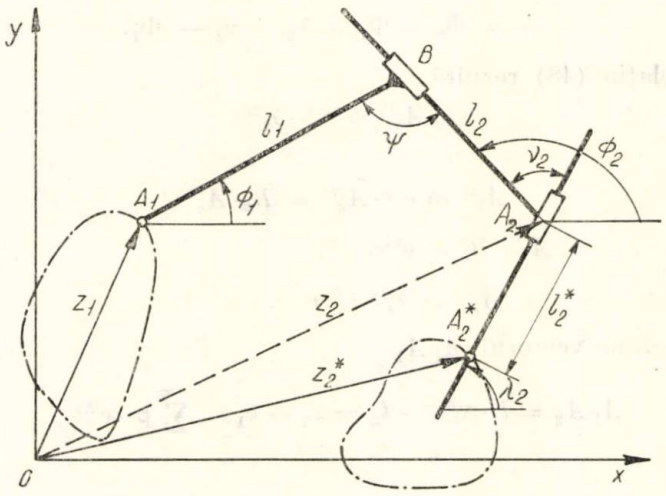


Fig. 7

Unghiul de transmitere ψ este fix, deci

$$B_0 = e^{i\psi} \quad ; \quad B_k = 0 \quad ; \quad k \neq 0. \tag{41}$$

Pentru unghiul Φ_1 vom avea dezvoltarea cunoscută

$$e^{i\Phi_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{42}$$

Pentru lungimile variabile l_2 și l_2^* vom avea dezvoltările

$$l_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{43}$$

$$l_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(2)*} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{44}$$

Considerînd variabil vectorul complex z_2 al punctului A_2, îl putem exprima prin

$$z_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{45}$$

Dar

$$z_2 = z_2^* + l_2^*, \tag{46}$$

de unde

$$\alpha_k^{(2)} = \alpha_k^{(2)^*} + L_k^{(2)^*}. \tag{47}$$

În felul acesta, studiul diadei de aspect V se reduce la studiul diadei de aspect II, $A_1 B A_2$.

Vom avea

$$\Phi_2 = \lambda_2 + \nu_2, \tag{48}$$

$$\psi = \Phi_2 - \Phi_1 = \lambda_2 + \nu_2 - \Phi_1. \tag{49}$$

Din relația (48) rezultă

$$A_k^{(2)} = e^{i\nu_2} \cdot \lambda_k^{(2)}$$

și din (49)

$$A_k^{(2)} = e^{i\psi} \cdot A_k^{(1)} = B_0 \cdot A_k^{(1)},$$

$$A_k^{(1)} \cdot B_0 = e^{i\nu_2} \cdot \lambda_k^{(2)}, \tag{50}$$

$$A_k^{(1)} = \lambda_k^{(2)} \cdot e^{i(\nu_2 - \psi)}.$$

Considerăm vectorul $A_1 A_2$

$$A_1 A_2 = l_1 \cdot e^{i\Phi_1} - l_2 = z_2 - z_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k \cdot e^{ik\varphi}, \tag{51}$$

în care

$$\beta_k = \alpha_k^{(2)} - \alpha_k^{(1)} = \alpha_k^{(2)^*} + L_k^{(2)^*} - \alpha_k^{(1)} \tag{52}$$

Dar

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k \cdot e^{ik\varphi} = l_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi} - \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{53}$$

de unde

$$\beta_k = l_1 \cdot A_k^{(1)} - L_k^{(2)}$$

sau

$$\beta_k = l_1 \cdot \lambda_k^{(2)} \cdot e^{i(\nu_2 - \psi)} = L_k^{(2)}. \tag{54}$$

Din relațiile (52) și (54) se obține

$$L_k^{(2)^*} + L_k^{(2)} = l_1 \cdot \lambda_k^{(2)} \cdot e^{i(\nu_2 - \psi)} - \alpha_k^{(2^*)} + \alpha_k^{(1)}. \tag{55}$$

Din triunghiul $A_1 B A_2$

$$|A_1 A_2|^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos \psi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k \cdot e^{ik\varphi}$$

obținem dezvoltarea

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{im\varphi} = l_1^2 + \sum_m \left(\sum_k L_{k+m}^{(2)} \overline{L_k^{(2)}} \right) e^{im\varphi} - 2 l_1 \cdot \cos \psi \left(\sum_m L_m^{(2)} \cdot e^{im\varphi} \right),$$

deci

$$\gamma_m = \sum_k L^{(2)}_{k+m}\,\overline{L}^{(2)}_k - 2l_1\cos\psi\cdot L^{(2)}_m \quad ; m \neq 0, \tag{56}$$

$$\gamma_0 = \sum_k L^{(2)}_k\,\overline{L}^{(2)}_k - 2l_1\cdot\cos\psi\cdot L^{(2)}_0 + l_1^2 \quad ; \quad m = 0. \tag{57}$$

Există de asemenea relaţiile

$$\begin{aligned} L^{(2)}_k &= \overline{L}^{(2)}_{-k}, \\ L^{(2)*}_k &= \overline{L}^{(2)*}_{-k}. \end{aligned} \tag{58}$$

Introducerea vectorului complex $V_1 = A_1 A_2\cdot e^{-i\Phi_1}$ conduce la

$$V_1 = A_1 A_2\cdot e^{-i\Phi_1} = l_1 - l_2\cdot e^{i\psi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C^{(1)}_k\cdot e^{ik\varphi},$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} C^{(1)}_k\cdot e^{ik\varphi} = l_1 - B_0\sum_{-\infty}^{+\infty} L^{(2)}_k\cdot e^{ik\varphi}.$$

De unde

$$C^{(1)}_m = -B_0\cdot L^{(2)}_m \quad ; \quad m \neq 0 \tag{59}$$

$$C^{(1)}_0 = l_1 - B_0 L^{(2)}_0 \quad ; \quad m = 0. \tag{60}$$

Pentru vectorul V_2:

$$V_2 = A_1 A_2\cdot e^{-i\Phi_2} = l_1\cdot e^{-i\psi} - l_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} C^{(2)}_k\cdot e^{ik\varphi},$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} C^{(2)}_k\cdot e^{ik\varphi} = \frac{l_1}{B_0} - \sum_{-\infty}^{+\infty} L^{(2)}_k\cdot e^{ik\varphi},$$

$$C^{(2)}_m = -L^{(2)}_m \quad ; \quad m \neq 0, \tag{61}$$

$$C^{(2)}_0 = \frac{l_1}{B_0} - L^{(2)}_0 \quad ; \quad m = 0. \tag{62}$$

Reducînd deci pe baza transformării (47) diada de aspectV în diada de aspect II, calculele se dezvoltă după aceleaşi metode, bineînţeles cu modificările respective şi ţinînd cont de relaţiile suplimentare

$$\begin{aligned} \beta_k &= l_1\cdot\lambda^{(2)}_k\cdot e^{i(\nu_2-\psi)} - L^{(2)}_k, \\ L^{(2)}_k + L^{(2)*}_k &= l_1\cdot\lambda^{(2)}_k\cdot e^{i(\nu_2-\psi)} - \alpha^{(2)*}_k + \alpha^{(1)}_k, \\ L^{(2)}_k &= \overline{L}^{(2)}_{-k}, \\ L^{(2)*}_k &= \overline{L}^{(2)*}_{-k}. \end{aligned}$$

Metoda seriilor armonice complexe [5], [6], [7] are un caracter unitar pentru toate grupele binare şi poate fi extinsă la categoriile de mecanisme corespunzătoare acestora.

Primită la redacţie la 29 septembrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Артоболевский И. И., *Теория механизмов и машин*, Гостехиздат, Москва, 1953.
2. Ассур Л. П., *Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации*, Изд. Акад. наук СССР, 1952.
3. Bogdan R. C., Pelecudi Chr., Bugaievski E., Calmaciuc L., *Studii asupra determinării pe cale experimentală a deplasărilor în mecanisme plane*, St. cerc. mec. apl., **VIII**, *3* (1957).
4. Bogdan R. C., Pelecudi Chr., Calmaciuc L., Antonescu Gr., *Asupra traductorului polar pentru cercetarea mecanismelor*, St. cerc. mec. apl., **X**, *3* (1959).
5. Bogdan R. C., Pelecudi Chr., *Contribuții la cinematica diadei Cebîșev*, St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959).
6. Bogdan R. C., *Utilizarea analizei Armonice în studiul grupelor assurice de aspectul II și III*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *2* (1963).
7. — *Considerații analitice asupra grupelor cinematice a două elemente*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *1* (1964).
8. Pelecudi Chr., Bogdan R. C., *Contribuții la cinematica mecanismelor cu patru elemente articulate*, St. cec. mec. apl., **XI**, *2* (1960).
9. Pollitt E. P., *Five-bar linkages with two drive cranes*, Machine Design, **32**, *2* (1962).
10. Tao C. D., *Die Erzeugung von Bewegung mit mehreren Rasten mit Hilfe des fünfgelenkigen Zweikurbel Getriebes*, Das Industrieblatt, Febr. 1962.

PLĂCI CURBE SUBȚIRI INTERSECTATE CU MARGINI LIBERE ÎN CONSOLĂ

P. CSONKA,
Budapesta

539.3

Articolul tratează statica plăcilor curbe subțiri poligonale constituite din sectoare identice. Suprafețele mediane ale sectoarelor sînt cilindri cu generatoarele orizontale. Fiecare sector se descarcă pe două laturi, pe arce verticale, iar cealaltă margine este complet liberă.
Încărcările sînt distribuite identic pe toate sectoarele și sînt constante în lungul generatoarelor. Considerațiile din studiu sînt bazate pe cunoscuta ipoteză de membrană, perturbațiile care se produc în vecinătatea arcelor fiind neglijate. Aplicarea formulelor deduse este ilustrată printr-un exemplu numeric.

1. INTRODUCERE

Pentru acoperirea suprafețelor mari, arhitectura modernă utilizează adesea plăci curbe subțiri poligonale, constituite din sectoare identice, separate unele de celelalte prin arce. Aceste plăci compuse au o înfățișare foarte interesantă, favorizată în special în cazul cînd marginile complet libere ies în consolă față de poligonul de bază (fig. 1).

Studiul de față tratează un tip special de plăci sectoriale menționate precedent, și anume plăcile rezultate din intersectarea cilindrilor. Pînă în prezent, nici o metodă analitică de calcul nu a fost publicată în literatura de specialitate. Scopul studiului este tocmai acela de a umple acest gol prin expunerea unei metode analitice.

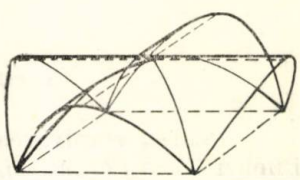


Fig. 1. — Placă curbă subțire interesectată cu margini libere în consolă.

2. NOTAȚII. IPOTEZE

În cele ce urmează sînt tratate plăcile compuse, avînd în plan o formă poligonală. Toate elementele plăcii curbe subțiri au formă identică

şi sînt simetrice în raport cu planul bisector, normal pe laturile poligonului de bază. Suprafaţa mediană a fiecărui sector este un cilindru avînd axa orizontală.

Elementele sectoriale se descarcă pe cele două laturi, pe arce verticale. Părţile exterioare, proiectîndu-se în afara poligonului de bază, sînt complet libere şi nerezemate pe vreun alt element al structurii.

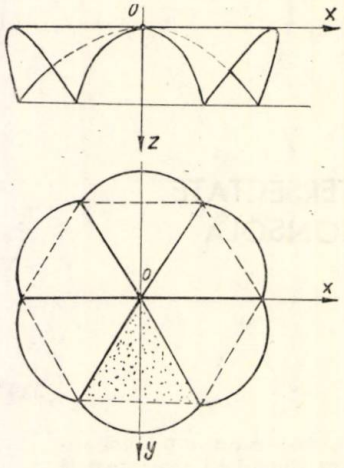


Fig. 2. — Sistemul de coordonate $O\,(x,\ y,\ z)$.

Conturul acestei zone marginale complet libere este o curbă care nu coincide cu nici una dintre generatoarele cilindrului, nu atinge nici una dintre ele şi nici nu o intersectează în mai mult de un punct.

Se presupune că placa este încărcată cu sarcini verticale, care sînt distribuite simetric în raport cu planele de simetrie ale poligonului de bază şi considerate constante în lungul generatoarelor.

Discuţia ce urmează este bazată pe ipotezele obişnuite ale teoriei de membrană, fiind neglijate efectele perturbatoare ce apar în vecinătatea arcelor marginale.

Studiul este făcut pentru sectorul de placă reprezentat punctat în figura 2. Sistemul cartezian de axe $Oxyz$ este orientat ca în figură, astfel încît axa verticală z să treacă prin centrul plăcii, iar planul $x = 0$ să coincidă cu planul de simetrie al sectorului de placă considerat.

Forma plăcii poate fi caracterizată prin ecuaţia suprafeţei mediane, adică prin

$$z = f(x), \tag{1}$$

iar forma marginii libere prin ecuaţia proiecţiei ei în plan

$$t(x) - y = 0. \tag{2}$$

Încărcarea verticală acţionînd asupra plăcii curbe subţiri poate fi exprimată prin intensitatea pe unitatea de suprafaţă în planul de referinţă şi poate fi caracterizată prin funcţia de încărcare

$$Z = Z\,(x). \tag{3}$$

3. FUNCŢIA DE EFORTURI A PROBLEMEI

Pentru rezolvarea problemei se introduce funcţia de eforturi a lui Pucher $F = F(x,y)$. În cazul plăcilor curbe subţiri încărcate cu sarcini verticale, această funcţie trebuie să satisfacă ecuaţia cu derivate parţiale mai generală

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + Z = 0.$$

Deoarece în cazul de față sînt valabile relațiile

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad Z = Z(x),$$

în locul ecuației cu derivate parțiale de mai sus poate fi scrisă următoarea ecuație :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + Z(x) = 0.$$

De aici rezultă

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{Z(x)}{\mathrm{d}^2 z / \mathrm{d}x^2}. \tag{4}$$

Deoarece suprafața mediană a sectorului de placă examinat este un cilindru avînd generatoarele paralele cu axa y, derivata $\partial^2 z / \partial x^2$ este funcție doar de variabila x. Astfel, membrul din dreapta al formulei (4) depinde exclusiv de variabila x. În conformitate cu aceasta,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \Phi(x), \tag{5}$$

în care $\Phi(x)$ este o funcție cunoscută de x :

$$\Phi(x) = -\frac{Z(x)}{\mathrm{d}^2 z / \mathrm{d}x^2}. \tag{6}$$

Din relația (5) se poate deduce prin dublă integrare formula

$$F = \Phi(x)\frac{y^2}{2} + C_1(x)y + C_2(x), \tag{7}$$

în care $C_1(x)$ și $C_2(x)$ reprezintă funcții de integrare necunoscute pentru moment.

În calcule, funcțiile $C_1(x)$ și $C_2(x)$ urmează să fie determinate din condițiile marginale ale problemei.

Deoarece structura examinată și încercarea respectivă sînt simetrice în raport cu arcele de rigidizare pe care se descarcă, arcele vor fi încărcate doar cu forțe acționînd în planul lor. În ipoteza că arcele sînt dimensionate corespunzător pentru a prelua toate aceste forțe, în lungul lor nu sînt de impus condiții restrictive pentru funcția F.

Situația este total diferită în lungul marginii libere, adică pentru $y = t(x)$, unde placa curbă subțire este nerezemată. Din această cauză, în lungul acestei linii de contur condițiile marginale sînt

$$[F]_{y=t(x)} = 0, \quad \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{y=t(x)} = 0. \tag{8}$$

Pentru cazul reprezentat de relaţia (5), condiţiile marginale pot fi formulate după cum urmează :

$$\Phi(x) \cdot \frac{[t(x)]^2}{2} + C_1(x) \cdot t(x) + C_2(x) = 0,$$

$$\Phi(x) \cdot t(x) + C_1(x) = 0.$$

Din aceste două ecuaţii pot fi determinate univoc funcţiile de integrare $C_1(x)$ şi $C_2(x)$:

$$C_1(x) = - \Phi(x) \cdot t(x),$$

$$C_2(x) = + \Phi(x) \cdot \frac{[t(x)]^2}{2}.$$

Ducînd aceste valori în (7), se obţine următoarea formulă care determină funcţia de eforturi a problemei :

$$F = \frac{1}{2} \Phi(x) \cdot [t(x) - y]^2. \tag{9}$$

Odată determinată funcţia de eforturi F, eforturile proiectate pot fi calculate cu ajutorul relaţiilor cunoscute :

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad n_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Se obţine în consecinţă

$$\left.\begin{aligned} n_x &= \Phi(x), \\ n_{xy} &= + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} [t(x) - y] + \Phi(x) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}, \\ n_y &= - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} [t(x) - y] + 2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} [t(x) - y] \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} + \\ &\quad + \Phi(x) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \Phi(x)[t(x) - y] \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

În cazul special cînd

$$\Phi(x) = \Phi_0 = \text{const},$$

formula (9) pentru funcţia de eforturi poate fi scrisă după cum urmează :

$$F = \frac{\Phi_0}{2} [t(x) - y]^2, \tag{12}$$

iar formulele (11) capătă forma mai simplă

$$\left.\begin{aligned} n_x &= \Phi_0, \\ n_{xy} &= \Phi_0 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}, \\ n_y &= \Phi_0 \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \Phi_0[t(x) - y] \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

4. EFORTURILE CARE ACȚIONEAZĂ ASUPRA ARCELOR

Pentru calculul complet al plăcilor subțiri intersectate este necesar să cunoaștem eforturile care acționează asupra arcelor intermediare ale acoperișului. Pentru simplitatea expunerii ne vom ocupa de determinarea lor pe un exemplu concret; în alte cazuri, procedeul va fi asemănător cu acela arătat în cele ce urmează.

Suprafața mediană a sectoarelor de placă ale acoperișului tratat este un cilindru parabolic, proiecția marginii libere fiind în plan orizontal o parabolă (fig. 3). Ecuația suprafeței mediane a sectorului de placă punctat este

$$z = \frac{h}{a^2} x^2,$$

iar aceea a marginii libere

$$y - t(x) = 0,$$

în care

$$t(x) = b - \frac{cx^2}{a^2}. \tag{14}$$

Ca încărcare acționînd asupra plăcii vom considera o încărcare verticală uniform distribuită în plan orizontal:

$$Z = Z_0 = \text{const.}$$

În exemplul ales, funcția $\Phi(x)$ definită de formula (4) are valoarea constantă

$$\Phi_0 = -\frac{Z}{\mathrm{d}^2 z/\mathrm{d}x^2} = -\frac{Z_0}{2h/a^2} = -\frac{Z_0 a^2}{2h}. \tag{15}$$

La determinarea eforturilor care acționează asupra arcelor intermediare este avantajos să introducem sistemul de coordonate $O(u, v, z)$ în locul sistemului $O(x, y, z)$. Originea și axa z din noul sistem coincid cu acelea din sistemul original, iar planul $v = 0$ coincide cu planul arcului considerat. Între coordonatele celor două sisteme subzistă următoarele relații:

$$x = u \cos \alpha - v \sin \alpha,$$

$$y = u \sin \alpha + v \cos \alpha.$$

În sistemul de coordonate $O(u, v, z)$, suprafața mediană a sectorului de placă considerat poate fi exprimată prin

$$z = \frac{h}{a^2}(u\cos\alpha - v\sin\alpha)^2, \tag{16}$$

iar ecuația proiecției marginii libere este

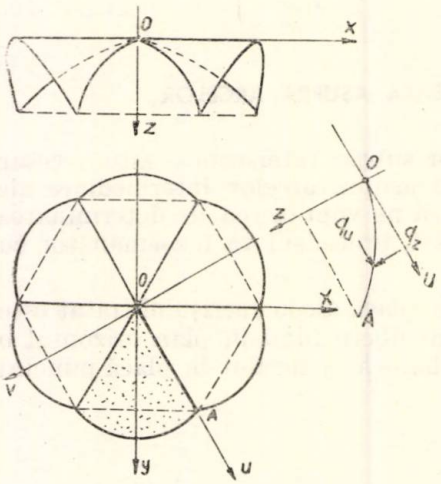


Fig. 3.— Sistemul de coordonate $O(u, v, z)$.

$$\frac{c}{a^2}(u\cos\alpha - v\sin\alpha)^2 + (u\sin\alpha + v\cos\alpha) - b = 0. \tag{17}$$

Ținînd seama de aceste considerații, ecuația (12) pentru funcția de eforturi se modifică după cum urmează :

$$F = \frac{\Phi_0}{2}\left[\frac{c}{a^2}(u\cos\alpha - v\sin\alpha)^2 + (u\sin\alpha + v\cos\alpha) - b\right]^2. \tag{18}$$

În consecință, valorile eforturilor proiectate în direcțiile u și v sînt în general

$$n_u = \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \Phi_0\left[\frac{6c^2}{a^4}\sin^2\alpha\,(u\cos\alpha - v\sin\alpha)^2 + \frac{6c}{a^2}v\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha + \frac{2c}{a^2}u\sin\alpha(\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha) + \cos^2\alpha - \frac{2c}{a^2}b\sin^2\alpha\right],$$

$$n_{uv} = -\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} = \Phi_0\left[\frac{6c^2}{a^4}\cos\alpha\cdot\sin\alpha\,(u\cos\alpha - v\sin\alpha)^2 - \frac{2c}{a^2}u\cos\alpha(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) - \frac{2c}{a^2}v\sin\alpha(\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha) - \left(1 + \frac{2c}{a^2}b\right)\cos\alpha\sin\alpha\right],$$

$$n_v = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \Phi_0\left[\frac{6c^2}{a^4}\cos^2\alpha\,(u\cos\alpha - v\sin\alpha)^2 + \frac{6c}{a^2}(u\cos^2\alpha\sin\alpha) + \frac{2c}{a^2}v\cos\alpha(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) + \sin^2\alpha - \frac{2c}{a^2}b\cos^2\alpha\right].$$

Ele capătă următoarele expresii simplificate în lungul arcului $v = 0$:

$$[n_u]_{v=0} = \Phi_0\left[\frac{6c^2}{a^4}u^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \frac{2c}{a^2}u\sin\alpha(\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha) + \right.$$

$$\left. + \cos^2\alpha - \frac{2c}{a^2}b\sin^2\alpha\right],$$

$$[n_{uv}]_{v=0} = \Phi_0\left[\frac{6c^2}{a^4}u^2\cos^3\alpha\sin\alpha - \frac{2c}{a^2}u\cos\alpha(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) - \right. \tag{19}$$

$$\left. -\left(1 + \frac{2cb}{a^2}\right)\cos\alpha\sin\alpha\right],$$

$$[n_v]_{v=0} = \Phi_0\left[\frac{6c^2}{a^4}u^2\cos^4\alpha + \frac{6c}{a^2}u\cos^2\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha - \frac{2c}{a^2}b\cos^2\alpha\right].$$

Dintre eforturile proiectate n_u, n_{uv} și n_v, doar eforturile n_{uv} și n_v acționează asupra arcului $v = 0$, și aceasta pe amîndouă părțile. De aceea trebuie luate în calcule dublul valorilor eforturilor $[n_{uv}]_{v=0}$ și $[n_v]_v = 0$.

Aceste eforturi, acționînd asupra arcului, vor fi caracterizate prin valoarea lor raportată la unitatea de lungime în proiecția în plan a arcului. În consecință, valoarea componentelor eforturilor acționînd asupra arcului în direcțiile u și v sînt

$$q_u = 2[n_{uv}]_v = 0; \tag{20}$$

$$q_z = 2[n_{uv}]_{v=0}\cdot\operatorname{tg}\varphi + 2[n_v]_{v=0}\cdot\operatorname{tg}\psi. \tag{21}$$

La capătul acestor calcule se obțin formule pentru componentele eforturilor q_u și q_z, înlocuind valorile (19) și (21) în formulele (20) și (21).

5. EXEMPLU NUMERIC

Fie de determinat eforturile proiectate în placa curbă subțire intersectată, construită peste o suprafață pătrată indicată în figura 4.

În cazul exemplului considerat avem

$$a = 10{,}0 \text{ m}; \; b = 15{,}0 \text{ m}; \; c = 5{,}0 \text{ m}; \; h = 8{,}0 \text{ m}; \; \alpha = 45°.$$

Intensitatea încărcării verticale raportată la unitatea de suprafață în plan orizontal este

$$Z = Z_0 = 320 \text{ kg/m}^2.$$

Suprafețele mediane ale sectoarelor de placă sînt cilindri parabolici, proiecția marginii libere fiind tot o parabolă. Ecuația suprafeței mediane a sectorului de placă, punctat în figură, este

$$z = \frac{h}{a^2}x^2 = \frac{8{,}0}{10{,}0^2}x^2 = 0{,}08\,x^2.$$

Proiecția orizontală a marginii libere poate fi definită prin ecuația

$$y = t(x) = 15{,}0 - 5{,}0\,\frac{x^2}{10{,}0^2} = 15 - 0{,}05x^2.$$

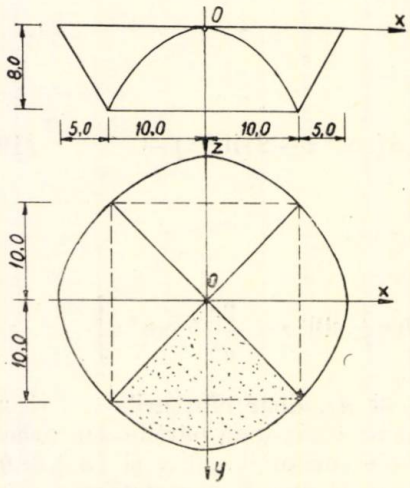


Fig. 4. — Date numerice.

Utilizînd valorile numerice precedente, se obține cu ajutorul formulei (15) următoarea relație :

$$\Phi_0 = -\frac{320 \times 10{,}0^2}{2 \times 8{,}0} = -\,2\,000\ \text{kg}.$$

Conform formulei (13), se obțin următoarele valori pentu eforturile proiectate :

$$\left.\begin{aligned} n_x &= -\,2\,000\ \text{(kg/m)},\\ n_{xy} &= -\,2\,000(-\,0{,}1x) = 200x\,\text{(kg/m)},\\ n_y &= -\,2\,000(-\,0{,}1\,x)^2 - 2\,000(15 - \\ &\quad -\,0{,}05\,x^2 - y)(-0{,}1) = (3000 + \\ &\quad +10\,x^2 - 200\,y)\,\text{(kg/m)}. \end{aligned}\right\}$$

Primită la redacție la 5 aprilie 1966

CALCULUL LA FORȚE ORIZONTALE AL PEREȚILOR CU UN ȘIR DE GOLURI ÎN POZIȚIE PRONUNȚAT DISIMETRICĂ [1])

de FLORIAN VIRGILIU
Institutul de petrol, gaze și geologie

539.4

În prima parte a lucrării se indică modul de organizare a calculelor diafragmelor cu un singur șir nesimetric de goluri sau cu două șiruri simetrice de goluri la forțe orizontale, în cazul disimetriilor structurale pronunțate (în completarea metodei de calcul propusă de autor în lucrarea [7]).

În partea a doua a lucrării se dă matricea coeficienților necunoscutelor, precum și vectorul termenilor liberi (de încărcare), pentru rezolvarea sistemului de ecuații cu ajutorul mijloacelor moderne de calcul.

În anexă se dau intabulate valorile termenilor liberi ai ecuațiilor pentru o încărcare de tip seismic (forțe concentrate de intensități proporționale cu săgețile și cu masele — egale — concentrate de nivel) în primele trei moduri de vibrație.

În lucrarea [7] s-a expus o metodă generală de calcul, prin încercări al diafragmelor cu un șir nesimetric sau cu două șiruri simetrice de goluri de dimensiuni oarecare (aceleași pe înălțime), supuse la acțiunea unei încărcări orizontale oarecare.

După cum rezultă din cele arătate [7], încercările respective se bazează pe cunoașterea apriori a unei variații apropiate de variația reală pe înălțime a salturilor de moment de pe diagramele de moment ale lamelelor verticale, pe sistemul real:

$$C_{kr} = f_r(k) \quad \begin{cases} r = 1,2 \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{1}$$

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliqué" **11**, 1 (1967) (în limba franceză).

În încercările succesive se introduc pe rînd variațiile rezultate din încercările anterioare; în prima încercare (etapa I de calcul) se introduce variația așa-numitelor valori inițiale de calcul:

$$C^i_{kr} = (a_r + \lambda_r \cdot l) \cdot X^i_k(k). \qquad (2)\ ^2)$$

În cazul pozițiilor pronunțat disimetrice ale șirului de goluri, această variație este însă în general foarte îndepărtată de variația valorilor reale.

Ca urmare, valorile îmbunătățite C'_{kr}, obținute din prima încercare, rezultă de același ordin de mărime cu valorile reale, însă variația lor pe înălțime (în funcție de k) rămîne încă îndeajuns de îndepărtată de cea reală. Totodată, corectarea acestei variații în încercările ulterioare (etapa a II-a de calcul și următoarele) este slab convergentă.

În acest caz, organizarea încercărilor urmează a fi efectuată, după etapa I de calcul, în modul arătat mai jos, prin recalcularea valorilor forțelor tăietoare (X_k) din grinzile de cuplare (buiandrugi).

1. RECALCULAREA FORȚELOR TĂIETOARE DIN GRINZILE DE CUPLARE

Așa cum se arată în [7], datorită aplicării cuplelor exterioare C_{kr} pe sistemul de bază ales, încărcat cu forțele exterioare F_{kr} (proporționale cu momentele de inerție ale elementelor verticale) și datorită diferenței de rigiditate la forfecare a spaleților verticali, se produce o redistribuire a forțelor F_k între cei doi spaleți. Această redistribuire a fost tradusă în [7] prin suprapunerea peste diagramele de momente încovoietoare din spaleți a momentelor suplimentare (m_k, $-m_k$):

$$m_k = m'_k + m''_k, \qquad (3)$$

unde m'_k se datorește diferenței de rigiditate la forfecare a spaleților, iar m''_k aplicării suplimentare a cuplelor exterioare C_{kr}.

Între aceste mărimi există relațiile (2.12) și respectiv (2.13), date în [7].

Dacă cuplele C_{kr} sînt egale cu salturile de moment de pe diagramele de momente ale spaleților verticali din sistemul real și dacă se admite că pozițiile punctelor de inflexiune ale grinzilor de cuplare (buiandrugi) în situația reală sînt cele rezultate în baza aproximației (1.14) din expresiile (1.34) din [7], între momentele suplimentare reale m''_k și forțele tăietoare reale din buiandrugi există relația (dedusă din (2.18) din [7])

$$m''_k - t' \cdot (m''_{k-1} + m''_{k+1}) = -q \cdot (N_k + N_{k+1}) = -q \cdot \left(2 \sum_k^n X_i - X_k\right) \qquad (4)$$

$$\text{pentru } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)$$

cu convenția (2.22) din [7] pentru generalizarea relației de mai sus.

Expresiile coeficienților t' și q, precum și a efortului axial N_k, sînt (2.19), (2.20) și, respectiv, (2.21), date în [7].

---

[2]) În această expresie precum și în cele următoare, s-a introdus indicele i la partea superioară pentru a marca valorile inițiale ale necunoscutelor respective.

Din rezolvarea ecuațiilor (4) de mai sus rezultă

$$m_k'' = \varphi_k(X_j) \quad \begin{cases} j = 1, 2, \ldots, n, \\ k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1), \end{cases} \tag{5}$$

unde $\varphi_k(X_j)$ este o funcție liniară în X_j.

În baza ipotezelor admise,

$$X_k = X_k^i + X_k' + X_k'', \tag{6}$$

unde X_k^i sînt valorile inițiale ale forțelor tăietoare din buiandrugi (corespunzătoare momentelor M_{kr}) și care pot fi calculate cu ajutorul ecuațiilor (1.23) din [7], iar X_k' și X_k'' sînt forțele tăietoare corespunzătoare diagramelor de momente $(m_k', -m_k')$ și, respectiv, $(m_k'', -m_k'')$. Expresiile acestora pot fi deduse din ecuațiile (1.13), după cum se arată mai jos.

1.1. CALCULUL NECUNOSCUTELOR X_k' și X_k''

Dacă în (1.8) din [7] se înlocuiesc diagramele de momente ale spaleților verticali cu diagramele $(m_k, -m_k)$ (fig. 1), adică

$$\begin{matrix} M_{k1} \text{ cu } & m_k, \\ M_{k2} \text{ cu } & -m_k, \end{matrix} \tag{7}$$

rezultă, cu notațiile și cu aproximația (1.14) din [7]:

$$\left.\begin{aligned} A_{k1} &= \sum_1^k m_i + \frac{m_0 - m_k}{2} + \frac{\lambda_1}{\frac{a_1}{l} + \lambda_1} \cdot \frac{\Delta_1}{60} \cdot (m_{k-1} - m_k), \\ A_{k2} &= -\left[\sum_1^k m_i + \frac{m_0 - m_k}{2} + \frac{\lambda_2}{\frac{a_2}{l} + \lambda_2} \cdot \frac{\Delta_2}{60} \cdot (m_{k-1} - m_k) \right] \cdot \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Așadar, expresia factorului de încărcare dedusă din (1.11) va fi

$$d_k = -\frac{l}{K_1 + K_2} \cdot \varepsilon \cdot A_k, \tag{9}$$

unde s-a notat

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \left(\frac{a_1}{l} + \lambda_1\right) \cdot \frac{1}{\eta_{i1}} - \left(\frac{a_2}{l} + \lambda_2\right) \cdot \frac{1}{\eta_{i2}}, \\ \eta_{ir} &= \frac{I_r}{I} \qquad (r = 1, 2), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

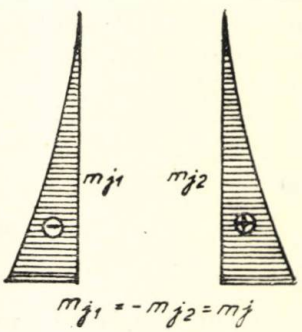


Fig. 1

și

$$A_k = \sum_1^k m_i + \frac{m_0 - m_k}{2} + \frac{\lambda_1 \cdot \Delta_1 \cdot \frac{1}{\eta_{i1}} - \lambda_2 \cdot \Delta_2 \cdot \frac{1}{\eta_{i2}}}{60\,\varepsilon} \cdot (m_{k-1} - m_k). \tag{11}$$

În consecinţă, dacă se notează

$$\left.\begin{aligned} \beta' &= \beta \cdot \frac{l}{L} \cdot \varepsilon, \\ \gamma' &= \frac{\lambda_1 \cdot \Delta_1 \cdot \dfrac{1}{\eta_1} - \lambda_2 \cdot \Delta_2 \cdot \dfrac{1}{\eta_2}}{30\,\varepsilon}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

forţele tăietoare (Z_k) din buiandrugi, corespunzătoare unor diagrame de momente de forma (7), vor fi date de următoarea relaţie, similară cu (1.23) din [7]:

$$Z_{k-1} - 2\alpha \cdot Z_k + Z_{k+1} = -\frac{\beta'}{h} \cdot [m_{k+1} - m_{k-1} + \gamma' \cdot (\mu_{k-2} - 3\mu_{k-1} + 3\mu_k - \mu_{k+1})] \tag{13}$$

$$\text{pentru } k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

în care

$$\left.\begin{aligned} &\mu_k = m_k \text{ pentru } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ &\mu_{-1} = m_0 \\ &\mu_{n+1} = -\,m_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

cu convenţiile (pentru generalizare)

$$m_{n+1} = 0\,; \qquad Z_0 = 0\,; \qquad Z_{n+1} = Z_n. \tag{15}$$

Relaţia (13) de mai sus mai poate fi pusă sub forma

$$Z_k - t \cdot (Z_{k+1} - Z_{k-1}) = a' \cdot [m_{k+1} - m_{k-1} + \gamma' \cdot (\mu_{k-2} - 3\mu_{k-1} + 3\mu_k - \mu_{k+1})] \tag{13'}$$

$$\text{pentru } k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

unde t este coeficientul de transmitere, avînd aceeaşi expresie ca în cazul ecuaţiilor (1.23) din [7]:

$$t = \ldots = t_{k-1,\,k} = t_{k+1,\,k} = \ldots = t_{n,\,n} = \frac{1}{2\alpha}, \tag{16}$$

iar

$$a' = \frac{\beta'}{2\alpha \cdot h} = \frac{\beta}{2\alpha \cdot h} \cdot \frac{l}{L} \cdot \varepsilon. \tag{17}$$

Din rezolvarea prin metodele cunoscute [12] (de exemplu prin aproximaţii succesive) a ecuaţiilor (13') rezultă

$$Z_k = f_k(m_j) \quad \begin{cases} j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1), \\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \end{cases} \tag{18}$$

unde $f_k(m_j)$ este o funcţie liniară în m_j.

Dacă relațiile (13), (13′) sau (18) de mai sus se particularizează pentru momentele m'_k și m''_k, vor rezulta forțele tăietoare X'_k, respectiv X''_k.

Se observă însă că, dacă valorile necunoscutelor X'_k pot fi calculate numeric cu ajutorul ecuațiilor de mai sus, adică

$$X'_k = f_k(m'_j), \tag{18′}$$

întrucît valorile momentelor m'_k rezultă din rezolvarea ecuațiilor (2.12) din [7], valorile necunoscutelor X''_k nu pot fi calculate numeric, întrucît momentele m''_k sînt de asemenea necunoscute.

Din relația (18) de mai sus rezultă însă ecuațiile

$$X''_k = f_k(m''_j) \quad \begin{cases} j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1) \\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{cases} \tag{18″}$$

1.2. CALCULUL VALORILOR NECUNOSCUTELOR X''_k (SAU X_k) PRIN ÎNCERCĂRI

Se observă că așa-numitele valori inițiale X^i_k sînt valorile forțelor tăietoare din grinzile de cuplare, obținute din egalarea deplasărilor pe verticală ale capetelor acestora, pe un sistem de bază obținut prin secționarea sistemului real în dreptul punctelor de inflexiune ale grinzilor de cuplare și încărcat cu forțe proporționale cu rigiditățile spaleților verticali. Dacă șirul de goluri nu este simetric dispus, nu rezultă însă implicit și egalarea deplasărilor pe orizontală.

Punînd în continuare condiția de continuitate pe orizontală a sistemului de bază încărcat suplimentar cu forțele X^i_k, rezultă redistribuirea forțelor exterioare între cei doi spaleți verticali, concretizată prin suprapunerea peste diagramele de momente M_{kr} a diagramelor suplimentare $(m^i_k, -m^i_k)$, calculate cu ajutorul ecuațiilor (2.6′) din [7]. Rezultă totodată o deranjare a continuității pe verticală. Sistemului de bază încărcat suplimentar cu momentele $(m^i_k, -m^i_k)$ i se poate pune însă din nou condiția de continuitate a deplasărilor pe verticală și astfel, din aproape în aproape, se pot găsi valorile reale ale necunoscutelor X_k și distribuția reală a forțelor exterioare F_k pe spaleții verticali.

Încercările conduse în acest fel sînt însă slab convergente. Convergența încercărilor poate fi îmbunătățită, dacă se cunosc niște valori apropiate de cele reale ale necunoscutelor X_k.

Astfel, dacă $\overline{X}_k$ sînt valorile aproximative ale necunoscutelor X_k, se poate scrie

$$X_k = \overline{X}_k + \sum_i \Delta_i X_k, \tag{19}$$

unde $\Delta_i X_k$ sînt corecțiile ce trebuie aduse succesiv valorilor aproximative $\overline{X}_k$ pentru a obține valori din ce în ce mai apropiate de valorile reale ale necunoscutelor X_k.

În mod similar, dacă $\overline{m}''_k$ sînt valorile aproximative corespunzătoare, în baza relațiilor (5) de mai sus, ale momentelor suplimentare m''_k :

$$\overline{m}''_k = \varphi_k(\overline{X}_j)' \tag{5′}$$

se poate scrie

$$m_k'' = \overline{m}_k'' + \sum_i \delta_i \, m_k'', \tag{20}$$

respectiv

$$m_k = \overline{m}_k + \sum_i \delta_i \, m_k'', \tag{20'}$$

unde

$$\overline{m}_k = \overline{m}_k'' + m_k', \tag{20''}$$

iar $\delta_i \, m_k''$ sînt corecțiile succesive ce trebuie aduse valorilor $\overline{m}_k''$ (sau $\overline{m}_k$) pentru a obține valori din ce în ce mai apropiate de valorile reale m_k'' (sau m_k).

Calculul corecțiilor $\Delta_i \, X_k$ și $\delta_i \, m_k''$ se poate face în modul următor. În baza expresiilor (6), (19) și (20), relația (18'') de mai sus devine :

$$\overline{X}_k - (X_k^i + X_k') + \sum_i \Delta_i \, X_k = f_k(\overline{m}_j'' + \sum_i \delta_i \, m_j'') \tag{21}$$

sau, utilizînd relațiile (18') și (20),

$$\sum_i \Delta_i \, X_k = (\mathfrak{X}_k + X_k^i - \overline{X}_k) + \sum_i f_k(\delta_i \, m_j''), \tag{22}$$

în care

$$\mathfrak{X}_k = f_k(\overline{m}_j). \tag{23}$$

De asemenea, relația liniară (5) devine

$$\overline{m}_k'' + \sum_i \delta_i \, m_\alpha'' = \varphi_k \, (\overline{X}_j + \sum_i \Delta_i \, X_j) \tag{24}$$

sau, ținînd seama de (18),

$$\sum_i \delta_i \, m_k'' = \sum_i \varphi_k \, (\Delta_i \, X_j). \tag{25}$$

În consecință, se vede că organizarea încercărilor trebuie să fie următoarea :

a) se calculează, așa cum se arată în [7], valorile X_k^i și m_k' ;

b) se aleg valorile aproximative $\overline{X}_k$;

c) se calculează apoi, rezolvînd ecuațiile de forma (4) de mai sus,

$$\overline{m}_k'' = \varphi_k \, (\overline{X}_j)$$

și

$$\overline{m}_k = \overline{m}_k'' + m_k' ;$$

d) cu ajutorul ecuațiilor (13') se determină

$$\mathfrak{X}_k = f_k(\overline{m}_j)$$

și

$$\Delta_1 \, X_k = (\mathfrak{X}_k + X_k^i) - \overline{X}_k ;$$

e) se rezolvă apoi pe rînd ecuații de forma (4) și (13′), calculîndu-se succesiv

$$\begin{aligned} &\delta_1 m_k'' = \varphi_k(\Delta_1 X_j), \\ \Delta_2 X_k = f_k(\delta_1 m_j'');\quad &\delta_2 m_k'' = \varphi_k(\Delta_2 X_j), \\ &\vdots \\ \Delta_i X_k = f_k(\delta_{i-1} m_j'');\quad &\delta_i m_k'' = \varphi_k(\Delta_i X_j), \\ &\vdots \end{aligned}$$

f) valorile finale ale necunoscutelor X_k și m_k se calculează apoi cu ajutorul relațiilor (19) și (20′) de mai sus.

OBSERVAȚII

1. Rezolvarea ecuațiilor de forma (4) sau (13′) se recomandă a se face prin aproximații succesive, așa cum se arată în [7], chiar dacă coeficientul de transmitere t, calculat cu formula (16), rezultă apropiat de 0,5 (criteriul de covergentă al lui Wittmeyer fiind totuși asigurat), întrucît operațiile, deși numeroase în acest caz, sînt simple, se efectuează în mod mecanic (cu același coeficient de transmitere), sînt ușor de asimilat și ferite de erori din neatenție. Menționăm însă că rezolvarea acestor ecuații se poate face prin mai puține operații cu ajutorul coeficienților de transmitere la stînga și la dreapta, metodă expusă în [12], capitolul V, § 27.

2. Gradul de exactitate al valorilor finale depinde de valorile absolute ale ultimelor corecții aplicate. Pentru a micșora numărul de încercări este necesar ca valorile $\overline{X}_k$ să fie cît mai apropiate de valorile reale. În acest scop se recomandă ca aceste valori să fie adoptate de la o diafragmă cu dimensiuni apropiate, calculată anterior sau să se calculeze conform indicațiilor date mai jos.

1.3. CALCULUL VALORILOR APROXIMATIVE $\overline{X}_k$

În acest scop, conform calculelor indicate în capitolul 3 din [7], etapa I de calcul, se poate lua

$$\overline{X}_k = \mathfrak{F}_k' = \frac{C_{k1}' + C_{k2}'}{L}. \tag{26}$$

Pe baza considerațiilor din lucrarea citată, în urma unor calcule simple rezultă

$$\overline{X}_k = \rho_k \cdot X_k^i, \tag{27}$$

în care:

$$\rho_k = -\frac{P_k}{\mathfrak{R}_k + \dfrac{1 + 0{,}2\,\Delta_g}{3} \cdot \dfrac{E_D}{E_g} \cdot l \cdot X_k^i}. \tag{28}$$

Termenii P_k și $\mathfrak{P}_k$ urmează a fi calculați în tablouri, așa cum se arată în capitolul 3 din [7], în care caz este necesar să se calculeze și momentele $m_k''^{i} = \varphi_k(X_j^i)$.

OBSERVAȚIE

Calculele de mai sus au la bază aproximația (1.14) din [7], iar poziția punctelor de inflexiune din buiandrugi se calculează aproximativ conform § 1.2 din [7]. Pentru obținerea unor rezultate mai exacte, calculele pot fi continuate cu etapa a II-a de calcul, indicată în [7], care corectează implicit pozițiile punctelor de inflexiune. Acest calcul suplimentar nu este însă necesar să fie efectuat decît în cazuri cu totul excepționale.

1.4. CALCULUL EFORTURILOR ÎN ELEMENTELE DIAFRAGMEI

După calcularea necunoscutelor X_k și m_k, eforturile în spaleți vor fi :
— eforturile axiale (din acțiunea indirectă) sub nivelul k,

$$N_k = \pm \sum_{k}^{n} X_i, \tag{29}$$

semnul (+) revenind spaletului 1 ($r = 1$), iar semnul (—) spaletului 2 ($r = 2$) ;

— momentele încovoietoare :

$$\left.\begin{aligned} \overline{M}_{kr}^{s} &= (M_{kr} \pm m_k) + l \cdot \left(\frac{a_r}{l} + \lambda_r\right) \cdot \sum_{k+1}^{n} X_i \\ \overline{M}_{kr}^{j} &= (M_{kr} \pm m_k) + l \cdot \left(\frac{a_r}{l} + \lambda_r\right) \cdot \sum_{k}^{n} X_i \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

indicii s și j referindu-se respectiv poziției de deasupra și de sub nivelul k, iar semnele (+) și (—) respectiv spaletului 1 ($r = 1$) sau 2 ($r = 2$).

Eforturile în grinzile de cuplare vor fi :
— forțe tăietoare,

$$T_k^b = X_k ; \tag{31}$$

— momentele încovoietoare,

$$M_{kr}^b = \pm l \cdot \lambda_r \cdot X_k. \tag{32}$$

OBSERVAȚIE

În cazul diafragmelor cu două șiruri de goluri simetrice, eforturile axiale în spaletul central sînt nule.

De asemenea momentele încovoietoare în spaletul central vor fi egale cu dublul valorilor calculate.

2. CALCULUL DIRECT AL NECUNOSCUTELOR X_k ȘI m_k CU AJUTORUL CALCULATOARELOR ELECTRONICE NUMERICE

S-a văzut că o diafragmă cu un șir nesimetric de goluri, privită ca un cadru etajat nesimetric (1], [7], este un sistem de $3n$ ori static nedeterminat (n = numărul de nivele).

În baza aproximației (1.14) și al ipotezei simplificatoare admise în § 1.2 din [7], sistemul rămîne de $2n$ ori static nedeterminat, întrucît pozițiile punctelor de inflexiune ale grinzilor de cuplare (buiandrugi) pot fi calculate cu relațiile (1.34) din [7]. Ca necunoscute hiperstatice se aleg forțele tăietoare (X_k) din grinzile de cuplare și momentele încovoietoare suplimentare (m_k, $-m_k$) din spaleți, care se suprapun peste momentele M_{kr}, proporționale cu rigiditățile la încovoiere ale spaleților :

$$M_{kr} = \eta_r \cdot M_k \qquad (r = 1,\ 2), \tag{33}$$

unde M_k sînt momentele forțelor exterioare, calculate pe întreaga diafragmă (considerată ca o consolă incastrată în fundație) :

$$\begin{gathered} M'_{kr} = M_{kr} \pm m_k \\ (+ \text{pentru } r = 1 \text{ și } - \text{pentru } r = 2). \end{gathered} \tag{34}$$

În baza principiului suprapunerii efectelor, se poate scrie

$$\left.\begin{aligned} X_k &= X_k^i + Z_k, \\ m_k &= m'_k + m''_k. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Între aceste necunoscute există relațiile, deduse din (1.23) din [7] și (13′) de mai sus :

$$\begin{gathered} -t.\ X_{k-1} + X_k - t.\ X_{k+1} - a' \cdot [-m_{k-1} + m_{k+1} + \gamma' \cdot (\mu_{k-2} - \\ - 3\mu_{k-1} + 3\mu_k - \mu_{k+1})] = a \cdot U_k \\ \text{pentru } k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \end{gathered} \tag{36}$$

cu convențiile (pentru generalizare)

$$\left.\begin{aligned} \mu_k &= m_k \text{ pentru } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\ \mu_{-1} &= m_0, \\ \mu_{n+1} &= -m_{n-1}, \\ m_{n+1} &= 0, \\ X_0 &= 0, \\ X_{n+1} &= X_n. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

În ecuațiile de mai sus,

$$\begin{aligned} U_k &= M_{k+1} - M_{k-1} + \gamma \cdot (\mathfrak{M}_{k-2} - 3\,\mathfrak{M}_{k-1} + 3\,\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_{k+1}) = \\ &= h \cdot [2 \sum_k^n F_i - F_k + \gamma \cdot (\mathfrak{F}_k - \mathfrak{F}_{k-1})], \end{aligned} \tag{38}$$

cu convenţiile (pentru generalizare)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_k &= M_k \text{ pentru } k = 0, 1, 2, \ldots, n \\ \mathfrak{M}_{-1} &= M_0, \\ \mathfrak{M}_{n+1} &= -M_{n-1}, \\ M_{n+1} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

respectiv

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_k &= F_k \text{ pentru } k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \mathfrak{T}_0 &= -\sum_i^n F_i, \\ \mathfrak{T}_n &= 0, \\ \mathfrak{T}_{n+1} &= F_n. \end{aligned}\right\} \tag{39'}$$

Coeficienţii t, a' şi γ' au expresiile (16), (17) şi (12) de mai sus, respectiv

$$a' = a \cdot \frac{l}{L} \cdot \varepsilon, \tag{17'}$$

întrucît din [7] rezultă

$$a = \frac{\beta}{2\alpha \cdot h}. \tag{40}$$

De asemenea, din ecuaţiile (2.18) din [7] se obţine

$$q \cdot (X_k + X_{k+1}) - t' \cdot m_{k-1} + (1 + t') \cdot (m_k - m_{k+1}) + t' \cdot m_{k+2} = -p \cdot W_k \tag{41}$$

pentru $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-2)$,

cu convenţiile (pentru generalizare)

$$\left.\begin{aligned} m_{-1} &= m_1 \\ X_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

şi

$$q \cdot (X_{n-1} + 2\, X_n) - t' \cdot m_{n-2} + m_{n-1} = -p \cdot W_{n-1}. \tag{41'}$$

În ecuaţiile (41) şi (41'), coeficienţii t', p şi q au expresiile (2.19) şi (2.20) date în [7], iar

$$W_k = M_{k-1} - 3M_k + 3M_{k+1} - M_{k+2} = -h \cdot (F_k - F_{k+1}) \tag{43}$$

cu convenţia (pentru generalizare)

$$M_{-1} = M_1, \tag{44}$$

respectiv

$$F_0 = -2 \sum_1^n F_i \tag{44'}$$

şi

$$W_{n-1} = M_{n-2} - 2M_{n-1} = -h \cdot F_{n-1}. \tag{43'}$$

Tabloul Nr. 1

Calculul termenilor liberi (de încărcare) U_k

a) *Cînd se cunosc momentele încovoietoare* M_k

k	$\mathcal{M}_k$	$A_k = \mathcal{M}_{k-1} - \mathcal{M}_k$	$B_k = A_{k-1} - A_k$	$C_k = B_k - B_{k+1}$	M_k		$D_k = M_{k+1} - M_{k-1}$	$\delta \cdot C_k$	$U_k = D_k + \delta \cdot C_k$
-1	M_0	—	—	—	—	—	—	—	—
0	M_0	0	—	—	M_0		—	—	—
1	M_1	$M_0 - M_1$	$-A_1$	$B_1 - B_2$		M_1	$M_2 - M_0$	$\delta \cdot C_1$	$D_1 + \delta \cdot C_1$
2	M_2	$M_1 - M_2$	$A_1 - A_2$	$B_2 - B_3$	M_2		$M_3 - M_1$	$\delta \cdot C_2$	$D_2 + \delta \cdot C_2$
3	M_3	....	....	....		M_3	....	....	....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
$k-2$	M_{k-2}	....	....	....	M_{k-2}		....	....	....
$k-1$	M_{k-1}	....	....	....		M_{k-1}	$M_k - M_{k-2}$	$\delta \cdot C_{k-1}$	$D_{k-1} + \delta \cdot C_{k-1}$
k	M_k	$M_{k-1} - M_k$	$A_{k-1} - A_k$	$B_k - B_{k+1}$	M_k		$M_{k-1} - M_{k-1}$	$\delta \cdot C_k$	$D_k + \delta \cdot C_k$
$k+1$	M_{k+1}	....	....	....		M_{k+1}	....	....	....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
$n-2$	M_{n-2}	....	....	....	M_{n-2}		....	....	....
$n-1$	M_{n-1}	$M_{n-2} - M_{n-1}$	....	....		M_{n-1}	$-M_{n-2}$	$\delta \cdot C_{n-1}$	$D_{n-1} + \delta \cdot C_{n-1}$
n	0	M_{n-1}	$A_{n-1} - A_n$	B_n	0		$-M_{n-1}$	$\delta \cdot C_n$	$D_n + \delta \cdot C_n$
$n+1$	$-M_{n-1}$	M_{n-1}	0	—		0	—	—	—

b) *Cînd se cunosc forțele exterioare (orizontale)* F_k

k	$B_k = h \cdot \mathcal{F}_k$	$C_k = h \cdot \mathcal{F}_k - h \cdot \mathcal{F}_{k-1}$	$h \cdot F_k$	$E_k = h \cdot \sum_k^n F_i$	$D_k = E_{k+1} + E_k$	$\delta \cdot C_k$	$U_k = D_k + \delta \cdot C_k$
0	$-h \cdot \sum_1^n F_i$	—	—	—	—	—	—
1	$h \cdot F_1$	$h F_1 + h \Sigma F_i$	$h \cdot F_1$	$h \cdot \sum_1^n F_i$	$E_2 + E_1$	$\delta \cdot C_1$	$D_1 + \delta \cdot C_1$
2	$h \cdot F_2$	$h \cdot F_2 - h \cdot F_1$	$h \cdot F_2$	$h \cdot \sum_2^n F_i$	$E_3 + E_2$	$\delta \cdot C_2$	$D_2 + \delta \cdot C_2$
3	$h \cdot F_3$	....	$h \cdot F_3$	....	....	....	....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$k-2$	$h \cdot F_{k-2}$	....	$h \cdot F_{k-2}$	....	....	....	....
$k-1$	$h \cdot F_{k-1}$	....	$h \cdot F_{k-1}$	....	$E_k + E_{k-1}$	$\delta \cdot C_{k-1}$	$D_{k-1} + \delta \cdot C_{k-1}$
k	$h \cdot F_k$	$h \cdot F_k - h \cdot F_{k-1}$	$h \cdot F_k$	$h \cdot \sum_k^n F_i$	$E_{k+1} + E_k$	$\delta \cdot C_k$	$D_k + \delta \cdot C_k$
$k+1$	$h \cdot F_{k+1}$	....	$h \cdot F_{k+1}$	$h \cdot \sum_{k+1}^n F_i$	....	....	....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-2$	$h \cdot F_{n-2}$	....	$h \cdot F_{n-2}$	$(h \cdot F_n + h \cdot F_{n-1}) + h \cdot F_{n-2}$	....	....	....
$n-1$	$h \cdot F_{n-1}$	$h \cdot F_{n-1} - h \cdot F_{n-2}$	$h \cdot F_{n-1}$	$h \cdot F_n + h \cdot F_{n-1}$	$E_n + E_{n-1}$	$\delta \cdot C_{n-1}$	$D_{n-1} + \delta \cdot C_{n-1}$
n	0	$-h \cdot F_{n-1}$	$h \cdot F_n$	$h \cdot F_n$	E_n	$\delta \cdot C_n$	$D_n + \delta \cdot C_n$

Ecuațiile (36), (41) și (41′) reprezintă un sistem de $2n$ ecuații, cu cele $2n$ necunoscute X_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) și m_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$).

Termenii liberi (de încărcare) U_k și W_k pot fi calculați simplu cu ajutorul tablourilor nr. 1 și 2, în funcție de încărcarea exterioară, cunoscută fie sub forma diagramei de momente M_k, fie sub forma forțelor orizontale concentrate F_k.

Tabloul Nr. 2

Calculul termenilor liberi (de încărcare) W_k

a) *Cînd se cunosc momentele încovoietoare M_k*

K	M	$A'_K = M_{K-1} - M_K$	$V_K = A'_K - A'_{K+1}$	$W_K = V_K - V_{K+1}$
-1	M_1	—	—	—
0	M_0	$M_1 - M_0$	$A'_0 - A'_1$	$V_0 - V_1$
1	M_1	$M_0 - M_1$	$A'_1 - A'_2$	$V_1 - V_2$
2	M_2	$M_1 - M_2$	....	....
3	M_3	....	....	....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$K-2$	M_{K-2}	....	....	....
$K-1$	M_{K-1}	....	....	....
K	M_K	$M_{K-1} - M_K$	$A'_K - A'_{K+1}$	$V_K - V_{K+1}$
$K+1$	M_{K+1}	....	....	....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-2$	M_{n-2}	....	$A'_{n-2} - A'_{n-1}$	$V_{n-2} - V_{n-1}$
$n-1$	M_{n-1}	$M_{n-2} - M_{n-1}$	$A'_{n-1} - A'_n$	V_{n-1}
n	0	M_{n-1}	—	—

b) *Cînd se cunosc forțele exterioare (orizontale) F_k*

K	$V'_K = h \cdot F_K$	$W_K = V'_{K+1} - V'_K$
$-$	—	—
0	$-2h\sum_1^n Fi$	$V'_1 - V'_0$
1	$h \cdot F_1$	$V'_2 - V'_1$
2	$h \cdot F_2$	....
3	$h \cdot F_3$	....
⋮	⋮	⋮
$K-2$	$h \cdot F_{K-2}$	....
$K-1$	$h \cdot F_{K-1}$	....
K	$h \cdot F_K$	$V'_{K+1} - V'_K$
$K+1$	$h \cdot F_{K+1}$	....
⋮	⋮	⋮
$n-2$	$h \cdot F_{n-2}$	$V'_{n-1} - V'_{n-2}$
$n-1$	$h \cdot F_{n-1}$	$-V'_{n-1}$
n	0	—

Pentru cazul încărcării cu forțe concentrate de tip seismic (proporționale cu masele concentrate — egale — și cu săgețile fiecărui nivel), *se dau în anexă valorile termenilor liberi U_k și W_k, pentru primele trei moduri de vibrație, la construcții cu $5 \div 20$ nivele*:

$$U_k = \gamma \cdot C_k + D_k. \tag{45}$$

Întrucît rezolvarea ecuațiilor (36), (41) și (41′) urmează a fi efectuate printr-un calculator numeric (electronic), *se dau în tabloul 3 matricea coeficienților necunoscutelor și vectorul termenilor liberi (de încărcare)*.

În acest tablou, pentru simplificarea calculului coeficienților, s-au notat:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{t}{a} \quad ; \quad D = \frac{a'}{a} = \frac{q}{p} \cdot \frac{\delta}{3L \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}, \\ B &= \frac{1}{a} \cdot (1 - 2t) \quad ; \quad F = -\frac{t'}{p} \cdot \frac{\delta}{3L \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}, \\ C &= \frac{a' \cdot \gamma'}{a} \quad ; \quad G = \frac{1 + t'}{p} \cdot \frac{\delta}{3L \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Tabloul Nr. 3

Matricea coeficienţilor necunoscutelor şi vectorul termenilor liberi (de încărcare)

	X_1	X_2	X_3	X_4	···	X_{K-2}	X_{K-1}	X_K	X_{K+1}	X_{K+2}	···	X_{n-3}	X_{n-2}	X_{n-1}	X_n	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	···	m_{K-3}	m_{K-2}	m_{K-1}	m_K	m_{K+1}	m_{K+2}	···	m_{n-4}	m_{n-3}	m_{n-2}	m_{n-1}		d
1	2A+B	-A	0	0	···	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0	2C+D	-3C	C-D	0	0	···	0	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0		U_1
2	-A	2A+B	-A	0	···	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0	-C	3C+D	-3C	C-D	0	···	0	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0		U_2
3	0	-A	2A+B	-A	···	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	-C	3C+D	-3C	C-D	···	0	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0		U_3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
K-1	0	0	0	0	···	-A	2A+B	-A	0	0	···	0	0	0	0	0	0	0	0	0	···	-C	3C+D	-3C	C-D	0	0	···	0	0	0	0		U_{K-1}
K	0	0	0	0	···	0	-A	2A+B	-A	0	···	0	0	0	0	0	0	0	0	0	···	0	-C	3C+D	-3C	C-D	0	···	0	0	0	0		U_K
K+1	0	0	0	0	···	0	0	-A	2A+B	-A	···	0	0	0	0	0	0	0	0	0	···	0	0	-C	3C+D	-3C	C-D	···	0	0	0	0		U_{K+1}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
n-2	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	···	-A	2A+B	-A	0	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	0	···	-C	3C+D	-3C	C-D		U_{n-2}
n-1	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	···	0	-A	2A+B	-A	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	0	···	0	-C	3C+D	-3C		U_{n-1}
n	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	···	0	0	-A	A+B	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	0	···	0	0	-C	2C+D	=	U_n
0	D	0	0	0	···	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0	G	F-G	-F	0	0	···	0	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0		ΣW_0
1	D	D	0	0	···	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0	F	G	-G	-F	0	···	0	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0		ΣW_1
2	0	D	D	0	···	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	F	G	-G	-F	···	0	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0		ΣW_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
K-2	0	0	0	0	···	D	D	0	0	0	···	0	0	0	0	0	0	0	0	0	···	F	G	-G	-F	0	0	···	0	0	0	0		ΣW_{K-2}
K-1	0	0	0	0	···	0	D	D	0	0	···	0	0	0	0	0	0	0	0	0	···	0	F	G	-G	-F	0	···	0	0	0	0		ΣW_{K-1}
K	0	0	0	0	···	0	0	D	D	0	···	0	0	0	0	0	0	0	0	0	···	0	0	F	G	-G	-F	···	0	0	0	0		ΣW_K
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	···	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
n-3	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	···	D	D	0	0	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	0	···	F	G	-G	-F		ΣW_{n-3}
n-2	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	···	0	D	D	0	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	0	···	0	F	G	-G		ΣW_{n-2}
n-1	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	···	0	0	D	2D	0	0	0	0	0	···	0	0	0	0	0	0	···	0	0	F	F+G		ΣW_{n-1}

Înlocuind expresiile coeficienților t, a, a', γ', p, q, și δ în relațiile de mai sus, coeficienții A, B, C, D, F și G din tabloul 3 pot fi calculați direct, pe baza tabloului cuprinzînd datele fizico-geometrice ale diafragmei, așa cum se arată mai jos.

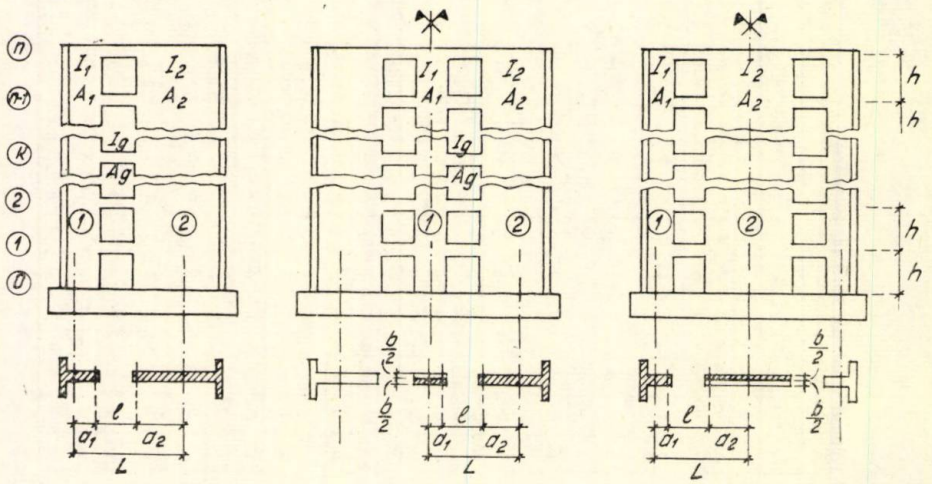


Fig. 2

a) *Elementele fizico-geometrice* (fig. 2)

Elementul	$\frac{a_r}{l}$	I_r, I_g	I_D	η_r	A_r, A_g	A_D	α_r	Δ_D, Δ_g	K_D, K_g	ρ	Observații
1	$\frac{a_1}{l}$	I_1	I_1+I_2	I_1/I_D	A_1	A_1+A_2	A_1/A_D	Δ_D	$\frac{I_D}{h}$	$\frac{K_D}{K_g}\cdot\frac{E_D}{E_g}$	$I_1<I_2$
2	$\frac{a_2}{l}$	I_2		I_2/I_D	A_2		A_2/A_D				
Grinda	—	I_g	—	—	A_g	—	—	Δ_g	I_g/l	—	—

$$\Delta_D = 60 \cdot \alpha \cdot \frac{E_D}{G_D} \cdot \frac{I_D}{A_D \cdot h^2} \; ; \; \Delta_g = 60 \cdot \alpha \cdot \frac{E_g}{G_g} \cdot \frac{I_g}{A_g \cdot l^2} \qquad (47)\ ^{3)}$$

[3]) În aceste formule se va lua:

$\alpha = 1{,}2$: pentru secțiuni de formă dreptunghiulară;

$\alpha = \frac{A}{I^2} \cdot \int_A \frac{S^2}{b^2} \cdot dA$: pentru altfel de secțiuni (cu semnificația obișnuită a termenilor din rezistența materialelor).

b) *Poziția punctelor de inflexiune*

$$\lambda_r = \frac{1 + \frac{1}{2\rho}\cdot\left[\left(\frac{a_q}{l} + 1\right)\cdot\frac{1}{\eta_q} - \frac{a_r}{l}\cdot\frac{1}{\eta_r}\right]}{2\cdot\left[1 + \frac{1}{4\rho}\cdot\left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}\right)\right]} \tag{48}$$

$$\begin{cases} r = 1,2 \\ q = 2,1 \end{cases} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

c) *Coeficienții necunoscutelor*

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{2}{3}\cdot\frac{l^2}{L}\cdot\rho\cdot\left(1 - 3\lambda_1\cdot\lambda_2 + \frac{\Delta_g}{20}\right), \\ B &= \frac{2l^2}{L}\cdot\sum_{r=1,2}\left(\frac{a_r}{l} + \lambda_r\right)^2\cdot\frac{1}{\eta_r} + \frac{2I_D}{A_D\cdot L}\cdot\sum_{r=1,2}\frac{1}{\alpha_r}, \text{ [4]} \\ C &= \frac{l}{30L}\cdot\Delta_D\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1} - \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\right), \\ D &= \frac{l}{L}\cdot\left[\left(\frac{a_1}{l} + \lambda_1\right)\cdot\frac{1}{\eta_1} - \left(\frac{a_2}{l} + \lambda_2\right)\cdot\frac{1}{\eta_2}\right], \\ F &= \frac{1}{3L}\cdot\left[\frac{1}{\eta_1\cdot\eta_2} - \frac{\Delta_D}{10}\cdot\sum_{r=1,2}\frac{1}{\alpha_r}\right], \\ G &= \frac{1}{L}\cdot\left[\frac{1}{\eta_1\cdot\eta_2} + \frac{\Delta_D}{10}\cdot\sum_{r=1,2}\frac{1}{\alpha_r}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

d) *Factori de multiplicare a termenilor de încărcare*

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{l}{L}\cdot\frac{\Delta_D}{30}\cdot\sum_{r=1,2}\frac{\eta_r}{\alpha_r}\cdot\lambda_r, \\ \tau &= \frac{\Delta_D}{30L}\cdot\left(\frac{\eta_1}{\alpha_1} - \frac{\eta_2}{\alpha_2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

OBSERVAȚII

1. Pe baza datelor fizico-geometrice de la pct. a și a expresiilor de mai sus ale diferiților coeficienți, calculul lor poate fi de asemenea programat la C.N.

---

[4]) *Notă importantă*

În expresia acestui coeficient se va considera

$$\alpha_r = \infty$$

pentru *elementul central*, în cazul unui perete cu două șiruri de goluri simetrice.

2. Calculul eforturilor în diferitele elemente ale diafragmei, pe baza formulelor (29) și (32), pot fi de asemenea programate la C.N.

3. În cazul folosirii tabelelor din anexă, eforturile din elementele unei diafragme l se vor obține, multiplicînd valorile obținute ca mai sus cu

$$h \cdot S_{li},$$

unde S_{li} este forța seismică totală (de la bază) care solicită diafragma l, în modul i de vibrație (cînd forța seismică totală, care solicită întreaga construcție, se repartizează diferitele diafragme care alcătuiesc structura de rezistență proporțional cu momentele de inerție echivalente ale acestora).

4. Caracteristicile fizico-geometrice ale diafragmei pline echivalente cu o diafragmă cu goluri (I_{ech}, Δ_{ech}), calculate pentru o încărcare de tip seismic în modul I de vibrație, cu termenii de încărcare luați din tabelele din anexă, prin egalarea săgeților la două nivele i și j, vor fi după [6]:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{ech} &= \frac{A_j \cdot \eta_{ir} - A_i \cdot \eta_{jr}}{a_i \cdot \eta_{jr} - a_j \cdot \eta_{ir}} \\ I_{ech} &= \frac{A_j \cdot a_i - A_i \cdot a_j}{a_i \cdot \eta_{jr} - a_j \cdot \eta_{ir}} \cdot I_r \end{aligned}\right\} \quad (r = 1,2), \tag{51}$$

unde coeficienții A_i, A_j, a_i și a_j se iau din tabela 2 din [6], iar coeficienții η_{ir} și η_{jr} se calculează cu formulele

$$\eta_{kr} = 3 \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} \mathfrak{M}_{jr} + \sum_{j=0}^{k} \mathfrak{M}'_{jr} + \frac{\Delta_r}{10} \cdot \sum_{j=0}^{k} \mathfrak{M}''_{jr} \tag{52}$$

în tablouri, așa cum se arată în [6], § 1.3.1.

Nivelele i și j se recomandă, după [6], a fi respectiv al doilea și penultimul nivel.

Calculele indicate de formulele (52) pot fi de asemenea programate la C.N. Termenul

$$A_{ji} = A_j \cdot a_i - A_i \cdot a_j, \tag{53}$$

care intră în expresia lui I_{ech}, nedepinzînd de săgețile diafragmei reale, se dau de asemenea în tabelele din anexă, pentru $i = 2$ și $j = n - 1$.

5. În cazul cînd sarcina seismică totală (pe întreaga structură) se distribuie diferitelor elemente portante l proporțional cu momentele de inerție echivalente ale acestora, acestea se vor calcula mai exact cu formula

$$I'_{l\,ech} = I_{l\,ech} \cdot \alpha'_{1l}, \tag{54}$$

unde α'_{1l} este termenul (fracția) care multiplică coeficientul numeric din expresia lui α_1^2 din tabelele 1 din [6], în care Δ se înlocuiește cu valoarea calculată cu formulele (51) de mai sus.

EXEMPLU DE CALCUL [5])

Se dă peretele din beton armat cu un șir nesimetric de goluri și șase nivele echidistante

$$h = 3{,}00 \text{ m},$$

cu dimensiunile și încărcarea din figură (fig. 3).

1. *Elementele necesare în calcul*

Caracteristicile fizico-geometrice care rezultă din datele problemei sînt :

Elementul	I_r, I_g m^4	A_r, A_g m^2	K_r, K_g m^3	i_r^2, i_g^2 m^3	Δ_r, Δ_g	$\frac{E_D}{E_g}$	η_r	$\frac{a_r}{l}$
1	$5{,}624.10^{-2}$	0,300	$18{,}747.10^{-3}$	$18{,}747.10^{-2}$	3,524	E	0,0263	0,375
2	2,084	1,000	$694{,}667.10^{-3}$	2,084	39,179	E	0,9737	1,250
Grinda	$0{,}248.10^{-2}$	0,106	$1{,}240.10^{-3}$	$2{,}340.10^{-2}$	0,990	E	—	—

Cu ajutorul formulelor (1.34′) și (3.22) din [7] se calculează

$\rho_1 = 0{,}08045$; $\rho_2 = 0{,}001785$,

$\rho_1' = 0{,}14080$; $\rho_1' = 0{,}006248$, $p = 0{,}03224$ m

$\rho_1'' = 0{,}00778$; $\rho_2'' = 0{,}002331$.

Poziția punctelor de inflexiune, calculată cu formulele (1.34) din [7], este dată de

$$\lambda_1 = 0{,}4835 ; \qquad \lambda_2 = 0{,}5165.$$

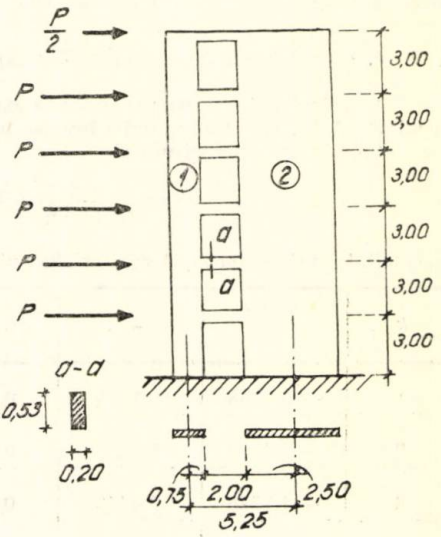


Fig. 3

2. *Calculul valorilor inițiale* X_k^i

Se efectuează așa cum se arată în capitolul 1 din [7].

Coeficienții necesari în calcul, determinați cu formulele (1.9′), (1.10′) și (1.18) din [7], sînt

$b = 189{,}2651$ m^{-1}, $\alpha = 1{,}29333$,

$c = 322{,}6151$ m^{-1}, $\beta = 0{,}03422$,

$\gamma = 0{,}27725$.

După efectuarea calculelor, prin aproximații succesive (așa cum se arată în anexa din [7]), cu coeficientul de transmitere

$$t = \frac{1}{2\alpha} = 0{,}3866$$

au rezultat valorile

k	1	2	3	4	5	6
X_k^i	0,2838	0,3311	0,2999	0,2403	0,1596	0,1048

[5]) Exemplul este luat din [11], în scopul comparării și interpretării rezultatelor.

3. *Calculul momentelor suplimentare* m'_k *şi* m''^i_k

Se efectuează aşa cum se arată în capitolul 2 din [7].
Coeficienţii necesari, calculaţi cu formulele (2.5), (2.7), (2.19) şi (2.20) din [7], sînt

$$\Delta_m = 4{,}4614, \qquad p = 0{,}01865,$$
$$\alpha_m = 0{,}5539, \qquad q = 0{,}97196.$$
$$\delta = 0{,}09124,$$

După rezolvarea ecuaţiilor (2.12) şi (2.13), sub forma (2.18) din [7], prin aproximaţii succesive, cu coeficientul de transmitere

$$t' = -\,0{,}1132,$$

au rezultat valorile

k	0	1	2	3	4	5
m'_k	− 0,6436	0,1246	0,0365	0,0466	0,0448	0,0496
m''^i_k	− 2,2952	− 2,0502	− 1,5370	− 1,0312	− 0,5979	− 0,2911

Notă. Calculele de la punctele 2 şi 3 de mai sus nu au fost redate, întrucît se efectuează aşa cum se arată în exemplul tratat în [7].

4. *Calculul valorilor aproximative* $\overline{X}_k$

Se calculează, aşa cum se arată în exemplul tratat în [7], tablourile 5 şi 6, *numai* termenii P_k şi $\mathfrak{S}_k$, rezultînd valorile înscrise în tabloul de mai jos.
Cu ajutorul coeficientului

$$\alpha = \frac{1 + 0{,}2\,\Delta_g}{3} \cdot \frac{E_D}{E_g} \cdot l = 0{,}79872,$$

au rezultat, conform formulelor (27) şi (28) din prezenta lucrare, următoarele valori pentru $\overline{X}_k$:

k	P_k	$\mathfrak{S}_k$	$\alpha \cdot X^i_k$	$\mathfrak{S}_k + \alpha \cdot X^i_k$	ρ_k	$\overline{X}_k$
1	− 0,9368	0,1979	0,2267	0,4246	2,204	0,6255
2	− 1,4683	0,3433	0,2645	0,6078	2,420	0,8013
3	− 1,7945	0,4445	0,2395	0,6840	2,624	0,7869
4	− 1,9550	0,5063	0,1919	0,6982	2,800	0,6728
5	− 2,0058	0,5353	0,1275	0,6628	3,030	0,4836
6	− 2,0064	0,5533	0,0837	0,6370	3,152	0,3303

5. *Calculul corecţiilor* $\Delta_i\ X_k$ *şi* $\delta_i\ m''_k$

a) *Calculul momentelor* $\overline{m}''_k$ *şi* $\overline{m}_k$

Se efectuează, rezolvînd prin aproximaţii succesive, cu coeficientul de transmitere

$$t' = -\,0{,}1132,$$

ecuaţii de forma (2.18) din [7] sau (4) din prezenta lucrare.

Termenii liberi ai ecuațiilor rezultă din următorul tabel :

k	$\overline{X}_k$	$\overline{N}_k$	$\overline{N}_k + \overline{N}_{k+1}$	$-q\cdot(\ldots)$
0	0	3,7004	7,4008	— 7,1933
1	0,6255	3,7004	6,7753	— 6,5853
2	0,5013	3,0749	5,3485	— 5,1985
3	0,7869	2,2736	3,7603	— 3,6549
4	0,6728 →	1,4867 →	2,3306	— 2,2361
5	0,4836 →	0,8139 →	1,1442	— 1,1121
6	0,3303 →	0,3303	—	—

Schema de transmiteri este următoarea :

k	0	1	2	3	4	5
	— 7,1933	— 6,5853	— 5,1985	— 3,6549	— 2,2361	— 1,1121
	+ 6533	+ 8144	+ 6533	+ 5146	+ 3555	+ 2129
	+ 6534	— 5,7709	— 4,5452	— 3,1403	— 1,8806	— 0,8992
	+1,3067	+ 5146	+ 3555	+ 2129	+ 1018	
	— 415	— 1479	— 415	— 355	— 201	
	— 415	+ 3667	+ 3140	+ 1774	+ 817	— 92
	— 830	— 355	— 201	— 92	— 10	
	+ 29	+ 94	+ 30	+ 19	+ 8	
	+ 30	— 261	— 171	— 73	+ 18	— 2
	+ 59	+ 19	+ 8	— 2	—	
	— 1	— 7	— 1	— 1	—	
	— 2	+ 12	+ 7	— 3		
	— 3	— 1				
$\overline{m}_k''$	— 5,9640	— 5,4292	— 4,2476	— 2,9705	— 1,7971	— 0,9086
m_k'	— 6436	+ 1246	+ 365	+ 466	+ 448	+ 496
$\overline{m}_k$	— 6,6076	— 5,3046	— 4,2111	— 2,9239	— 1,7523	— 0,8590

b) *Calculul termenilor* $\mathfrak{X}_k$ *și a corecției* $\Delta_1 X_k$

Se efectuează, rezolvînd prin aproximații succesive ecuații de forma (13′) din prezenta lucrare, cu coeficientul de transmitere

$$t = 0{,}3866.$$

Coeficienții necesari pentru calculul termenilor liberi sînt (formulele (10), (12) și (17) din prezenta lucrare)

$$\varepsilon = \frac{1}{0{,}0263}(0{,}3750 + 0{,}4865) - \frac{1}{0{,}9737}(1{,}2500 + 0{,}5135) = 30{,}9705,$$

$$\gamma' = \frac{0{,}4865 \cdot 3{,}5244 \cdot \dfrac{1}{0{,}0263} - 0{,}5135 \cdot 39{,}1792 \cdot \dfrac{1}{0{,}9737}}{30 \cdot 30{,}9705} = 0{,}047984,$$

$$a' = \frac{0{,}03422}{2 \cdot 1{,}29333 \cdot 3} \cdot \frac{2}{5{,}25} \cdot 30{,}9705 = 0{,}052023.$$

Termenii liberi ai ecuațiilor se calculează (cu convențiile (14) și (15)) în următorul tablou :

k	$\bar{\mu}_k$			b_k	$\bar{m}_k$	$\bar{m}_{k+1} - \bar{m}_k$	$\gamma' \cdot b_k$	Σ	$a' \cdot \Sigma$
−1	−6,6076	0	—	—		—	—		
0	−6,6076	−1,3030	1,3030	—	−6,6076	—	—		
1	−5,3046	−1,0935	−0,2095	−1,5125	→ −5,3920	2,3965	0,0726	2,4691	0,1284
2	−4,2111	−1,2872	0,1937	−0,4032	−4,2111	→ 2,3807	−0,0193	2,3614	0,1228
3	−2,9239	−1,1716	−0,1156	0,3093	−2,9239	2,4588	0,0148	2,4736	0,1287
4	−1,7523	−0,8933	−0,2783	1,1627	−1,7523	2,0649	0,0078	2,0727	0,1078
5	−0,8590	−0,8590	−0,0343	−0,2440	−0,8590	1,7523	−0,0117	1,7406	0,0906
6	0	−0,8590	0	−0,0343	0	0,8590	−0,0016	0,8574	0,0446
7	+0,8590	—	—	—	0	—	—	—	—

Schema de transmiteri (redată parțial) este următoarea :

k	1	2	3	4	5	6
	1 284	1 228	1 287	1 078	906	446
		496	666	755	709	624
		1 724	1 953	1 833	1 615	1 070
	666	755	709	624	414	414
		257	391	425	406	317
		1 012	1 100	1 049	820	731
	391	425	406	317	293	283
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
		8	10	11	11	11
	3	4	4	4	4	4
		1	2	2	2	2
		5	6	6	6	6
	2	2	2	2	2	2
		1	1	1	1	1
		3	3	3	3	3
	1	1	1	1	1	1
$\mathfrak{X}_k$	0,2858	0,4074	0,4512	0,4270	0,3750	0,3087
X_k^i	2838	3311	2999	2403	1596	1048
$-\overline{X}_k$	− 6255	− 8013	− 7869	− 6728	− 4836	− 3303
$\Delta_1 X_k$	− 0,0559	− 0,0628	− 0,0358	− 0,0055	+ 0,0510	+ 0,0802

c) *Calculul corecțiilor* $\delta_1 m_k''$

Se efectuează, rezolvînd ecuații de forma (4), cu coeficientul de transmitere

$$t' = - 0{,}1132.$$

Termenii liberi ai ecuațiilor se calculează în tabloul următor :

k	$\Delta_1 X_k$	$\Delta_1 N_k$	$\Delta_1 N_{k+1} + \Delta_1 N_k$	$-q\cdot(\ldots)$
0	0	− 258	− 516	502
1	− 559	− 258	43	− 42
2	− 628	301	1230	− 1196
3	− 358	929	2216	− 2154
4	− 55	1 287	2629	− 2555
5	510	1 342	2174	− 2133
6	832	832	—	—

Schema de transmiteri este

k	0	1	2	3	4	5
	+ 502	− 42	− 1196	− 2154	− 2555	− 2113
	+ 11	− 57	+ 11	+ 134	+ 229	+ 262
	+ 11	− 99	− 1185	− 2020	− 2326	− 1850
	+ 22	+ 134	+ 229	+ 263	+ 209	
	− 15	− 2	− 15	− 24	− 27	
	− 15	+ 132	+ 214	+ 239	+ 182	− 21
	− 30	− 24	− 27	− 21	+ 2	
	+ 2	+ 3	+ 2	+ 3	+ 2	
	+ 3	− 21	− 25	− 18	+ 4	
	+ 5	+ 3	+ 2	−	−	
		− 1				
		+ 2				
$\delta_1 m_k''$	+0,0499	+0,0014	−0,00994	−0,1801	−0,2140	−0,1871

d) *Calculul corecțiilor* $\Delta_2 X_k$

Se efectuează, rezolvînd ecuații de forma (13′), cu coeficientul de transmitere $t = 0{,}3866$.

Termenii liberi ai ecuațiilor se calculează în tabelul următor:

k	$\delta_1 u''_k$			b_k	$\delta_1 m''_k$	$\delta_1 m''_{k+1} - \delta_1 m''_k$	$\gamma' \cdot b_k$	Σ	$a' \cdot \Sigma$
−1	499	0	—	—	—	—	—	—	—
0	499	485	−485	—	499	—	—	—	—
1	14	1008	−523	38	14	−1493	2	−1491	− 78
2	− 994	807	201	−724	−994	−1815	−35	−1850	− 96
3	−1801	339	468	−267	−1801	−1146	−13	−1159	− 60
4	−2140	− 269	608	−140	−2140	− 70	− 7	− 77	− 4
5	−1871	−1871	1602	−994	−1871	2140	−48	2092	109
6	0	−1871	0	1602	0	1871	77	1948	101
7	1871	—	—	—	0	—	—	—	—

Schema de transmiteri (redată parțial) este următoarea:

k	1	2	3	4	5	6
	− 78	− 96	− 60	− 4	+ 109	+ 101
		− 30	− 49	− 42	− 18	+ 35
		− 126	− 109	− 46	+ 91	+ 136
	− 49	− 42	− 18	+ 35	+ 53	+ 53
		− 19	− 24	− 16	+ 7	+ 23
		− 61	− 42	+ 19	+ 60	+ 76
	− 24	− 16	+ 7	+ 23	+ 29	+ 29
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
		+ 2	+ 4	+ 5	+ 5	+ 5
	+ 1	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2
		−	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
		+ 2	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3
	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
$\Delta_2 X_k$	−0,0159	−0,0207	−0,0125	+0,0042	+0,0246	+0,0316

Mai departe calculele continuă în același mod, celelalte corecții $\Delta_i X_k$ calculîndu-se cu ecuații de forma (13′), cu coeficientul de transmitere

$$t = 0{,}3866,$$

iar corecţiile $\delta_i m_k''$, cu ecuaţii de forma (4), cu coeficientul de transmitere

$$t' = -0{,}1132.$$

6. *Calculul valorilor corectate ale necunoscutelor X_k si m_k*

Corecţiile obţinute succesiv sînt redate în tablourile de mai jos, în care au fost calculate valorile corectate ale necunoscutelor X_k şi m_k conform relaţiilor (19) şi (20).

a) *Calculul valorilor corectate ale forţelor tăietoare X_k*

k	1	2	3	4	5	6
$\overline{X}_k$	0,6255	0,8013	0,7869	0,6728	0,4836	0,3303
Δ_1	− 559	− 628	− 358	− 55	+ 510	+ 832
Δ_2	− 159	− 207	− 125	+ 42	+ 246	+ 316
Δ_3	− 45	− 58	− 28	+ 45	+ 120	+ 140
Δ_4	− 10	− 11	+ 5	+ 32	+ 61	+ 66
Δ_5	− 1	+ 2	+ 8	+ 19	+ 30	+ 31
Δ_6	0	+ 3	+ 7	+ 12	+ 17	+ 16
X_k	0,5481	0,7114	0,7382	0,6823	0,5820	0,4704

b) *Calculul valorilor corectate ale momentelor suplimentare m_k*

k	0	1	2	3	4	5
$\overline{m}_k$	− 6,6076	− 5,3046	− 4,2111	− 2,9239	− 1,7523	− 0,8590
δ_1	+ 499	+ 14	− 994	− 1801	− 2140	− 1871
δ_2	− 155	− 289	− 598	− 878	− 950	− 745
δ_3	− 276	− 313	− 401	− 473	− 458	− 338
δ_4	− 226	− 234	− 253	− 259	− 231	− 162
δ_5	− 141	− 142	− 143	− 134	− 114	− 76
δ_6	− 87	− 87	− 86	− 76	− 63	− 40
m_k	− 6,6462	− 5,4097	− 4,4586	− 3,2860	− 2,1479	− 1,1822

Notă: Calculele de mai sus au fost efectuate cu maşina manuală de calcul. Într-un calcul practic (cu rigla de exemplu), păstrîndu-se un număr redus de zecimale, numărul aproximaţiilor succesive, ca şi al încercărilor, se va reduce simţitor.

7. *Calculul cu ajutorul calculatorului electronic C.I.F.A-102.*

Se întocmește tabloul cu datele fizico-geometrice :

Elementul	$\frac{a_r}{l}$	I_r, I_g m⁴	I_D m⁴	γ_{ir}	A_r, A_g m²	A_D m²	α_r	Δ_D, Δ_g	K_D, K_g	ρ
1	0,375	0,05624	2,14024	0,0263	0,300	1,300	0,2308	30,951	0,71341	575,3331
2	1,250	2,08400		0,9737	1,000		0,7692			
Grinda	—	0,00248	—	—	1,106	—	—	0,099	0,00124	—

Cu formulele (48), (49) și (50) au fost calculați coeficienții

$$\lambda_1 = 0{,}4865\,; \qquad \lambda_2 = 0{,}5135,$$

$$A = 87{,}6774,$$

$$B = 51{,}4424,$$

de unde

$$2A + B = 226{,}7972,$$

$$A + B = 139{,}1198.$$

Apoi

$$C = 0{,}5663,$$

$$D = 11{,}8001,$$

de unde

$$2C + D = \quad 12{,}9327,$$

$$3C + D = \quad 13{,}4990,$$

$$C - D = + 11{,}2338,$$

$$3C \quad = \quad 1{,}6989.$$

De asemenea

$$F = \quad 1{,}3745,$$

$$G = 10{,}7655,$$

de unde

$$F + G = \quad 12{,}1400,$$

$$F - G = - 9{,}3910.$$

Factorii de multiplicare a termenilor de încărcare sînt

$$\gamma = \quad 0{,}2772,$$

$$\tau = - 0{,}2264.$$

Termenii de încărcare, calculați cu ajutorul tablourilor 1 și 2, sînt

k	$h\mathfrak{F}_k$	C_k	hF_k	E_k	D_k	C_k	U_k
0	−16,5	—	—	—	—	—	—
1	3	19,5	3	16,5	30	5,41	35,41
2	3	0	3	13,5	24	0	24,00
3	3	0	3	10,5	18	0	18,00
4	3	0	3	7,5	12	0	12,00
5	3	0	3	4,5	6	0	6,00
6	0	−3	1,5	1,5	1,5	−0,83	0,67

k	$h\cdot F_k$	W_k	W_k
0	−33	36	−8,15
1	3	0	0
2	3	0	0
3	3	0	0
4	3	0	0
5	3	−3	0,68
6	0	—	—

Cu ajutorul coeficienților de mai sus s-a întocmit tabelul, cuprinzînd matricea coeficienților necunoscutelor și vectorul termenilor de încărcare, cuprinse în tabloul alăturat (fig. 4)[6]

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	d
1	0,22680	-0,08768	0	0	0	0	0,01293	-0,00170	-0,01123	0	0	0	0,03541
2	-0,08768	0,22680	-0,08768	0	0	0	-0,00057	0,01350	-0,00170	-0,01123	0	0	0,02000
3	0	-0,08768	0,22680	-0,08768	0	0	0	-0,00057	0,01350	-0,00170	-0,01123	0	0,01600
4	0	0	-0,08768	0,22680	-0,08768	0	0	0	-0,00057	0,01350	-0,00170	-0,01123	0,01200
5	0	0	0	-0,08768	0,22680	-0,08768	0	0	0	-0,00057	0,01350	-0,00170	0,00800
6	0	0	0	0	-0,08768	0,13912	0	0	0	0	-0,00057	0,01293	0,00067
7	0,11800	0	0	0	0	0	0,10766	-0,09391	-0,01375	0	0	0	-0,08150
8	0,11800	0,11800	0	0	0	0	0,01375	0,10766	-0,10766	-0,01375	0	0	0
9	0	0,11800	0,11800	0	0	0	0	0,01375	0,10766	-0,10766	-0,01375	0	0
10	0	0	0,11800	0,11800	0	0	0	0	0,01375	0,10766	-0,10766	-0,01375	0
11	0	0	0	0,11800	0,11800	0	0	0	0	0,01375	0,10766	-0,10766	0
12	0	0	0	0	0,11800	0,23600	0	0	0	0	0,01375	0,12140	0,00819

Fig. 4

Valorile rezultate din calculul la C.N. sînt următoarele :

k	0	1	2	3	4	5	6
X_k	—	0,5462	0,7058	0,7259	0,6598	0,5678	0,4616
m_k	−6,5417	−5,3068	−4,3610	−3,2022	−2,0927	−1,1562	0

Comparînd valorile absolute ale necunoscutelor calculate anterior prin încercări cu ale celor de mai sus, rezultă că cele dintîi sînt mai mari cu circa 1,75 % (necunoscutele X_k) și cu circa 2,25 % (necunoscutele m_k).

[6]) În acest tablou au fost trecute valorile normalizate (subunitare).

8. *Calculul eforturilor*

Cu ajutorul valorilor de mai sus s-au calculat eforturile în elementele diafragmei (fig. 5), în următorul tablou :

k	N_k	M_{k1}	m_{k1}	$\mathfrak{M}_{k1}$	$\overline{M}_{k1}$	M_{k2}	m_{k2}	$\mathfrak{M}_{k2}$	$\overline{M}_{k2}$
0		− 1,4191	− 6,5417		− 1,6424	− 52,5809	6,5417		− 33,1053
	3,6671			6,3184				12,9339	
					0,0261				− 18,2738
1		− 0,9855	− 5,3068			− 36,5145	5,3068		
					− 0,9150				− 20,2003
	3,1209			5,3773				11,0074	
					0,3856				− 8,0009
2		− 0,6307	− 4,3610			− 23,3693	4,3610		
					− 0,8305				− 10,4902
	2,4151			4,1612				8,5181	
					0,6042				− 1,4249
3		− 0,3548	− 3,2022			− 13,1452	3,2022		
					− 0,6465				− 3,9852
	1,6892			2,9105				5,9578	
					0,6601				2,2082
4		− 0,1577	− 2,0927			− 5,8423	2,0927		
					− 0,4767				− 0,1189
	1,0294			1,7737				3,6307	
					0,5781				3,2363
5		− 0,0394	− 1,1562			− 1,4606	1,1562		
					− 0,4003				1,3237
	0,4616			0,7953				1,6281	
6		0	0		0,7953	0	0		1,6281

Eforturile în grinzile de cuplare sînt

k	1	2	3	4	5	6
T_k	0,5462	0,7058	0,7259	0,6598	0,5678	0,4616
M^b_{k1}	0,5315	0,6867	0,7063	0,6420	0,5525	0,4491
M^b_{k2}	− 0,5609	− 0,7249	− 0,7455	− 0,6776	− 0,5831	− 0,4761

9. *Calculul săgeților*

Cu ajutorul formulei (52) s-au calculat factorii η_{kr} în tab. de la pag. 99.

După cum se vede, săgeţile celor doi spaleți sînt practic egale (diferă între ele cu $0{,}4 - 1\,^0/_{00}$).

10. *Calculul rotirilor*

Calculate cu formula

$$\theta_k = -\frac{h}{2EI} \cdot \tau_k ,$$

unde

$$\tau_k = \sum_1^k \mathfrak{M}_j + \frac{\Delta}{30} \mathfrak{M}''_j ,$$

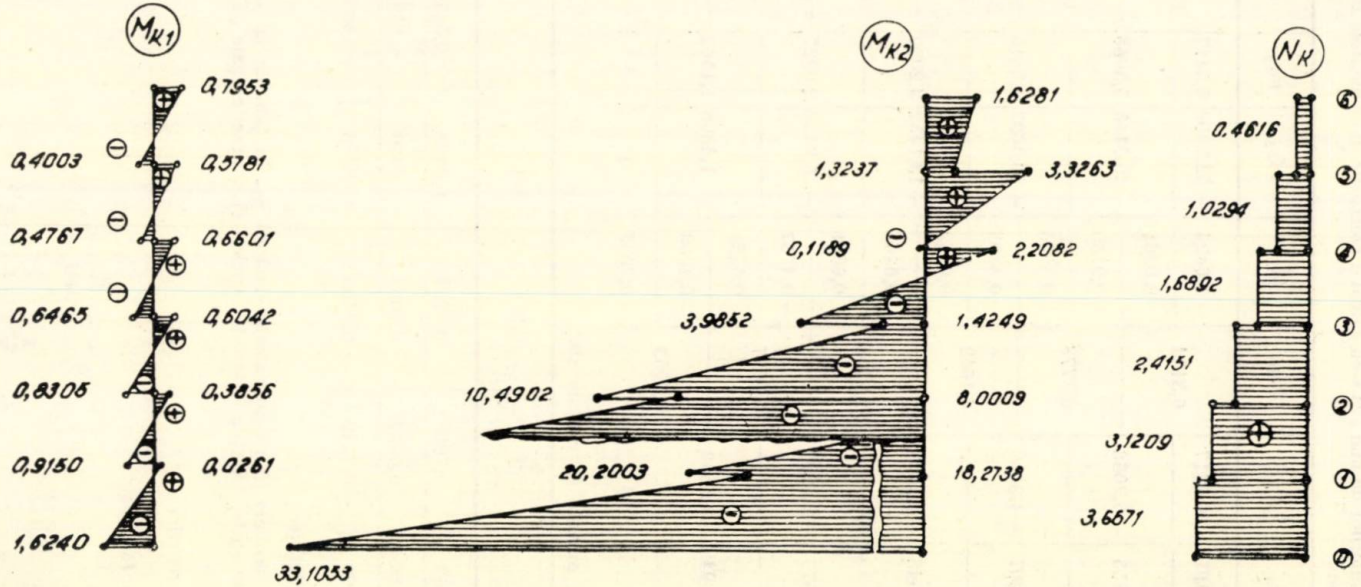

M_{K1}
0,7953
0,4003
0,5781
0,4767
0,6601
0,6465
0,6042
0,8305
0,3856
0,9150
0,0261
1,6240
M_{K2}
1,6281
1,3237
3,3263
0,1189
2,2082
3,9852
1,4249
10,4902
8,0009
20,2003
18,2738
33,1033
N_K
0,4616
1,0294
1,6892
2,4151
3,1209
3,6671
5
4
3
2
1
0

Fig. 5

k	M^s_{j1}	M^d_{j1}	$\mathfrak{M}_{j1}$	$\Sigma\mathfrak{M}_{j1}$	$\Sigma\Sigma\mathfrak{M}_{j1}$	$\mathfrak{M}'_{j1}$	$\Sigma\mathfrak{M}'_{j1}$	$\mathfrak{M}''_{j1}$	$\Sigma\mathfrak{M}''_{j1}$	η_{k1}	η_{k1}/I_1
1	1,6421	− 0,0261	1,6160	1,6160	0	3,2581	3,2581	1,6682	1,6682	3,8460	68,39
2	0,9150	− 0,3856	0,5294	2,1454	1,6160	1,4444	4,7025	1,3006	2,9688	10,5968	188,42
3	0,8305	− 0,6042	0,2263	2,3717	3,7614	1,0568	5,7593	1,4347	4,4035	18,5955	330,65
4	0,6465	− 0,6601	− 0,0136	2,3581	6,1331	0,6329	6,3922	1,3066	5,7101	26,8040	476,50
5	0,4767	− 0,5781	− 0,1014	2,2581	8,4912	0,3753	6,7675	1,0548	6,7649	34,6253	615,67
6	0,4003	− 0,7953	− 0,3950	1,8617	10,7479	0,0053	6,7728	1,1956	7,9605	41,8221	743,64

k	M^s_{j2}	M^d_{j2}	$\mathfrak{M}_{j2}$	$\Sigma\mathfrak{M}_{j2}$	$\Sigma\Sigma\mathfrak{M}_{j2}$	$\mathfrak{M}'_{j2}$	$\Sigma\mathfrak{M}'_{j2}$	$\mathfrak{M}''_{j2}$	$\Sigma\mathfrak{M}''_{j2}$	η_{k2}	η_{k2}/I_2
1	33,1053	18,2738	51,3791	51,3791	0	84,4844	84,4844	14,8315	14,8315	142,5930	68,42
2	20,2003	8,0009	28,2012	79,5803	51,3791	48,4015	132,8859	12,1994	27,0309	392,9281	188,54
3	10,4902	1,4249	11,9151	91,4954	130,9594	22,4053	155,2912	9,0653	36,0962	689,5914	330,90
4	3,9853	− 2,2082	1,7770	93,2724	222,4548	5,7622	161,0534	6,1934	42,2896	994,1051	477,02
5	0,1189	− 3,3263	− 3,2074	90,0650	315,7272	− 3,0885	157,9649	3,4452	45,7348	1284,3318	616,28
6	− 1,3237	− 1,6281	− 2,9518	87,1132	405,7922	− 4,2755	153,6894	0,3044	46,0392	1551,4439	744,45

conduc la rezultatele

k	$\Sigma\mathfrak{M}_{j1}$	$\mathfrak{M}''_{j1}$	τ_{k1}	τ_{k1}/I_1	$\Sigma\mathfrak{M}_{j2}$	$\mathfrak{M}''_{j2}$	τ_{k2}	τ_{k2}/I_2	$\Delta\%$
1	1,6160	1,6682	1,8120	32,22	51,3791	14,8415	70,7486	33,95	5,3
2	2,1454	1,3006	3,2982	40,86	79,5803	12,1994	95,5124	45,83	11,2
3	2,3717	1,4347	2,5402	45,17	91,4954	9,0653	103,3344	49,58	9,8
4	2,3581	1,3066	2,5116	44,66	93,2724	6,1934	101,3608	48,64	9,2
5	2,2567	1,0548	2,3806	42,33	90,0650	3,4452	94,5643	45,38	7,2
6	1,8617	1,1956	2,0022	35,60	87,1132	0,3044	87,5107	41,99	11,8

După cum se vede, diferențele dintre rotirile celor doi spaleți nu numai că sînt apreciabile (atingînd circa 12%), dar acestea diferă de la nivel la nivel, așa că diferențele relative sînt cu mult mai mari.

11. *Concluzii privind calculele de mai sus*

Comparînd rezultatele de mai sus cu cele din [11], obținute pe baza aceloraşi ipoteze simplificatoare ca cele pe care este fundamentată lucrarea de față, considerînd însă în plus că punctele de inflexiune sînt în mijlocul grinzilor de cuplare şi *că atît săgețile, cît şi rotirile celor doi spaleți sînt aceleași la toate nivelele* şi neglijînd deformațiile din lunecare ale celor doi spaleți, se constată diferențe apreciabile privind forțele tăietoare din grinzile de cuplare. Aceste diferențe ating circa $+38{,}5\%$ la valorile maxime şi circa $-81{,}5\%$ la ultima grindă de cuplare.

Momentele încovoietoare maxime din spaletul mai rigid sînt destul de apropiate ca valoare între ele (diferența de circa $-10{,}5\%$). Momentele încovoietoare maxime din spaletul mai puțin rigid diferă însă între ele în cele două calcule cu circa $+104{,}5\%$.

De asemenea eforturile axiale maxime diferă între ele cu circa $+11{,}2\%$).

Considerăm că diferențele arătate mai sus se datoresc tocmai ipotezei simplificatoare a continuității din zona şirului de goluri, care implică identitatea dintre deformatele celor două elemente verticale şi care stă la baza atît a metodei de calcul din [11], cît şi a majorității metodelor cunoscute.

Menționăm totodată că încercarea pe model prin metoda fotoelastică din [11] confirmă rezultatele obținute în lucrarea de față privind eforturile din spaletul mai rigid. De asemenea, nepotrivirea de la spaletul mai puțin rigid este numai aparentă, întrucît este evidentă formarea unui punct de concentrare de eforturi în zona de încastrare a acestuia.

De altfel considerăm că cel mai important rezultat obținut pentru cazul de față, prin încercarea pe model fotoelastic, este posibilitatea fundamentării teoriei pe ipoteza simplificatoare a secțiunilor plane, deși din încercările relatate în [11] și în alte lucrări [3], [15] nu rezultă o confirmare liniștitoare a acesteia.

3. CONCLUZII

Avînd în vedere cele arătate mai sus, considerăm că metoda de calcul expusă prezintă avantajul unei siguranțe mai mari asupra exactității rezultatelor obținute, prin eliminarea unor aproximări inadmisibile în cazul de față (după cum rezultă din exemplul tratat) și prin luarea în considerare, fără nici o dificultate în plus, și a deformațiilor din lunecare, cu atît mai importante cu cît disimetria introdusă de diferența dintre rigiditățile elementelor verticale este mai pronunțată.

Credem că acest avantaj justifică pe deplin calculele oarecum lungi, dar simplu de efectuat, pe care le implică metoda prezentată.

De altfel, efectuarea calculelor cu ajutorul mijloacelor moderne de calcul, pentru care se dau elementele necesare, reduce munca proiectantului la minimum în condițiile actuale, permițînd totodată obținerea concomitentă a rezultatelor pentru mai multe tipuri de încărcări, de exemplu în primele trei moduri de vibrație.

Menționăm totodată că prin lucrarea de față nu se epuizează problema, întrucît nu au fost luate în considerare concentrările de eforturi și deformațiile locale (pentru care se propune totuși, în această fază de calcul, mărirea deschiderii buiandrugilor), precum și deformațiile posibile ale grinzii de cuplare din fundație.

Primită la redacție la 2 martie 1966

ANEXĂ

Tabele cu valorile factorilor necesari pentru calculul termenilor liberi, în primele trei moduri de vibrație în cazul încărcării cu sarcini concentrate, proporționale cu săgețile

Tabelele sînt alcătuite pentru

$$S_i \cdot h = 1$$

unde S_i este sarcina seismică totală (de la bază) pe întreaga diafragmă în modul i de vibrație, iar h distanța dintre două nivele consecutive.

Termenii liberi U_k se calculează cu formula (45)

$$U_{ki} = \gamma \cdot C_{ki} + D_{ki}.$$

În tabele se dau de asemenea valorile momentelor m_{ki} pe întreaga diafragmă (în modurile i de vibrație), după [6], calculate de asemenea pentru $S_i \cdot h = 1$, precum și termenii A_i, A_j, a_i, a_j, după [6], și A_{ij} calculați conform formulei (53), pentru $i = 2$ și $j = n-1$.

$\boxed{n = 5}$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}
0	—	—	2,0254	3,9617
1	1,0254	1,9746	0,0662	2,9617
2	0,0662	1,8575	0,0931	1,9871
3	0,0931	1,5812	0,1077	1,1042
4	0,1077	1,1042	− 0,2924	0,4059
5	− 0,2924	0,4059	—	0

$A_{2,4} = 11{,}1641$

$A_2 = 39{,}566 \quad a_2 = 0{,}1975$

$A_4 = 127{,}766 \quad a_4 = 0{,}3556$

$\boxed{n = 6}$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}
0	—	—	2,0156	4,6911
1	1,0156	1,9844	0,0417	3,6911
2	0,0417	1,9115	0,0603	2,7067
3	0,0603	1,7366	0,0724	1,7796
4	0,0724	1,4290	0,0790	0,9700
5	0,0790	0,9700	− 0,2690	0,3505
6	− 0,2690	0,3505	—	0

$A_{2,5} = 24{,}7849$

$A_2 = 48{,}309 \quad a_2 = 0{,}1985$

$A_5 = 230{,}508 \quad a_5 = 0{,}4341$

$\boxed{n = 7}$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}
0	—	—	2,0103	5,4195
1	1,0103	1,9897	0,0278	4,4195
2	0,0278	1,9413	0,0413	3,4297
3	0,0413	1,8239	0,0506	2,4781
4	0,0506	1,6145	0,0569	1,6058
5	0,0569	1,2975	0,0601	0,8636
6	0,0601	0,8636	− 0,2470	0,3083
7	− 0,2470	0,3083	—	0

$A_{2,6} = 45{,}7474$

$A_2 = 57{,}044 \quad a_2 = 0{,}1990$

$A_6 = 376{,}395 \quad a_6 = 0{,}5111$

$\boxed{n = 10}$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}
0	—	—	2,0038	7,6010
1	1,0038	1,9962	0,0107	6,6010
2	0,0107	1,9779	0,0164	5,6048
3	0,0164	1,9326	0,0210	4,6231
4	0,0210	1,8499	0,0247	3,6722
5	0,0247	1,7214	0,0274	2,7732
6	0,0274	1,5407	0,0293	1,9508
7	0,0293	1,3033	0,0305	1,2325
8	0,0305	1,0062	0,0311	0,6475
9	0,0311	0,6475	− 0,1949	0,2263
10	− 0,1949	0,2263	—	0

$A_{2,9} = 167{,}5786$

$A_2 = 83{,}216 \quad a_2 = 0{,}1996$

$A_9 = 1147{,}046 \quad a_9 = 0{,}7375$

$\boxed{n = 9}$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}
0	—	—	2,0051	6,8742
1	1,0051	1,9949	0,0142	5,8743
2	0,0142	1,9705	0,0217	4,8793
3	0,0217	1,9102	0,0275	3,9038
4	0,0275	1,8007	0,0318	2,9692
5	0,0318	1,6319	0,0350	2,1030
6	0,0350	1,3963	0,0368	1,3372
7	0,0368	1,0889	0,0379	0,7067
8	0,0379	0,7067	− 0,2100	0,2483
9	− 0,2100	0,2483	—	0

$A_{2,8} = 115{,}6737$

$A_2 = 74{,}496 \quad a_2 = 0{,}1995$

$A_8 = 827{,}242 \quad a_8 = 0{,}6626$

$\boxed{n = 8}$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}
0	—	—	2,0071	6,1471
1	1,0071	1,9929	0,0195	5,1471
2	0,0195	1,9592	0,0294	4,1542
3	0,0294	1,8766	0,0368	3,1858
4	0,0368	1,7278	0,0420	2,2776
5	0,0420	1,5001	0,0454	1,4602
6	0,0454	1,1850	0,0471	0,7775
7	0,0471	0,7775	− 0,2275	0,2751
8	− 0,2275	0,2751	—	0

$A_{2,7} = 75{,}5341$

$A_2 = 65{,}772 \quad a_2 = 0{,}1993$

$A_7 = 572{,}782 \quad a_7 = 0{,}5872$

$n = 11$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}	C_{k2}	D_{k2}	W_{k2}	m_{k2}	C_{k3}	D_{k3}	W_{k3}	m_{k3}
0	—	—	2,0029	8,3275	—	—	2,0282	2,4833	—	—	2,1256	1,2484
1	1,0029	1,9971	0,0082	7,3275	1,0286	1,9716	0,0674	1,4833	1,1256	1,8744	0,2337	0,2484
2	0,0082	1,9831	0,0127	6,3304	0,0674	1,8471	0,0801	0,6108	0,2337	1,3895	0,1560	−0,6260
3	0,0127	1,9482	0,0165	5,3444	0,0801	1,5751	0,0685	−0,3647	0,1560	0,5149	−0,0324	−1,1411
4	0,0165	1,8841	0,0195	4,3823	0,0685	1,1544	0,0383	−1,0641	−0,0324	−0,4833	−0,2259	−1,1409
5	0,0195	1,7840	0,0218	3,4604	0,0383	0,6269	−0,0041	−1,5189	−0,2259	−1,2232	−0,3269	−0,6578
6	0,0218	1,6426	0,0236	2,5982	−0,0041	0,0652	−0,0513	−1,6908	−0,3269	−1,4103	−0,2822	0,0822
7	0,0236	1,4557	0,0249	1,8177	−0,0513	−0,4411	−0,0953	−1,5840	−0,2822	−0,9883	−0,1066	0,7524
8	0,0249	1,2204	0,0256	1,1425	−0,0953	−0,8008	−0,1310	−1,2497	−0,1066	−0,1775	0,1298	1,0705
9	0,0256	0,9347	0,0260	0,5973	−0,1310	−0,9342	−0,1534	−0,7832	0,1298	0,6101	0,3380	0,9299
10	0,0260	0,5973	−0,1817	0,2076	−0,1534	−0,7832	0,1522	−0,3155	0,3380	0,9299	−0,0091	0,4604
11	−0,1817	0,2078	—	0	0,1522	−0,3155	—	0	−0,0091	0,4604	—	0

$A_2 = 91{,}933$; $A_{10} = 1539{,}658$; $a_2 = 0{,}1997$; $a_{10} = 0{,}8120$; $A_{2,10} = 232{,}8201$

$n = 20$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}	C_{k2}	D_{k2}	W_{k2}	m_{k2}	C_{k3}	D_{k3}	W_{k3}	m_{k3}
0	—	—	2,0005	14,8607	—	—	2,0054	4,3216	—	—	2,0247	2,4954
1	1,0005	1,9995	0,0015	13,8607	1,0054	1,9946	0,0145	3,3216	1,0247	1,9753	0,0597	1,4954
2	0,0015	1,9969	0,0025	12,8613	0,0145	1,9693	0,0208	2,3270	0,0597	1,8663	0,0737	0,5200
3	0,0025	1,9904	0,0032	11,8638	0,0208	1,9087	0,0244	1,3523	0,0737	1,6239	0,0689	−0,3709
4	0,0032	1,9782	0,0041	10,8709	0,0244	1,8030	0,0255	0,4183	0,0689	1,2388	0,0484	−1,1038
5	0,0041	1,9586	0,0047	9,8856	0,0255	1,6474	0,0242	−0,4507	0,0484	0,7364	0,0168	−1,6097
6	0,0047	1,9304	0,0053	8,9122	0,0242	1,4421	0,0208	−1,2292	0,0168	0,1688	−0,0197	−1,8402
7	0,0053	1,8921	0,0059	7,9552	0,0208	1,1918	0,0155	−1,8928	−0,0197	−0,3959	−0,0549	−1,7785
8	0,0059	1,8425	0,0064	7,0201	0,0155	0,9051	0,0089	−2,4209	−0,0549	−0,8859	−0,0834	−1,4443
9	0,0064	1,7807	0,0067	6,1127	0,0089	0,5940	0,0012	−2,7980	−0,0834	−1,2376	−0,1003	−0,8926
10	0,0067	1,7058	0,0072	5,2394	0,0012	0,2728	−0,0071	−3,0149	−0,1003	−1,4057	−0,1030	−0,2067
11	0,0072	1,6171	0,0074	4,4069	−0,0071	−0,0426	−0,0155	−3,0707	−0,1030	−1,3706	−0,0907	0,5132
12	0,0074	1,5138	0,0076	3,6223	−0,0155	−0,3353	−0,0237	−2,9724	−0,0907	−1,1418	−0,0650	1,1639
13	0,0076	1,3954	0,0078	2,8931	−0,0237	−0,5888	−0,0312	−2,7354	−0,0650	−0,7572	−0,0283	1,6549
14	0,0078	1,2615	0,0080	2,2269	−0,0312	−0,7874	−0,0378	−2,3836	−0,0283	−0,2794	0,0131	1,9212
15	0,0080	1,1118	0,0081	1,6316	−0,0378	−0,9169	−0,0433	−1,9481	0,0131	0,2136	0,0546	1,9344
16	0,0081	0,9461	0,0082	1,1151	−0,0433	−0,9659	−0,0472	−1,4667	0,0546	0,6390	0,0922	1,7076
17	0,0082	0,7641	0,0082	0,6855	−0,0472	−0,9234	−0,0500	−0,9827	0,0922	0,9175	0,1206	1,2954
18	0,0082	0,5657	0,0082	0,3510	−0,0500	−0,7842	−0,0517	−0,5433	0,1206	0,9832	0,1384	0,7901
19	0,0082	0,3509	−0,1115	0,1197	−0,0517	−0,5433	0,1463	−0,1985	0,1384	0,7900	−0,1658	0,3121
20	−0,1115	0,1197	—	0	0,1463	−0,1985	—	0	−0,1658	0,3121	—	0

$A_2 = 170{,}329$; $A_{19} = 9573{,}954$; $a_2 = 0{,}1999$; $a_{19} = 1{,}4741$; $A_{2,19} = 1662{,}7514$

$n = 12$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}	C_{k2}	D_{k2}	W_{k2}	m_{k2}	C_{k3}	D_{k3}	W_{k3}	m_{k3}
0	—	—	2,0023	9,0538	—	—	2,0226	2,6888	—	—	2,0996	1,4034
1	1,0023	1,9977	0,0064	8,0538	1,0226	1,9774	0,0545	1,6888	1,0996	1,9004	0,1964	0,4034
2	0,0064	1,9867	0,0101	7,0561	0,0545	1,8777	0,0675	0,7114	0,1964	1,5049	0,1551	−0,4971
3	0,0101	1,9593	0,0131	6,0671	0,0675	1,6560	0,0626	−0,1889	0,1551	0,7579	0,0219	−1,1016
4	0,0131	1,9087	0,0156	5,0968	0,0626	1,3043	0,0433	−0,9447	0,0219	−0,1662	−0,1374	−1,2550
5	0,0156	1,8293	0,0177	4,1584	0,0433	0,8467	0,0132	−1,4932	−0,1374	−0,9748	−0,2522	−0,9354
6	0,0177	1,7166	0,0193	3,2675	0,0132	0,3324	−0,0226	−1,7913	−0,2522	−1,3938	−0,2740	−0,2803
7	0,0193	1,5669	0,0204	2,4419	−0,0226	−0,1725	−0,0589	−1,8256	−0,2740	−1,2860	−0,1901	0,4583
8	0,0204	1,3775	0,0213	1,7006	−0,0589	−0,5957	−0,0916	−0,6188	−0,1901	−0,7153	−0,0280	1,0063
9	0,0213	1,1464	0,0218	1,0644	−0,0916	−0,8684	−0,1161	−1,2299	−0,0280	0,0741	0,1568	0,1736
10	0,0218	0,8722	0,0220	0,5543	−0,1161	−0,9335	−0,1832	−0,7504	0,1568	0,7347	0,3064	0,9322
11	0,0220	0,5542	−0,1700	0,1921	−0,1832	−0,7503	0,1577	−0,2963	0,3064	0,9322	−0,0545	0,4389
12	−0,1700	0,1921	—	0	0,1577	−0,2963	—	0	−0,0545	0,4389	—	0

$A_2 = 100{,}648$; $A_{11} = 2012{,}370$; $a_2 = 0{,}1998$; $a_{11} = 0{,}8862$; $A_{2,11} = 312{,}8773$

$n = 19$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}	C_{k2}	D_{k2}	W_{k2}	m_{k2}	C_{k3}	D_{k3}	W_{k3}	m_{k3}
0	—	—	2,0006	14,1351	—	—	2,0063	4,1274	—	—	2,0285	2,3672
1	1,0006	1,9994	0,0018	13,1351	1,0063	1,9937	0,0165	3,1274	1,0285	1,9715	0,0680	1,3672
2	0,0018	1,9964	0,0028	12,1357	0,0165	1,9646	0,0236	2,1337	0,0680	1,8965	0,0817	0,3957
3	0,0028	1,9889	0,0037	11,1387	0,0236	1,8954	0,0274	1,1628	0,0817	1,5718	0,0732	−0,4793
4	0,0037	1,9748	0,0047	10,1468	0,0274	1,7750	0,0281	0,2384	0,0732	1,1423	0,0461	−1,1761
5	0,0047	1,9522	0,0054	9,1639	0,0281	1,5993	0,0258	−0,6123	0,0461	0,5935	0,0075	−1,6216
6	0,0054	1,9196	0,0061	8,1946	0,0258	1,3699	0,0212	−1,3610	0,0075	−0,0090	−0,0352	−1,7696
7	0,0061	1,8755	0,0067	7,2443	0,0212	1,0933	0,0146	−1,9821	−0,0352	−0,5838	−0,0740	−1,6127
8	0,0067	1,8186	0,0072	6,3191	0,0146	0,7809	0,0062	−2,4543	−0,0740	−1,0494	−0,1020	−1,1859
9	0,0072	1,7477	0,0077	5,4257	0,0062	0,4478	−0,0031	−2,7631	−0,1020	−1,3390	−0,1145	−0,5633
10	0,0077	1,6619	0,0081	4,5713	−0,0031	0,1116	−0,0131	−2,9021	−0,1145	−1,4121	−0,1083	0,1531
11	0,0081	1,5604	0,0083	3,7637	−0,0131	−0,2085	−0,0223	−2,8746	−0,1083	−1,2624	−0,0849	0,8488
12	0,0083	1,4425	0,0086	3,0109	−0,0223	−0,4933	−0,0315	−2,6936	−0,0849	−0,9195	−0,0470	1,4155
13	0,0086	1,3077	0,0088	2,3212	−0,0315	−0,7243	−0,0396	−2,3813	−0,0470	−0,4448	0,0001	1,7683
14	0,0088	1,1555	0,0089	1,7032	−0,0396	−0,8841	−0,0463	−1,9693	0,0001	0,0769	0,0489	1,8603
15	0,0089	0,9856	0,0090	1,1657	−0,0463	−0,9579	−0,0512	−1,4973	0,0489	0,5497	0,0940	1,6914
16	0,0090	0,7978	0,0091	0,7176	−0,0512	−0,9343	−0,0549	−1,0115	0,0940	0,8795	0,1292	1,3106
17	0,0091	0,5919	0,0091	0,3679	−0,0549	−0,8046	−0,0570	−0,5630	0,1292	0,9861	0,1516	0,8119
18	0,0091	0,3679	−0,1166	0,1257	−0,0570	−0,5629	0,1493	−0,2068	0,1516	0,8119	−0,1629	0,3245
19	−0,1166	0,1157	—	0	0,1493	−0,2068	—	0	−0,1629	0,3245	—	0

$A_2 = 161{,}622$; $A_{18} = 8192{,}165$; $a_2 = 0{,}1999$; $a_{18} = 1{,}4009$; $A_{2,18} = 1411{,}1975$

$n = 13$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}	C_{k2}	D_{k2}	W_{k2}	m_{k2}	C_{k3}	D_{k3}	W_{k3}	m_{k3}
0	—	—	2,0018	9,7800	—	—	2,0181	2,8935	—	—	2,0806	1,5328
1	1,0018	1,9982	0,0052	8,7800	1,0181	1,9818	0,0446	1,8935	1,0806	1,9194	1,1659	0,5328
2	0,0052	1,9894	0,0080	7,7818	0,0446	1,9009	0,0572	0,9117	0,1659	1,5923	0,1473	−0,3866
3	0,0080	1,9674	0,0106	6,7906	0,0572	1,7184	0,0562	−0,0075	0,1473	0,9520	0,0532	−1,0595
4	0,0106	1,9268	0,0128	5,8144	0,0562	1,4225	0,0440	−0,8068	0,0532	0,1112	−0,0737	−1,3386
5	0,0128	1,8628	0,0145	4,8638	0,0440	1,0262	0,0227	−1,4299	−0,0737	−0,7091	−0,1840	−1,1707
6	0,0145	1,7715	0,0159	3,9516	0,0227	0,5632	−0,0042	−1,8330	−0,1840	−1,2717	−0,2377	−0,6295
7	0,0159	1,6498	0,0170	3,0923	−0,0042	0,0818	−0,0335	−1,9931	−0,2377	−1,4126	−0,2137	0,1010
8	0,0170	1,4952	0,0178	2,3018	−0,0335	−0,3619	−0,0615	−1,9147	−0,2137	−1,1021	−0,1177	0,7831
9	0,0178	1,3058	0,0184	1,5971	−0,0615	−0,7107	−0,0856	−1,6312	−0,1177	−0,4602	0,0223	1,2031
10	0,0184	1,0802	0,0187	0,9960	−0,0856	−0,9123	−0,1036	−1,2041	0,0223	0,2770	0,1680	1,2433
11	0,0187	0,8174	0,0190	0,5169	−0,1036	−0,9246	−0,1145	−0,7189	0,1680	0,8238	0,2767	0,9261
12	0,0190	0,5169	−0,1597	0,1786	−0,1145	−0,7189	0,1601	−0,2794	0,2767	0,9261	−0,0872	−0,4195
13	−0,1597	0,1786	—	0	0,1601	−0,2794	—	0	−0,0872	0,4195	—	0

$A_2 = 109{,}362$; $A_{12} = 2573{,}001$; $a_2 = 0{,}1998$; $a_{12} = 0{,}9601$; $A_{2\,12} = 409{,}0871$

$n = 18$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}	C_{k2}	D_{k2}	W_{k2}	m_{k2}	C_{k3}	D_{k3}	W_{k3}	m_{k3}
0	—	—	2,0007	13,4100	—	—	2,0073	3,9270	—	—	2,0332	2,2319
1	1,0007	1,9993	0,0021	12,4100	1,0073	1,9927	0,0191	2,9270	1,0332	1,9668	0,0775	1,2319
2	0,0021	1,9959	0,0032	11,4107	0,0191	1,9590	0,0269	1,9343	0,0775	1,8229	0,0911	0,2650
3	0,0032	1,9871	0,0044	10,4141	0,0269	1,8793	0,0301	0,9680	0,0911	1,5104	0,0767	−0,5911
4	0,0044	1,9706	0,0054	9,4236	0,0301	1,7415	0,0314	0,0550	0,0767	1,0300	0,0418	−1,2454
5	0,0054	1,9444	0,0062	8,4434	0,0314	1,5422	0,0285	−0,7735	0,0418	0,4312	−0,0057	−1,6211
6	0,0062	1,9066	0,0071	7,4791	0,0285	1,2841	0,0200	−1,4872	−0,0057	−0,2036	−0,0552	−1,6766
7	0,0071	1,8555	0,0077	6,5368	0,0200	0,9775	0,0125	−2,0576	−0,0552	−0,7776	−0,0966	−1,4175
8	0,0077	1,7896	0,0082	5,6236	0,0125	0,6384	0,0023	−2,4647	−0,0966	−1,1998	−0,1822	−0,8990
9	0,0082	1,7078	0,0088	4,7471	0,0023	0,2846	−0,0090	−2,6961	−0,1822	−1,4032	−0,1262	−0,2178
10	0,0088	1,6090	0,0091	3,9157	−0,0090	−0,0626	−0,0203	−2,7493	−0,1262	−1,3582	−0,1077	0,5041
11	0,0091	1,4923	0,0095	3,1381	−0,0203	−0,3806	−0,0308	−2,6334	−0,1077	−1,0792	−0,0697	1,1404
12	0,0095	1,3570	0,0097	2,4235	−0,0308	−0,6474	−0,0416	−2,3688	−0,0697	−0,6228	−0,0175	1,5833
13	0,0097	1,2025	0,0099	1,7812	−0,0416	−0,8418	−0,0495	−1,9861	−0,0175	−0,0793	0,0396	1,7632
14	0,0099	1,0284	0,0100	1,2210	−0,0495	−0,9452	−0,0559	−1,5270	0,0396	0,4421	0,0946	1,6627
15	0,0100	0,8345	0,0101	0,7528	−0,0559	−0,9432	−0,0603	−1,0409	0,0946	0,8293	0,1383	1,3212
16	0,0101	0,6206	0,0101	0,3865	−0,0603	−0,8249	−0,0626	−0,5838	0,1383	0,9836	0,1662	0,8334
17	0,0101	0,3865	−0,1221	0,1322	−0,0626	−0,5838	0,1519	−0,2160	0,1662	0,8334	−0,1582	0,3376
18	−0,1221	0,1322	—	0	0,1519	−0,2160	—	0	−0,1582	0,3376	—	0

$A_2 = 152{,}921$; $A_{17} = 6950{,}284$; $a_2 = 0{,}1999$; $a_{17} = 1{,}3278$; $A_{2.17} = 1186{,}3133$

$n = 14$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}	C_{k2}	D_{k2}	W_{k2}	m_{k2}	C_{k3}	D_{k3}	W_{k3}	m_{k3}
0	—	—	2,0015	10,5060	—	—	2,0148	3,0964	—	—	2,0660	1,6772
1	1,0015	1,9985	0,0041	9,5060	1,0148	1,9852	0,0369	2,0964	1,0660	1,9340	0,1406	0,6772
2	0,0041	1,9914	0,0066	8,5076	0,0369	1,9187	0,0487	1,1112	0,1406	1,6613	0,1364	−0,2567
3	0,0066	1,9736	0,0087	7,5146	0,0487	1,7666	0,0500	0,1777	0,1364	1,1117	0,0700	−0,9841
4	0,0087	1,9404	0,0105	6,5339	0,0500	1,5158	0,0425	−0,6554	0,0700	0,3558	−0,0292	−1,3684
5	0,0105	1,8880	0,0121	5,5742	0,0425	1,1726	0,0274	−1,3381	−0,0292	−0,4411	−0,1275	−1,3398
6	0,0121	1,8131	0,0132	4,6459	0,0274	0,7594	0,0073	−1,8280	−0,1275	−1,0813	−0,1929	−0,9274
7	0,0132	1,7129	0,0143	3,7611	0,0073	0,3114	−0,0159	−2,0975	−0,1929	−1,4010	−0,2046	−0,2586
8	0,0143	1,5852	0,0151	2,9330	−0,0159	−0,1279	−0,0394	−2,1395	−0,2046	−1,3231	−0,1574	0,4736
9	0,0151	1,4281	0,0156	2,1759	−0,0394	−0,5118	−0,0610	−1,9697	−0,1574	−0,8833	−0,0626	1,0645
10	0,0156	1,2402	0,0161	1,5050	−0,0610	−0,7953	−0,0794	−1,6276	−0,0626	−0,2236	0,0552	1,3569
11	0,0161	1,0206	0,0163	0,9357	−0,0794	−0,9385	−0,0923	−1,1743	0,0552	0,4436	0,1683	1,2880
12	0,0163	0,7688	0,0164	0,4843	−0,0923	−0,9101	−0,1002	−0,6891	0,1683	0,8873	0,2496	0,9132
13	0,0164	0,4863	−0,1505	0,1669	−0,1002	−0,6891	0,1606	−0,2642	0,2496	0,9132	−0,1119	0,4007
14	−0,1505	0,1669	—	0	0,1606	−0,2642	—	0	−0,1119	0,4007	—	0

$A_2 = 118{,}074$; $A_{13} = 3228{,}553$; $a_2 = 0{,}1999$; $a_{13} = 1{,}0339$ $A_{2.13} = 523{,}3110$

$n = 17$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}	C_{k2}	D_{k2}	W_{k2}	m_{k2}	C_{k3}	D_{k3}	W_{k3}	m_{k3}
0	—	—	2,0008	12,6837	—	—	2,0086	3,7131	—	—	2,0388	2,0907
1	1,0008	1,9992	0,0025	11,6837	1,0086	1,9914	0,0223	2,7131	1,0388	1,9612	0,0894	1,0907
2	0,0025	1,9951	0,0038	10,6845	0,0223	1,9520	0,0310	1,7216	0,0894	1,7942	0,1011	0,1295
3	0,0038	1,9847	0,0051	9,6886	0,0310	1,8593	0,0347	0,7611	0,1011	1,4367	0,0796	−0,7035
4	0,0051	1,9654	0,0063	8,6998	0,0347	1,2008	0,0337	−0,1376	0,0796	0,8985	0,0339	−1,3072
5	0,0063	1,9347	0,0073	7,7232	0,0337	1,4738	0,0288	−0,9397	0,0339	0,2468	−0,0241	−1,6020
6	0,0073	1,8904	0,0081	6,7651	0,0288	1,1844	0,0204	−1,6114	−0,0241	−0,4146	−0,0806	−1,5540
7	0,0081	1,8307	0,0089	5,8327	0,0204	0,8459	0,0093	−2,1241	−0,0806	−0,9713	−0,1226	−0,1874
8	0,0089	1,7540	0,0095	4,9343	0,0093	0,4776	−0,0035	−2,4572	−0,1226	−1,3249	−0,1421	−0,5827
9	0,0095	1,6589	0,0101	4,0787	−0,0035	0,1035	−0,0169	−2,6016	−0,1421	−1,4138	−0,1332	0,1375
10	0,0101	1,5442	0,0104	3,2754	−0,0169	−0,2501	−0,0304	−2,5607	−0,1332	−1,2274	−0,0972	0,8311
11	0,0104	1,4091	0,0107	2,5344	−0,0304	−0,5564	−0,0425	−2,3515	−0,0972	−0,8106	−0,0408	1,3649
12	0,0107	1,2528	0,0110	1,8663	−0,0425	−0,7900	−0,0529	−2,0042	−0,0408	−0,2558	0,0259	1,6417
13	0,0110	1,0747	0,0111	1,2817	−0,0529	−0,9282	−0,0609	−1,5615	0,0259	0,3139	0,0928	1,6207
14	0,0111	0,8746	0,0113	0,7915	−0,0609	−0,9525	−0,0667	−1,0761	0,0928	0,7649	0,1473	1,3278
15	0,0113	0,6521	0,0113	0,4071	−0,0667	−0,8492	−0,0683	−0,6089	0,1473	0,9758	0,1836	0,8558
16	0,0113	0,4071	−0,1282	0,1395	−0,0683	−0,6089	0,1533	−0,2268	0,1836	0,8558	−0,1518	0,3520
17	−0,1282	0,1395	—	0	0,1533	−0,2268	—	0	−0,1518	0,3520	—	0

$A_2 = 144{,}205$; $A_{16} = 5839{,}904$; $a_2 = 0{,}1999$; $a_{16} = 1,\ 2544$; $A_{2.16} = 986{,}5061$

$n = 15$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}	C_{k2}	D_{k2}	W_{k2}	m_{k2}	C_{k3}	D_{k3}	W_{k3}	m_{3k}
0	—	—	2,0012	11,2320	—	—	2,0122	3,2966	—	—	2,0547	1,8191
1	1,0012	1,9988	0,0034	10,2320	1,0122	1,9878	0,0310	2,2966	1,0547	1,9453	0,1201	0,8191
2	0,0034	1,9930	0,0055	9,2332	0,0310	1,9324	0,0417	1,3088	0,1201	1,7158	0,1242	−0,1261
3	0,0055	1,9783	0,0072	8,2391	0,0417	1,8043	0,0441	0,3642	0,1242	1,2420	0,0780	−0,8966
4	0,0072	1,9509	0,0088	7,2550	0,0441	1,5904	0,0399	−0,4955	0,0780	0,5660	0,0010	−1,3681
5	0,0088	1,9075	0,0100	6,2882	0,0399	1,2924	0,0294	−1,2262	0,0010	−0,1890	−0,0829	−1,4626
6	0,0100	1,8453	0,0112	5,3475	0,0294	0,9251	0,0143	−1,7879	−0,0829	−0,8621	−0,1498	−1,1791
7	0,0112	1,7618	0,0121	4,4430	0,0143	0,5142	−0,0039	−2,1513	−0,1498	−1,3025	−0,1809	−0,6005
8	0,0121	1,6550	0,0129	3,5857	−0,0039	0,0929	−0,0233	−2,3021	−0,1809	−1,4122	−0,1664	−0,1234
9	0,0129	1,5233	0,0134	2,7879	−0,0233	−0,3012	−0,0421	−2,2442	−0,1664	−1,1746	−0,1095	−0,8116
10	0,0134	1,3653	0,0138	2,0624	−0,0421	−0,6299	−0,0591	−2,0009	−0,1095	−0,6611	−0,0222	1,2979
11	0,0138	1,1801	0,0141	1,4226	−0,0591	−0,8574	−0,0729	−1,6143	−0,0222	−0,0159	0,0751	1,4727
12	0,0141	0,9670	0,0143	0,8823	−0,0729	−0,9529	−0,0827	−1,1436	0,0751	0,5764	0,1632	1,3138
13	0,0143	0,7256	0,0143	0,4555	−0,0827	−0,8928	−0,0884	−0,6615	0,1632	0,9303	0,2248	0,8963
14	0,0143	0,4555	−0,1422	0,1566	−0,0884	−0,6616	0,1599	−0,2509	0,2248	0,8963	0,1294	0,3835
15	−0,1422	0,1566	—	0	0,1599	−0,2509	—	0	−0,1294	0,3835	—	0

$A_2 = 126{,}785$; $A_{14} = 3986{,}632$; $a_2 = 0{,}1999$; $a_{14} = 1{,}1075$, $A_{2.14} = 656{,}5133$

$n = 16$

k	C_{k1}	D_{k1}	W_{k1}	m_{k1}	C_{k2}	D_{k2}	W_{k2}	m_{k2}	C_{k3}	D_{k3}	W_{k3}	m_{k3}
0	—	—	2,0010	11,9578	—	—	2,0101	3,4958	—	—	2,0458	1,9549
1	1,0010	1,9990	0,0029	10,9578	1,0101	1,9899	0,0277	2,4958	1,0458	1,9542	0,1034	0,9549
2	0,0029	1,9941	0,0045	9,9588	0,0277	1,9420	0,0343	1,5060	0,1034	1,7592	0,1123	0,0007
3	0,0045	1,9818	0,0061	8,9637	0,0343	1,8321	0,0392	0,5539	0,1123	1,3486	0,0804	−0,8043
4	0,0061	1,9590	0,0073	7,9770	0,0392	1,6487	0,0368	−0,3261	0,0804	0,7453	0,0209	−1,3479
5	0,0073	1,9227	0,0086	7,0047	0,0368	1,3892	0,0297	−1,0948	0,0209	0,0405	−0,0491	−1,5495
6	0,0086	1,8704	0,0095	6,0543	0,0297	1,0633	0,0182	−1,7153	−0,0491	−0,6360	−0,1120	−1,3883
7	0,0095	1,8001	0,0103	5,1343	0,0182	0,6896	0,0041	−2,1581	−0,1120	−1,1514	−0,1517	−0,9135
8	0,0103	1,7100	0,0110	4,2542	0,0041	0,2935	−0,0117	−2,4048	−0,1517	−1,4031	−0,1584	−0,2369
9	0,0110	1,5986	0,0116	3,4242	−0,0117	−0,0951	−0,0290	−2,4515	−0,1584	−1,3446	−0,1300	0,4986
10	0,0116	1,4646	0,0120	2,6555	−0,0290	−0,4429	−0,0417	−2,3097	−0,1300	−0,9978	−0,0709	1,1077
11	0,0120	1,3070	0,0122	1,9597	−0,0417	−0,7200	−0,0562	−2,0086	−0,0709	−0,4501	0,0064	1,4873
12	0,0122	1,1252	0,0125	1,3485	−0,0562	−0,8993	−0,0666	−1,5898	0,0064	0,1621	0,0929	1,5577
13	0,0125	0,9186	0,0126	0,8345	−0,0666	−0,9557	−0,0743	−1,1094	0,0929	0,6814	0,1560	1,3252
14	0,0126	0,6869	0,0127	0,4299	−0,0743	−0,8712	−0,0783	−0,6341	0,1560	0,9582	0,2027	0,8763
15	0,0127	0,4299	−0,1348	0,1475	−0,0783	−0,6341	0,1577	−0,2382	0,2027	0,8763	−0,1423	0,3670
16	−0,1348	0,1475	—	0	0,1577	−0,2382	—	0	−0,1423	0,3670	—	0

$A_2 = 135{,}495$; $A_{15} = 4854{,}573$; $a_2 = 0{,}1999$; $a_{15} = 1{,}1810$, $A_{2.15} = 810{,}4095$

BIBLIOGRAFIE

1. AGENT R., *Calculul diafragmelor cu goluri după metoda Albigès-Goulet este un calcul de diafragmă sau un calcul de cadru etajat?* Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *6* (1965).
2. ALBIGÈS N., GOULET J., *Contreventement de bâtiments*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, mai 1960.
3. BALAȘ J., SZABO, *Ein Beitrag zur theoretischen Lösung von tragenden Querwänden mit Öffnungen unter horizontaler Belastung*, Der Bauingenieur, *12* (1965).
4. BECK H., *Contribution to the Analysis of couplet shear walls*, Journal of the American Concrete Institute, *8* (1962).
5. DECAUCHY M. A., *Contreventements des bâtiments*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, ianuarie 1964.
6. FLORIAN V., *Contribuții privind calculul la forțe orizontale al structurilor alcătuite din diafragme*, St. cerc. mec. apl., *6* (1964).
7. FLORIAN V., *Contribuții privind calculul diafragmelor cu goluri, al diafragmelor cuplate și al cadrelor-diafragme*, *6* (1965); *1* (1966).
8. FRISCHMAN W. W., PRABHU S. S., TOPPLER J. F., *Multi-storey Frames and interconnected Shear-walls subjected to lateral Loads*, Concrete and Constructional Engineering, *6* (1963); *7* (1963).
9. KEINTZEL E., *Determinarea aproximativă a forțelor seismice la construcții înalte cu diafragme*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *6* (1965).
10. ГУСЕЛЬНИКОВ В. М., *Расчет вертикальных диафрагм с проемами крупнопанельных зданий повышенной этажности*, Бетон и железобетон, *10* (1964).
11. MATEESCU D., ANASTASESCU D., GODEANU I., *Calculul timpanelor rigide cu un șir de goluri*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *2* (1962).
12. MAZILU P., *Statica construcțiilor*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1959.
13. NAUMANN W., *Bericht zur statischenßerechnung waagrecht belasteter Querwände bei Hochbauten*, Der Bauingenieur, *8* (1961).
14. ROSMAN R., *Systeme aus durchbrochenen Wanden und Stockwerkrahmen*, Die Bautechnik, *2* (1964).
15. ROSMAN E., *Spannungsoptische Untersuchung einer waagrechtbelasteter Querwand einer Hochbaues*, Der Bauingenieur, *12* (1962).
16. TITARU E., CIȘMIGIU D., *Calculul dinamic și spațial al construcțiilor la cutremur și la alte acțiuni laterale*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *12* (1959).

EFECTUL PRECOMPRIMĂRII ÎN CALCULUL CADRELOR SPAȚIALE[1)]

de DECEBAL ANASTASESCU și ION MUNTEANU
D.S.A.P.C—Banat
Institutul politehnic Timișoara

624.04

Se generalizează la cadrele spațiale din beton precomprimat procedeul diagramelor de influență pentru determinarea eforturilor care apar în aceste structuri ca efect al precomprimării.
Diagramele de influență introduse recent în calculul static al cadrelor plane precomprimate au caracterul unor linii de influență pentru o pereche de cupluri mobile, unitare și de sens contrar.
Se demonstrează avantajele metodei lucrului mecanic virtual în varianta deplasărilor virtuale și se aplică metoda deplasărilor cu rezolvarea iterativă a ecuațiilor de condiție.
Se determină de asemenea eforturile suplimentare care apar în cadrele spațiale precomprimate ca efect al deformațiilor axiale ale barelor datorită precomprimării.
Studiul e completat cu exemple practice de calcul și cu concluziile necesare.

1. INTRODUCERE

Calculul complet al structurilor static nedeterminate din beton precomprimat necesită cunoașterea eforturilor care apar în legăturile suplimentare ale acestor structuri datorită efectului de precomprimare provocat de întinderea cablurilor.

Din cauza așezării în general excentrice a cablurilor față de axa medie a barei, într-o secțiune curentă a ei apar eforturi (M, T, N) proprii stării de autosolicitare, precum și deformațiile corespunzătoare lor.

În general, deformațiile datorită efortului T se neglijează.

În cele ce urmează se prezintă calculul eforturilor suplimentare care apar în structurile spațiale de tipul cadrelor ca urmare a deformațiilor de încovoiere a barei sub efectul precomprimării și separat pe cel al eforturilor din deformațiile axiale.

[1)] Prezentată la Conferința de mecanică, București, septembrie 1965. Publicată și în „Rev. roum. sci. tech.—Mécanique Appliquée", **12**, *1* (1967) (în limba franceză).

2. INFLUENȚA DEFORMAȚIILOR DE ÎNCOVOIERE

Dacă se neglijează influența deformațiilor axiale și frecările dintre cabluri și beton, diagrama de momente datorită precomprimării se obține suprapunînd peste diagrama static determinată $M_x^0 = N^c \cdot e_x$ (N^c fiind efortul axial de precomprimare și e_x excentricitatea acestui efort în secțiunea x față de axa medie a barei precomprimate) diagrama momentelor static nedeterminate obținută în funcție de caracteristicile elastice ale structurii și de variația eforturilor M_x^0.

Deoarece nu se cunoaște de la început alura finală (optimă) a traseului cablurilor, deci nici a diagramei M_x^0, determinarea eforturilor datorită precomprimării se face prin încercări succesive, corectîndu-se alura traseului după fiecare încercare, pînă se ajunge la traseul cel mai favorabil.

Reluarea succesivă a întregului calcul necesitînd un volum mare de muncă, s-a căutat eliminarea acestui inconvenient prin introducerea unor procedee de calcul similare utilizării liniilor de influență din cazul sarcinilor mobile.

Astfel, M. H. Celasun introduce [11] noțiunea de „linii de influență a momentelor static nedeterminate produse de cablul de precomprimare" la calculul grinzilor continue precomprimate cu moment de inerție variabil. Autorul determină în tabele valorile ordonatelor pentru liniile de influență ale rotirilor pe reazemele deschiderilor grinzii continue, considerate ca grinzi simplu rezemate. În funcție de aceste valori se determină apoi linia de influență a momentelor pe reazemele grinzii continue, folosind ca instrument de calcul metoda eforturilor, cu rezolvarea globală a sistemului general de ecuații.

În continuare, M. Albiges și Y. Le Bourdellès extind și la cadrele plane procedeul aplicării acestor linii de influență, pe care autorii le denumesc „diagrame de influență" [2], utilizîndu-le atît la determinarea eforturilor, cît și a săgeților provocate de efectul precomprimării. Autorii aplică metoda lucrului mecanic virtual în varianta forțelor virtuale, iar ca instrument de calcul metoda mixtă, cu rezolvarea prin recurență a ecuațiilor de condiție, utilizînd procedeul cunoscut al punctelor fixe.

2.1. VARIANTA FORȚELOR VIRTUALE

2.1.1. În cele ce urmează se va extinde procedeul amintit anterior [2] la structurile spațiale de tipul cadrelor.

Se consideră cadrul spațial din figura 1 și urmează să se determine diagrama de influență a efortului $S(M, T, N)$ din secțiunea s și după axa a (1, 2, 3) a secțiunii transversale ($S_{s,a}$).

Sistemul de axe corespunzător nodului k este dat în figura 2. În secțiunile variabile x și $x + \mathrm{d}x$ și după axa a se aplică cuplele unitare $M_{x,a} = -1$ și $M_{x+\mathrm{d}x,a} = +1$.

Se suprimă în secțiunea s legătura simplă corespunzătoare efortului $S_{s,a}$ și pentru restabilirea echilibrului static se introduce în această secțiune perechea de eforturi $S_{s,a}$.

Aplicînd apoi perechea de eforturi virtuale $\overline{S}_{s,a}$ în aceeași secțiune, se dă de fapt structurii o deplasare virtuală, avînd drept efect deplasarea

virtuală $\overline{\Delta}_{s,a}$ între capetele secțiunii s după direcția efortului $S_{s,a}$, precum și deplasările virtuale $\frac{\mathrm{d}\overline{\delta}}{\mathrm{d}x}$, respectiv $\frac{\mathrm{d}\overline{\delta}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\overline{\delta}}{\mathrm{d}x^2} \cdot \mathrm{d}x$, după direcțiile perechii de momente unitare reale (în general $S_{s,a} = -1$, utilizînd astfel

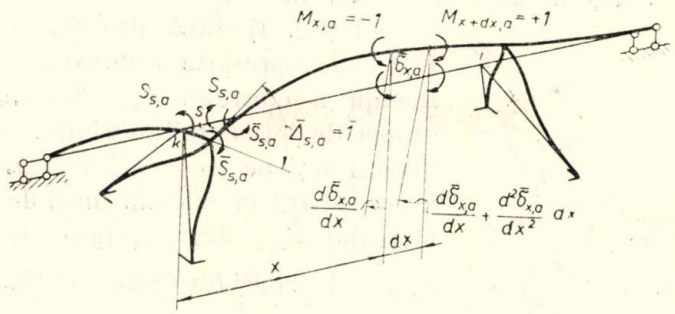


Fig. 1

și regula de semne de la calculul liniilor de influență [15], [3]). Pentru exemplificare, în figura 1 s-a luat $S_{s,a} = M_{s,1}$, deci $\overline{\Delta}_{s,a} = \overline{\varphi}_{s,1}$; $M_{x,a} = M_{x,1}$, deci $\overline{\delta}_{x,a} = \overline{\delta}_{x,2}$.

Scriind expresia lucrului mecanic virtual se obține:

$$-S_{s,a} \cdot \overline{\Delta}_{s,a} + 1 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\overline{\delta}_{x,a}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\overline{\delta}_{x,a}}{\mathrm{d}x^2} \mathrm{d}x \right) - 1 \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{\delta}_{x,a}}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{1}$$

Dacă se notează cu $\overline{M}_{x,a}$ momentul de încovoiere produs în secțiunea x de perechea de eforturi virtuale $\overline{S}_{s,a}$, înlocuind în (1) relația cunoscută

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta_{x,a}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M_{x,a}}{EI_{x,a}}; \quad (a = 1, 2; \; x \equiv a = 3),$$

se obține

$$S_{s,a} = \frac{1}{\overline{\Delta}_{s,a}} \cdot \frac{\overline{M}_{x,a}}{EI_{x,a}} \cdot \mathrm{d}x = \eta_{s,a} \cdot \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Rezultă deci că împărțind ordonatele diagramei de momente $\overline{M}_{x,a}$, cu $EI_{x,a}$ și ținînd seama de scara $\overline{\Delta}_{s,a}$, se obțin ordonatele diagramei de influență $\eta_{s,a}$.

Pentru a obține efectul de precomprimare produs de cablu pe toată lungimea barei, se vor însuma efectele parțiale, deci

$$S_{s,a} = \int_0^l M^0_{x,a} \cdot \eta_{s,a} \cdot \mathrm{d}x = N^c \int_0^l e_z \cdot \eta_{s,a} \cdot \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Deoarece în mod practic se operează cu însumări de-a lungul porțiunilor de bară de lungime finită Δx alese suficient de mici față de lungimea barei, efectul total se exprimă prin

$$S_{s,a} = N^c \sum_0^l e_z \cdot \eta_{s,a} \cdot \Delta x. \tag{4}$$

$S_{s,a}$ poate fi un moment ($M_{s,a}$), forță tăietoare ($T_{s,a}$) sau forță axială ($N_{s,a}$); în consecință, $\overline{\Delta}_{s,a}$ va fi o rotire ($\overline{\varphi}_{s,a}$) sau deplasare liniară ($\overline{\delta}_{s,a}$).

2.1.2. În cazul cînd rigla cadrului devine linie de încărcare pentru forțe mobile, săgețile axei medii deformate a riglei din acțiunea $\overline{\Delta}_{s,a} = -1$ (fig. 4) după direcția forței mobile $F_{x,a} = 1$ reprezintă ordonatele liniei de influență a efortului $S_{s,a}$. Rezultă că „diagrama de influență" obținută anterior din aceeași acțiune $\overline{\Delta}_{s,a} = -1$ reprezintă o etapă intermediară în calculul liniei de influență a efortului $S_{s,a}$ din acțiunea forței mobile $F_{x,a} = 1$ și deci rezultatele obținute $\left(\frac{1}{\overline{\Delta}_{s,a}} \cdot \frac{\overline{M}_{x,a}}{EI_{x,a}}\right)$ pot fi utilizate în continuare în acest sens.

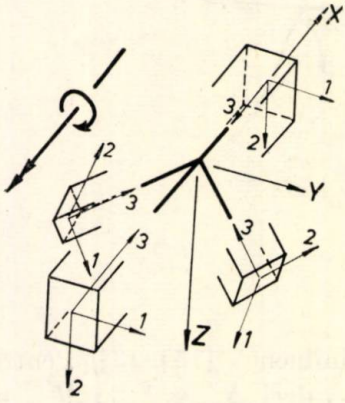


Fig. 2

2.1.2.1. Expresia efortului $S_{s,a}$ se poate generaliza pentru cazurile acțiunii încărcărilor mobile $F = 1$, $M = 1$ și perechii $M = -1$, $M = +1$, sub forma

$$S_{s,a} = L_{x,a},$$

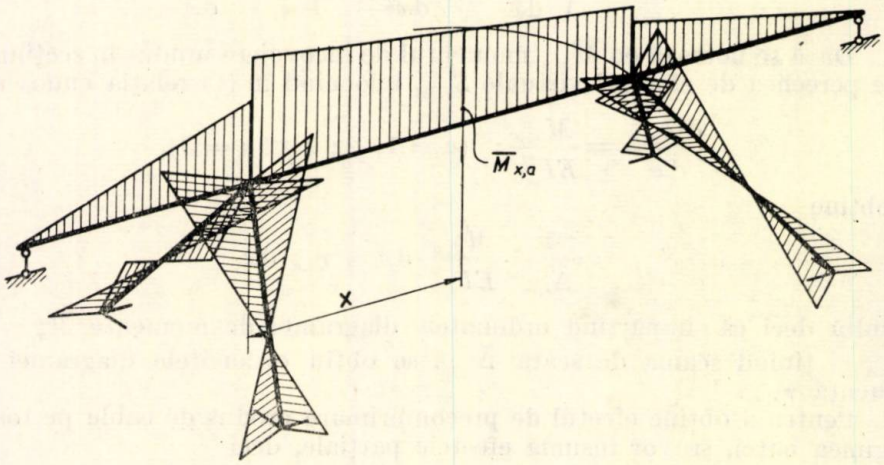


Fig. 3

unde, pentru

$F = 1 \ldots \quad L_{x,a} = \delta_{x,a},$

$M = 1 \ldots \quad L_{x,a} = \frac{\mathrm{d}\delta_{x,a}}{\mathrm{d}x} = \varphi_{x,a},$

$M = -1,\ M = +1 \ldots \quad L_{x,a} = \frac{\mathrm{d}^2\delta_{x,a}}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\varphi_{x,a}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \varkappa_{x,a}.$

Se știe că valorile $\varphi_{x,a}$ se pot determina pe baza valorilor $\delta_{x,a}$, aplicînd procedeul aproximativ, care înlocuiește cuplul mobil $M = 1$ cu forțele $F = \frac{1}{e_1}$, e_1 fiind suficient de mic [7]:

$$\varphi_{x,a} = \frac{1}{2 \cdot \Delta x}(\delta_{x+1,a} - \delta_{x-1,a}). \tag{4'}$$

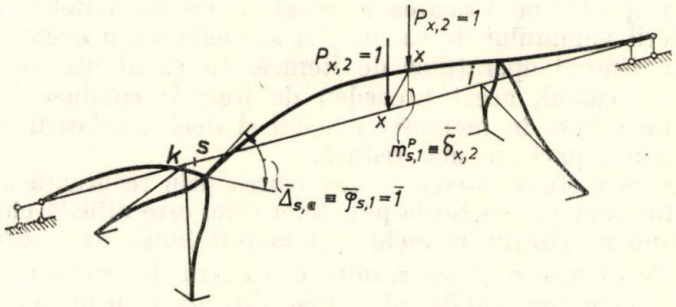


Fig. 4*a*

Continuînd același raționament, pe baza relațiilor de mai sus se pot obține valorile $\varkappa_{x,a}$ direct din valorile $\delta_{x,a}$ (fig. 4*b*), utilizînd relația

$$\eta_{s,a} = \varkappa_{x,a} = \frac{1}{4 \cdot \Delta x^2}(\delta_{x-2,a} - 2\delta_{x,a} + \delta_{x+2,a}) \tag{4''}$$

sau

$$\eta_{s,a} = \varkappa_{x,a} = \frac{1}{\Delta x^2}(\delta_{x-1,a} - 2\delta_{x,a} + \delta_{x+1,a}). \tag{4'''}$$

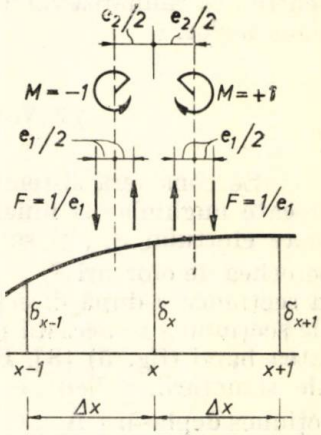


Fig. 4*b*

Rezultă că relațiile (4', 4'', 4''') dau posibilitatea verificării reciproce a valorilor ordonatelor liniilor de influență pentru cazul forței mobile ($\delta_{x,a}$ pentru $F = 1$) cu cele ale cuplului mobil ($\varphi_{x,a}$ pentru $M = 1$) și cu cele a două cuple mobile ($\varkappa_{x,a}$ pentru $M = -1$, $M = +1$) (diagramei de influență).

2.1.3. Se fac următoarele observații:

2.1.3.1. Aplicarea principiului lucrului mecanic virtual în varianta forțelor virtuale conduce la următoarele dezavantaje:

— modificarea sistemului de ecuații de echilibru al metodei de rezolvare (eforturilor, deplasărilor sau mixtă) atunci cînd se trece la determinarea diagramei de influență a efortului din altă secțiune datorită suprimării legăturii simple după direcția efortului respectiv;

— necesitatea determinării valorii $\bar{\Delta}_{s,a}$ cu care se reduc valorile diagramei $\bar{M}_{x,a}/EI_{x,a}$.

2.1.3.2. În cazul cadrelor spațiale, pentru determinarea diagramei $\bar{M}_{x,a}$ este indicată utilizarea metodei deplasărilor, care conduce față de celelalte metode la un număr redus de necunoscute și la asigurarea unei

bune convergente, necesară în cazul cînd sistemul general de ecuaţii se rezolvă prin iteraţie.

Calculul iterativ poate fi condus pe mai multe scheme de echilibrare [5], [9], [10] sau pe o singură schemă [5], [14], [18]. Procedeul de calcul pe o singură schemă prezintă avantaje în special la structurile multietajate.

La cadrele spaţiale ortogonale, procedeul de iteraţie pe o singură schemă de transmiteri, operînd cu necunoscute la noduri (eforturi sau deplasări), respectiv cu valoarea integrală a necunoscutelor, dă posibilitatea reducerii volumului de calcul şi a autoeliminării eventualelor erori introduse în timpul operaţiilor de iterare. În cazul utilizării maşinilor electronice de calcul, acest procedeu de iteraţie conduce la reducerea numărului de adrese în memoria maşinii şi deci a folosirii unor maşini de calcul de o capacitate mai redusă.

Utilizarea metodei mixte cu rezolvarea prin recurenţă a sistemului de ecuaţii, folosind proprietăţile punctelor fixe, este dificilă chiar în cazul cadrelor plane cu contururi închise şi noduri liniar deplasabile.

Din cele expuse mai sus rezultă că pentru determinarea diagramei de influenţă este preferabilă utilizarea directă a principiului lucrului mecanic în varianta deplasărilor virtuale, iar ca instrument de calcul pentru determinarea valorilor diagramei $\overline{M}_{x,a}$ este indicată folosirea metodei deplasărilor.

2.2. VARIANTA DEPLASĂRILOR VIRTUALE

Se consideră sistemul de bază al cadrului spaţial cu toate nodurile blocate unghiular şi liniar. Se suprimă apoi legătura simplă corespunzătoare efortului $S_{s,a}$ şi se introduce pentru restabilirea echilibrului static perechea de eforturi $S_{s,a}$. Se introduce apoi deplasarea virtuală $\overline{\Delta}_{s,a} = -1$ în secţiunea s după direcţia efortului $S_{s,a}$ şi se sudează cele două capete ale secţiunii s în această poziţie deformată, restabilindu-se astfel continuitatea barei (fig. 5) [8]. Printr-o relaxare succesivă se echilibrează nodurile structurii, solicitate iniţial din acţiunea de deformare a barei sub acţiunea deplasării $\overline{\Delta}_{s,a} = -1$, utilizîndu-se procedeul iterativ de rezolvare

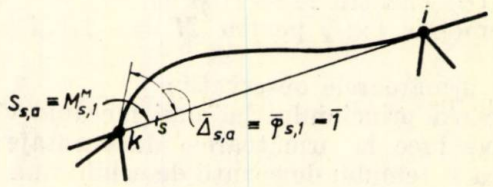


Fig. 5

al ecuaţiilor de echilibru ale metodei deplasărilor. În tot timpul relaxării nodurilor se păstrează valoarea deplasării $\overline{\Delta}_{s,a} = 1$ între captele secţiunii s, astfel încît se poate scrie expresia lucrului mecanic virtual:

$$S_{s,a} \cdot \overline{1} + 1 \cdot \left(\frac{d\overline{\delta}_{x,a}}{dx} + \frac{d^2\overline{\delta}_{x,a}}{dx^2} dx \right) - 1 \cdot \frac{d\overline{\delta}_{x,a}}{dx} = 0, \qquad (5)$$

de unde, după înlocuirea relației cunoscute $\frac{d^2\delta_{x,a}}{dx^2} = \frac{M_{x,a}}{EI_{x,a}}$, se obține

$$S_{s,a} = \frac{\bar{M}_{x,a}}{EI_{x,a}}\,dx = \eta_{ls,a}\cdot dx. \tag{6}$$

Față de cazul relației (2) se constată că în (6) nu mai este necesară cunoașterea valorii scării $\bar{\Delta}_{s,a}$.

Se constată, de asemenea, că restabilirea continuității sistemului primitiv prin sudarea capetelor secțiunii s după introducerea deplasării $\bar{\Delta}_{s,a} = -1$ permite trecerea cu ușurință, în continuare, la determinarea diagramelor de influență a eforturilor din alte secțiuni, fără modificarea sistemului primitiv de calcul al metodei deplasărilor.

3. INFLUENȚA DEFORMAȚIILOR AXIALE

3.1. În cele de mai sus nu s-a considerat și efectul deformațiilor axiale aduse de forța de precomprimare.

Această forță de precomprimare centrică va produce asupra barei o scurtare Δ^c_{ki}, având ca efect apariția de eforturi suplimentare (M, T, N) în secțiunile structurii spațiale.

3.2. Scurtarea barei,

$$\Delta^c_{ki} = \int_0^l \frac{\bar{N}_{ki}\cdot N^c_{ki}}{E\cdot A_{ki}}\,dx, \tag{7}$$

are valoarea:

3.2.1. — pentru bara de secțiune constantă (fig. 6)

$$\Delta^c_{ki} = \frac{N^c_{ki}\cdot l_{ki}}{E\cdot A}, \tag{8}$$

unde

— pentru secțiunea dreptunghiulară

$$A = b\cdot h;$$

— pentru secțiunea în T

$$A = ad + bc;$$

3.2.2. — pentru bara de secțiune variabilă cu vută dreaptă plană (fig. 6)

$$\Delta^c_{ki} = \frac{N^c_{ki}\cdot l_{ki}}{E(A_r - A_0)}\ln\frac{A_r}{A_0}, \tag{9}$$

unde

— pentru secțiunea dreptunghiulară

$$A_0 = b_0h_0; \quad A_r = b_0\cdot h_r;$$

— pentru secțiunea în T

$$A_0 = ad + bc, \quad A_r = ad + ec;$$

3.2.3. pentru bara de secțiune variabilă cu vute drepte după două direcții (spațială) (fig. 6) în raportul

$$h_0/b_0 = h_r/b_r :$$

$$\Delta_{ki}^c = \frac{N_{ki}^c \cdot l_{ki}}{E} \cdot \frac{2}{2A_0 + A_2}, \tag{10}$$

unde

$$A_0 = b_0 \cdot h_0, \quad A_2 = b_0 (h_r - 2h_0) + h_0 b_r .$$

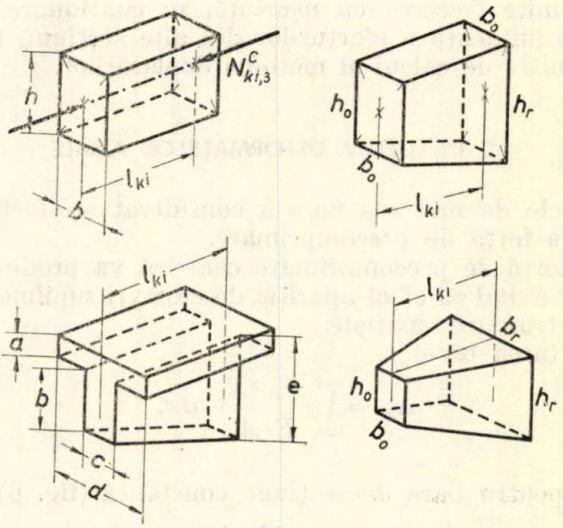


Fig. 6

3.3. În funcție de proiecțiile scurtării Δ_{ki}^c pe cele trei axe X, Y, Z în nodul k în care concură barele ki ($i = 1, 2, \ldots, n$), [4]:

$$\Delta_{kX} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ki}^c \cdot \alpha_{ki,3},$$

$$\Delta_{kY} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ki}^c \cdot \beta_{ki,3}, \tag{11}$$

$$\Delta_{kZ} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ki}^c \cdot \gamma_{ki,3},$$

unde $\alpha_{ki,3}$, $\beta_{ki,3}$, $\gamma_{ki,3}$ sînt cosinușii directori ai axei principale 3 a barei față de axele X, Y, Z ale nodului (fig. 2); rezultă deplasările relative ale capetelor de bară:

$$\Delta_{ki,a} = \Delta_{kX} \cdot \alpha_{ki,a} + \Delta_{kY} \cdot \beta_{ki,a} + \Delta_{kZ} \gamma_{ki,a}, \quad (a = 1, 2). \tag{12}$$

3.4. În funcție de aceste deplasări $\Delta_{ki,a}$ se calculează momentele de încastrare perfectă $\mathcal{M}_{ki,a}$. Echilibrarea acestor momente se face conform [9], [5], [10], [19].

Pentru a obține influența exactă a deformațiilor axiale prin procedeul de mai sus, calculul se va repeta, considerîndu-se acțiunea eforturilor axiale rezultate pe baza momentelor echilibrate anterior.

4. EXEMPLE DE CALCUL

– Exemplul I

4.1. INFLUENȚA DEFORMAȚIILOR DE ÎNCOVOIERE

4.1. Se propune structura spațială din beton precomprimat (fig. 7) pentru care urmează să se calculeze momentul suplimentar ce apare în secțiunea 33′ după axa $a = 1$, $(M^{M}_{33',1})$, ca urmare a precomprimării riglei 33′. Nu se va ține seama de influența deformațiilor axiale și de frecare dintre cablu și beton.

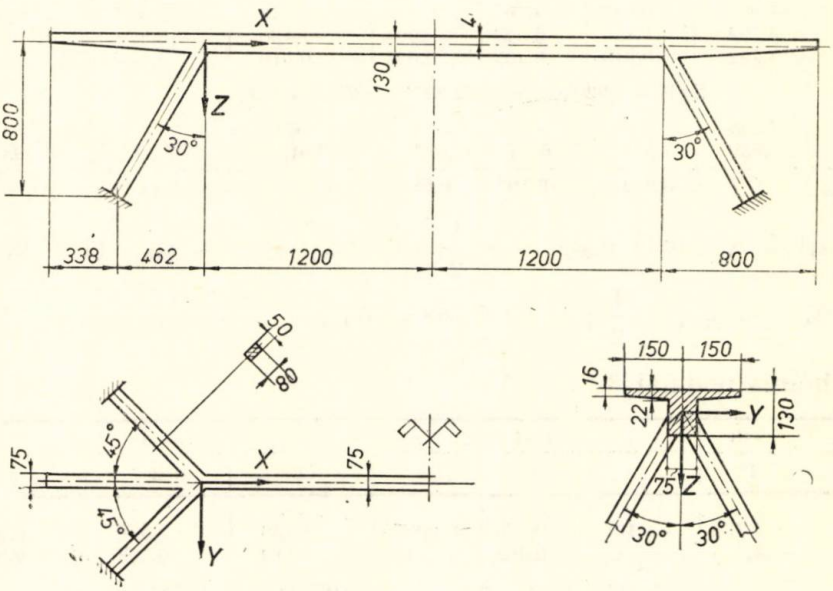


Fig. 7

Sistemul de axe pentru nodul 3 este dat în figura 2.
Caracteristicile elastice ale barelor sînt

Bara	l_{ki} dm	$I_{ki,1}$ dm^4	$I_{ki,2}$ dm^4	$I_{ki,3}$ dm^4	$\rho_{ki,1}$	$\rho_{ki,2}$	$\rho_{ki,3}$
3–3′	240	2 300	—	—	9,583	—	—
Stîlpii	103,3	213	83,3	204	2,062	0,807	0,210

Calculul diagramei de momente se face pentru rotirea de nod $\varphi_{33',1} = -\left(\frac{1}{2}\text{ sim} + \frac{1}{2}\text{ antisim.}\right) = -1$, introdusă după legătura suprimată corespunzătoare efortului respectiv $M^{M}_{33',1}$ (în etapa I) și apoi implicit pentru deplasarea liniară de nod (în etapa II). În calcule s-a operat cu $\rho = I/l$, urmînd ca rezultatele să fie multiplicate cu 4 E.

4.1.1. Acțiunea $\varphi_{33',1} = -\frac{1}{2}\text{ sim.}$; $\rho'_{33',1} = \rho_{33',1}(1-0{,}5) = 4{,}792$;

$\mathfrak{M}_{33',1} = \frac{1}{2}\rho_{33',1} = 2{,}396 = R_{3,I}$.

Echilibrarea nodului 3

Bara	3—3′	3—1			3—1″		
Axa	1	1	2	3	1	2	3
ρ	4,792	2,062	0,807	0,210	2,062	0,807	0,210
β	1,000	−0,548	+0,707	−0,447	+0,548	−0,707	+0,447
$\rho\beta$	4,792	−1,130	0,570	−0,094	1,130	−0,570	0,094
$\rho\beta^2$	4,792	0,619	0,403	0,042	0,619	0,403	0,042
$\Sigma\rho\beta^2 = 6{,}920$; $\varphi_y = -2{,}397/6{,}920 = -0{,}346$;							
$\mathfrak{M}$	2,396	—	—	—	—	—	—
M^r	−1,659	3,912	−0,197	0,033	−3,912	0,197	−0,033
$M^{*s}_{ik,a}$	0,737	3,912	−0,197	0,033	−3,912	0,197	−0,033

4.1.2. Acțiunea $\varphi_{33',1} = -\frac{1}{2}\text{ antisim.}$; $\rho'_{33',}1 = \rho_{33',1}(1 + 0{,}5) = 14{,}375$; $\mathfrak{M}_{33',1} = \frac{1}{2}\rho'_{33',1} = 7{,}188 = R_{3,II}$.

Echilibrarea nodului 3

Bara	3—3′	3—1			3—1″		
Axa	1	1	2	3	1	2	3
$\rho\beta$	14,375	−1,130	0,570	−0,094	1,130	−0,570	0,094
$\rho\beta^2$	14,375	0,619	0,403	0,042	0,619	0,403	0,042
$\Sigma\rho\beta^2 = 16{,}503$; $\varphi_y = -7{,}188/16{,}503 = -0{,}435$;							
$\mathfrak{M}$	7,188	—	—	—	—	—	—
M^r	−6,261	0,492	−0,248	0,041	−0,492	0,248	−0,041
$M^{*as}_{ik,a}$	0,927	0,492	−0,248	0,041	−0,492	0,248	−0,041
	3′—3	1—3			1″—3		
$M^{*as}_{k\,i,a}$	0,927	0,246	−0,124	0,041	−0,246	0,124	−0,041

4.1.3. Datorită acțiunii rotirii antisimetrice, structura suferă și o deplasare liniară Δ (fig. 8). Din acțiunea liniară arbitrară $\Delta = 1{,}732$ rezultă:

$\Delta_{33',2} = 2 \cdot \Delta/\text{tg}\,\varkappa = 2$; $\Delta_{31,2} = 1{,}224$; $\Delta_{31,1} = 1{,}582$,

$\mathfrak{M}_{33',1} = 6\,EI_{33',1} \cdot \Delta_{33',2}/l^2_{33'} = -0{,}479$; $\mathfrak{M}_{31.1} = -0{,}147$,

$\mathfrak{M}_{31.2} = 0{,}074$.

$R_{3Y} = -0{,}479 \cdot 1 - 0{,}147\ (-0{,}548)\ 2 + 0{,}074 \cdot 0{,}707.2 = -0{,}214$

Echilibrarea nodului 3

Bara	3–3′	3–1			3–1″		
Axa	1	1	2	3	1	2	3
$\rho\beta$	14,375	−1,130	0,570	−0,094	1,130	−0,570	0,094
			$\varphi_y = +0{,}214 / 16{,}503 = +0{,}01294$				
$\mathfrak{M}$	−0,479	−0,147	0,074	—	0,147	−0,074	—
M^r	0,186	−0,014	0,007	−0,001	0,014	−0,007	0,001
$M^{\Delta}_{ik,a}$	−0,293	−0,161	0,081	−0,001	0,161	−0,081	0,001
	3′–3		1–3			1″–3	
$M^{\Delta}_{ki,a}$	−0,293	−0,154	0,078	−0,001	0,154	−0,078	0,001

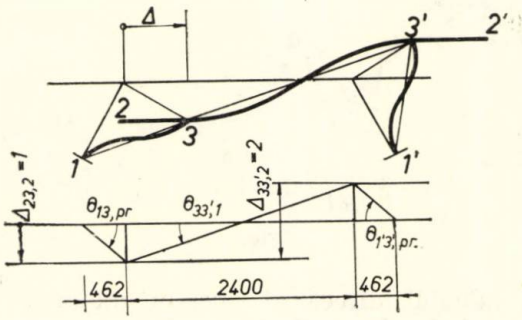


Fig. 8

4.1.4. Coeficientul de corecție a deplasării liniare :

$$L_{11} = -\,[(-0{,}293)(-2/240) + (-0{,}161 - 0{,}154)(-1{,}224/103{,}3)\,2 + (0{,}081 + 0{,}078)(1{,}582/103{,}3)\,2] = -0{,}014788,$$

$$L_1^{\star} = -\,[0{,}927\,(-2/240) + (0{,}492 + 0{,}246)(-1{,}224/103{,}3)\,2 + (-0{,}248 - 0{,}124)(1{,}582/103{,}3)\,2]\,4 = 0{,}146502,$$

$$c = -L_1^{\star}/L_{11} = 9{,}907.$$

4.1.5. Momentele încovoietoare finale din acțiunea $\varphi_{33',1} = -1$ rezultă prin multiplicarea cu E a valorilor (exprimate în m^3), date în figura 9 și obținute prin suprapunerea efectelor conform relației

$$M^{M}_{ki,a} = M^{\star s}_{ki,a} + M^{\star as}_{ki,a} + cM^{\Delta}_{ki,a}.$$

4.1.6. Valorile diagramei de influență obținute conform relației (2), exprimate în (m^{-1}), sînt date în paranteze în figura 9.

4.1.7. Ţinînd seama de relaţia (4)

$$M^{M}_{33',1} = N^{c} \sum_{3}^{3'} e_z \cdot m_{33',1} \cdot \Delta x,$$

şi de figura 10, pentru o forţă de întindere în cablu $N^c = 1000$ t, rezultă

$$M^{M}_{33',1} = 1000 \cdot 0{,}056896 = 56{,}896 \text{ tm}.$$

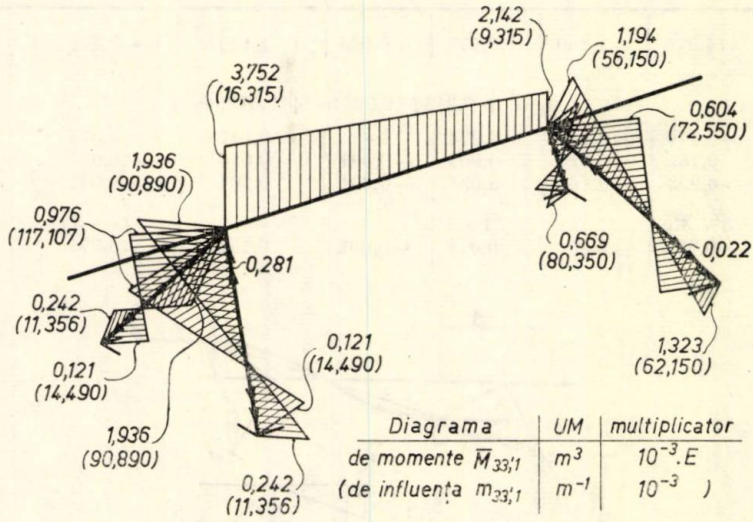


Fig. 9

4.1.8. Din calculul direct al acestui moment suplimentar prin echilibrarea momentului la nod ca pentru o încărcare fixă, rezultă $M^{M}_{33',1} = 57{,}415$ tm.

Diferenţa faţă de valoarea obţinută prin utilizarea diagramei de influenţă (56,896) se explică prin faptul că relaţia (4) operează cu însumări pe porţiuni Δx considerate suficient de mici ($\Delta x = 1/10$) de-a lungul unei curbe e_z continue, pe cînd în calculul direct s-a operat prin integrare. Prin corectarea curbei e_z, ambele procedee de calcul recurg în mod practic la însumări de-a lungul intervalelor Δx. Exactitatea rezultatului va depinde de numărul de intervale Δx şi de metoda de însumare.

4.1.9. Verificarea diagramei de influenţă prin linia de influenţă din $P_{x,2} = 1$.

Rotirile reale de nod şi de bară sînt

$$\varphi_{3,Y} = -\varphi_{33',1} = -0{,}346 - 0{,}345 + 0{,}01294 \frac{1}{4} 9{,}907 = -0{,}749,$$

$$\varphi_{3',Y} = -\varphi_{3'3,1} = -0{,}057\,; \quad \theta_{33',Y} = \frac{2 \cdot 9{,}907}{240} = 0{,}082.$$

Ordonatele din secțiunile x ale liniei de influență a momentului din secțiunea 33',1 ($L \cdot I \cdot M^{P_2=1}_{33',1}$) rezultă conform [3]:

$$\delta_{x,2} = \delta^0_{x,2} + \varphi_{3,Y} \cdot \omega_{x,2} 1_{33'} + \varphi_{3',Y} \cdot \omega'_{x,2} \cdot 1_{33'} + \delta''_{x,0,2} + \delta'_{x,0,2}$$

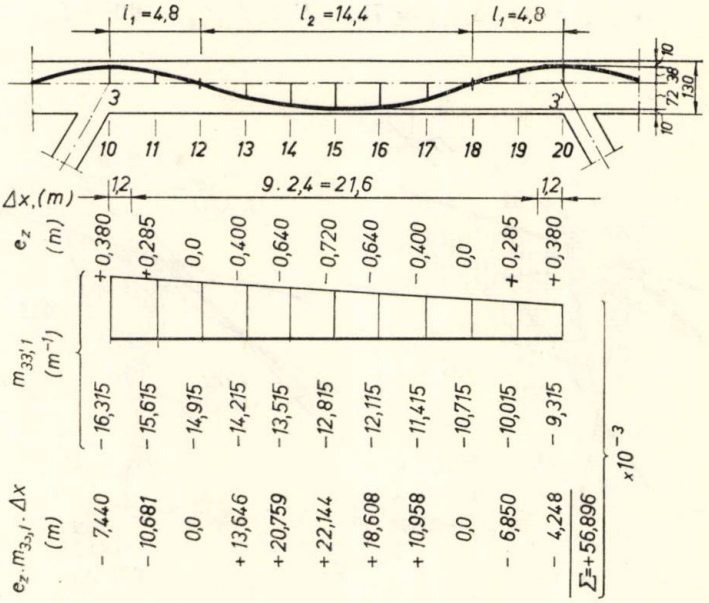


Fig. 10*a*

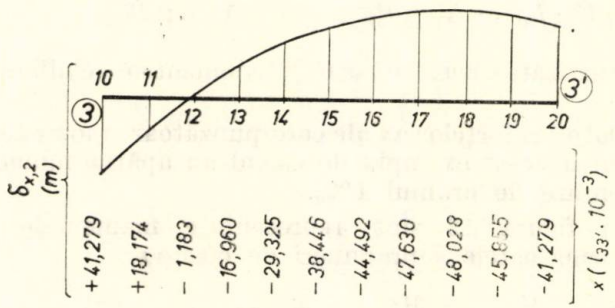


Fig. 10*b*

și sînt date în figura 10 *b*.

Aplicînd relația (4'')

$$m_{33',1} = \varkappa_{x,2} = \frac{1}{4 \cdot \Delta x^2} (\delta_{x-2,2} - 2 \cdot \delta_{x,2} + \delta_{x+2,2}),$$

se obțin ordonatele diagramei de influență date în figura 10 *a* ($\Delta x = l/10$).

4.2. INFLUENȚA DEFORMAȚIILOR AXIALE

4.2.1. Scurtarea riglei 33′ ca efect al forței $N^c = 1000\ t$ aplicată centric este $\Delta^c_{33'} = 17112/E_c$ (relația (8)). Datorită deplasărilor relative ale capetelor de bare concurente în nodul 3,

$$\Delta_{33',2} = 0\ ;\ \Delta_{31,1} = 7810/E_c\ ;\ \Delta_{31,2} = 6050/E_c\ ,$$

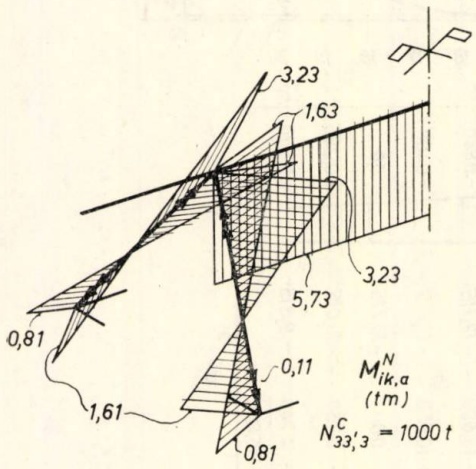


Fig. 11

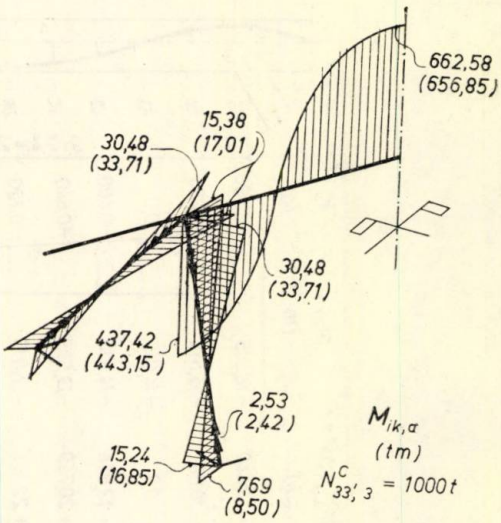


Fig. 12

rezultă momentele de încastrare perfectă :

$$\mathfrak{M}_{31,1} = 6 \cdot E_i \cdot I_{31,1} \cdot \Delta_{31,2}/l^2_{31} = -4{,}575\ \text{tm}\ ;\ \mathfrak{M}_{31,2} = +\ 2{,}306\ \text{tm}.$$

Prin repartizarea acestora se obțin momentele echilibrate $M^N_{ik,a}$, date în figura 11.

4.2.2. Datorită forțelor axiale corespunzătoare momentelor $M^N_{ik,a}$ din figura 11, pentru acest exemplu de calcul au apărut momente încovoietoare suplimentare de ordinul 1‰.

4.2.3. În figura 12 sînt reprezentate momentele încovoietoare totale după următoarele suprapuneri de efecte :

$$M_{ik,a} = M^0_{ik,a} + M^M_{ik,a},$$

$$(M_{ik,a} = M^0_{ik,a} + M^M_{ik,a} + M^N_{ik,a}).$$

— Exemplul II

4.3. Pentru cadrul spațial ortogonal din figura 13 se prezintă calculul efortului $M^M_{1A,Y}$, produs de precomprimarea riglei 1—2. Traseul cablului este dat în figura 16. Nu se ține seama în calcule de influența deformațiilor axiale și de frecarea cablului. Pentru determinarea diagramei de

influență se utilizează procedeul iterativ de calcul, operînd cu momente și forțe de deviație „active" [20], [5].

4.3.1. Caracteristicile elastice ale barelor (notații [5])

Bara	$h \cdot b$ dm²	l m	$\rho_{ki,Y}$	$\rho_{ki,Z}$	$m_{ki,Y}$	$m_{ki,Z}$	$t^{M_Y}_{k\to i}$	$t^{M_Z}_{k\to i}$	$t^{D}_{k\to H}$	$t^{M_A}_{L\to k}$
$1-A$	6. 4	6	1,200	0,133	−0,525	−0,210	−0,263	+1,000	0,0131	7,630
$1-C$	5. 3	3	0,100	0,375	+0,044	−0,590	+1,000	−0,295	0,0295	−4,780
$1-2$	$\frac{7-10}{3}$	15	0,985	0,127	−0,431	−0,200	−0,264	−0,108	—	—
$2-1$	$\frac{7-10}{3}$	15	0,985	0,127	−0,497	−0,211	−0,305	−0,114	—	—
$2-B$	6. 4	8	0,900	0,100	−0,453	−0,166	−0,227	+1,000	0,0085	4,300
$2-D$	5. 3	3	0,100	0,375	−0,050	−0,623	+1,000	−0,312	0,0312	−4,780

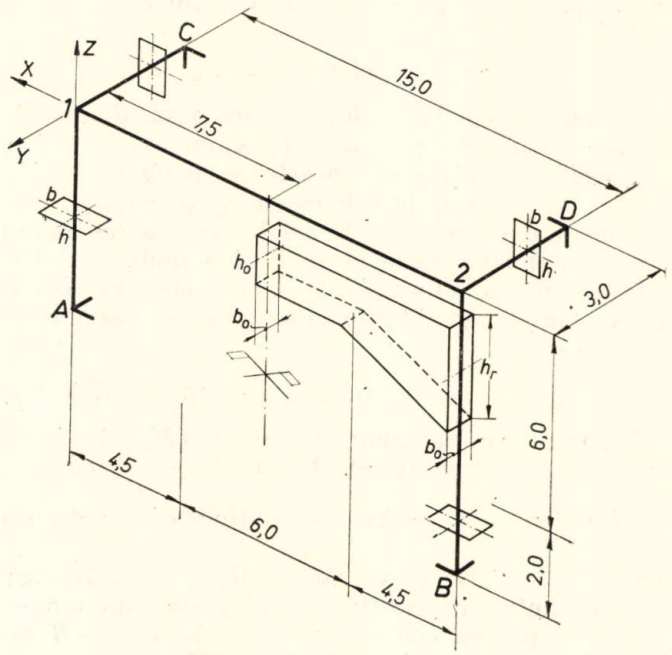


Fig. 13

unde

$$\rho_{ki,a} = \frac{I_{ki,c}}{l_{ki}}, \quad (a = 1,2); \quad \rho_{ki,3} = \frac{I_{ki,3}}{l_{ki}} \frac{0,425}{4}$$

$$I_{ki,3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{0,620}{\frac{h}{b}}\right) b^3 \cdot h,$$

$$m_{ki,A} = \frac{\rho_{ki,A}}{\sum_k \rho_{ki,A}},$$

$$t^{M_A}_{k\to i} = -\,t^{M_a}_{k\to i}\cdot m_{ki,A},$$

$$t^{D}_{k\to H} = +\sum_k m_{kn,a}\left(1 + t^{M_a}_{k\to n}\right)\frac{1}{l_{kn}}\,C_{km};\,(C_{kn} = \pm 1)$$

$$t^{M_A}_{L\to k} = -\,\frac{\sum_k u_{ki}\dfrac{I_{ki,a}}{l^2_{ki}}\,C_{kn}}{\sum_L (u_{ki} + u_{ik})\dfrac{I_{ki,a}}{l^3_{ki}}}\;(A = Y, Z;\; a = 1, 2, 3),$$

$$u_{ki} = \frac{c_2 + c_3}{c_1c_2 - c_3^2};\quad u_{ik} = \frac{c_1 + c_3}{c_1c_2 - c_3^2}.$$

Coeficienţii c_1, c_2, c_3 se găsesc în tabele tehnice [7]. Pentru bare cu I = const,

$$t^{M_a}_{k\to i} = t^{M_a}_{i\to k} = 0{,}5;\quad u_{ki} = u_{ik} = 6.$$

4.3.2. Se suprimă legătura simplă corespunzătoare lui $M^M_{1A,Y}$ şi se introduce deplasarea virtuală $\varphi_{1A,Y} = -1$. Asupra nodului 1 şi încastrării A vor acţiona deci momentele de încastrare perfectă $4.\,EI_{1A,Y}/l_{1A}$, respectiv $2EI_{1A,Y}/l_{1A}$. Se operează în calcule cu $\rho_{1A,Y} = I_{1A,Y}/l_{1A} = 1200\cdot 10^{-3}$, $= \mathfrak{M}_{1A,Y}$, (m³), urmînd ca rezultatele echilibrării să fie înmulţite cu $4E$.

Echilibrarea nodurilor reale (1 şi 2) şi a nodului fictiv (L, deplasarea liniară după direcţia X) s-a efectuat pe o singură schemă iterativă (fig. 14), iar momentele echilibrate din capetele barelor s-au obţinut cu ajutorul relaţiei

$$M^M_{ki,A} = \mathfrak{M}_{ki,A} - m_{ki,A}\cdot M_{k,A} + t^{M_A}_{i\to k}\cdot M_{i,A} + t^{M_A}_{L\to k}\cdot D_L.$$

4.3.3. Diagrama de momente obţinută ($M^M_{ki,A}$) şi diagrama de influenţă ($m_{ki,A}$) sînt date în figura 15. Utilizînd în continuare relaţia (4): $M_{1A,Y} = N^c\cdot\sum_1^2 e_z\cdot m_{1A,Y}\cdot\Delta x$, se obţine din acţiunea forţei de precomprimare $N^c_{12,3} = 100$ t valoarea $M_{1A,Y} = 7{,}270$ tm (fig. 16).

4.3.4. Se determină în continuare diagrama de momente pentru structura spaţială şi pentru cadrul principal $A-1-2-B$ plan, obţinut prin eliminarea riglelor $1-C$ şi $2-D$ de rigidizare.

Diagramele obţinute (fig. 17) prezintă valorile momentelor de încovoiere în ambele ipoteze (din ipoteza plană în paranteze).

5. CONCLUZII

Din cele expuse anterior şi din exemplele de calcul rezultă următoarele:

5.1. Utilizarea diagramelor de influenţă reduce considerabil volumul de calcul necesar determinării eforturilor datorite efectului de precom-

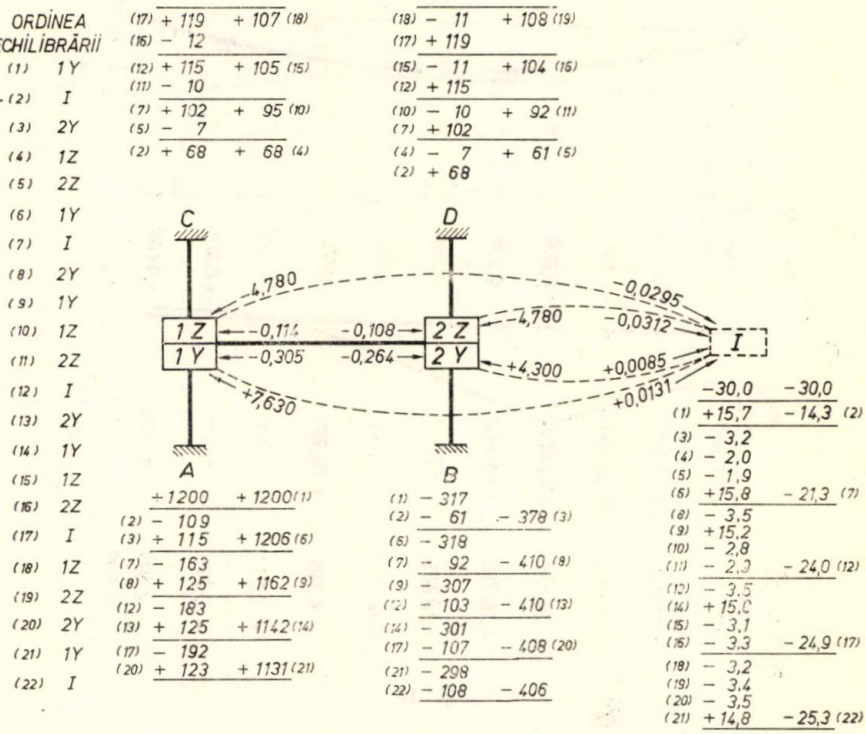

ORDINEA ECHILIBRARII
(1) 1Y
(2) I
(3) 2Y
(4) 1Z
(5) 2Z
(6) 1Y
(7) I
(8) 2Y
(9) 1Y
(10) 1Z
(11) 2Z
(12) I
(13) 2Y
(14) 1Y
(15) 1Z
(16) 2Z
(17) I
(18) 1Z
(19) 2Z
(20) 2Y
(21) 1Y
(22) I
(17) + 119 + 107 (18)
(16) − 12
(12) + 115 + 105 (15)
(11) − 10
(7) + 102 + 95 (10)
(5) − 7
(2) + 68 + 68 (4)
(18) − 11 + 108 (19)
(17) + 119
(15) − 11 + 104 (16)
(12) + 115
(10) − 10 + 92 (11)
(7) + 102
(4) − 7 + 61 (5)
(2) + 68
C
D
4,780
0,0295
1 Z
−0,114
−0,108
2 Z
4,780
−0,0312
I
1 Y
−0,305
−0,264
2 Y
+4,300
+0,0085
+0,0131
+7,630
A
B
+1200 + 1200 (1)
(2) − 109
(3) + 115 + 1206 (6)
(7) − 163
(8) + 125 + 1162 (9)
(12) − 183
(13) + 125 + 1142 (14)
(17) − 192
(20) + 123 + 1131 (21)
(1) − 317
(2) − 61 − 378 (3)
(6) − 318
(7) − 92 − 410 (8)
(9) − 307
(13) − 103 − 410 (13)
(14) − 301
(17) − 107 − 408 (20)
(21) − 298
(22) − 108 − 406
−30,0 −30,0
(1) +15,7 −14,3 (2)
(3) − 3,2
(4) − 2,0
(5) − 1,9
(6) +15,8 − 21,3 (7)
(8) − 3,5
(9) +15,2
(10) − 2,8
(11) − 2,9 − 24,0 (12)
(12) − 3,5
(14) +15,0
(15) − 3,1
(16) − 3,3 − 24,9 (17)
(18) − 3,2
(19) − 3,4
(20) − 3,5
(21) +14,8 − 25,3 (22)

Fig. 14

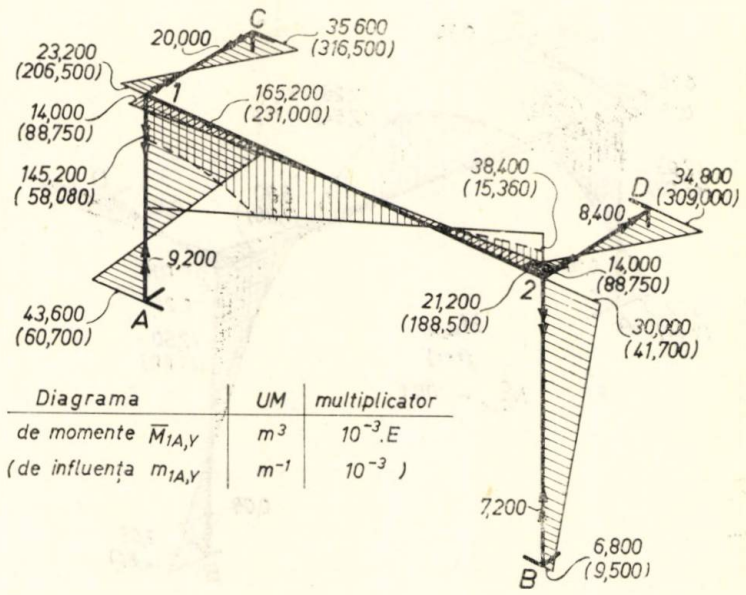

C
20,000
35 600
(316,500)
23,200
(206,500)
1
165,200
(231,000)
14,000
(88,750)
145,200
(58,080)
38,400
(15,360)
D
34,800
(309,000)
8,400
9,200
14,000
(88,750)
2
21,200
(188,500)
30,000
(41,700)
43,600
(60,700)
A
7,200
6,800
(9,500)
B
Diagrama
UM
multiplicator
de momente $\overline{M}_{1A,Y}$
m^3
$10^{-3}.E$
(de influenta $m_{1A,Y}$
m^{-1}
10^{-3})

Fig. 15

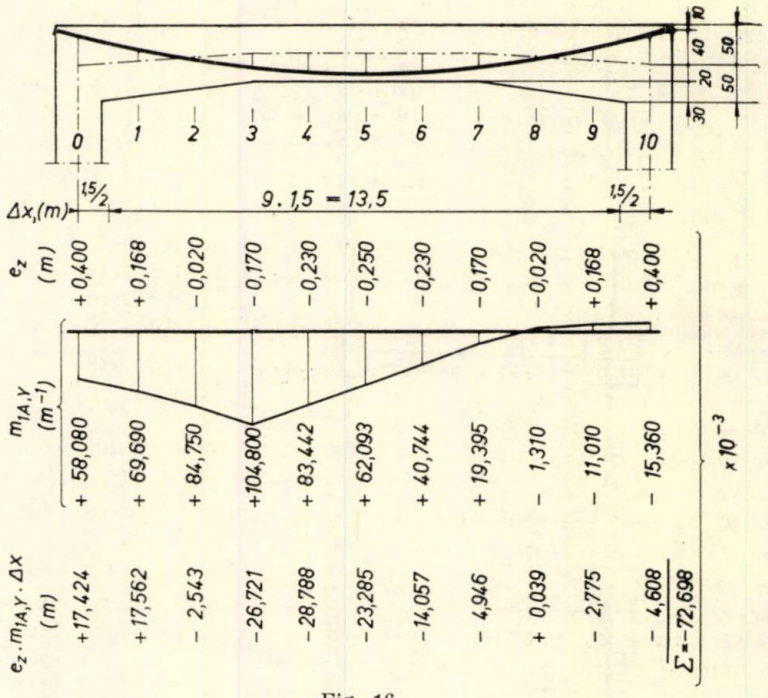

10
40
50
20
50
30
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Δx,(m)
1,5/2
9 . 1,5 = 13,5
1,5/2
e_z (m)
+0,400 +0,168 −0,020 −0,170 −0,230 −0,250 −0,230 −0,170 −0,020 +0,168 +0,400
m_1A,Y (m^-1)
+ 58,080 + 69,690 + 84,750 +104,800 + 83,442 + 62,093 + 40,744 + 19,395 − 1,310 − 11,010 − 15,360
× 10^-3
e_z · m_1A,Y · Δx (m)
+17,424 +17,562 − 2,543 −26,721 −28,788 −23,285 −14,057 − 4,946 + 0,039 − 2,775 − 4,608
Σ = −72,698

Fig. 16

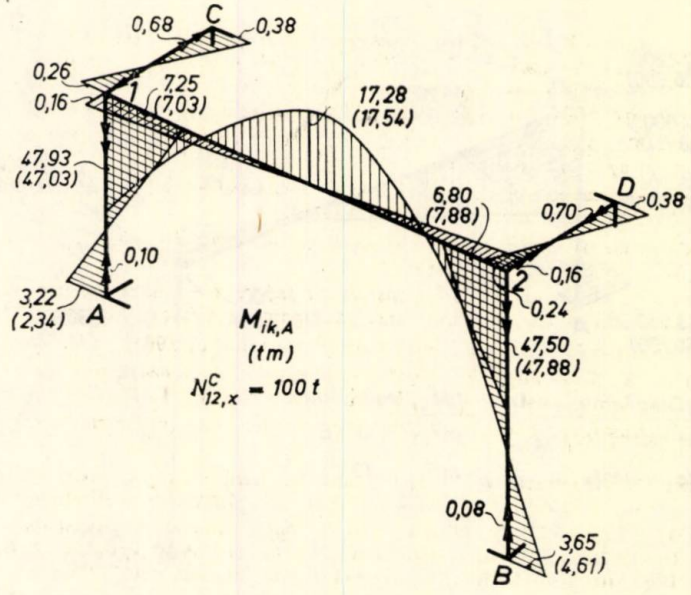

C
0,68
0,38
0,26
0,16
7,25
(7,03)
17,28
(17,54)
47,93
(47,03)
6,80
(7,88)
D
0,70
0,38
0,10
3,22
(2,34)
A
0,16
0,24
47,50
(47,88)
M_ik,A
(tm)
N^C_12,x = 100 t
0,08
3,65
(4,61)
B

Fig. 17

primare la structurile spațiale de tipul cadrelor. În plus, rezultatele obținute pot fi folosite în continuare la determinarea liniilor de influență ale eforturilor din acțiunea sarcinilor mobile.

5.2. Aplicarea metodei lucrului mecanic în varianta directă a deplasărilor virtuale la determinarea diagramei de influență elimină dezavantajele variantei forțelor virtuale cauzate de modificarea sistemului primitiv al metodei de calcul, precum și de necesitatea determinării în plus a deplasării $\overline{\Delta}_{s,a}$.

5.3. Aplicarea metodei deplasărilor ca instrument de calcul, cu rezolvarea iterativă a ecuațiilor de condiție pentru determinarea valorilor diagramei $M_{x,a}$, conduce la un volum redus de calcul comparativ cu celelalte metode generale de calcul (eforturilor, mixtă).

5.4. Calculul exact al efectului precomprimării necesită considerarea și a deformațiilor axiale produse de acțiunea centrică a forței de precomprimare. Influența acestor deformații crește o dată cu mărirea raportului l/e [15] și în aceste cazuri nu mai este neglijabilă.

Deși față de metoda eforturilor calculul prin metoda deplasărilor necesită în mod teoretic reluări, totuși în mod practic este suficientă prima valoare obținută.

5.5. Reducerea schemei spațiale la scheme plane poate conduce, chiar la cadrele ortogonale, la diferențe importante între valorile obținute prin calculul exact și cel simplificat (plan).

Primită la redacție la 10 ianuarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. AGENT R., *Metoda aproximațiilor succesive*, București, Edit. tehnică, 1955.
2. ALBIGES M. et BOURDELLÈS Y. Le., *Etude des effets produits par les forces de précontrainte dans les systèmes hyperstatiques, diagrammes d'influence*, Annales I.T.B. T.P., octobre 1964, nr. 202, Série „Théories et méthodes de calcul" (63).
3. ANASTASESCU D., MUNTEANU I., *Calculul liniilor de influență la cadrele spațiale*, St. cerc. mec. apl., **17**, *6* (1964).
4. — *Efectul variației de temperatură și al deplasării reazemelor în calculul cadrelor spațiale*, St. cerc. mec. apl., **18**, *1*, (1965).
5. — *Considerații asupra unor procedee de calcul al cadrelor spațiale*, St. cerc. med. apl., **21**, *1* (1960).
6. APPELTAUER I., ANASTASESCU D., *Considerații asupra soluțiilor energetice ale mecanicii construcțiilor*, Bul. șt. tehn., Inst. politehnic Timișoara, **2** (**16**), *2* (1957).
7. AVRAM C. N., *Grinzi continue*, București, Edit. tehnică, 1965.
8. BEIU PALADI F., *Contribuțiuni la rezolvarea sistemelor static nedeterminate*, Revistele tehnice A.G.I.R., Constr. publice, materiale de constr., **1—3** (1949).
9. CASSADO FERNANDEZ, C. et J., *Calcul des grandes ossatures retriculaires*, Paris, Dunod, 1954.
10. CĂTUNEANU C., ANASTASESCU D., MUNTEANU I., *Generalizarea metodei repartizării momentelor la calculul cadrelor spațiale*, Bul. șt. tehn., Inst. politehnic Timișoara, 1958.
11. CELASUN H., *Lignes d'influence des moments hyperstatiques provenant du câble de précontrainte dans les poutres continues à inertie variable*, Annales I.T.B. T.P., octobre 1963, nr. 190, Série „Théories et méthodes de calcul" (56).
12. FRANZ G., *Grundsätzliches zum Vorspannen von Balken und Rahmen*, B.u.St., *6* (1952)

13. Herberg W., *Construcții din beton precomprimat*, vol. I, București, Edit. tehnică, 1959.
14. Когай А., *Расчет пространственных рам по методу распределения моментов защемления*, Moscova, 1964.
15. Mazilu P., *Statica construcțiilor*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1959.
16. Petcu V., *Asupra staticii grinzii de beton armat de secțiune variabilă la torsiune*, Rev, constr. și mater. de constr., *4* (1958).
17. Polivanov N. I., *Poduri de beton armat pentru drumuri auto*, București, Edit. tehnică, 1959.
18. Popovici C. C., *O teorie generală a metodei distribuirii eforturilor*, St. cerc. mec. apl., **7** *3—4*.
19. B. Rawlings, *The general moment distribution Analysis of space frames*. The Structural Eng. June 1960, December 1963.
20. Șesan A., Orlovski N., *Variante și simplificări ale metodei distribuirii momentelor*, Teoria și practica construcțiilor, *1*, Iași, 1954.

CALCULUL DE STABILITATE AL GRINZILOR CONTINUE PENDULARE SUSȚINUTE PRIN TENDOANE ARTICULATE ȘI ÎNCĂRCATE CU CONVOAIE DE FORȚE

de V. DROBOTĂ
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

539.4

În articol se arată modul de stabilire al relației care dă sarcina critică de flambaj pentru grinda continuă pendulară susținută prin tendoane articulate și încărcată cu convoaie de sarcini.
Se stabilește relația generală pentru cazul cînd pe grindă calcă un număr de 2 n sarcini, din care se deduc relațiile pentru o serie de cazuri particulare.
Relațiile stabilite sînt utile pentru calculul de stabilitate al unor asemenea grinzi întîlnite în aplicațiile practice curente (grinzi rulante suspendate, trenuri suspendate etc.). Aceste relații sînt simple și ușor de mînuit.
Articolul cuprinde, pentru cazurile cel mai des întîlnite în aplicațiile practice, o serie de tabele care ușurează munca celor ce efectuează calculele de stabilitate la asemenea tipuri de grinzi.

Una dintre aplicațiile deosebite ale grinzilor continue pendulare o constituie grinzile continue susținute prin tendoane articulate sferic cu unul dintre capete de fața superioară a grinzii și cu celălalt de construcția de care se suspendă. Acest mod de rezemare face ca grinda să preia mai ușor sarcinile orizontale accidentale, fără solicitări suplimentare de răsucire și încovoiere.

Pentru stabilirea sarcinii critice sub care se produce pierderea stabilității elastice la grinzile continue pendulare susținute în acest fel se admit următoarele ipoteze de calcul, și anume:

— grinda se consideră de rigiditate transversală mică;

— punctele de articulație ale grinziit cu tendoanele sînt așezate la distanțe egale între ele (l) și situate la înălțimea e de punctele de aplicare ale forțelor;

— punctele de articulație ale grinzii cu tendoanele și cele de aplicare ale sarcinilor sînt situate în planul de rigiditate maximă al grinzii, inițial vertical, care este și plan de simetrie al grinzii;

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 24 NR. 1. P. 129–138 BUCUREȘTI 1967

— greutatea proprie a grinzii se consideră neglijabilă;

— se neglijează răsucirea grinzii, care este foarte mică în comparaţie cu încovoierea laterală a acesteia;

— tendoanele au aceeaşi lungime pentru toate reazemele.

Interes deosebit prezintă acest tip de grindă atunci cînd este încărcată cu o sarcină concentrată P aplicată pe mijlocul intervalului dintre două reazeme consecutive (fig. 1).

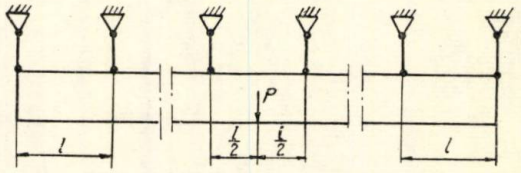


Fig. 1

Pentru valori mici ale sarcinii P, grinda rămîne în plan vertical, singurele deformaţii ce se produc fiind cele datorite încovoierii în acest plan. Făcînd să crească forţa P, pentru o anumită valoare a acesteia P_f, poziţia grinzii în plan vertical devine nestabilă şi grinda ia o poziţie rotită în jurul axei ei longitudinale şi încovoiată lateral.

Pentru deformaţii infinit mici nu există restrîngeri la deplasările laterale ale grinzii şi evident nici la rotiri. La deplasări relativ mari încep să apară restrîngeri, datorite infiniţilor mici de ordin superior. Între aceştia sînt de menţionat:

— deplasările pe verticală ale punctelor de articulaţie ale grinzii cu tijele, care sînt proporţionale cu pătratul unghiului pe care acestea îl fac cu verticala;

— componentele greutăţilor proprii ale ansamblului tijelor şi cele ale reacţiunilor din aceste tije în punctele de articulaţie cu grinda, normale pe planul de rigiditate maximă al acesteia, ale căror valori sînt funcţie de unghiul pe care tijele îl fac cu verticala, de unghiul de rotire al grinzii etc.

La verificările experimentale făcute pe o grindă continuă pendulară suspendată pe patru reazeme, cu o singură sarcină concentrată aplicată pe mijlocul unuia dintre intervalele dintre două reazeme consecutive [8], s-a constatat că, la deformaţii mici ale grinzii în jurul poziţiei de echilibru, practic reazemele situate în afara intervalului pe care se aplică forţa nu introduc restrîngeri la deplasările lor infinit mici. Neglijînd greutatea proprie a grinzii şi a reazemelor, deformaţia acesteia este identică cu cea a unei grinzi pe două reazeme, valoarea forţei critice de flambaj fiind cea corespunzătoare acestui caz.

La aceeaşi concluzie se ajunge şi pentru cazul în care sarcina care acţionează asupra grinzii este aplicată pe oricare interval dintre două reazeme.

Ţinînd seama de cele de mai sus, pentru flambajul lateral al grinzilor continue pendulare susţinute prin tendoane sub convoaie de sarcini mobile se poate conchide că sînt valabile aceleaşi relaţii de calcul şi concluzii stabilite pentru grinzile susţinute pe două reazeme [5].

Una dintre aplicațiile deosebit de importante ale grinzilor continue pendulare pe tendoane articulate o prezintă grinda încărcată cu două convoaie, alcătuite din același număr de sarcini de mărime egală, ale căror rezultante sînt situate la distanța c, distanța dintre două sarcini consecutive ale convoiului fiind egală cu a (vezi fig. 5 din tabela 1).

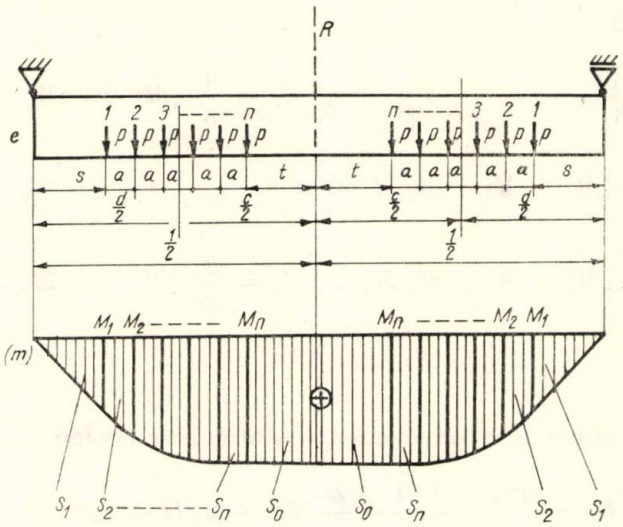


Fig. 2

Pentru realizarea practică a unei asemenea solicitări se consideră că numărul total al sarcinilor de pe grindă este de $2n$. La o asemenea încărcare, valoarea minimă a sarcinii critice se obține atunci cînd cele două convoaie de forțe sînt simetric așezate față de mijlocul deschiderii grinzii [5].

Din cele spuse mai înainte acest caz este echivalent din punctul de vedere al calculului sarcinii critice cu cel al grinzii rezemate pe două reazeme pendulare avînd aceeași încărcare (fig. 2).

Este cunoscut [7] faptul că, pentru un asemenea caz de încărcare și rezemare, valoarea sarcinii critice se obține din relația

$$R_f = \frac{(2n)^2 EI_y e}{2S}, \tag{1}$$

unde

$2n$ este numărul de forțe ce acționează asupra grinzii,

E — modulul de elasticitate longitudinal al grinzii,

I_y — momentul de inerție minim al grinzii,

e — distanța dintre linia punctelor de articulație ale tendoanelor și cea de aplicare a sarcinilor,

S — momentul static al suprafeței diagramei de momente, construită pentru sarcinile $P = 1$, față de axa de referință de la care se măsoară valoarea momentului încovoietor.

Pentru calculul momentului static S al diagramei de momente construită pentru sarcinile $P = 1$, se scriu mai întîi momentele statice ale suprafețelor simple ce alcătuiesc această diagramă, care au următoarele expresii:

$$S_0 = \frac{M_n^2 t}{2}, \qquad \vdots$$

$$S_1 = \frac{M_1^2 s}{6}, \qquad S_i = \frac{a}{6}(M_{i-1}^2 + M_i^2 + M_{i-1} M_i);$$

$$S_2 = \frac{a}{6}(M_1^2 + M_2^2 + M_1 M_2); \qquad \vdots$$

$$S_3 = \frac{a}{6}(M_2^2 + M_3^2 + M_2 M_3); \qquad S_n = \frac{a}{6}(M_{n-1}^2 + M_n^2 + M_{n-1} M_n).$$

$$\vdots$$

Făcînd suma acestor momente statice, se obține

$$\sum S_i = \frac{M_1^2 s}{6} + \frac{M_n^2 t}{2} + \frac{a}{6}(M_1^2 + 2M_2^2 + 2M_3^2 + \ldots +$$

$$+ 2M_{n-1}^2 + M_n^2 + M_1 M_2 + M_2 M_3 + \ldots + M_{n-1} M_n).$$

Dar deoarece $M_n = M_1 + \frac{a(n-1)n}{2}$, expresia din paranteză se mai poate scrie

$$2(M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_{n-1}^2) + M_1 M_2 + M_1 M_3 + \ldots +$$

$$+ M_{n-1} M_n + M_1 an(n-1) + \frac{a^2}{4} n^2 (n-1)^2 = 2 \sum_1^{n-1} M_i^2 + \sum_2^n M_{i-1} M_i +$$

$$+ M_1 an(n-1) + \frac{a^2}{4} n^2 (n-1)^2.$$

Cu aceasta expresia ΣS_i devine

$$\sum S_i = \frac{M_1^2}{6}(s + 3t) + \frac{M_1 at}{2}(n-1)n + \frac{a^2 t}{8}(n-1)^2 n^2 + \frac{M_1 a^2}{6}(n-1)n +$$

$$+ \frac{a^3}{24}(n-1)^2 n^2 + 2 \sum_1^{n-1} M_i^2 + \sum_2^n M_{i-1} M_i.$$

Pentru calculul expresiilor $\sum_1^{n-1} M_i^2$ și $\sum_2^{n} M_{i-1} M_i$ se ține seama că momentul încovoietor în dreptul forței i este dat de relația

$$M_i = M_1 + \frac{a}{2}(i-1)(2n-i).$$

Cu aceasta expresia $\sum_1^{n-1} M_i^2$ devine

$$\sum_1^{n-1} M_i^2 = \sum_1^{n-1}\left[M_1 + \frac{a(i-1)(2n-i)}{2}\right]^2 = \sum_1^{n-1}\left[M_1^2 + a M_1 (i-1)(2n-i) + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{4}(i-1)^2(2n-i)^2\right] = (n-1) M_1^2 + a M_1 \sum_1^{n-1}(i-1)(2n-i) +$$

$$+ \frac{a^2}{4}\sum_1^{n-1}(i-1)^2(2n-i)^2.$$

Făcînd suma seriilor ce rezultă din dezvoltarea termenilor acestei expresii, se obține în definitiv

$$\sum_1^{n-1} M_i^2 = (n-1) M_1^2 + \frac{2a M_1}{3}(n-2)(n-1)n +$$

$$\frac{a^2}{60} n(n-1)(8n^3 - 27n^2 + 23n - 2).$$

Procedînd la fel și pentru scrierea expresiei $\sum_2^{n} M_{i-1} M_i$, se obține

$$\sum_2^{n} M_{i-1} M_i = \sum_2^{n}\left[M_1 + \frac{a(i-2)(2n-i+1)}{2}\right]\left[M_1 + \frac{a(i-1)(2n-i)}{2}\right] =$$

$$= \sum_2^{n}\left\{M_1^2 + M_1 a[-i^2 + 2(n+1)i - (3n+1)] + \right.$$

$$+ \frac{a^2}{4}[4n^2(i-1)(i-2) - 4ni(i-1)(i-2) +$$

$$\left. + 2n(i-1)(i-2) + i(i-1)^2(i-2)]\right\}$$

Însumînd de asemenea seriile ce rezultă din dezvoltarea termenilor expresiei, se obține

$$\sum_2^{n} M_{i-1} M_i = (n-1) M_1^2 + \frac{a M_1}{6} n(n-1)(4n-5) +$$

$$+ \frac{a^2}{120} n(n-1)(n-2)(16n^2 - 7n - 3).$$

Introducînd în relaţia ce dă pe $\sum S_i$ expresiile găsite pentru $\sum_1^{n-1} M_i^2$ şi $\sum_2^n M_{i-1} M_i$ şi reducînd termenii asemenea se obţine

$$\sum S_i = \frac{M_1^2 a}{2}(n-1) + \frac{M_1 a^2}{36} n (n-1)(12n-15) +$$

$$+ \frac{a^3}{720} n (n-1)(48n^3 - 117n^2 + 73n - 2) +$$

$$+ \frac{M_1^2}{6}(s+3t) + \frac{M_1 at}{2}(n-1)n + \frac{a^2 t}{8}(n-1)^2 n^2.$$

Dacă se ţine seama că $M_1 = ns$, atunci $\sum S_i$ devine

$$\sum S_i = \frac{s^2 a}{2} n^2 (n-1) + \frac{a^2 s}{36} n^2 (n-1)(12n-15) +$$

$$+ \frac{a^3}{720} n (n-1)(48n^3 - 117n^2 + 73n - 2) +$$

$$+ \frac{s^3}{6} n^2 + \frac{t}{8} n^2 [2s + a(n-1)]^2.$$

Din figura 3 se observă că

$$s = \frac{1}{2}[d - (n-1)a] \text{ şi } t = \frac{1}{2}[c - (n-1)a].$$

Înlocuind în relaţia ce dă $\sum S_i$ pe s şi t cu expresiile lor funcţie de d, c, n şi a, dezvoltînd parantezele şi reducînd termenii asemenea, se obţine

$$\sum S_i = \frac{n^2}{48}\left\{l^3 - 3lc^2 + 2c^3 + a^2(n^2-1)\left[\frac{a}{15}\frac{3n^2-2}{n} - (l-c)\right]\right\}.$$

Ţinînd seama de formula (1), sarcina critică de flambaj este dată de relaţia

$$R_f = \frac{(2n)^2 EI_y e}{4\sum S_i} = \frac{n^2 EI_y e}{\sum S_i} =$$

$$= \frac{48 EI_y e}{l^3 - 3lc^2 + 2c^3 + a^2(n^2-1)\left[\frac{a}{15}\frac{3n^2-2}{n} - (l-c)\right]}. \qquad (2)$$

Pentru convoaiele de forţe întîlnite în practică, sarcinile critice de flambaj sînt date de relaţiile:

— pentru două forţe pe grindă $n = 1$:

$$R_{f_2} = \frac{48 EI_y e}{l^3 - 3lc^2 + 2c^3} = K_2 \frac{EI_y e}{l^3}; \qquad (3)$$

— pentru patru forţe pe grindă $n = 2$:

$$R_{f_4} = \frac{48\,EI_y\,e}{l^3 - 3lc^2 + 2c^3 + a^2\,[a - 3\,(l-c)]} = K_4 \frac{EI_y\,e}{l^3}; \tag{4}$$

— pentru opt forţe pe grindă $n = 4$:

$$R_{f_8} = \frac{48\,EI_y\,e}{l^3 - 3lc^2 + 2c^3 + a^2\,[11{,}5\;a - 15\,(l-c)]} = K_8 \frac{EI_y\,e}{l^3}; \tag{5}$$

— pentru şaisprezece forţe pe grindă :

$$R_{f_{16}} = \frac{48\,EI_y\,e}{l^3 - 3lc^2 + 2c^3 + a^2\,[99{,}75\;a - 63\,(l-c)]}; \tag{6}$$

— pentru cazul în care $n \to \infty$:

$$R_{f_\infty} = (pl)_f = \frac{120\,EI_y\,e}{l^3}, \tag{7}$$

regăsindu-se astfel una dintre formulele cunoscute [2] pentru grinda pe două reazeme încărcate cu o sarcină uniform distribuită.

Aceste relaţii şi cazurile pentru care sînt aplicabile sînt cuprinse în tabela 1.

În tabelele 2, 3 şi 4 sînt calculate, pentru cele mai uzuale valori ale lui $\frac{c}{l}$ şi $\frac{a}{l}$, valorile constantelor K_2, K_4 şi K_8.

CONCLUZII

Interpretînd relaţiile deduse în cuprinsul articolului în legătură cu sarcina critică pentru grinda continuă pendulară sprijinită pe reazeme alcătuite din tendoane articulate şi încărcată pe intervalul dintre două reazeme consecutive cu două convoaie alcătuite din acelaşi număr de sarcini de mărime egală ale căror rezultante sînt situate la distanţa c, distanţa dintre două sarcini consecutive ale convoiului fiind a, se pot trage următoarele concluzii :

1. Grinda continuă pendulară de acest tip este echivalentă din punct de vedere al calculului de stabilitate cu grinda rezemată pe două reazeme cu aceeaşi încărcare.

2. Relaţiile care dau sarcina critică de flambaj (2), (3), (4), (5), (6) depind, în afara factorilor (EI_y, e, l, c) cunoscuţi de la alte tipuri de grinzi pendulare studiate [1]–[6], şi de distanţa dintre două sarcini consecutive ale convoiului (a), precum şi de numărul total de sarcini care acţionează asupra grinzii ($2\,n$).

3. Cea mai mică valoare a sarcinii critice este cea corespunzătoare grinzii la care fiecare dintre cele două convoaie sînt alcătuite dintr-o singură forţă.

4. Sarcina critică crește cu numărul de sarcini care calcă pe grindă.

5. Valoarea sarcinii critice pentru aceleași convoaie de forțe (n, a) crește cu distanța (c) dintre rezultantele acestora și scade păstrînd aceeași distanță (c) cu cît forțele ce alcătuiesc convoiul sînt mai apropiate între ele (respectiv a scade).

6. Din tabelele 2, 3 și 4 rezultă că pentru același raport $\frac{c}{l}$ constantele K sînt apropiate ca valoare. Pentru valori uzuale ale lui $\frac{a}{l}$, acestea se înscriu în general în limitele erorilor tehnice admise ($< 5\%$).

Rezultă că sarcina critică a unei grinzi continue pendulare încărcate cu două convoaie de sarcini poate fi calculată luînd în considerație cazul în care cele două convoaie ar fi alcătuite din rezultantele sarcinilor ce le alcătuiesc (3).

Primită la redacție la 30 noiembrie 1965

Tabela 1

Relațiile care dau sarcina critică de flambaj la grinzile continue pendulare susținute prin tendoane articulate și încărcate cu convoaie de forțe

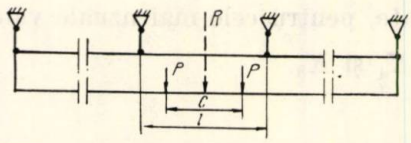
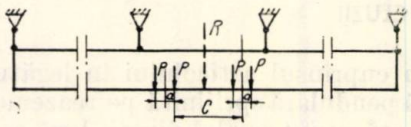
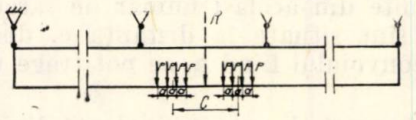
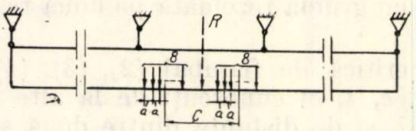
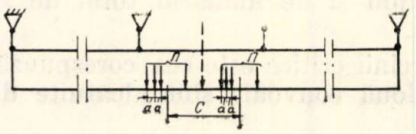
Nr. crt.	Modul de încărcare și rezemare	Formula de calcul
1		$R_{f_2} = \frac{48\,EI_y\,e}{l^3 - 3lc^2 + 2c^3}$
2		$R_{f_4} = \frac{48\,EI_y\,e}{l^3 - 3lc^2 + 2c^3 + a^2[a - 3(l-c)]}$
3		$R_{f_8} = \frac{48\,EI_y\,e}{l^3 - 3lc^2 + 2c^3 + a^2[11{,}5a - 15(l-c)]}$
4		$R_{f_{16}} = \frac{48\,EI_y\,e}{l^3 - 3lc^2 + 2c^2 + a^2[99{,}75a - 63(l-c)]}$
5		$R_{f_{2n}} = \frac{48\,EI_y\,e}{l^3 - 3lc^2 + 2c^3 + a^2(n^2-1)\left[\frac{a}{15}\frac{3n^2-2}{n} \cdot (l-c)\right]}$

Tabela 2

Valoarea constantei K_2

$\frac{c}{l}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
K_2	57	96	307

Tabela 3

Valoarea constantei K_4

$\frac{c}{l}$ \ $\frac{a}{l}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12,5}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{4}$	58,3	57,8	57,6
$\frac{1}{2}$	98,7	98	97,5
$\frac{3}{4}$	320	316,5	314

Tabela 4

Valoarea constantei K_8

$\frac{c}{l}$ \ $\frac{a}{l}$	$\frac{1}{12,5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{4}$	61,6	60,2	58,7
$\frac{1}{2}$	105	101,6	99,4
$\frac{3}{4}$	347	336,2	323,5

BIBLIOGRAFIE

1. A. Petre, V. Drobotă, *Flambajul lateral al grinzilor continue pendulare*, St. cerc. mec. apl., **16**, *4* (1964).
2. V. Drobotă, *Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini transversale uniform distribuite*, Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, **XXVI**, *6* (1964).
3. — *Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini transversale concentrate şi uniform distribuite*, St. cerc. mec. apl. **18**, *3* (1965).

4. V. Drobotă *Flambajul lateral simetric şi antisimetric al grinzilor pendulare sub sarcini transversale*, Buletinul Institutului politehnic, Bucureşti, *5* (1965).

5. — *Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini mobile*, St. cerc. mec. apl., **18**, *4* (1965).

6. — *Calculul de stabilitate al căii de rulare la grinzile rulante suspendante*, Construcţia de maşini, *11* (1965), Bucureşti.

7- — *O metodă generală pentru calculul sarcinii critice de flambaj la grinzile continue pendulare sub sarcini transversale*, Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", *1* (1967).

8. — *Flambajul lateral al grinzilor continue pendulare sub sarcini transversale, Verificări experimentale*, Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", *3* (1966).

METODOLOGIA DETERMINĂRII ÎN LABORATOR A REZISTENȚEI LA FORFECARE A ROCILOR STÎNCOASE[1)]

de EUGEN STĂNESCU, ALA MUNTEANU și AL. MILITARU
I.S.P.H. București

539.4

Sînt prezentate rezultatele cercetărilor teoretice și metodologice privind determinarea rezistenței la forfecare a rocilor stîncoase, domeniu relativ puțin studiat în țara noastră.
Particularitățile modelării în laborator a stării de efort și deformație a masivului de rocă în momentul apariției ruperii presupune alegerea atentă a schemelor de încercare în laborator, ținînd seama de neomogenitatea inerentă a materialului și de influența factorilor dimensionali. Este expusă metodologia de experimentare a rezistenței de forfecare a rocilor cu un aparat original, folosind metoda matrițelor cu unghi variabil și metoda „braziliană" (încercarea pe generatoare). Pe baza rezultatelor experimentale sînt elaborate, în condițiile ipotezei de rupere Mohr, atît formulele teoretice exacte ale curbei intrinseci, cît și ecuația simplificată a dreptei intrinseci „echivalente", care se poate folosi în aplicațiile practice.

I

Cercetarea de laborator a rezistenței rocilor stîncoase în țara noastră s-a făcut remarcată de mult timp, în special prin studiile prof. M. Stamatiu de la Comitetul Geologic [1], [2] în privința influenței factorului dimensional, a proiectării stîlpilor de susținere din camerele de exploatare subterană etc., cercetări cunoscute și citate în literatura de specialitate din țară și din străinătate.

Realizarea în ultimii 10 ani a unor construcții hidroenergetice importante (baraje de greutate și în arc, galerii de aducțiune și fugă etc.) a impus cercetarea mai aprofundată a proprietăților mecanice a rocilor și mai ales a rezistenței de forfecare ce apare sub acțiunea construcției.

[1)] Prezentată la Conferința de mecanică, București, septembrie 1965.

Întrucît metodele de cercetare normate simple, prevăzute în standarde, permit, în condiţiile unei standardizări riguroase a dimensiunilor epruvetelor şi a metodologiei de încercare, numai aprecierea cu titlu comparativ a calităţii materialelor, pentru caracterizarea complexă a rezistenţei la rupere a rocilor o asemenea metodologie devine insuficientă.

Spre deosebire de încercarea în laborator a altor materiale de construcţie (metal, beton, piatră de construcţie naturală sau artificială etc.), care sînt folosite în construcţii sub forma unor elemente de dimensiuni relativ reduse, încercarea rocilor de fundaţie este afectată de două aspecte particulare, dar esenţiale :

1) starea de efort în masiv este complexă şi se extinde într-un masiv ale cărui dimensiuni, deşi nu sînt cunoscute, pot fi considerate foarte mari. Din această cauză, reproducerea mecanică în laborator a acestor solicitări este dificilă, dat fiind că în laborator se pot modela în special solicitări mai simple şi numai pe epruvete de dimensiuni relativ mici ;

2) materialul natural din care este alcătuită roca stîncoasă, chiar dacă în aparenţă aceasta se prezintă omogenă şi izotropă, conţine inerent defecte de structură, apărute în mod natural în procesul geologic de formare şi care în ultimă instanţă condiţionează rezistenţa la rupere a rocii. De aceea influenţa factorului dimensional are aceeaşi importanţă ca şi influenţa condiţiilor în care se realizează modelarea solicitării naturale în timpul încercării.

Ţinînd seama de acestea, pentru construcţiile hidroenergetice importante, stabilirea parametrilor care caracterizează comportarea rocilor trebuie efectuată prin încercări la scară mare *in situ*. Costul ridicat şi dificultăţile tehnice inerente de a putea cuprinde varietatea mare de tipuri de roci ce există în cuprinsul unui singur amplasament reduc mult posibilităţile de realizare a unui număr suficient de mare de încercări. De aceea încercările de laborator continuă să-şi păstreze valoarea practică, impunînd în paralel stabilirea unor corelaţii care să redea influenţa particularităţilor încercării şi a prezenţei structurii specifice materialului încercat.

II

Examinarea modului în care se produce ruperea rocilor stîncoase arată că ipotezele de rupere a materialelor cunoscute se adaptează cu greu şi numai în mod limitat la particularităţile structurale ale rocilor. În fapt se constată că fiecare material îşi are propria sa lege de rupere, condiţionată de structura sa interioară şi de procesul care dirijează deformaţia lui (în laborator de metodologia de incercare) [3], [4].

Majoritatea cercetărilor în domeniul rocilor consideră însă că ipoteza de rupere după Mohr explică cel mai bine rezultatele experimentale [5], [6]. De aceea, dat fiind că permite, desigur în anumite limite şi cu mijloace simple, o reprezentare complexă a comportării materialului aşa cum este necesar în aplicaţiile practice de construcţii, ea este cel mai frecvent folosită la studiul rocilor stîncoase.

Problema principală constă deci în stabilirea pe cale experimentală a curbei înfășurătoare a cercurilor de tensiuni care corespund ruperii materialului încercat. Cu ajutorul acestei curbe se poate caracteriza într-un mod general comportarea probabilă a rocii aflate sub solicitarea complexă dată de construcție. Pe bună dreptate M. Stamatiu consideră această curbă înfășurătoare drept „monografia de rezistență a rocii respective" [5].

Pentru stabilirea curbei intrinseci, forma cea mai completă se poate obține prin încercări triaxiale ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$). În ultimul timp, acest fel de încercări s-au extins într-o serie de țări [7], [8], [9], dar dificultățile tehnice mari întîmpinate în realizarea încercărilor (din cauza aparaturii complicate) nu permit o extindere corespunzătoare importanței și modului curent în care ele ar trebui executate în fiecare laborator. O răspîndire relativ mai mare au căpătat încercările triaxiale simple (cu simetrie axială: $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$) sau cele biaxiale [9], [10]. Reprezentarea grafică folosește în mod curent numai valorile maxime și minime ale tensiunilor principale, ceea ce simplifică modul de exprimare grafică a rezultatelor încercării[2]). Există și metode mai complete de reprezentare grafică [6], dar ele încă nu și-au găsit o aplicație mai largă, dat fiind modul complicat de prelucrare și interpretare a rezultatelor experimentale.

Pentru rocile nestîncoase (pămînturi), reprezentarea grafică a curbei intrinseci este cunoscută și folosită în mod curent sub forma dreptei lui Coulomb:

$$\tau = a\,\sigma + b. \tag{1}$$

Ea se obține ducînd tangenta comună la cercurile de tensiuni, determinate prin încercări triaxiale duse pînă la rupere. În mecanica mediilor disperse se atribuie de multe ori celor doi parametri ai dreptei a și b semnificații fizice: a este considerat corespunzător frecării interne, iar b coeziunii interne a materialului. Dacă pentru pămînturi problema acestei corespondențe este încă în stadiul experiențelor și al discuțiilor [11], pentru rocile stîncoase folosirea acelorași semnificații și noțiuni este și mai mult îngreuiată de natura particulară a structurii materialului.

Este interesant de menționat că ipoteza privind existența frecării interne la corpurile solide a fost formulată mai de mult de o serie de cercetători cunoscuți în domeniul betoanelor [12], [13]. Dificultățile mari în interpretarea rezultatelor experimentale ale încercărilor simple de rezistență au arătat că verificarea unei asemenea ipoteze comportă o examinare mai aprofundată a fenomenului de rupere, implicînd pătrunderea cercetării în interiorul epruvetelor aflate sub solicitare. În ultimul timp s-au efectuat încercări de „ascultare" a comportării rocii [14] aflate sub încărcare; ele confirmă faptul că în interior, pe măsura creșterii eforturilor exterioare, apar deformații însoțite de deplasări și zdrobiri locale care produc sunete particulare, asemănătoare frecării interioare. Dar încercări de acest fel sînt încă la începutul lor, și de aceea

[2]) În ultimul timp, încercările au arătat că tensiunea principală medie are o influență evidentă asupra rezultatului încercării [11], dar deocamdată reprezentarea grafică în funcție de tensiunile principale maximă și minimă rămîne cea mai răspîndită.

numai acumularea suplimentară a unui material experimental mai amplu ar putea aduce date noi în sprijinul, sau pentru combaterea unei atare ipoteze de rupere. De aceea, indiferent de forma curbei înfășurătoare a cercurilor de rupere, nu este posibil a atribui semnificația unor „frecări sau coeziuni" interne naturale anumitor parametri geometrici ai curbei intrinseci, deduse în condițiile de experimentare ale rocilor stîncoase. În același timp trebuie însă subliniat că prezența în calcule a unor parametri geometrici fără semnificație fizică nu împietează asupra corespondenței obiective cu realitatea a curbei însăși și de aceea nu perturbă nici rezultatele calculelor propriu-zise.

III

Pentru încercarea rocilor stîncoase, curba intrinsecă trebuie stabilită prin puncte caracteristice. În acest domeniu, elementul esențial devine metodologia și aparatura de laborator folosită. Dat fiind că încercările triaxiale sînt, așa cum s-a arătat înainte, dificil de executat din cauza aparaturii complicate, trasarea curbei trebuie făcută cu ajutorul altor metode, care să permită obținerea prin experimentare a unor valori de tensiuni după o schemă teoretică simplă, modelabilă cu fidelitate în condițiile de laborator și care în felul acesta să ofere garanția corectitudinei determinării respective.

În literatura de specialitate sînt prezentate multe metode de experimentare, a căror schemă principală este redată în figura 1.

Cu toate acestea, schema teoretică a încercării nu poate fi realizată întotdeauna exact cu mijloacele mecanice disponibile în laborator și de aceea, într-o măsură mai mare sau mai mică, ea nu mai corespunde pe deplin scopului; ca urmare, nici curba trasată nu mai poate fi considerată că redă corect realitatea urmărită prin cercetarea efectuată [3]).

---

[3]) Există trei grupe principale de scheme pentru încercarea în laborator a rezistenței de forfecare a rocilor: prin torsiune, prin forfecare simplă și prin forfecare cu compresiune. În figura 1 ele sînt prezentate:

I — prin torsiune; de obicei ruperea în secțiunea centrală se produce din cauza eforturilor din întindere și nu a forfecării;

II — forfecare simplă: forfecarea cu una (*II a*) sau cu două (*II b*) cuțite are avantajul posibilității de repetare pe aceeași probă a forfecării; în secțiune apar însă eforturi de rupere din întindere, care uneori devin mai importante ca tensiunile tangențiale. De altfel există standardizată o metodă de determinarea rezistenței la întindere a materialelor [15], care se bazează pe această schemă de principiu. La schema *II c*, din cauza faptului că tensiunile de întindere, nu pot fi evitate, fisurile de rupere în epruvetă nu apar perpendicular pe axa longitudinală conform schemei teoretice, ci sub un unghi, ceea ce arată că ipoteza teoretică nu se realizează corect. Schemele *II d* și *II e* necesită epruvete de forme speciale, care nu se pot fasona din roci stîncoase din cauza structurii lor.

III — forfecare cu compresiune: schema *III a* este asemănătoare celei folosite la pămînturi; de aceea apariția unui moment în secțiunea de rupere denaturează încercarea; schema *III b* este simplă și realizabilă în laborator, dar aparatura respectivă este foarte laborioasă; schema *III c* este de fapt o dezvoltare a schemei *II c* prin introducerea unei forțe de compresiune pe direcția longitudinală, de aceea are aceleași deficiențe ca și schema *II c*; schema *III d* are o formă simplă și, spre deosebire de schema *III b*, poate fi realizată destul de fidel în laborator cu ajutorul unei aparaturi simple. De aceea a găsit largi aplicații la epruvete de diferite forme geometrice (cuburi, prisme, cilindrii) și chiar la epruvete de formă neregulată.

De aceea, dintre toate metodele, o mai largă răspîndire au căpătat în special două :

— metoda matrițelor înclinate (schema *III d* din figura 1);

— metoda cunoscută sub numele de *„braziliană"* [16], care, într-o anumită formă simplificată, este larg folosită în încercarea betoa-

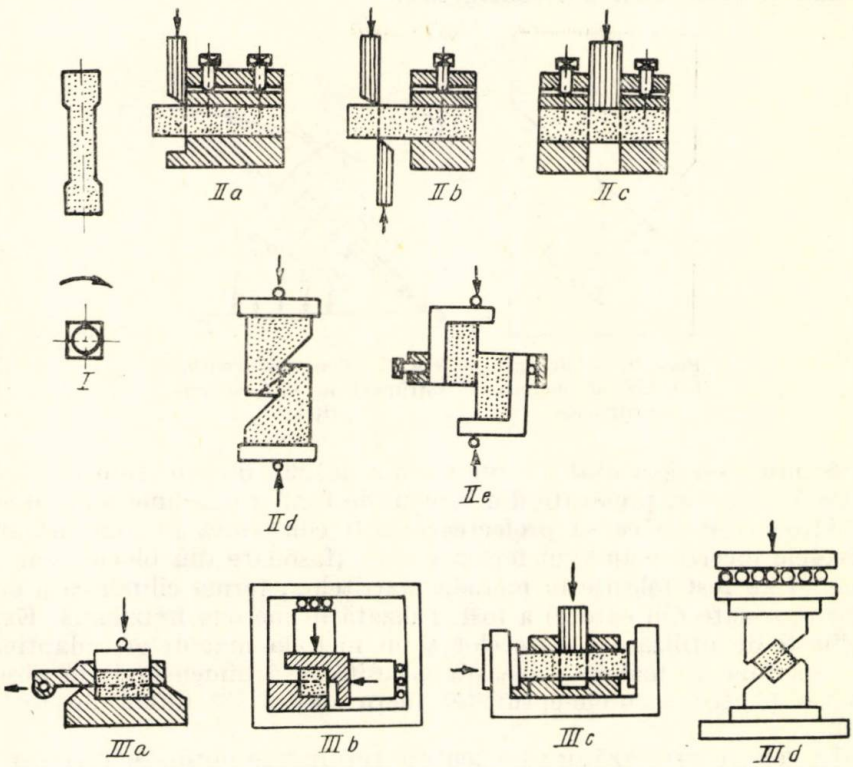


Fig. 1. — Schema de principiu pentru încercarea la forfecare a rocilor stîncoase.

nelor, iar în ultima vreme a fost introdusă sub aceeași formă și la încercarea pămînturilor stabilizate cu ciment [17].

Folosirea celor două metode, cu scheme de principiu complet diferite pentru obținerea *„certificatului"* de rezistență a rocii ce urmează a fi folosită pentru proiectarea fundațiilor unui baraj de beton, a unei centrale subterane sau a îmbrăcăminții unei galerii, depășește însă cadrul unei simple prelucrări statistice de date experimentale. Ea comportă în mod obligatoriu analiza și rezolvarea mai multor aspecte importante, dintre care următoarele condiționează însăși viabilitatea experimentării :

— condițiile de experimentare cu metoda matrițelor;

— poziționarea curbei intrinseci cu metoda braziliană;

— comparație între rezultatele celor două metode și completarea lor reciprocă pentru obținerea unui tablou general;

— folosirea practică a curbei intrinseci în aplicațiile de calcul.

IV

Cercetarea condiţiilor de experimentare în laborator a rezistenţei de forfecare a rocilor pe linia aspectelor menţionate înainte a fost realizată de autori în cadrul Laboratorului baraje de pămînt al Institutului de studii şi proiectării hidroenergetice.

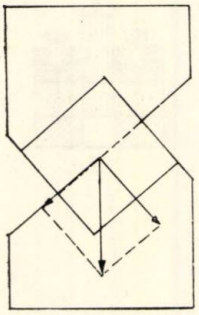


Fig. 2. — Schema forţelor în metoda matriţelor.

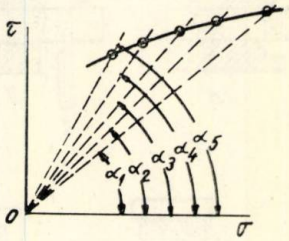


Fig. 3. — Construirea curbei intrinseci în metoda matriţelor.

Studiul s-a executat pe un număr de 295 de epruvete de marnă compactă şi calcar, prelevate din terenul de fundaţie al unei mari amenajări hidroenergetice ce se proiectează a fi construită în anii următori. Epruvetele încercate au avut forma cubică (fasonate din blocuri sau carote) cînd au fost folosite în metoda matriţelor; forma cilindrică a epruvetelor (fasonate din carote) a fost utilizată în metoda braziliană. Există posibilităţi de utilizare a carotelor şi în metoda matriţelor, adaptînd o formă specială de matriţe; aceasta necesită însă dimensiuni tip absolut riguroase pentru carotele-epruvete, lucru destul de dificil de realizat uneori.

În cele ce urmează sînt prezentate rezultatele obţinute în cercetarea celor patru probleme enunţate în capitolul anterior.

1. În metoda matriţelor, schema de principiu este relativ simplă (fig. 2). În planul de rupere apar eforturile unitare

$$\tau = \frac{P}{A}\sin\alpha\,; \qquad \sigma = \frac{P}{A}\cos\alpha, \tag{2}$$

unde:

P reprezintă forţa maximă în momentul ruperii determinată la presă şi A aria secţiunii de rupere.

Folosind diverse înclinări ale unghiului α, se obţine traseul curbei intrinseci (fig. 3).

Aparatul folosit în lucrările de laborator este o realizare originală a unui colectiv de cercetători români (fig. 4) [18], conceput după principiul unui model sovietic [19]. El permite mult mai simplu decît la aparatele similare descrise în literatura de specialitate [20], [21] să se obţină o variaţie practic oricît de mare a unghiurilor α sub care este solicitată epruveta.

În metoda matrițelor se poate construi curba intrinsecă numai în domeniul tensiunilor de compresiune; pentru partea de întindere este necesară completarea curbei cu rezultate obținute cu alte metode.

Teoretic, epruvetele pot fi încercate sub orice unghi α. Analiza experiențelor executate cu o gamă largă de unghiuri a arătat însă că posibilitățile reale sînt mult mai limitate: există un domeniu restrîns

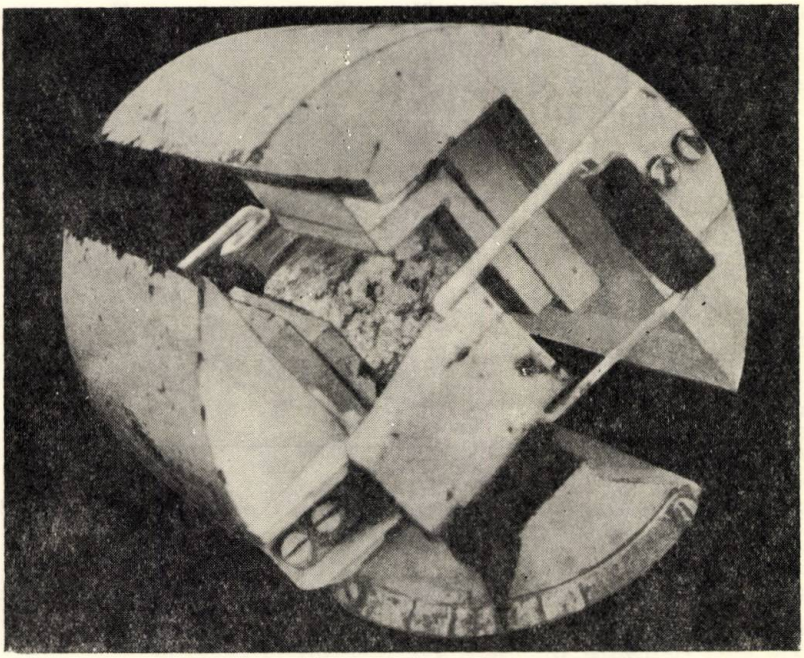


Fig. 4. — Aparatul de forfecare cu matrița.

în care distribuția tensiunilor corespunde ipotezei din schema teoretică, ceea ce face ca forfecarea epruvetei să se producă într-adevăr într-un plan determinat, corespunzător celui din schema teoretică. În afara acestui domeniu, distribuția reală a tensiunilor în interiorul probelor este tulburată de alți factori și din această cauză nici ruperea nu se mai produce după schemă. Ca urmare apare o dispersare mare a rezultatelor [4]), deoarece orice defect local din material devine preponderent și determină obținerea unei alte rezistențe.

În figura 5 sînt prezentate rezultatele unei astfel de serii de încercări, efectuate pe erpuvete de marnă compactă cu o stratificație pronunțată. Direcția planului teoretic de forfecare a fost orientată perpendicular

[4]) Spre deosebire de alte materiale (metal, beton), structura naturală cu defecte a rocii determină o mare dispersie a rezultatelor chiar la încercarea epruvetelor din același bloc de rocă. De aceea, în încercarea rocilor stîncoase, noțiunea de precizie sau de corespondență în cadrul comparației rezultatelor trebuie privită prin prisma acestei dispersii inerente, care este acceptată. Astfel, pentru încercările pe rocă, conform proiectului de standard internațional [21], se admite un coeficient de variație maxim de 0,30, în timp ce la beton și la metal el este mult mai mic.

pe direcţia stratificaţiei. Folosind un astfel de procedeu, se poate observa mai bine efectul ruperii, întrucît, în cazul în care distribuţia teoretică se respectă, planul de rupere apare şi el în mod corespunzător conform schemei teoretice; dacă, dimpotrivă, există o abatere de la distribuţia teoretică a tensiunilor, ea este sensibil remarcată şi chiar amplificată ca

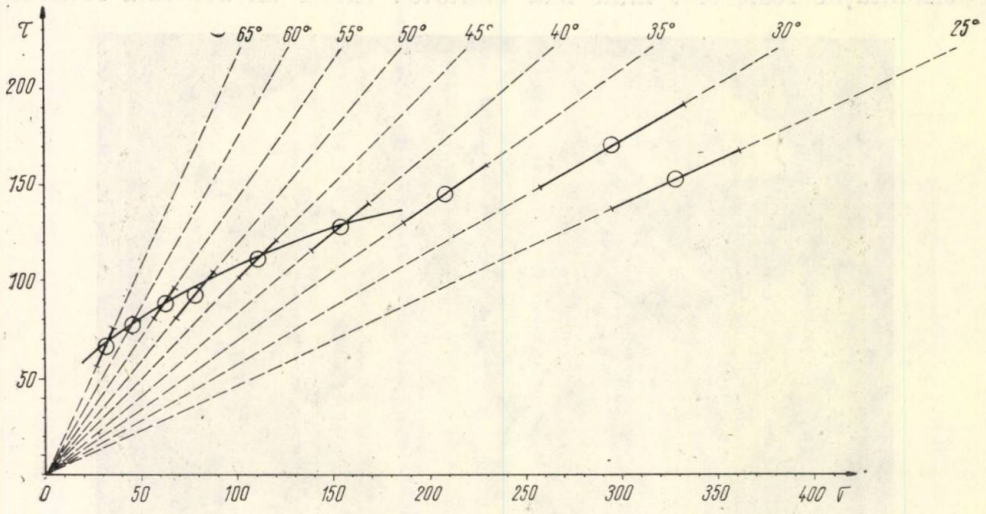


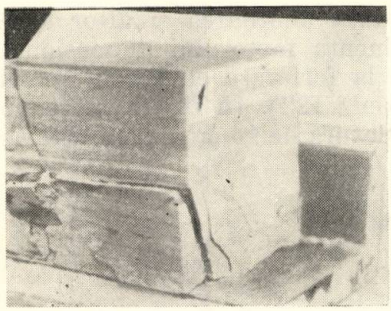
Fig. 5. — Rezultatele încercărilor efectuate cu metoda matriţelor folosind mai multe unghiuri de înclinare.

urmare a prezenţei stratificaţiei, iar planul de rupere se abate de la traseul teoretic.

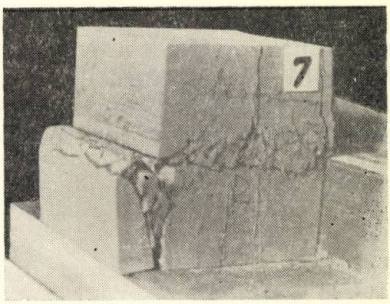
Au fost realizate încercări cu unghiul α variabil între 25 şi 65°. Pentru fiecare încercare sînt prezentate fotografii caracteristice (fig. 6 — 13) ale ruperii epruvetei.

Din examinarea diagramei se constată că, atît din punctul de vedere al abaterii probabile a mediei, cît şi al coeficientului de corelaţie, dispersia cea mai redusă a rezultatelor se obţine în intervalul $\alpha = 45 \div 60°$, optimul fiind observat pentru valorile realizate cînd $\alpha = 60°$. Există o anumită posibilitate de extindere a încercărilor şi la unghiul $\alpha = 40°$.

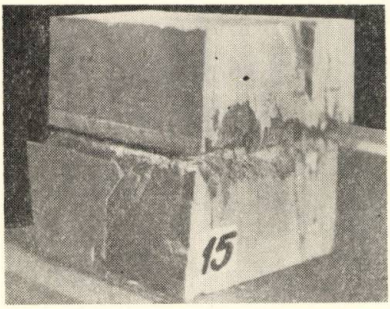
Studiul modului de rupere a epruvetelor arată însă că în afara acestui interval planele de rupere apar abătute de la direcţia lor teoretică. Se remarcă în special acest lucru la epruvete încercate sub unghiuri α mici ($25 \div 35°$) (fig. 6, 7, 8). În acest caz, datorită faptului că apar şi tensiuni de întindere care modifică schema teoretică de rupere, planul de rupere apare înclinat, rezultat similar cu cel ce se produce în încercările de tipul *IIc* (fig. 1) (motiv pentru care de altfel nici aceste încercări nu sînt recomandate pentru a obţine rezistenţele la forfecare). Rezultă deci că pentru a obţine prin metoda matriţelor o curbă intrinsecă corectă trebuie limitate unghiurile sub care se încearcă probele numai în domeniul $45 \div 60°$, situaţie în care planul de rupere apare bine şi distinct precizat, perpendicular pe axa epruvetei, corespunzător schemei teoretice.



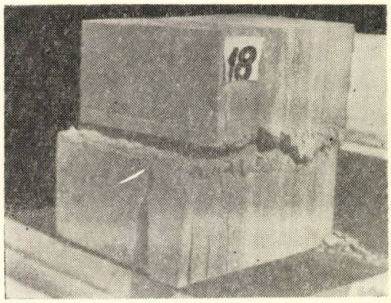
6



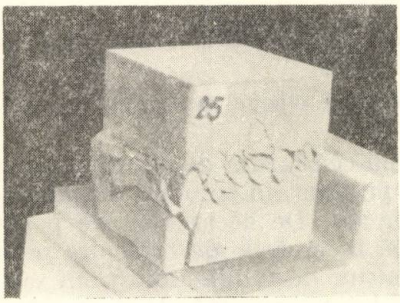
7



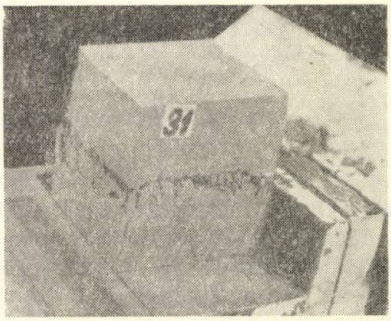
8



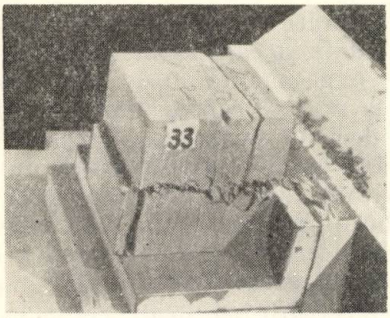
9



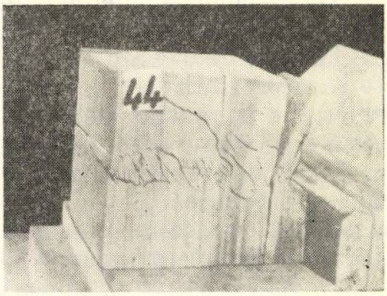
10



11



12



13

Fig. 6—13. — Aspectul ruperii la curburile încercate cu metoda matrițelor : $\alpha = 25°$; $\alpha = 35°$; $\alpha = 40°$; $\alpha = 45°$; $\alpha = 50°$; $\alpha = 55°$; $\alpha = 60°$; $\alpha = 65°$.

Încercările cu matriţe au permis însă abordarea şi altor aspecte importante. Astfel s-a constatat că influenţa factorului dimensional se manifestă şi la încercările de rezistenţă la forfecare cu aceeaşi pondere ca şi încercările de compresiune monoaxială [22]. În figura 14 se poate observa că pentru epruvetele cubice cu latura de 10 cm curba intrinsecă

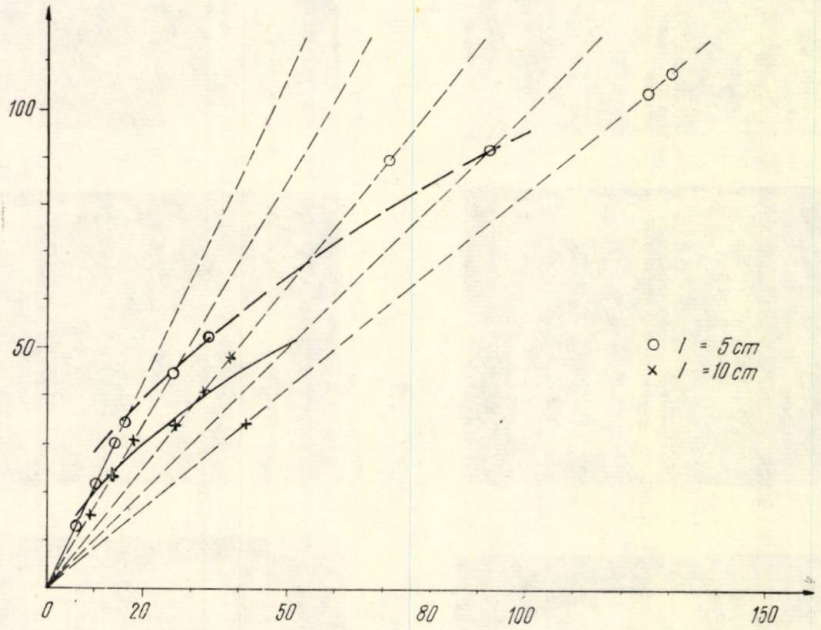


Fig. 14. — Încercările efectuate cu probe de diferite dimensiuni.

se găseşte sub curba determinată pe cuburi cu latura de 5 cm. Existenţa factorului dimensional în formă foarte pronunţată impune o examinare cu atenţie a dimensiunilor pieselor încercate. De aceea faţă de posibilităţile disponibile în laborator rezultă că încercările de forfecare pe matriţe ar trebui făcute cu cuburi avînd latura de minimum 10 cm sau cu prisme avînd secţiunea de forfecare cu latura minimă de 10 cm pentru a obţine rezultate mai apropiate de realitate.

De asemenea metoda matriţelor permite extinderea încercărilor şi la probe cu forme neregulate. Trebuie subliniat că o asemenea metodologie lărgeşte foarte mult posibilităţile de experimentare : de obicei epruvete care prezintă fisuri, chiar invizibile la prima vedere, se sfărîmă prin prelucrarea la maşina de tăiat piatră şi deci nu se mai pot încerca. Nu rezistă decît epruvetele din rocă foarte sănătoasă, ceea ce măreşte numai din punct de vedere formal rezistenţele obţinute în laborator faţă de realitate. Eşantioanele cu forme neregulate, prelevate direct din masiv, nu mai sînt supuse unei fasonări prealabile încercării ; ele corespund stării naturale şi de aceea redau o idee mai corectă asupra rezistenţelor reale.

În figura 15 se prezintă rezultatul încercării. Se poate constata că rezultatele obţinute pe probe fără forme regulate se apropie de cele obţinute pe cuburi cu latura de 10 cm.

În fotografiile 16 și 17 se pot observa cîteva detalii privind tehnica de încercare.

2. În ce privește metodologia încercării prin metoda braziliană, condițiile de experimentare sînt mai simple decît în cazul metodei matrițelor, dar poziționarea curbei intrinseci determinate experimental conduce

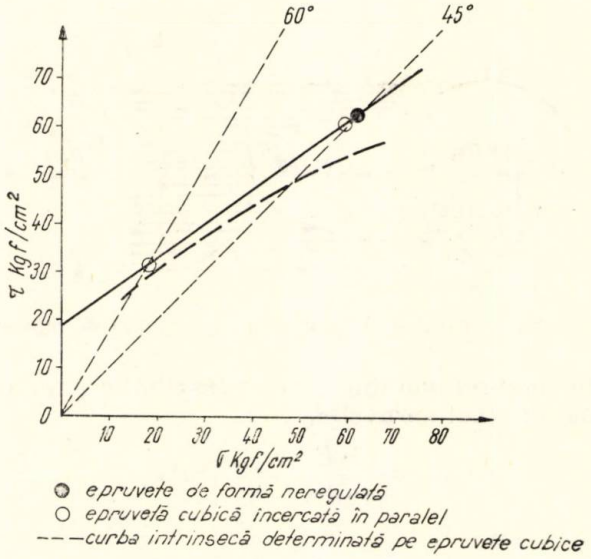


Fig. 15. — Încercările pe probe de formă neregulată.

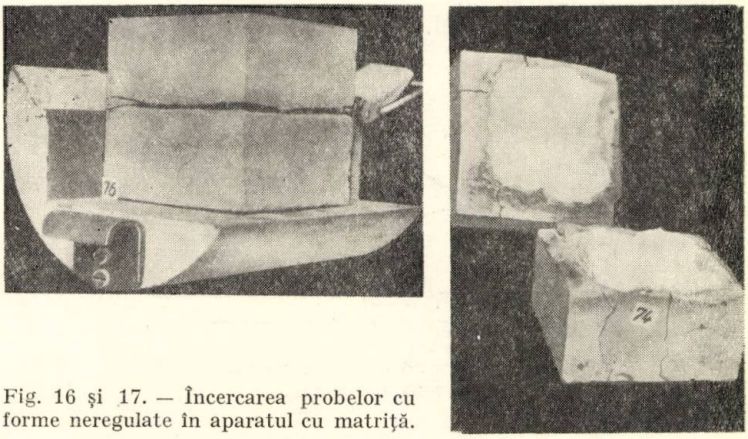


Fig. 16 și 17. — Încercarea probelor cu forme neregulate în aparatul cu matriță.

la unele dificultăți din punctul de vedere al reprezentării analitice a curbei.

În principiu, metoda comportă următoarele încercări :

Epruvete cilindrice se încearcă la compresiune monoaxială, obținîndu-se rezistența la sdrobire σ_c. Altă epruvetă cilindrică se încearcă pe direcție perpendiculară generatoarei. Ruperea se produce într-un

plan vertical longitudinal, în care distribuția teoretică a tensiunilor permite determinarea valorică a rezistențelor. Din figura 18 se poate observa că în planul de rupere există o tensiune de întindere distribuită uniform,

$$\sigma_0 = \frac{-2P}{\pi \cdot d \cdot l}, \tag{3}$$

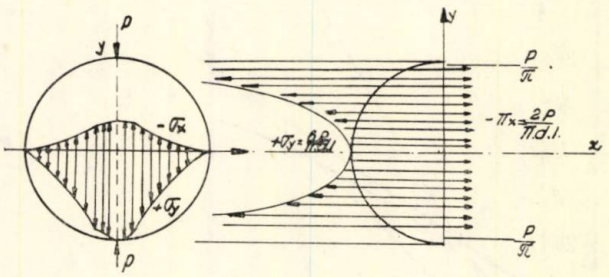


Fig. 18. — Distribuirea tensiunilor în secțiunea de rupere.

și o tensiune de compresiune din a cărei distribuție parabolică se adoptă valoarea minimă din axul epruvetei,

$$\sigma_c^+ = \frac{6 \cdot P}{\pi \cdot d \cdot l} = 3 \cdot |\sigma_0|, \tag{4}$$

unde :

P reprezintă forța maximă înregistrată la presă în momentul ruperii,

d — diametrul epruvetei,

l — lungimea generatoarei.

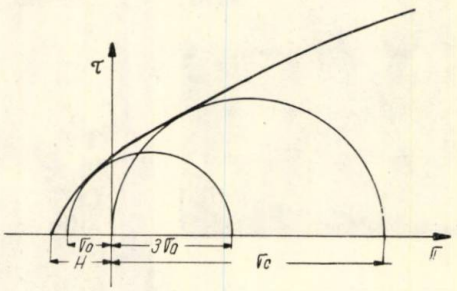


Fig. 19. — Trasarea curbei intrinseci în metoda braziliană.

Prin aceste două încercări se determină două cercuri de rupere, la care curba intrinsecă trebuie să fie tangentă (fig. 19).

Metoda braziliană permite deci să se extindă domeniul experimental și în domeniul tensiunilor de întindere, chiar și la roci stîncoase, unde, din cauza particularităților structurale, nu este posibil de fasonat epruvete de formă specială (de exemplu opturi, cum se folosește pentru mortare sau bitumuri).

În literatura de specialitate sînt considerate mai multe tipuri de curbe trasate pe baza acestor încercări. Cele mai curent folosite sînt: parabola [3], [20], cu ecuația generală:

$$\tau = [\lambda(\sigma + H)]^{\frac{1}{n}}, \tag{5}$$

unde:

H reprezintă tensiunea maximă de întindere,

n și λ — parametrii parabolei;

și cicloida [23], cu ecuația generală:

$$\sigma + H = \frac{1}{2} K^* (4\psi - \sin 4\psi),$$

$$|\tau| = K^* (1 - \cos 4\psi), \tag{6}$$

unde K^* reprezintă diametrul cercului generator al cicloidei.

Așa cum se arată în literatură [23], diferențele dintre aceste două tipuri de ecuații sînt minime și se încadrează pe deplin în precizia obișnuită a rezultatelor obținute la încercările pe roci stîncoase.

De aceea majoritatea cercetătorilor din domeniul mecanicii rocilor stîncoase apelează la forma parabolică, care are o serie de avantaje din punctul de vedere al exprimării directe a parametrilor curbei prin rezultatele obținute experimental.

Examinînd traseul general al unei curbe intrinseci de tipul parabolă, se observă că ea poate fi pusă sub forma generală [24]

$$\tau^n = \lambda(\sigma + H), \tag{7}$$

unde λ, n și H sînt trei parametri care definesc curba și din care numai H are o semnificație fizică, corespunzînd tensiunii maxime de întindere. Încercările de laborator au arătat că întotdeauna $n > 1$ (cazul $n = 1$ conduce la ecuația dreptei lui Coulomb). Pentru a simplifica mai mult lucrurile, în cele mai multe cazuri se adoptă $n=2$ [20]. Stabilirea celorlalți parametri depinde de condițiile de experimentare, care trebuie să furnizeze puncte ale curbei propriu-zise sau elemente pentru trasarea cercurilor de rupere la care curba intrinsecă este tangentă.

Din condițiile de tangență la cele două cercuri de tensiuni determinate experimental prin metoda braziliană:

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_c}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_c}{2}\right)^2, \tag{8}$$

$$\tau^2 + \left(\sigma - \sigma_0\right)^2 = (2 \cdot \sigma_0)^2, \tag{9}$$

se obține pentru $n = 2$ ecuația

$$\tau^2 = \sigma_c \cdot A \cdot (\sigma + H), \tag{10}$$

unde

$$A = 2 \cdot K + 1 - 2\sqrt{K^2 + K} = \frac{1 - 16K^2}{2(1 - 2K)}, \tag{11}$$

$$K = \frac{H}{\sigma_c},$$

$$H = \frac{\sigma_c}{8}\left(\frac{(1 - 8K_1 + 48K_1^2 - 128K_1^3 + 256K_1^4}{1 - 2K_1 - 16K_1^2 + 32K_1^3}\right) =$$

$$= \frac{\sigma_c}{8}\frac{(1 - 4K_1 + 16K_1^2)^2}{(1 - 2K_1)(1 - 16K_1^2)}, \tag{12}$$

$\left(\text{pentru } K_1 = \frac{\sigma_0}{\sigma_c}\right)$.

În tabela 1 sînt arătate valorile $\frac{H}{\sigma_c}$ $\left(\text{în fig. 20 } \frac{H_{par}}{\sigma_c}\right)$ în funcţie de variaţia raportului K_1.

Tabela 1

K_1	$\frac{H}{\sigma_c}$	$\frac{H_{dr}}{\sigma_c}$
0,05	0,102	0,059
0,10	0,108	0,143
0,15	0,160	0,273
0,20	0,400	0,500
0,22	0,780	
0,25	∞	1,000

În figura 20 este prezentată variaţia acestui raport (de altfel în toate aplicaţiile următoare nu se vor folosi decît mărimile relative, raportînd toate valorile la mărimea σ_c, care se consideră baza de referinţă a încercării). În partea inferioară a graficului se află frecvenţa răspîndirii valorii raportului K_1 obţinut experimental de autori prin metoda braziliană. Pe baza valorilor realizate în cadrul acestei cercetări cît şi din alte studii rezultă că pentru majoritatea rocilor raportul K_1 variază în domeniul $K_1 = 0{,}03 \div 0{,}160$ în funcţie de rezistenţa la compresiune monoaxială σ_c (fig. 21).

Din figura 21 se observă că pentru rocile cu rezistenţe ridicate K_1 scade mult, în timp ce la rocile cu rezistenţe de zdrobire reduse (apropiindu-se de tipul pămînturilor) K_1 creşte.

În unele metode [17], [20] se mai foloseşte pentru determinarea lui H şi dreapta tangentă la cele două cercuri (8) şi (9) experimentale. Diametrul cercului tangent la această dreaptă, trasat pe partea tensiunilor de întindere (fig. 22), este considerat egal cu H (pentru a-l deosebi de H determinat din ecuaţia parabolei, el este notat în cele ce urmează cu H_{dr}).

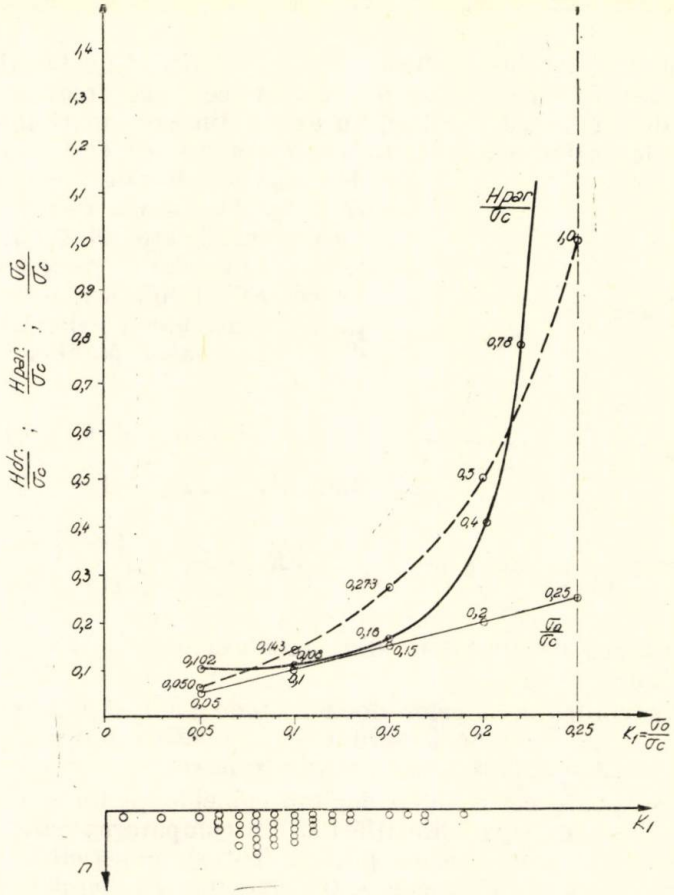


Fig. 20. — Variația valorilor H/σ_c în funcție de tipul curbei intrinseci adoptate.

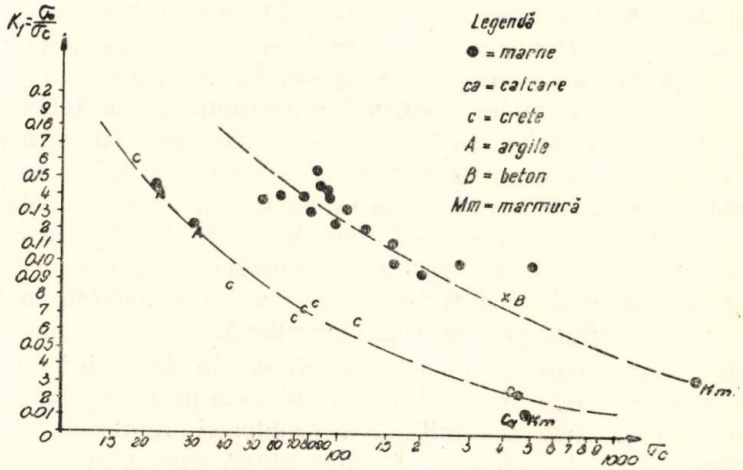


Fig. 21. — Variația valorilor $K_1 = \dfrac{\sigma_0}{\sigma_c}$ în funcție de σ_c.

În tabela 1 și în figura 20 sînt date și valorile H_{dr} calculate. Se observă că în domeniul în care valorile K_1 sînt cele mai frecvent întîlnite în încercările de roci (0,03 ÷ 0,160) nu există diferențe mari între aceste două moduri de stabilire a lui H. De asemenea ele sînt apropiate și de valorile obținute pentru soluția $H = \sigma_0$. De aceea, întrucît această ultimă soluție are cele mai mari avantaje din punctul de vedere al simplificării calculului, ea este propusă pentru continuarea elaborării. Scriind din nou ecuația parabolei (10), se obține

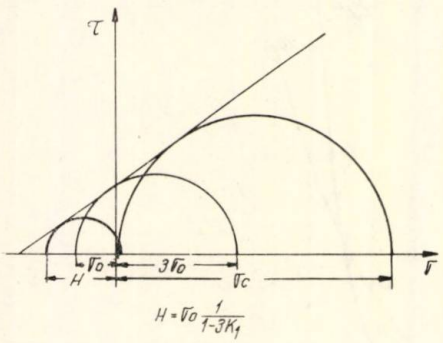


Fig. 22. — Determinarea lui H pe baza dreptei intrinseci.

$$\tau^2 = \sigma_c \cdot A_1 \cdot (\sigma + \sigma_0), \qquad (10')$$

unde $A_1 = 2K_1 + 1 -$

$$- 2\sqrt{K_1 + K_1^2} = \frac{1 - 16K_1^2}{2(1 - 2K_1)}, \qquad (11')$$

σ_0 = tensiunea de întindere din secțiunea de rupere a epruvetei încercate pe generatoare.

3. Pentru compararea celor două metode au fost analizate rezultatele obținute prin încercarea epruvetelor prelevate din aceleași eșantioane. În figura 23 sînt prezentate aceste rezultate.

Precum se poate constata, o deplină coincidență nu se realizează, cu atît mai mult cu cît apar dificultăți și din compararea parabolei cu o dreaptă determinate prin puncte puține. Totuși experiența arată că intervenția unor puncte intermediare (de exemplu la metoda matrițelor prin încercări cu înclinări ale unghiului α între 45 și 60°) nu aduce precizări de natură să schimbe alura curbelor astfel trasate. De altfel însă precizia obținută este satisfăcătoare în cadrul încercării rocilor.

Așa cum se menționează și în alte studii [25], cele două metode pot fi folosite pentru a se completa reciproc. În măsura în care în zona tensiunilor de compresiune se confirmă o comunitate de reprezentare, prin coincidența rezultatelor (în limitele preciziei acceptate la încercările pe rocă tare), partea corespunzătoare tensiunilor de întindere se adoptă după parabole determinată prin metoda braziliană. Întrucît din cele ce s-au arătat înainte pentru valorile $\alpha < 45°$ metoda matrițelor devine nesigură, rezultă că în cazul în care este necesară o reprezentare a curbei și în domeniul valorilor σ_c mai mari trebuie din nou să se recurgă la ecuația curbei-parabole, stabilită prin metoda braziliană.

4. Poziționarea corectă a curbei intrinseci în domeniul de experimentare pe baza rezultatelor de laborator obținute prin cele două metode nu reprezintă totuși decît faza inițială a problemei reprezentării grafice a comportării rocii sub solicitare. A doua etapă constă în găsirea căilor simple, practice de folosire în calcule a curbei intrinseci astfel determinate.

Considerînd alura curbei intrinseci a rocii, se evidențiază faptul că în partea tensiunilor de compresiune se ating valori mari. În această

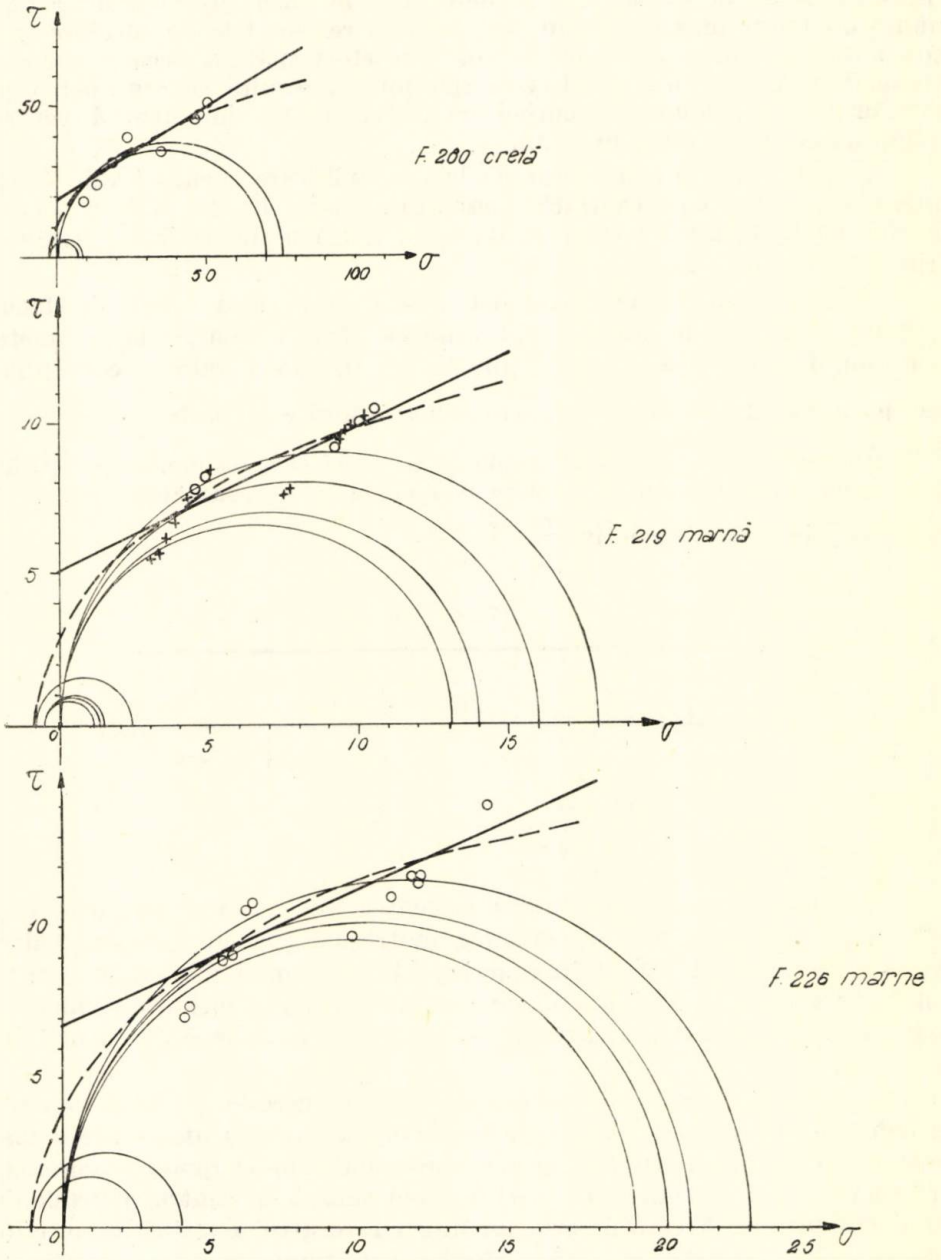


Fig. 23. — Comparația între rezultatele obținute cu metoda braziliană și a matrițelor.

zonă de altfel se plasează aproape toate calculele de stabilitate și rezistență în masivele stîncoase. Partea corespunzătoare tensiunilor de întindere este redusă și de aceea se pretează suficient de bine aproximației, mai

ales ţinînd seama de precizia care se realizează în general şi care este acceptată în încercări. De asemenea, întrucît de obicei nu se admite [5]) ca solicitarea produsă de construcţie să determine în masiv apariţia unor tensiuni de compresiune egale sau mai mari ca rezistenţele de zdrobire monoaxială (chiar dacă în condiţiile stării de efort spaţiale această valoare poate fi întrecută fără periclitarea siguranţei), rezultă că din zona tensiunilor de compresiune a curbei intrinseci rămîne importantă pentru calcul numai o porţiune limitată.

În acest caz se poate proceda la o simplificare a curbei sub forma unei drepte. Problema centrală rămîne în această situaţie stabilirea condiţiilor de înlocuire a curbei cu dreapta, adică a determinării parametrilor ei geometrici.

Aproximarea formei curbe cu dreapta este însă dificil de făcut fără un criteriu bine stabilit, dat fiind că curbura conduce la parametri variabili. Pentru aceasta se impune luarea în consideraţie a condiţiilor de apariţie a suprafeţelor de rupere pentru diferite rapoarte $\frac{\tau}{\sigma}$.

În tabela 2 este arătată valoarea abscisei şi a ordonatei punctului de tangenţă între cercul de rupere la încercarea monoaxială şi parabolă (notate prin valorile relative $\frac{\sigma_t}{\sigma_c}$ şi $\frac{\tau_t}{\sigma_c}$).

Tabela 2

K_1	$\frac{\sigma_t}{\sigma_c}$	$\frac{\tau_t}{\sigma_c}$	α
0,05	0,180	0,382	65°
0,10	0,230	0,423	61°
0,15	0,265	0,440	59°
0,20	0,290	0,452	57°30′
0,25	0,310	0,460	56°

Se observă că unghiul descris la centru (fig. 24) variază între 65 şi 57°30′, adică se apropie de înclinarea matriţelor (pentru gama de valori K_1 întîlnită în mod curent în practică). Deci în mod normal în această zonă ar trebui să se găsească şi punctele de rezistenţă întîlnite în metoda matriţelor, lucru care s-a văzut că se realizează în încercările cu matriţe înclinate.

Pe de altă parte, din analiza modului în care se produce ruperea la cuburile încercate în matriţe s-a menţionat că pentru unghiurile α mai mici de 45° planul de rupere nu mai corespunde corect ipotezei teoretice. În general, în literatură [26], [20] se menţionează că pentru punctele de pe curba intrinsecă care descriu un unghi la centru $\alpha < 45°$, în interiorul probei se dezvoltă în special deformaţii de smulgere care denaturează

[5]) Conform normelor sovietice SNIP II.B.1 - 62, se admite drept capacitate portantă a rocii stîncoase valoarea $R = 0{,}5\ \sigma_c$, unde σ_c este rezistenţa la compresiune monoaxială determinată pe cuburi.

distribuția teoretică a tensiunilor și împiedică concentrarea lor în zona de rupere pentru producerea forfecării. În felul acesta de altfel s-au formulat și recomandările pentru limitarea încercărilor la matrițe pînă la unghiuri de 45° (pct. 2). Din aceleași considerente, și în cazul curbei

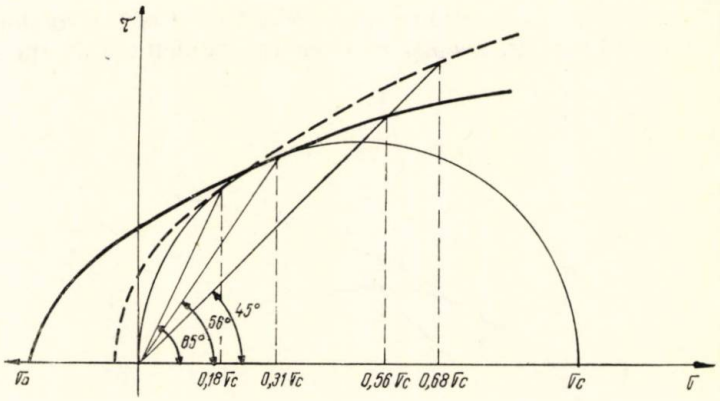


Fig. 24. — Poziționarea curbei intrinseci de tip parabolă.

intrinseci trebuie aplicată deci aceeași recomandare: se poate folosi numai porțiunea de curbă pînă la punctul de intersecție cu dreapta de ecuație $\tau = \sigma$. Coordonatele acestui punct sînt date de relația

$$\tau_{45^\circ} = \sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_c}{2}\left(A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4 \cdot A_1 \cdot K_1}\right) \tag{13}$$

iar valorile sînt date în tabela 3:

Tabela 3

K_1	A_1	$\tau_{45^\circ} = \sigma_{45^\circ}$	m	β	D
0,05	0,64	0,68	0,60	31°	0,272
0,10	0,54	0,620	0,505	27°	0,307
0,15	0,47	0,585	0,453	24°30′	0,320
0,20	0,42	0,570	0,421	23°	0,330
0,25	0,38	0,560	0,400	22°	0,335

Unind cele două puncte stabilite anterior, se obține dreapta intrinsecă „echivalentă" cu ecuația (fig. 25):

$$\tau = m \cdot \sigma + D\,\sigma_c \tag{14}$$

unde

$$m = \operatorname{tg}\beta = \frac{A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4 \cdot A_1 \cdot K_1} - 2\sqrt{A_1}\sqrt{K_1^2 + K_1}}{A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4 \cdot A_1 \cdot K_1} - 2\left[\sqrt{K_1^2 + K_1} - K_1\right]}. \tag{15}$$

În tabela 3 sînt trecute și aceste valori în funcție de K_1.

În privința domeniului tensiunilor de întindere, el se poate simplifica, limitîndu-l liniar astfel: se prelungește dreapta intrinsecă „echivalentă" avînd ecuația (14) pînă la intersecția cu verticala de ecuație: $\sigma = -\sigma_0$ (fig. 14).

Sub această formă simplificată, curba intrinsecă a rocilor stîncoase poate fi acum folosită în același mod ca în problemele de mecanica me-

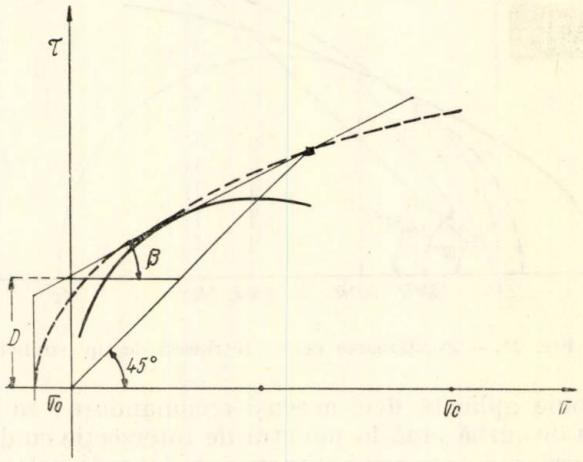


Fig. 25. — Dreapta intrinsecă „echivalentă".

diilor disperse, condiția de tangență a cercului Mohr la dreapta intrinsecă „echivalentă" putînd fi exprimată prin aceleași expresii, iar formulele de stabilitate și de capacitate portantă pot fi folosite în același mod. Trebuie însă subliniat că acestor doi parametri geometrici ai dreptei intrinseci „echivalente" nu trebuie să li se dea o semnificație fizică reală, ci rămîn sub forma evidentă a unor parametri de calcul, determinați în condiții specifice încercărilor pe rocă tare.

V

În concluzie, cercetarea efectuată de autori în laborator a metodologiei determinării rezistenței la forfecare a rocilor stîncoase a permis obținerea următoarelor rezultate:

— stabilirea limitelor domeniului în care încercările pe matrițe înclinate pot da rezultate corespunzătoare schemei teoretice ($\alpha = 45 \div 60°$);

— poziționarea curbei intrinseci de tip parabolă pe baza rezultatelor obținute prin metoda braziliană;

— stabilirea ecuației dreptei intrinseci „echivalente" cu parametri în funcție de rezultatele încercărilor prin ambele metode, ecuație cu ajutorul căreia se pot efectua, după expresii cunoscute, calculele de stabilitate și de capacitate portantă a masivelor de rocă din zona fundațiilor construcțiilor hidroenergetice.

Primită la redacție la 25 octombrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. M. Stamatiu, M. Teodorescu *Recherche sur la résistance aux efforts mechanique du sel gemme roumain*, Congrès Intern. des Mines. VII, sess. 11 (1935).
2. M. Stamatiu, *Influența formei și a mărimii epruvetelor asupra rezistenței de rupere la compresiune a sării geme românești*, Com. Acad. R.P.R., **I**, 2 (1951).
3. M. Tallobre, *Mechanique des roches*, Paris, Dunod, 1954.
4. Н. В. Свечин, *К вопросу о наименьшей прочности заполнителей бетона*. Сб. „Исследовани я по технологии бетона", Мин-во стр-ва предпр. тяж. пр-ти, Moscova, 1950.
5. M. Stamatiu, *Mecanica rocilor*, București, Edit. did. și ped., 1962.
6. П. Д. Евдокимов, Д. Д. Сапегин, *Прочность, сопротивляемость сдвигу и деформируемость оснований сооружений на скальных породах*, Изд. „Энергия", М. — L., 1964.
7. W. Buchheim, *Vorstudie für Entwicklung eines Gerätes zur Untersuchung des physikalischen Eigenschaften von Gesteine im triaxialen Spannungs Zustände*, Inst. für Theorat. Phys. und Geophys. der Bergakademie, Freiberg, 1961.
8. H. J. Price, *A study rock properties in conditions of triaxial stress*, Mechanical properties of non-metallic brittle materiales, Londra, 1958.
9. Г. А. Солнцева, *Усовершенствование методики испытаний малых образцов на трехосное и двухосное сжатие в условиях простого и сложного нагружения*, Тр. Ленингр. политехн. ин-та, *211* (1960).
10. И. Н. Виноградов, Ю. П. Яги, *Крестообразный реверсор для испытания материалов на двухосное сжатие*, Заводская лаборатория, 8 (1955).
11. М. Н. Гольдштейн, С. С. Бабицкая, *Методика испытания связных грунтов на прочность*, Вопросы геотехники, Сб. 6, ДИИЖТ, Трансжелдориздат, 1963.
12. Я. В. Столяров, *Введение в теорию железобетона*, Стройиздат, 1941.
13. Б. Г. Скрамтаев, *Теория прочности бетона*, „Новые виды бетонов", Harcov, 1934.
14. B. Kujundzić, *Experimental research into mechanical characteristics of rock masses in Yugoslavia*, Int. J. Rock Mech. Minning Sci. **2**, 1965.
15. * * * Гост 2861—45, *Отливки из серого чугуна*, „Метод испытания давлением в клиньях", 1945.
16. Carneiro, Barcellas, *Rezistance à la traction des betons*, Rio de Janeiro, Inst. Nacional de Technologia, 1949.
17. * * * *Normativ condițional pentru proiectarea și executarea straturilor din pămînt stabilizate cu ciment la lucrări de drumuri*, C. 25—62, Bul. CSCAS, **III**, *17—18* (1962).
18. A. Munteanu, Al. Militaru, *Aparat de încercarea la forfecare a rocilor stîncoase*. Inovație aprobată la Cab. tehnic I.S.P.H., 1964.
19. Н. М. Глотов, *Прибор для определения прочности скальных пород и бетона на сдвиг*, Сб. „Вопросы проектирования фундаментов искусственных сооружений", ВНИИТС, Трансжелдориздат, 1962.
20. Г. Дингозов, *Определиане якостните параметри на плускални и скални почви*, Сб. 3 „Трудове на научноизследователския строителен ин-т", Изд. „Техника", Sofia, 1960.
21. М. М. Протодьяконов, *Методы испытания прочности горных пород на срез*, Сб. „Механические свойства горных пород", Изд. Академии наук СССР, Moscova, 1963.
22. Е. И. Улицкая, *Влияние размеров образцов горных пород на их механические свойства при срезе*, Сб. „Механические свойства горных пород", Изд. Академии наук СССР, Moscova, 1963.
23. К. В. Руппенейт, *Механические свойства горных пород*, Moscova, Углетехиздат, 1956.
24. Е. С. Ловецкий, *Принцип подобия в испытаниях прочности грунтов*, Сб. „Инженерно-геологические свойства горных пород и методы их изучения, Изд. Академии наук СССР, 1962.
25. Е. И. Улицкая, *Паспорта прочности углей*, Сб. „Механические свойства горных пород", Изд. Академии наук СССР, 1963.
26. Г. Л. Фисенко, *Определение углов откосов бортов Коркинских угольных карьеров*, Углетехиздат, 1953.

ECHILIBRUL RELATIV AL UNUI SISTEM DE IONI FAȚĂ DE UN REPER ROTITOR[1])

de N. N. PATRAULEA
Membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România

533 : 538.6

Se studiază echilibrul relativ macroscopic al unui sistem de ioni de același semn față de un sistem de referință care se rotește cu viteză unghiulară constantă în raport cu un sistem inerțial.

1. Este evident că un sistem de ioni de același sens nu se poate afla în echilibru macroscopic în raport cu un sistem inerțial de referință, din cauza forțelor mutuale de respingere.

În raport cu un sistem de referință rotitor, acest echilibru este posibil [1], și în cele ce urmează ne propunem să studiem ecuațiile acestui echilibru relativ.

2. Fie

$$x_i = r,\ \theta,\ z,\ u \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

coordonatele sistemului de referință rotitor, legate de coordonatele carteziene ale sistemului inerțial fix x_i prin relațiile

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= r\ \cos\ (\omega t + \theta), \\ X_2 &= r\ \sin\ (\omega t + \theta), \\ X_3 &= z, \\ X_4 &= u = i\ c\ t, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

t fiind timpul, considerat același în cele două sisteme, și c viteza luminii în vid.

Metrica în sistemul de referință rotitor va fi dată de

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}r^2 - r^2\,\mathrm{d}\theta^2 - \mathrm{d}z^2 + 2r^2\,i\omega\mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}u - \left(1 - \frac{r^2\,\omega^2}{c^2}\right)\mathrm{d}u^2, \tag{2.2}$$

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée, **11**, 5 (1966) (în limba franceză)

cu următoarele componente ale tensorului fundamental:

$$g_{ik}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & \dfrac{i\omega r^2}{c} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{i\omega r^2}{c} & 0 & -\left(1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Se găsește că determinantul $g = |g_{ik}|$ are valoarea

$$g = r^2. \tag{2.4}$$

Tensorul fundamental contravariant va fi

$$g^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{r^2}\left(1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) & 0 & -\dfrac{i\omega}{c} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{i\omega}{c} & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Dacă $F_{\sigma\tau}$ sînt componentele tensorului electromagnetic în sistemul rotitor, ele vor trebui să satisfacă ecuațiile

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 4\pi\sqrt{-g}\cdot\rho\,\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s} \qquad (\mu,\ \nu = 1\ldots4), \tag{2.6}$$

unde prin ρ s-a notat sarcina electrică a unității de volum și prin $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ densitatea tensorială definită prin [2]

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} F_{\tau\sigma}. \tag{2.7}$$

Efectuînd calculele, se găsește

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{F}^{12} &= \sqrt{-g}\, g^{11}(g^{22}F_{12} + g^{24}F_{14}) = \frac{i}{r}\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)F_{12} - \frac{\omega r}{c}F_{14},\\
\mathcal{F}^{13} &= \sqrt{-g}\, g^{11} g^{33} F_{13} = ir\,F_{13},\\
\mathcal{F}^{14} &= \sqrt{-g}\, g^{11}(g^{42}F_{12} + g^{44}F_{14}) = -\frac{\omega r}{c}F_{12} + irF_{14},\\
\mathcal{F}^{23} &= \sqrt{-g}\, g^{33}(-g^{22}F_{23} + g^{24}F_{43}) = \frac{i}{r}\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)F_{23} + \frac{\omega r}{c}F_{34},\\
\mathcal{F}^{24} &= \sqrt{-g}\, F_{24}(g^{22}g^{44} - g^{24}g^{42}) = \frac{i}{r}F_{24},\\
\mathcal{F}^{34} &= \sqrt{-g}\, g^{33}(g^{42}F_{32} + g^{44}F_{34}) = \frac{\omega r}{c}F_{23} + irF_{34}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Înlocuind aceste expresii în (2.6), se obține

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{1\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{13}}{\partial z} = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{2\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{i}{r}\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)F_{12}+\frac{\omega r}{c}F_{14}\right]+ \\ +\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{i}{r}\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)F_{23}+\frac{\omega r}{c}F_{34}\right]=0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{3\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial r}(-irF_{13}) = 4\pi i r\,\rho\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{4\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega r}{c}F_{12}-irF_{14}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\omega r}{c}F_{32}-irF_{34}\right)= \tag{2.12}$$

$$= 4\pi\,\rho i r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = -\frac{4\pi\rho r}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}}},$$

unde s-a ținut seama că

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{i}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}}}, \tag{2.13}$$

La ecuațiile de mai sus trebuie adăugat încă

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}=0, \tag{2.14}$$

care în ipotezele noastre devin

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial z}+\frac{\partial F_{23}}{\partial r}=0\,; \quad \frac{\partial F_{34}}{\partial r}+\frac{\partial F_{41}}{\partial z}=0. \tag{2.15}$$

3. Din ecuațiile (2.10) și (2.12) rezultă

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{F_{12}}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F_{23}}{r}\right)=\frac{\omega}{c}\cdot\frac{4\pi\rho r}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}}} \tag{3.1}$$

și ecuația (2.12) poate fi scrisă

$$\frac{\partial}{\partial r}(ir F_{14})+\frac{\partial}{\partial z}(irF_{34})=\frac{2\omega}{c}F_{12}+4\pi\rho r\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}, \tag{3.2}$$

ceea ce arată că *divergența cîmpului electric este determinată nu numai de sarcinile reale* ρ, *ci și de sarcinile fictive* $\dfrac{2\omega}{c}\dfrac{F_{12}}{4\pi r}$.

4. Dacă se introduce acum cvadripotențialul electromagnetic Φ_k, $(k = 1, \ldots 4)$, definit prin

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1 \ldots 4), \tag{4.1}$$

relația (3.1) devine

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right) = -\frac{\omega}{c} \cdot \frac{4\pi\rho r}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}, \tag{4.2}$$

iar în loc de (3.2) avem

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(ir\frac{\partial \Phi_4}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(ir\frac{\partial \Phi_4}{\partial z}\right) = 2\frac{\omega}{c}\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + 4\pi\rho r\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}, \tag{4.3}$$

care reprezintă laplaceanul funcției $i\Phi_4$ în coordonate cilindrice.

Dacă repartiția sarcinilor ρ este cunoscută, funcțiile Φ_4 și Φ_2 pot fi determinate din (4.2) și (4.3).

Funcția Φ_4 poate fi deci considerată într-un domeniu cu simetrie axială, abstracție făcînd de o funcție armonică oarecare, ca indusă de sarcinile $\rho\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$ și de sarcinile fictive $\frac{\omega}{2\pi rc}\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}$. Funcția armonică aditivă este determinată de sarcinile exterioare domeniului considerat.

5. Această remarcă este utilă îndeosebi în cazul densităților slabe ale sarcinilor ρ. Atunci membrul drept al ecuației (4.2) (care reprezintă vizibil, după forma membrului stîng, vîrtejul cîmpului magnetic) va putea fi neglijat și deci Φ_2 va fi determinată numai de masele magnetice sau de curenți electrici cunoscuți, exteriori domeniului considerat.

Este ușor de observat că funcția Φ_2 nu reprezintă potențialul cîmpului magnetic, ci funcția de flux magnetic. De asemenea, în cazul cînd membrul drept din (4.2) este neglijabil, potențialul cîmpului magnetic este dat de funcția ψ, definită prin

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad ; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, \tag{5.1}$$

funcție evident armonică[1]):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0, \tag{5.2}$$

și noi putem scrie pentru recapitulare

$$H_z = \frac{F_{12}}{r} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, \tag{5.3}$$

$$H_r = \frac{F_{23}}{r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \tag{5.4}$$

[1]) Funcția ψ există, deoarece primul membru din (4.2) este nul în ipoteza noastră.

unde H_r și H_z sînt componentele cîmpului magnetic în coordonate cilindrice.

Densitatea sarcinilor fictive este dată de

$$\rho_f = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \tag{5.5}$$

sau, ținînd seama de (5.4),

$$\rho_f = \frac{1}{2\pi c} \cdot \omega H_z. \tag{5.6}$$

Se poate determina semnul lui ω sau al lui H_z astfel încît o anumită regiune a spațiului să reprezinte o groapă de potențial. De exemplu, dacă se introduc în acest domeniu sarcini reale de semne contrare sarcinilor fictive (5.6), acestea „ar neutraliza" sarcinile fictive și deci, în absența unor forțe de natură neelectrică sau inerțiale, echilibrul sarcinilor ar necesita (vezi 4.3)

$$\rho = -\frac{\omega H_z}{2\pi c}. \tag{5.7}$$

Dacă se ține seama și de forțele de inerție ale particulelor, condițiile vor fi în oarecare măsură modificate, dar, așa cum vom arăta, echilibrul sarcinilor de același semn este totuși posibil.

6. Ecuația (2.12) se va scrie de asemenea

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\omega}{c}\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} - i\frac{\partial \Phi_4}{\partial r}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[r\left(\frac{\omega}{c}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - i\frac{\partial \Phi_4}{\partial z}\right)\right] = -\frac{4\pi\rho r}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}. \tag{6.1}$$

Fie Φ_4^* și Φ_2^* funcțiile respective în cazul cînd $\rho = 0$ în tot spațiul. Φ_4^* va fi atunci indusă numai de sarcinile fictive.

Pe de altă parte, funcția $\frac{\omega}{c}\Phi_2^* - i\Phi_4^*$

va fi armonică, adică

$$i\Phi_4^* = \frac{\omega}{c}\Phi_2^* + \text{funcție armonică}.$$

Dar, deoarece ρ a fost presupus nul peste tot, funcția armonică atașată trebuie considerată o constantă de care se poate face abstracție. Deci

$$i\Phi_4^* = \frac{\omega}{c}\Phi_2^*, \tag{6.2}$$

de unde se deduce deci că *suprafețele echipotențiale ale cîmpului electric indus de sarcinile fictive sînt suprafețe de flux ale cîmpului magnetic cu simetrie axială.*

7. În spațiul rotitor, ecuația mișcării unei particule este dată de

$$c^2 m_0 \left[\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\cdot\frac{dx_\beta}{ds}\right] = qF^\mu_\nu \frac{dx_\nu}{ds}, \tag{7.1}$$

unde

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right) \tag{7.2}$$

sînt simbolurile de speța a doua ale lui Christoffel. Ținînd seama de matricele (2.3) și (2.5), se găsește

$$\left.\begin{aligned}
&F^1_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu 1}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1}\right),\\
&F^1_{1\nu} = 0 \qquad \nu = 1, \ldots 4,\\
&\Gamma^1_{22} = -r\,;\ \Gamma^1_{23} = 0\,;\ \Gamma^1_{24} = \frac{ir\omega}{c},\\
&\Gamma^1_{33} = \Gamma^1_{34} = 0,\\
&\Gamma^1_{44} = \frac{r\omega^2}{c^2},\\
&\Gamma^2_{11} = 0\,;\ \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}\,;\ \Gamma^2_{13} = 0\,;\ \Gamma^2_{14} = -\frac{i\omega}{rc},\\
&\Gamma^{\mu\nu}_3 = 0,\\
&\Gamma^{\mu\nu}_4 = \frac{1}{2} g^{44}\left(\frac{\partial g_{\mu 4}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu 4}}{\partial x_\mu}\right) + \frac{1}{2} g^{24}\left(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu 2}}{\partial x_\mu}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

Avem în continuare

$$\left.\begin{aligned}
&F^\mu_\nu = F_{\nu\beta}\ g^{\mu\beta},\\
&F^1_1 = 0\,;\ F^1_2 = F_{12},\\
&F^1_3 = F_{13},\\
&F^1_4 = F_{14},\\
&F^2_1 = -\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right) F_{12} - \frac{i\omega}{c} F_{14},\\
&F^2_2 = 0\,;\ F^2_3 = F_{23}\cdot\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) + F_{43}\cdot\frac{i\omega}{c}\,;\ F^2_4 = 0,\\
&F^3_1 = -F_{13}\,;\ F^3_2 = F_{23}\,;\ F^3_3 = 0\,;\ F^3_4 = F_{34},\\
&F^4_1 = -F_{12}\cdot\frac{i\omega}{c} - F_{14}\,;\ F^4_2 = -F_{24},\\
&F^4_3 = -F_{32}\cdot\frac{i\omega}{c} - F_{34}\,;\ F^4_4 = -F_{42}\cdot\frac{i\omega}{c} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

$$\Gamma^1_{\alpha\beta}\ \frac{dx_\alpha}{ds}\ \frac{dx_\beta}{ds} = -\frac{r}{c}\dot\theta - \frac{2r\omega}{c^2}\dot\theta t - \frac{r\omega^2}{c^2}\dot\theta^2, \tag{7.5}$$

$$\Gamma^2_{\alpha\beta} \cdot \frac{dx_\alpha}{ds} \cdot \frac{dx_\beta}{ds} = \frac{2}{rc^2} \dot{r}\dot{\theta} + \frac{2\omega}{rc^2} \dot{r}\dot{t}, \tag{7.6}$$

$$\Gamma^3_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds} \cdot \frac{dx_\beta}{ds} = 0, \tag{7.7}$$

$$\Gamma^4_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0, \tag{7.8}$$

unde prin punct deasupra s-a notat derivata în raport cu timpul propriu τ, definit prin

$$c\, d\tau = ds. \tag{7.9}$$

În ceea ce privește membrii din dreapta (7.1) ,obținem, ținînd seama de (7.4),

$$\Gamma^1_\nu \frac{dx_\nu}{ds} = F_{12} \frac{\dot{\theta}}{c} + F_{13} \frac{\dot{z}}{c} + iF_{14}\dot{t}, \tag{7.10}$$

$$F^2_\nu \frac{dx_\nu}{ds} = \left[-\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right) - \frac{i\omega}{c} F_{14} \right] \frac{\dot{r}}{c} + \left[F_{23} \cdot \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) + F_{43} \frac{i\omega}{c} \right] \frac{\dot{z}}{c}, \tag{7.11}$$

$$F^3_\nu \frac{dx_\nu}{ds} = -F_{23} \frac{\dot{\theta}}{c} + iF_{34} \frac{\dot{t}}{c}, \tag{7.12}$$

$$F^4_\nu \frac{dx_\nu}{ds} = -\left(\frac{i\omega}{c} F_{12} + F_{14}\right) \frac{\dot{r}}{c} - \left(\frac{i\omega}{c} F_{32} + F_{34}\right) \frac{\dot{z}}{c}. \tag{7.13}$$

Dacă acum se ține seama de expresiile (7.5) și (7.13), din ecuația (7.1), se obține

$$\frac{m_0}{q}(\ddot{r} - r\dot{\theta} - 2r\omega\dot{\theta}\dot{t} - r\omega^2\dot{t}^2) = F_{12}\frac{\dot{\theta}}{c} + \frac{F_{13}}{c}\dot{z} + iF_{14}\dot{t}, \tag{7.14}$$

$$\frac{m_0}{q}\left(\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} + \frac{2\omega}{r}\dot{r}\dot{t}\right) = \left[-\frac{F_{12}}{r^2}\left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right) - \frac{i\omega F_{14}}{c} \right] \frac{\dot{r}}{c} + \left[\frac{F_{23}}{r^2}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) + iF_{43}\frac{\omega}{c} \right] \frac{\dot{z}}{c}, \tag{7.15}$$

$$\frac{m_0}{q}\ddot{z} = -F_{23}\frac{\dot{\theta}}{c} + iF_{34}\frac{\dot{t}}{c}, \tag{7.16}$$

$$\frac{m_0}{q}c^2\ddot{t} = -\frac{\dot{r}}{c}\left(i\frac{\omega}{c}F_{12} + F_{14}\right) - \dot{z}\left(\frac{i\omega F_{32}}{c} + F_{34}\right). \tag{7.17}$$

8. Trecînd în al doilea membru termenii care au pe ω ca factor și notînd $\overline{m}_0 = \frac{m_0}{q}$, avem

$$\overline{m}_0 (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \left(\frac{F_{12}}{c} + 2\, r\omega\overline{m}_0 \dot{t}\right)\dot{\theta} + (iF_{14} + \overline{m}_0 r\omega^2 \dot{t}^2) + F_{13}\frac{\dot{z}}{c}, \tag{8.1}$$

$$\overline{m}_0\left(\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}\right) = \left[-\frac{F_{12}}{cr^2}\left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right) - \frac{i\omega F_{14}}{c^2} - 2\overline{m}_0 \frac{\omega}{r}\, t\right]\dot{r} + \\ + \left[\frac{F_{23}}{cr^2}\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) + iF_{43}\frac{\omega}{c^2}\right]\dot{z}, \tag{8.2}$$

$$\overline{m}_0 \ddot{z} = -F_{23}\frac{\dot{\theta}}{c} + i\frac{F_{34}}{c}\dot{t}, \tag{8.3}$$

$$\overline{m}_0 \ddot{t} = -\frac{\dot{r}}{c}\left(\frac{i\omega}{c}F_{12} + F_{14}\right) - \frac{\dot{z}}{c}\left(\frac{i\omega F_{32}}{c} + F_{34}\right). \tag{8.4}$$

9. Ecuațiile mișcării se simplifică mult dacă se neglijează termenii de ordin superior, în toate parantezele și dacă se ia

$$\dot{t} = 1.$$

În acest caz, ele se pot scrie

$$\overline{m}_0 (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{G_{12}}{c}\dot{\theta} + \frac{G_{13}}{c}\dot{z} + iG_{14}, \tag{9.1}$$

$$\overline{m}_0\left(\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}\right) = -\frac{G_{12}}{cr^2}\dot{r} + \frac{G_{23}}{cr^2}\dot{z}, \tag{9.2}$$

$$\overline{m}_0 \ddot{z} = -G_{23}\frac{\dot{\theta}}{c} + i\frac{G_{34}}{c}, \tag{9.3}$$

unde

$$\begin{aligned} G_{12} &= F_{12} + I_{12} \quad (I_{12} = 2r\omega\overline{m}_0 c), \\ G_{13} &= F_{13}, \\ G_{14} &= F_{14} + I_{14} \quad (I_{14} = i\overline{m}_0 r\omega^2), \\ G_{23} &= F_{23}, \\ G_{34} &= F_{34} \end{aligned} \tag{9.4}$$

Componentele I_{ik} definite mai sus derivă din cvadripotențialul

$$\mathcal{J}_1 = 0\,;\ \mathcal{J}_2 = r^2\omega\overline{m}_0 c\,;\ \mathcal{J}_3 = 0\,;\ \mathcal{J}_4 = -\frac{i\overline{m}_0\omega^2 r^2}{2}. \tag{9.5}$$

Avem deci cvadripotențialul total

$$\mathcal{G}_i + \Phi_i + \mathcal{J}_i, \tag{9.6}$$

adică *legile de mișcare sînt aceleași ca într-un sistem de referință fix, dar unde domnește un cîmp electric și magnetic constant.*

Laplaceanul lui $\mathcal{G}_4$ (vezi și (4.3)) va fi

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(ir\frac{\partial \mathcal{G}_4}{i r}\right)+\frac{\partial}{i z}\left(ir\frac{\partial \mathcal{J}_4}{i z}\right)=\frac{\omega}{c}\left(2\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}+\frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial r}\right)+4\pi\rho r\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}. \tag{9.7}$$

Funcția $\mathcal{G}_4$ poate fi interpretată ca indusă de sarcinile reale multiplicate de coeficientul $\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}$ *și de sarcinile fictive*

$$\rho^*=\frac{\omega}{c}\cdot\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}(2\Phi_2+\mathcal{J})_2. \tag{9.8}$$

10. *Configurație independentă de z.* În cazul particular al configurației cilindrice (funcțiile Φ nedepinzînd de z), avem în loc de (4.2) și (4.3)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{\omega}{c}\cdot\frac{4\pi\rho r}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}, \tag{10.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(ir\frac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{2\omega}{c}\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}r}+4\pi\rho r\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2} \tag{10.2}$$

și în loc de (9.1), (9.2), (9.3)

$$\overline{m}_0(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=\frac{G_{12}}{c}\dot{\theta}+iG_{14}, \tag{10.3}$$

$$\overline{m}_0\left(\ddot{\theta}+\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}\right)=-\frac{G_{12}}{cr^2}\dot{r}, \tag{10.4}$$

$$\overline{m}_0\ddot{z}=0. \tag{10.5}$$

Pentru a simplifica scrierea, vom nota

$$\frac{F_{12}}{r}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}r}=H;\ iF_{14}=i\frac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}r}=E \tag{10.6}$$

și deci

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}=\frac{\omega}{c}\cdot\frac{4\pi\rho r}{\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}} \tag{10.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}(rE)}{\mathrm{d}r}=\frac{2\omega}{c}rH+4\pi\rho r\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}. \tag{10.8}$$

Din (10.3) și (10.4) reținem doar faptul că particulele se mișcă ca și cum sistemul ar fi fix și sub acțiunea unui cîmp electrostatic și a unui cîmp magnetostatic. După teoria cinetică a gazelor, este valabilă deci relația

$$\rho=\rho_0\exp\left(\frac{i\mathcal{G}}{\varkappa T}\right), \tag{10.9}$$

unde

$$i\mathcal{G} = \frac{\overline{m}_0 \omega^2 r^2}{2} + \int_0^r E \mathrm{d}r, \tag{10.10}$$

R fiind constanta gazelor, iar T temperatura absolută a plasmei. Pentru ca problema să fie determinată, mai trebuie să se precizeze densitatea ρ_0 a sarcinii în centrul de rotație sau, mai bine, sarcina totală Q introdusă în groapa de potențial a sistemului rotitor.

Pot fi aduse unele modificări acestor ecuații dacă se poate neglija $\frac{\omega^2 r^2}{c^2}$ și de asemenea membrul drept din (10.7) (într-adevăr, din cauza valorilor mici ale lui ρ, care pot fi evaluate aposteriori, intensitatea cîmpului magnetic nu este practic modificată de distribuția sarcinilor).

Ecuația (10.8) devine deci

$$\frac{\mathrm{d}(rE)}{\mathrm{d}r} = \frac{2\omega}{c} rH_0 + 4\pi\rho r \tag{10.11}$$

și, punînd

$$rE' = \frac{\omega r^2}{c} H_0, \tag{10.12}$$

$$\mathcal{E} = E - E', \tag{10.13}$$

avem, ținînd seama și de (10.9),

$$\frac{\mathrm{d}(r\mathcal{E})}{\mathrm{d}r} = 4\pi r \rho_0 \exp\left\{\frac{\int \mathcal{E}\mathrm{d}r + \frac{\omega r^2}{2c} H_0 + \frac{\overline{m}_0 \omega^2 r^2}{2}}{\varkappa T}\right\} \tag{10.14}$$

sau, cu

$$\frac{\omega}{2\pi c} H_0 + \frac{\overline{m}_0 \omega^2}{2\pi} = -\rho_0^*, \tag{10.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}(r\mathcal{E})}{\mathrm{d}r} = 4\pi\rho_0 r \exp\left\{\frac{-\pi\rho_0^* r^2}{\varkappa T}\right\} \exp\left\{\frac{\int_0^r \mathcal{E}\mathrm{d}r}{\varkappa T}\right\}. \tag{10.16}$$

Această ecuație admite soluția particulară

$$\mathcal{E} = 2\pi\rho^* r\,; \quad \rho_0 = \rho^*. \tag{10.17}$$

Aceasta este soluția care corespunde echilibrului sarcinilor fictive (vezi (9.8)).

După cum a fost menționat, pentru a avea soluția fizic determinată trebuie precizată valoarea sarcinii totale. Dacă aceasta are o valoare finită Q, atunci la mari distanțe $r\mathcal{E}$ trebuie să tindă către o constantă $2Q$ și deci pentru r foarte mare

$$\mathcal{E} \approx \frac{2Q}{r}. \tag{10.18}$$

Pentru temperaturi foarte scăzute, $\varkappa T$ poate fi considerat nul şi deci în acest caz soluţia ecuaţiei (10.14) va fi

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 2\pi\rho^* r \qquad \text{pentru} \qquad r < r_1, \\ \mathcal{E} &= \frac{2Q}{r} \qquad \text{pentru} \qquad r > r_1, \end{aligned} \tag{10.19}$$

r_1 fiind dat de

$$r_1 = \sqrt{\frac{Q}{\pi\rho^*}}, \tag{10.20}$$

11. În această lucrare nu ne-am propus să studiem problema dificilă a regimului tranzitoriu privind antrenarea şi menţinerea sistemului de ioni în mişcare de rotaţie. Vom indica însă că antrenarea plasmei poate fi făcută fie cu ajutorul unui cîmp magnetic rotitor transversal faţă de axa de rotaţie, fie printr-o antrenare analogă antrenării motoarelor zise unipolare, în care scop trebuie să fie dispuşi electrozi convenabili, ca, de exemplu, în [3].

Primită la redacţie la 29 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Patraulea, *Equilibre macroscopique d'un système d'ions isolé, par rapport à un système de réferance tournant*, C.R. de l'Acad. des Sc. Paris, **263**, 1 august, Seria A 226 (1966).
2. A. Einstein, *Teoria relativităţii*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1957, p. 115.
3. Th. V. Ionescu, *Sur un nouvel oscillateur à ondes très courtes (micro-ondes)*, C.R. Acad. Sc. du 3 mai 1937.

STUDIUL EXPERIMENTAL AL OPTIMIZĂRII REPARTIȚIEI DE VITEZE ÎN MACHETA UNUI ELECTROFILTRU

de V. TOMA și ȘT. N. SĂVULESCU
Institutul de mecanica fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

532

În lucrarea de față, autorii prezintă rezultatele experiențelor efectuate pe macheta unui electrofiltru pentru realizarea unei distribuții uniforme de viteză. Se expun întîi considerațiile privitoare la similitudinea la numere Reynolds mici și aparatajul de laborator pentru măsurători la viteze foarte mici (~ 1 m/s). Se arată distribuțiile de viteze obținute prin varierea diverșilor parametri de reglaj (clapete directoare, paletaj de uniformizare etc.).
În final sînt date valorile parametrilor de reglaj pentru optimizarea funcțională a electrofiltrului, deci pentru obținerea unor repartiții de viteză cît mai uniforme. În afară de interesul practic imediat, lucrarea cuprinde considerații teoretice și experimentale privitoare la scurgerile aerului la viteze foarte mici.

1. NECESITATEA STUDIULUI

S-a constatat [1] că în țara noastră se elimină anual prin coșurile fabricilor de ciment peste 100 000 de tone de materie primă măcinată, viciind atmosfera și în același timp reprezentînd pierderi importante pentru industria respectivă.

Față de aceste considerente este ușor de înțeles că desprăfuirea gazelor are o importanță economică și socială apreciabilă. Din aceste motive se caută soluțiile cele mai potrivite pentru obținerea unui randament ridicat în operația de reținere a tuturor particulelor de materie primă și evacuarea aerului în stare pură cu un consum minim de energie. Una dintre cele mai importante condiții pentru realizarea randamentului ridicat este asigurarea unei scurgeri a gazelor cu praf cu viteze uniforme pe întreaga secțiune a filtrului epurator.

Necesitatea studierii scurgerii gazelor și stabilirea soluțiilor pentru uniformizarea vitezelor în întreaga secțiune a filtrului a fost ridicată ca

urmare a proiectării unor electrofiltre pentru morile de ciment de către IAUPS. În consecință s-au cerut date experimentale privitoare la scurgerea aerului rece prin macheta unui electrofiltru de tip IAUPS. Scopul studiului a constat în obținerea de informații asupra calității funcționale a electrofiltrului, pentru ameliorarea lor, știut fiind că scurgerea aerului în instalație este foarte complexă.

Din punctul de vedere al soluției constructive, proiectantul a ales ca instalație de epurare electrofiltrul, pentru că acesta are un randament foarte bun pentru particulele sub 10μ, iar limita de separare este mai mică de 1μ. Acest domeniu de utilizare asigură o înaltă purificare a aerului și, în consecință, reduce în foarte mare măsură efectul nociv al particulelor de materie (în special prin particulele sub 5μ) atît pentru lucrători cît și pentru locuitorii din regiunea în care funcționează fabrica de ciment. Pe de altă parte se recuperează o cantitate importantă de materie care reintră în circuitul tehnologic.

2. CONSIDERAȚII ASUPRA SIMILITUDINII LA NUMERE REYNOLDS MICI

Viteza aerului încărcat cu praf de ciment prin electrofiltru este de circa 0,8 m/s.

Raportul de similitudine geometrică al machetei față de mărimea naturală este aproximativ 1/10.

Conform criteriului obișnuit al similitudinii Reynolds, avem

$$\frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_N L_N}{\nu_N}, \tag{1}$$

unde

V este viteza aerului,

L — dimensiunea geometrică de referință,

ν — viscozitatea cinematică a aerului.

S-a utilizat indicele m pentru elementele referitoare la machetă și indicele N pentru cele care privesc mărimile construcției naturale.

Admițînd că $\nu_m \cong \nu_N$ ar urma să avem viteza în machetă

$$V_m = 0{,}8 \times 10 = 8 \text{ m/s}.$$

Însă experiența laboratorului nostru de strat-limită și unele indicații din literatura de specialitate arată că acest criteriu de similitudine este suficient în scurgerile incompresibile, aproximativ în domeniul 10 — 100 m/s. Pentru domeniul de viteze în jurul a 1 m/s, situația este diferită.

Într-adevăr, în scurgerea aerului prin întreaga instalație se întîlnesc fenomene aerodinamice obișnuite, ca:

— scurgeri potențiale în jurul unor elemente profilate;
— scurgeri cu desprinderi în jurul unor obstacole:
— zone de „apă moartă";
— scurgerea cu frecare între pereți;
— scurgeri secundare în coturi de conducte;
— recirculări ale aerului în regiuni cu forme constructive neaerodiuamice complexe.

Pentru toate aceste scurgeri particulare, valoarea mică a numerelor Reynolds locale are o importanţă esenţială. Astfel, scurgerea în stratul-limită pe o placă plană la viteza de 0,8 m/s este diferită de scurgerea la 8m/s întrucît la 0,8 m/s aproximaţiile stratului-limită nu mai sînt complet valabile.

De asemenea punctele de desprindere, lăţimea şi natura zonei de apă moartă, distribuţia de viteze între pereţi şi mai ales scurgerile secundare au parametri invariabili cu numărul Reynolds pentru valori mici ale acestui număr. Din aceste considerente s-a ales o viteză de scurgere prin electrofiltru şi în turnul de răcire care să nu se deosebească prea mult, ca domeniu de numere Reynolds, de aceea din instalaţia de mărime naturală.

Pe lîngă cele arătate s-a ţinut seama şi de caracteristica de funcţionare a ventilatorului şi s-a stabilit regimul de lucru astfel ca viteza medie să fie aproximativ 2 m/s (V_m). La această viteză, scurgerile locale la intrare, în turnul de răcire şi în electrofiltrul propriu-zis ale machetei prezintă o asemănare de structură (formarea şi disiparea vîrtejurilor etc.) cu scurgerea din instalaţia industrială în privinţa fenomenelor aerodinamice menţionate. Un argument în plus în formarea acestui raţionament este următoarea observaţie : în condiţii reale, aerul se scurge amestecat cu praf. După [2], căderea de presiune într-un tub de curent este

$$\Delta p = \Delta p_0 + \rho_p \int_{c_1}^{c} v \, \mathrm{d}\, c,$$

unde

Δp este căderea de presiune în aerul amestecat cu praf,
Δp_0 — căderea de presiune în aerul curat,
ρ_p — densitatea amestecului,
v — viteza de antrenare,
c — viteza particulei de praf.

Or, această cădere de presiune face ca în mod real scurgerea amestecului să se comporte la fel la o viteză reală şi mai mică astfel că noi am considerat viteza reală de aproximativ 0,2 m/s, ceea ce justifică viteza în machetă de 2 m/s. În afară de aceasta, am observat că încercările moderne cu filtre [3] se efectuează tot la viteza de 2 — 4 m/s în machete chiar mai mici ca dimensiuni.

3. ECHIPAMENTUL EXPERIMENTAL

La pregătirea experienţelor cu macheta electrofiltrului s-a ţinut seama de faptul că problema principală în această lucrare o constituie măsurarea vitezelor mici ale aerului : în jurul a 1 m/s. Întrucît tuburile Pitot şi micrometrele obişnuite nu sînt corespunzătoare pentru $V = 1$ m/s pentru că $\rho/2\ V^2$ la aer este aproximativ 1/16 mm col apă, deci greu sesiza-

bil, a fost necesară o pregătire ştiinţifică corespunzătoare, care s-a concretizat prin :

— realizarea unei suflerii de viteze foarte mici pentru etalonarea diverselor instrumente de măsură ;

— realizarea unor tuburi Pitot speciale cu diametrul mic ($\varnothing = 3$mm) ;

— încercarea şi etalonarea micromanometrelor obişnuite pentru a verifica indicaţiile la înclinările cele mai mici (1/25 şi 1/50) necesare vitezelor de 1—3 m/s.

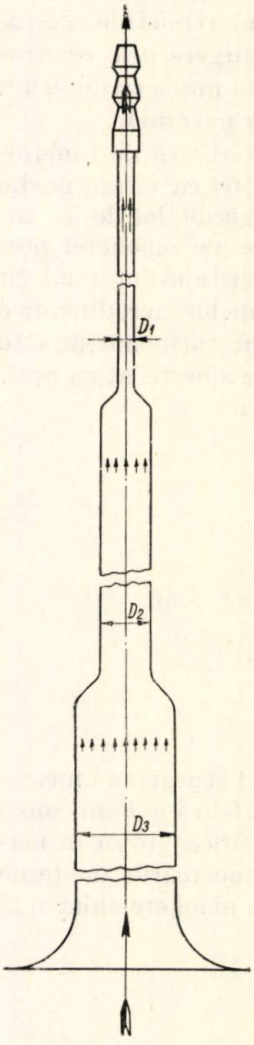


Fig. 1. — Sufleria de viteze foarte mici.

Concepţia unei suflerii de viteze foarte mici s-a bazat pe două principii :

— conservarea debitului la scurgerea prin conducte de secţiune variabilă ;

— posibilitatea determinării aproximative a distribuţiei de viteze în porţiunea de conductă în care vitezele sînt foarte mici.

În figura 1 se arată schematic sufleria de viteze foarte mici, compusă din trei tronsoane.

Dacă scriem ecuaţia conservării debitului în cele trei porţiuni cu diametre diferite ale sufleriei la viteze foarte mici

$$Q = \int_0^{R_1} 2\pi r_1 u_1 \mathrm{d}\, r_1 = \int_0^{R_2} 2\pi r_2 u_2 \mathrm{d}\, r_2 = \\ = \int_0^{R_3} 2\pi r_3 u_3 \, \mathrm{d}r_3 = \text{const} \tag{2}$$

şi notăm

$$u_{1a} = \frac{u_1}{U_{1\max}} = f\left(r_1 = \frac{r_1}{R_1}\right); \\ \frac{u_2}{U_{2\max}} = f_2\left(\frac{r_2}{R_2}\right); \quad \frac{u_3}{U_{3\max}} = f_3\left(\frac{r_3}{R_3}\right), \tag{3}$$

urmează că putem scrie

$$k = U_{1\max} D_1^2 \int_0^1 r_{1a} f_1 \mathrm{d}\, r_{1a} = U_{2\max} D_2^2 \int_0^1 r_{2a} f_2 \mathrm{d} r_{2a} = \\ = U_{3\max} D_3^2 \int_0^1 r_{3a} f_3 \mathrm{d}\, r_{3a} \,. \tag{4}$$

Q se poate determina cu precizie, întrucît în tronsonul de diametru mic vitezele sînt de ordinul metrilor pe secundă (circa 10 m/s). De asemenea se poate stabili precis $f_1(r_{1a})$ prin traversare cu tub Pitot, trasînd profilul de viteze în secţiunea D_1 a sufleriei de viteze foarte mici.

Funcţiile f_2 şi f_3 se pot cunoaşte aproximativ, însă aproximaţia este destul de bună deoarece sînt funcţii adimensionalizate.

În acest sens avem

$$U_{2max} = U_{1max}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \frac{\int_0^1 r_{1a} f_1 dr_{1a}}{\int_0^1 r_{2a} f_2 dr_{2a}} = U_{1max}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 q. \qquad (5)$$

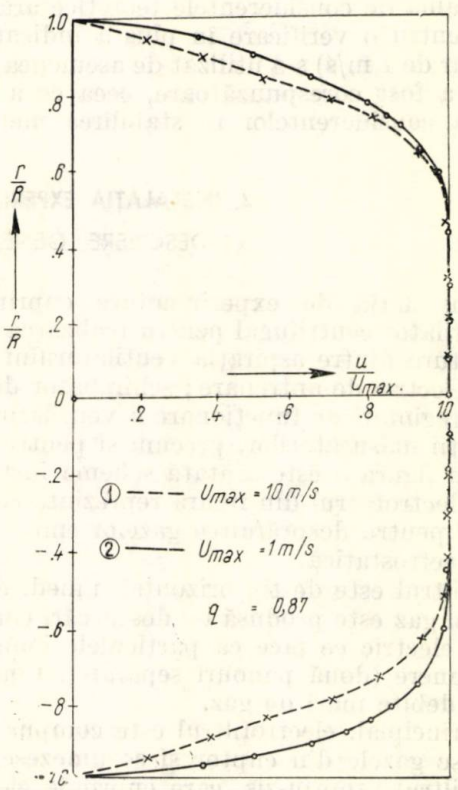


Fig. 2. — Repartiția adimensională a vitezelor în secțiunile *1* și *2*.

În mod analog avem pentru U_{3max} valoarea

$$U_{3max} = U_{1max}\left(\frac{D_1}{D_3}\right)^2 q. \qquad (6)$$

Putem deci să cunoaștem precis U_{1max}, $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$ și raportul celor două integrale q. În acest mod, U_{2max} este determinat precis și poate da indicații asupra comportării atît a aparatelor de măsură cît și a micromanometrelor pentru etalonare.

Pentru necesitățile experienței s-a realizat un regim de funcționare a sufleriei în care să avem viteza de 1 m/s în zona ② cu diametrul $\varnothing = 65$ mm. Repartiția vitezelor în zonele ① și ② este arătată în figura 2.

În acest regim de lucru au fost etalonate micromanometrele și tuburile Pitot.

Pentru a putea explora cîmpul de scurgere din interiorul machetei electrofiltrului au fost proiectate și executate în Laboratorul de strat-limită o serie de sonde cu gabarite și caracteristici speciale. Astfel s-au executat tuburi Pitot-Prandtl cu diametrul exterior de 3mm precum și sonde de presiune totală, speciale, pentru viteze mici.

Aceste instrumente au devenit aparatajul de precizie folosit la măsurători după etalonarea lor cu ajutorul sufleriei de viteze foarte mici și ținînd seama de considerentele teoretice arătate.

Pentru o verificare în plus a indicațiilor aparatelor la viteze mici în (în jur de 1 m/s) s-a utilizat de asemenea anemometrul cu fir cald. Verificarea a fost corespunzătoare, ceea ce a confirmat precizia execuției și justețea considerentelor în stabilirea metodicii de etalonare.

4. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ

a) DESCRIERE, GENERALITĂȚI

Instalația de experimentare cuprinde: macheta electrofiltrului; un ventilator centrifugal pentru realizarea scurgerii în machetă; conducta de legătură dintre aspirația ventilatorului și gura de ieșire din machetă; motor electric de antrenare; schimbător de turație pentru realizarea diferitelor regimuri de funcționare a ventilatorului și instrumentația necesară efectuării măsurătorilor, precum și pentru controlul regimului funcțional.

În figura 3 este arătată schema instalației machetei electrofiltrului.

Electrofiltrul din figură reprezintă schema unui filtru de construcție IAUPS pentru desprăfuirea gazelor emise de fabricile de ciment prin metoda electrostatică.

Filtrul este de tip orizontal, umed, cu o treaptă. Ionizarea particulelor din gaz este produsă de descărcări corona la electrozii care creează și cîmpul electric ce face ca particulele ionizate să se depună pe electrozii de depunere (două panouri separate). Construcția este de un tip special pentru debite mari de gaz.

Principial, electrofiltrul este compus dintr-un turn de răcire în care se răcesc gazele din cuptor și se umezesc. Urmează pîlnia de intrare în electrofiltrul propriu-zis, care cuprinde elementele de reglare a vitezelor: palete de deviere a gazelor.

Corpul sau carcasa electrofiltrului cuprinde în continuare două panouri separate de depunere. În partea inferioară a carcasei electrofiltrului se află trei buncăre pentru colectarea prafului, care, bineînțeles, au dozatoare celulare pentru evacuarea prafului fără pierdere de gaze și fără introducere de aer fals. La pîlnia de ieșire a fost practicată o ieșire axială și una verticală. În cadrul experimentărilor au fost încercate ambele soluții.

b) ELEMENTE DE REGLAJ ALE SCURGERII

Studiul experimental prezent a căutat să găsească dispunerea judicioasă a diferitelor elemente de reglaj, astfel ca să se obțină scurgeri uniforme în diferitele părți a instalației de filtrare.

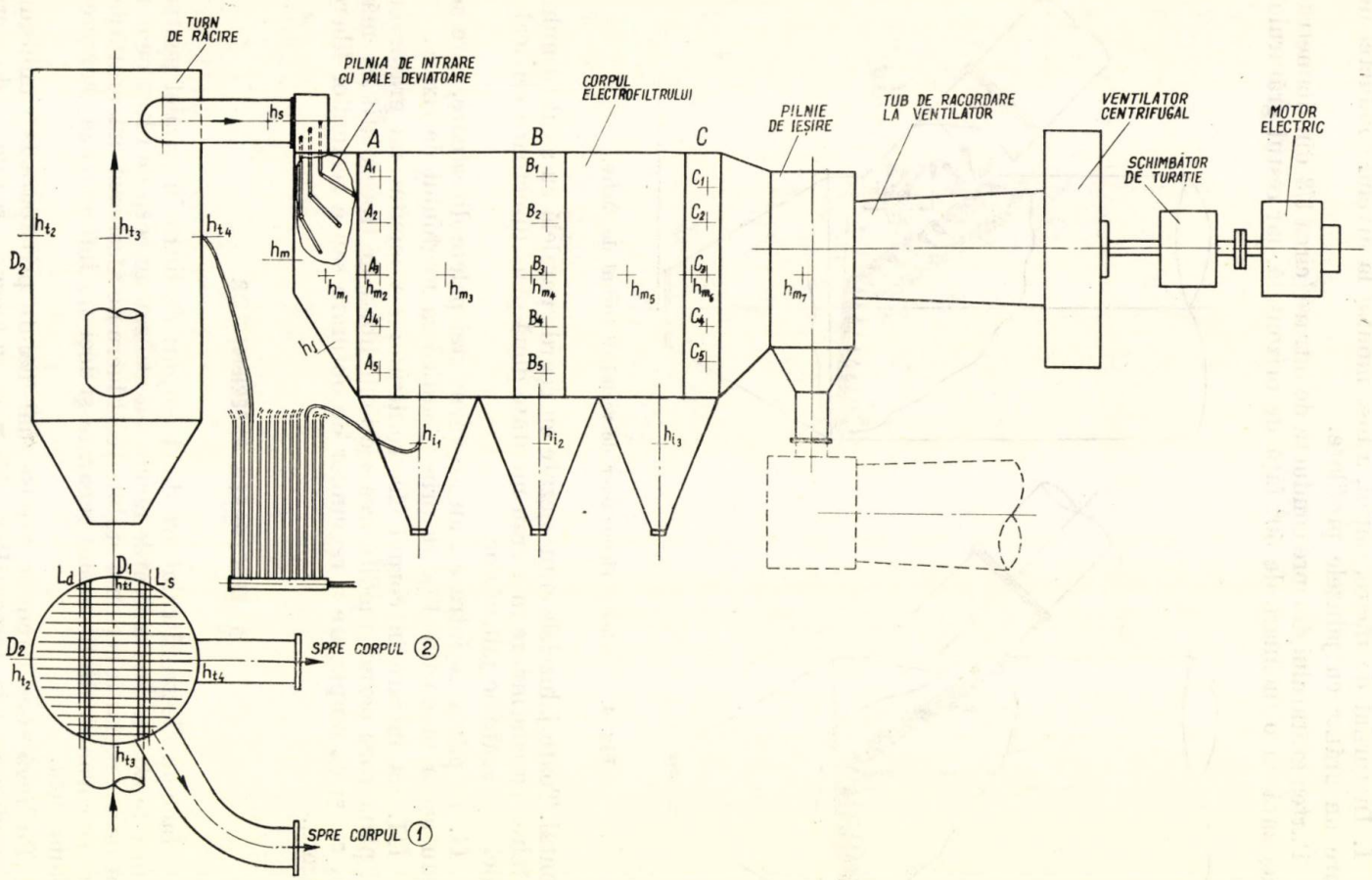


Fig. 3. — Schema instalației machetei electrofiltrului.

I. În turnul de răcire, iniţial, a fost montat la nivelul conductei de intrare un grătar cu jaluzele profilate.

Partea grătarului dinspre conducta de intrare (circa 1/3 din diametru) era aşezată cu o înclinare de 50° faţă de orizontală, iar restul grătarului

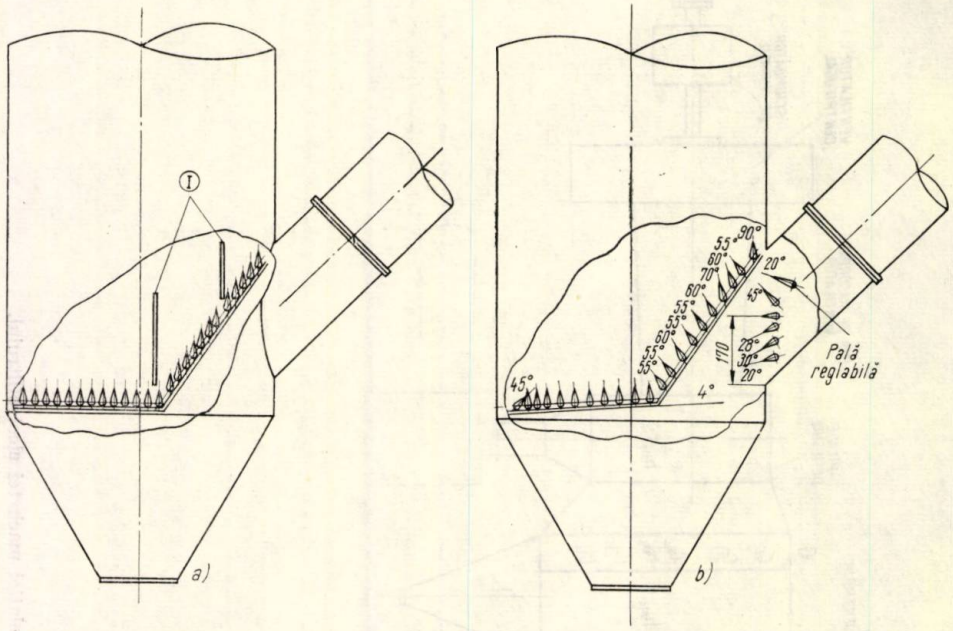


Fig. 4. — Schema elementelor de reglaj în turnul de răcire.

orizontal. Toate jaluzelele erau aşezate cu coarda paralelă cu axul turnului de răcire. În continuare mai erau montate două plăci directoare verticale, paralele cu coardele jaluzelelor.

II. În pîlnia de intrare s-au prevăzut trei palete directoare, care se puteau aşeza în poziţii diferite prin modificarea unghiului de fixare.

III. La intrare în corpul electrofiltrului s-a montat un grătar cu plăci plane care permit modificarea secţiunii libere de trecere atît ca mărime, cît şi ca amplasare a regiunilor de obturare sau a regiunilor libere scurgerii.

5. EFECTUAREA EXPERIENŢELOR

Macheta electrofiltrului are două corpuri de filtru în paralel pentru un turn de răcire. În încercările făcute s-a utilizat un corp de filtru pentru a obţine un regim funcţional stabil. Acest lucru nu afectează măsurătorile, deoarece corpurile de filtru sînt separate şi deci nu influenţează scurgerea aerodinamică.

Pe lîngă considerentele expuse mai înainte privitoare la similitudinea aerodinamică la numere Reynolds mici, în alegerea regimului de lucru s-a ţinut seama şi de funcţionarea instalaţiei fixe din punctul de vedere al

vibraţiilor şi al solicitării motorului electric de antrenare şi a schimbătorului de turaţie.

Regimul de funcţionare a fost, în final, fixat prin încercări, întrucît durata de funcţionare şi răspunsul aparatelor trebuiau să fie verificate pe instalaţia montată.

Este de menţionat că ansamblul factorilor ce intervin în funcţionare — scurgerea aerului, regimul termic al motorului, al schimbătorului de turaţie etc. — permit stabilirea regimului de lucru după aproximativ o jumătate de oră de la intrarea în funcţiune a ventilatorului.

Este de reţinut că după conectarea machetei la instalaţie s-a făcut etanşarea tuturor îmbinărilor pentru a evita pierderile parazite şi alterarea regimului de scurgere din interior.

Pentru montajul instrumentelor de măsură a fost necesară :

— alegerea punctelor de măsură şi executarea dispozitivelor auxiliare de prindere a tuburilor Pitot şi a prizelor de presiune ;

— alegerea tuburilor Pitot adecvate, modificarea lor, etalonarea, montarea lor la punctele de măsură, amplasarea micromanometrelor şi a legăturilor la tuburile Pitot.

În schema din figura 3, care redă montajul general, sînt arătate regiunile şi punctele unde au fost efectuate traversări pentru determinarea cîmpului de viteze, şi anume : la turnul de răcire în secţiunea D patru traversări, iar în electrofiltru în secţiunile A, B şi C cîte cinci traversări. Celelalte puncte, notate cu h, sînt prize de presiune, montate pe pereţii electrofiltrului şi ai turnului de răcire.

Parametrii variabili ai experimentării au fost :

a) regimul de lucru al ventilatorului ;

b) poziţia sistemului de dirijare a curentului de aer în turnul de răcire ;

c) poziţia jaluzelelor la intrarea în electrofiltru în faţa secţiunii A (panoul de uniformizare) ;

d) poziţia paletelor directoare din pîlnia de intrare.

S-a urmărit ca prin varierea acestor parametri să se obţină repartiţii cît mai uniforme atît în turnul de răcire, cît şi în secţiunile A, B şi C. În acest scop, experimentarea s-a desfăşurat în etape astfel :

I. Determinarea distribuţiei de viteze în turnul de răcire şi în corpul filtrului cu parametrii b, c şi d în situaţiile date de constructor.

II. Modificarea sistemului de dirijare a curentului de aer în turnul de răcire pentru obţinerea unei repartiţii de viteze cît mai uniforme prin încercări succesive.

III. Modificarea parametrilor c şi d pentru obţinerea repartiţiilor optime în secţiunile A, B şi C prin încercări succesive.

6. REZULTATE EXPERIMENTALE

Parcurgînd etapele arătate, au rezultat repartiţiile de viteză iniţiale şi apoi cele finale, optimizate prin acţionarea asupra elementelor de reglaj.

În acest sens, *la turnul de răcire* s-a obţinut repartiţia optimă prin :

— ridicarea grătarului cu palete în porţiunea de intrare ;

— rărirea paletajului pe porţiunea înclinată şi modificarea incidenţei paletajului (prin încercări) ;

— s-au scos tablele dirijoare verticale din turnul de răcire;

— s-a realizat un grătar de profile la gura de intrare în turnul de răcire și s-a introdus o paletă dirijoare pe conducta de aducere a aerului. Poziția paletei a fost fixată prin încercări.

Cu modificările arătate s-au obținut repartițiile de viteze din figura 5.

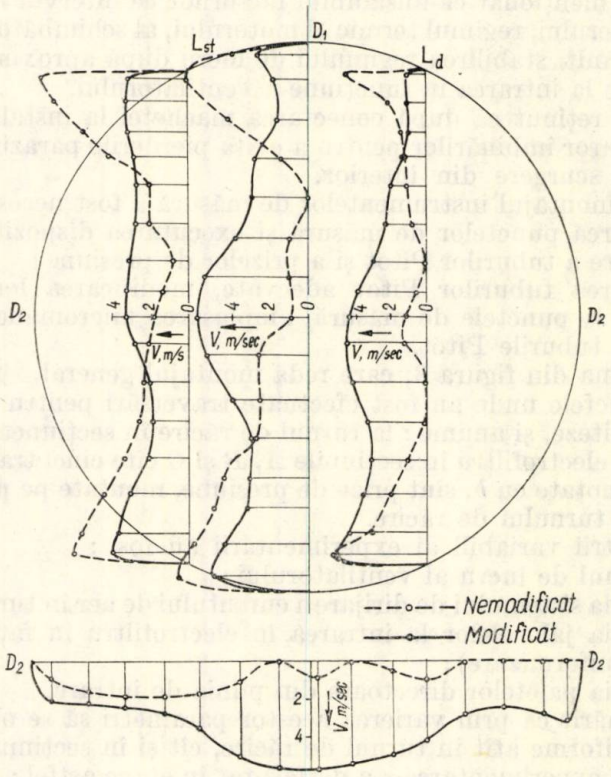


Fig. 5. – Repartiția vitezelor în secțiunea D a turnului de răcire:

Se observă în mod evident că modificările aduse sistemului de dirijare a aerului în turnul de răcire au dus la ameliorarea repartiției vitezelor în secțiunea de măsură. În principal, prin modificarea incidenței paletajului și prin introducerea grătarului suplimentar s-au obținut viteze mari la centru, unde erau aproape nule, și s-au micșorat vitezele de scurgere mari de la pereți.

★

În etapa a treia s-a acționat asupra paletelor directoare (sau de deviere a curentului) din pîlnia de admisie și asupra panoului de uniformizare (cu jaluzele) de la intrarea în electrofiltru.

Experiența a arătat că paleta cu cea mai mare influență asupra scurgerii este cea superioară (înclinarea α_1). Pentru celelalte două palete de deviere s-a stabilit experimental că înclinarea de 45° pentru α_2 și înclinarea de 30° pentru α_3 sînt optime. În consecință s-a căutat experimental

poziția optimă a paletei superioare de deviere. Din măsurătorile făcute și după profilele de viteze obținute pentru diferite poziții ale paletei s-a aflat că la înclinarea α_1 de 65° se obține profilul de viteze cu repartiția optimă a vitezelor în secțiunea B și C.

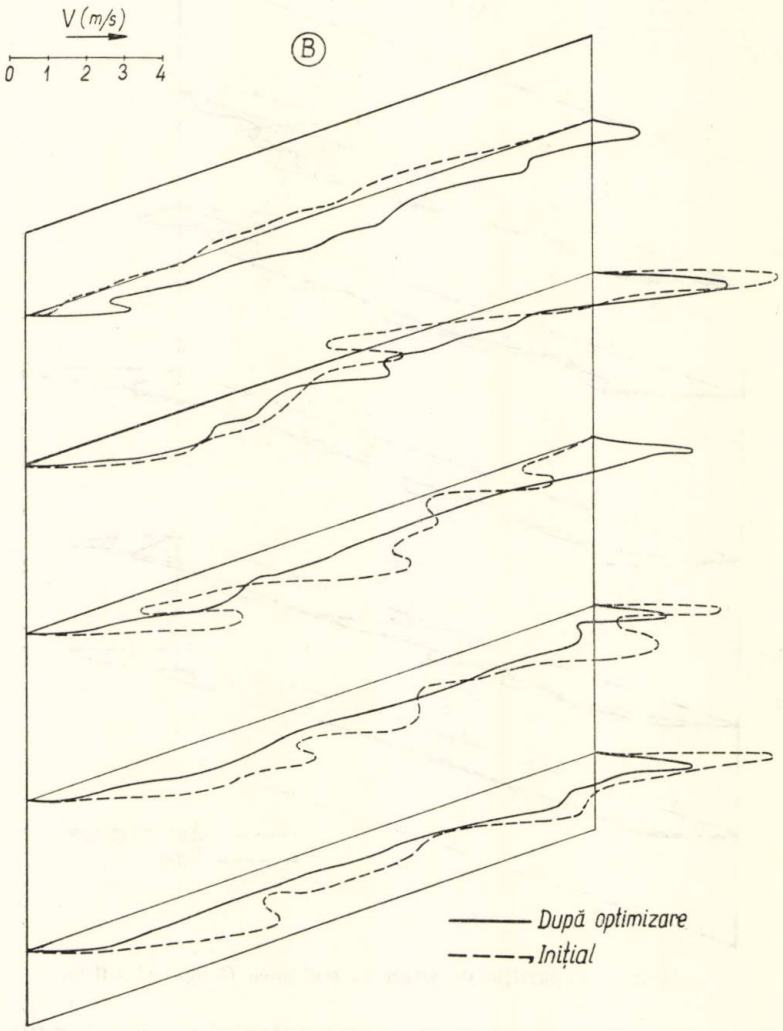


Fig. 6. — Repartiția de viteze în secțiunea B final și inițial.

În continuare s-au experimentat diferite poziții de reglare ale panoului de uniformizare, păstrînd înclinarea paletelor de deviere a curentului la poziția optimă determinată ($\alpha_1 = 65°$; $\alpha_2 = 45°$; $\alpha_3 = 30°$).

În figura 6 și 7 sînt trasate repartițiile de viteze inițiale și finale.

În scopul verificării influenței aspirației pe jos asupra scurgerii la ieșirea din electrofiltru, s-a făcut un nou montaj cu cameră comună pentru gurile de ieșire la care s-a cuplat ventilatorul. Rezultatele au arătat că

ieşirea aerului prin tuburile verticale nu au o influenţă relativă importantă în cele două camere ale electrofiltrului. Această măsurătoare a constituit o verificare a faptului că experienţele făcute cu o singură cameră sînt con-

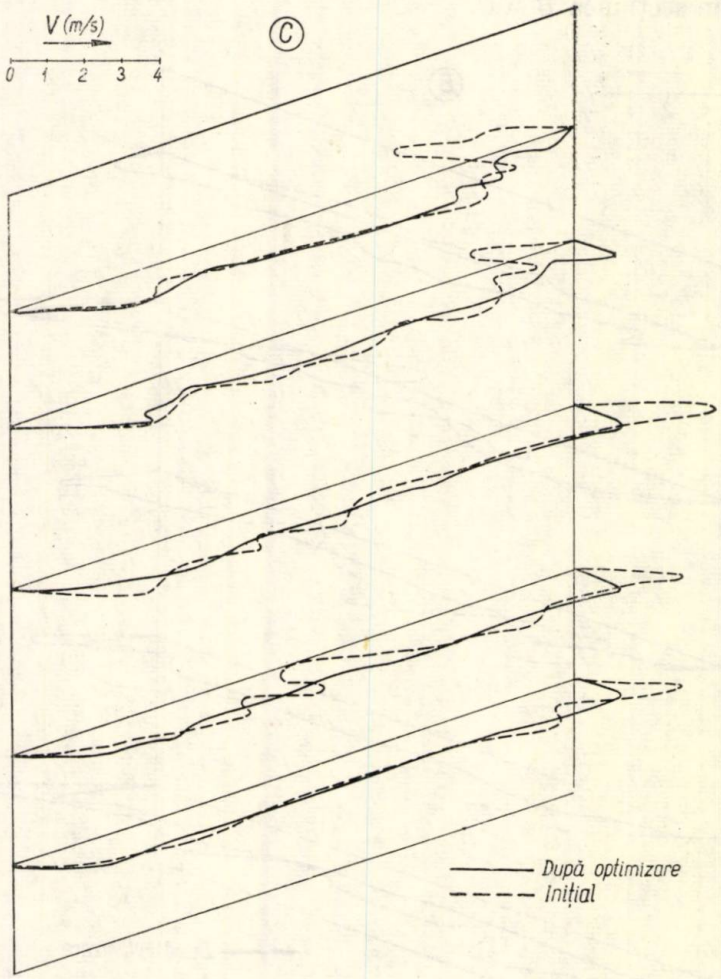


Fig. 7. — Repartiţia de viteze în secţiunea *C* final şi iniţial.

cludente pentru ambele camere ale electrofiltrului şi scot în evidenţă importanţa elementelor de reglaj : înclinarea paletelor de deviere şi a panoului de uniformizare.

7. CONCLUZII

Optimizarea repartiţiei de viteze în macheta electrofiltrului compus din turn de răcire şi corpul propriu-zis al electrofiltrului s-a realizat în întregime.

1. În turnul de răcire (fig. 5), repartiţia vitezelor obţinută cu elementele de reglaj date de proiectant arată variaţii foarte mari : viteze mari

la perete și viteze mici sau chiar regiuni de staționare (apă moartă) în interior.

În corpul electrofiltrului, în secțiunile *B* și *C* (fig. 3), s-au obținut în condițiile inițiale repartiții de viteze (fig. 6 și 7) care arată întoarceri de curent în partea de sus și viteze mari la pereții laterali și în partea de jos.

2. După acționarea asupra elementelor de reglaj și introducerea unor elemente de reglaj stabilite experimental s-au obținut repartițiile de viteze optimizate, din care se observă (fig. 5, 6 și 7) că vitezele în turnul de răcire s-au uniformizat în toată secțiunea. Astfel au dispărut salturile foarte mari de la 0—8 m/s existente inițial, iar în corpul electrofiltrului nu mai sînt întoarceri de curent.

Rezultă că prin optimizarea stabilită se obține o scurgere uniformă în toată secțiunea electrofiltrului, deci se asigură condiția necesară pentru realizarea unui randament optim al instalației.

3. Mijloacele noi introduse pentru optimizare sînt cele de la intrarea în turnul de răcire (rețea de palete cu o paletă reglabilă). Ele au fost stabilite prin încercări și au fost necesare, deoarece rețeaua de palete din turnul de răcire, dispusă la nivelul gurii de intrare în turnul de răcire (fig. 4), nu a asigurat singură întoarcerea curentului de aer în așa fel încît să ducă la o scurgere uniformă în secțiunea de control.

4. Elementele de reglaj pentru distribuția optimă a vitezelor sînt:

— pentru turnul de răcire rețea de palete la intrarea în turnul de răcire și rețea de palete în turnul de răcire. Așezarea acestora s-a stabilit experimental pentru a obține scurgerea optimizată;

— pentru electrofiltru, palete de deviere a curentului în pîlnia de admisie. Încercările au arătat că influența cea mai mare o are paleta de sus. Poziția optimă s-a stabilit experimental, urmărind repartițiile de viteze în secțiunile *A*, *B* și *C* pentru diferite valori ale înclinării paletei. Celelalte palete influențează în mai mică măsură scurgerea. Ele au fost calate la pozițiile care au asigurat o repartiție uniformă a vitezelor în secțiunile de măsură. Efectul lor se resimte cu mai mare intensitate în partea inferioară a electrofiltrului. Înclinările optime stabilite au fost $\alpha_1 = 65°$, $\alpha_2 = 45°$, $\alpha_3 = 30°$, măsurate de la verticală în sens pozitiv.

Panoul de uniformizare la intrarea în electrofiltru a fost reglat cu ajutorul jaluzelelor etajate care le conține, astfel ca să se obțină uniformizarea scurgerii în secțiunile de măsură. Pozițiile jaluzelelor au fost stabilite experimental.

Este de remarcat că există o interacțiune pronunțată între diferitele elemente de reglaj și că nu se poate obține o scurgere uniformă decît dacă se determină pozițiile relative corespunzătoare celei mai potrivite interacțiunii reciproce.

Studiul prezentat dă indicații precise asupra posibilităților de reglare a scurgerii în turnul de răcire și în electrofiltrul propriu-zis. Ca urmare acestor indicații se pot găsi mult mai repede pozițiile de reglaj optim în construcția reală, poziții puțin diferite de cele aflate experimental, avînd în vedere că și condițiile de lucru sînt diferite (gaze cu praf, umezeală, curenți creați de descărcări corona etc.)

Primită la redacție la 16 martie 1966, unele completări la 26 iulie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. A. Leopold, *Desprăfuirea electrostatică a gazelor emise de fabricile de ciment*, Rev. constr. şi mater. de constr., *11* (1961).
2. H. Calame, *Der Einfluss von Staubgrosse und Staubdichte auf die Druckverhältnisse bei beschleunigten Strömungen* ZAMM—30— (1950).
3. Е. Идельчик, *Аэродинамика промышленных аппаратов*, Изд. Энергия, Moscova, 1964.
4. I.D.T., *Procedee noi folosite în procesele de desprăfuire a gazelor industriale*, vol. I, II, III (1954).
5. W. Barth, *Liniile de dezvoltare a tehnicii desprăfuirii*, Staub **21**, *9* (1961).
6. M. Pauthemier, *Etude des trajectoires des particules dans les filtres Electriques*, La Technique Moderne, *6* (1953).
7. R. Meldau, *Handbuch der Staubtechnik*, ed. 1, 1952, ed a 2-a, 1953, Düsseldorf, VDI-Verlag.

ASUPRA UNUI NOU PRINCIPIU FUNCȚIONAL ÎN TEORIA TURBINELOR CU GAZE BAZAT PE EFECTUL COANDĂ: TURBINA CU PALETE DEPRESIVE[1)]

de C. TEODORESCU-ȚINTEA

532 : 621.438

Se prezintă un nou principiu funcțional în teoria turbinelor cu gaze bazat pe utilizarea așa-numitelor rețele COANDĂ-TEODORESCU.
După definirea noțiunii de paletă depresivă și descrierea turbinei cu palete depresive, se face analiza cantitativă a curgerii fluidului de lucru în interiorul turbinei și se stabilește expresia randamentului acesteia.

1. INTRODUCERE

Analiza fizică a efectului Coandă [1], [3] — [11] a evidențiat ca particularități principale ale acestui fenomen următoarele:

— existența zonei depresionare pe volet;
— devierea jetului în sensul voletului;
— creșterea debitului de fluid antrenat de jet;
— creșterea vitezei curentului în canal și micșorarea corespunzătoare a presiunii statice (numai în cazul scurgerii subsonice).

Ansamblul acestor particularități conferă fenomenului o largă aplicabilitate practică în cele mai variate domenii ale tehnicii, definind următoarele direcții de utilizare a acestuia:

— devierea jetului fluid pînă la aproape 180° în raport cu direcția inițială, ceea ce duce la inversarea cantității de mișcare a fluidului care evoluează. Aparatul este în acest caz un deviator de jet sau reversor de forță;
— crearea unei depresiuni pe extradosul voletului și implicit, a unei forțe care poate fi folosită ca portanță sau poate servi la generarea lucru-

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée", **12**, *1* (1967) (în limba engleză).

lui mecanic. Aparatul este atunci o aerodină sustentată prin efect Coandă sau o turbină cu palete depresive;

— micșorarea presiunii statice și accelerarea corespunzătoare a scurgerii în canalul în care evoluează fluidul. Aparatul este atunci un ajutaj Coandă, o trompă de ejecție sau un dispozitiv depresor;

— atenuarea zgomotului produs de eșaparea gazelor în atmosferă la motoarele cu piston, turbomotoarele de aviație, centralele termice, uzinele chimice etc. Aparatul este în acest caz un amortizor de zgomot;

— ameliorarea scurgerii în jurul unui profil de aripă prin modificarea spectrului aerodinamic. Aparatul este în acest caz un dispozitiv de hipersustentație cu jet;

— pulverizarea fină a unui lichid și amestecarea uniformă a acestuia cu aer sau cu un alt fluid. Aparatul este în acest caz un pulverizator pentru combaterea dăunătorilor în agricultură, un generator de aerosoli, un injector de combustibil etc.;

— antrenarea unei substanțe pulverulente și repartizarea ei cu o densitate uniformă pe anumite suprafețe. Aparatul este în acest caz un dispersor pentru îngrășăminte chimice, substanțe erbicide etc.

Primele brevete privind utilizarea efectului Coandă aparțin însuși descoperitorului fenomenului și datează din 1934 [1]. Acestea se referă la:

— amortizori de zgomot pentru motoare cu piston, arme și guri de foc;
— perfecționări la propulsori;
— un nou propulsor pentru avioane și automobile;
— un nou motor rotativ.

Ulterior, H. Coandă a studiat teoretic și experimental posibilitatea aplicării efectului său pentru rezolvarea problemei decolării și aterizării verticale în aviație, realizînd aerodina lenticulară. De asemenea el a creat numeroase aparate, funcționînd pe baza aceluiași efect, destinate combaterii dăunătorilor în agricultură, condiționării aerului în hale industriale și mine, pulverizării apei de mare în vederea purificării acesteia și desalinizării cu ajutorul energiei solare etc.

În ultimii zece ani, autorul lucrării de față a studiat și a demonstrat practic posibilitatea utilizării efectului Coandă în scopul reversării tracțiunii motoarelor aeroreactive [3], [12], [13], al amortizării zgomotelor gazodinamice [3], [14], [15] și al producerii energiei mecanice la arborele unei turbine [16], [17]. De asemenea au fost continuate cercetările lui H. Coandă în ce privește folosirea efectului Coandă pentru ameliorarea funcționării motoarelor cu combustie internă, obținîndu-se rezultate interesante.

La baza acestor aplicații stau așa-numitele rețele Coandă-Teodorescu[1]) denumite de autor rețele depresive și realizate pînă în prezent în variantele plană, circulară, inelară și radială.

---

[1]) Brevet românesc nr. 2345/41446, autor ing. C. Teodorescu-Țintea.

Indiferent de tipul rețelei, pentru o dispunere convenabilă a voleților și o profilare corespunzătoare a acestora, rețeaua depresivă posedă trei proprietăți importante :

— este sediul unor forțe a căror rezultantă după direcția axială sau tangențială poate atinge valori sensibil apropiate de valoarea forței de impuls a jetului ce traversează rețeaua ;

— realizează atenuarea puternică a zgomotului generat de curentul de gaze ;

— diminuează presiunea statică a curentului de gaze la intrarea în rețea.

În lucrarea de față este prezentat un nou principiu funcțional în teoria turbinelor cu gaze, bazat pe utilizarea rețelelor depresive, și sînt expuse rezultatele unor cercetări întreprinse de autor în acest domeniu.

2. TURBINĂ CU PALETE DEPRESIVE[2])

În stadiul actual al tehnicii turbinelor cu gaze, transformarea energiei cinetice a fluidului de lucru în energie mecanică se realizează fie prin acțiunea directă a fluidului asupra paletelor în timpul modificării direcției curentului în canalele rotorului (turbine cu acțiune), fie prin reacțiunea curentului asupra paletelor în timpul accelerării acestuia în canalele rotorului (turbine cu reacțiune), fie, în sfîrșit prin ambele efecte, cînd turbina este de tip combinat (cu acțiune și reacțiune).

În toate cazurile enumerate, curgerea fluidului prin canalele rotorului este însoțită de creșterea presiunii pe intradosul paletelor, și, implicit, de apariția forțelor aerodinamice, care, însumate și proiectate pe direcția tangențială, dau, în raport cu axa turbinei, cuplul mecanic.

Realizarea lucrului mecanic la arborele unei turbine este posibilă de asemenea prin folosirea rețelelor depresive de tipul inelar sau radial, ale căror palete generează forțe depresionare în procesul devierii jeturilor prin efectul Coandă. Numim paletele care funcționează după acest principiu *palete depresive* iar turbina care posedă astfel de palete *Turbină cu palete depresive.* [3])

În principiu, o turbină cu palete depresive (fig. 1), se compune dintr-un canal de admisie, rotor, aparat de redresare și colector.

Canalul de admisie servește la aducerea fluidului de lucru de la sursă în fața rotorului.

Rotorul reprezintă un ansamblu format din aparat director, ajutaje, palete depresive și arbore.

Coroana ajutajelor formează la periferie fante longitudinale, dispuse în plane ce conțin axa de rotație și simetrice în raport cu aceasta, numărul fantelor fiind egal cu cel al paletelor.

---

[2]) Brevet românesc nr. 42186/1959, autor ing. C. Teodorescu-Țintea.

[3]) Unii autori au denumit turbina cu palete depresive „turbină cu reacțiune pură" sau „turbină Teodorescu-Coandă".

Aparatul director este format dintr-o serie de profile inelare așezate în cascadă și are rolul de a dirija gazele care pătrund în rotor către ajutaje cu pierderi minime.

Paletele depresive, de formă dreptunghiulară în plan și curbate înspre înapoi, sînt fixate la coroana ajutajelor, avînd bordul de atac în prelungirea peretelui inferior al fantelor.

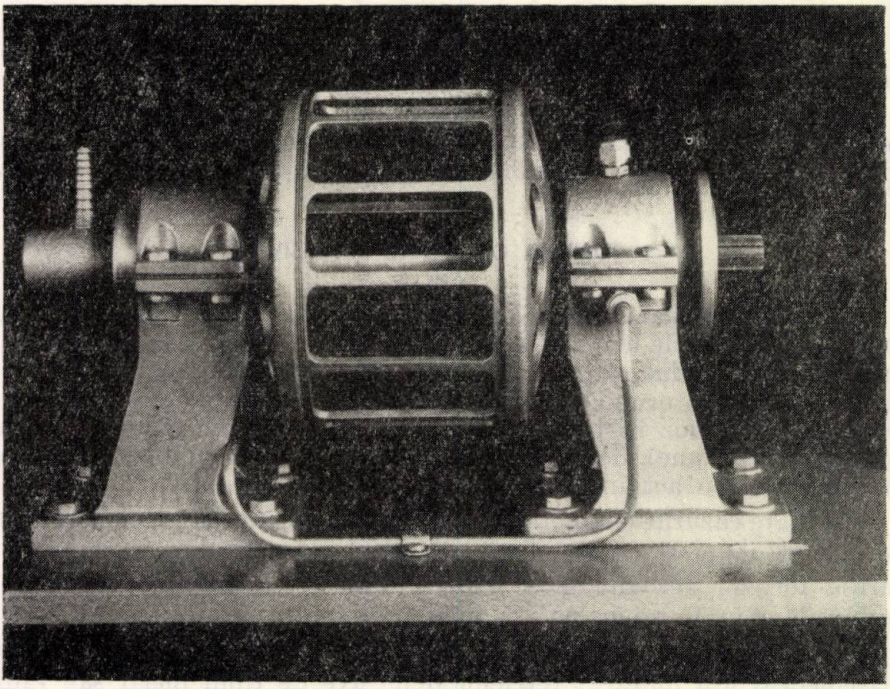


Fig. 1. — Turbină radială cu palete depresive (model experimental).

Aparatul de redresare are rolul de a dirija jeturile de fluid care părăsesc rotorul cu pierderi minime către colector și constă dintr-un număr mare de palete redresoare, asamblate într-un bloc unic.

Arborele este susținut de două lagăre cu rostogolire capabile de a prelua eforturi radiale și axiale.

Colectorul este destinat a colecta jeturile individuale de fluid care traversează aparatul de redresare, a le cumula sub forma unui curent uniform și a le conduce către canalizația de evacuare.

Funcționarea turbinei cu palete depresive are loc în felul următor. Fluidul de lucru pătrunde în interiorul rotorului prin canalul de admisie, traversează aparatul director și iese pe extradosul paletelor depresive prin fantele longitudinale sub forma unor jeturi plane. Datorită efectului Coandă, jeturile deviază de la direcția inițială, conturînd extradosul paletelor pe toată lungimea acestora. Concomitent cu devierea jeturilor pe extra-

dosul paletelor se produc zone depresionare, a căror intensitate depinde puternic de viteza inițială a jeturilor, de lățimea fantelor și de profilul paletelor. Diferența de presiuni astfel creată între cele două fețe ale paletelor determină apariția unor forțe a căror rezultantă proiectată pe direcția tangențială dă, în raport cu axa arborelui, momentul de rotație. Jeturile de fluid care părăsesc paletele rotorului trec în aparatul de redresare, de aici în colector și în cele din urmă ajung în canalul de evacuare.

Drept criteriu principal de clasificare a turbinelor cu palete depresive se consideră ciclul termic după care are loc procesul de lucru. În funcție

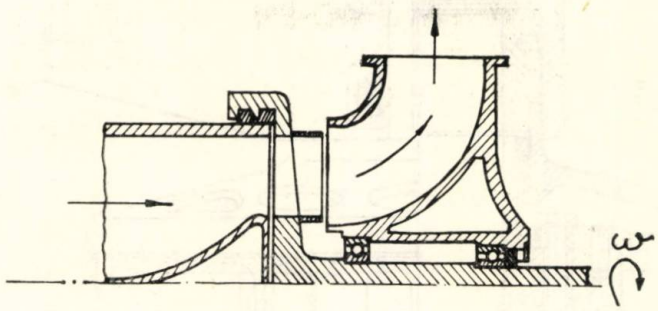


Fig. 2. — Schema turbinei axiale cu palete depresive.

de natura ciclului termic al procesului de lucru, parametrii gazului în fața turbinei pot fi constanți sau variabili cu timpul. Primul caz are loc la motorul care funcționează după ciclul cu aport de căldură $p = \text{const}$. Cel de-al doilea caz se întîlnește la motoarele care funcționează după ciclul cu aport de căldură $V = \text{const}$. Într-o astfel de turbină, datorită caracterului periodic al procesului de ardere, parametrii gazului în fața turbinei se schimbă cilcic în raport cu timpul.

Se disting deci turbine cu palete depresive care funcționează în regim staționar (ciclul $p = \text{const}$) și turbine care funcționează în regim nestaționar sau pulsatoriu (ciclul $V = \text{const}$). Turbinele din categoria a doua pot fi utilizate atunci cînd se impune folosirea energiei gazelor eșapate din motoarele cu piston.

Un alt criteriu de clasificare a turbinelor cu palete depresive îl poate constitui direcția curentului de gaze în interiorul turbinei. Astfel, turbinele cu palete depresive pot fi de tip axial (fig. 2) sau de tip radial (fig. 3).

Numim turbine cu palete depresive de tip radial acele turbine în care evoluția curentului de gaze se produce în plan perpendicular pe axa de rotație. Considerațiile ce vor urma se referă exclusiv la turbinele radiale care funcționează în regim staționar.

Urmărind evoluția gazelor în interiorul turbinelor cu palete depresive se observă că transformarea energiei potențiale a acestora în energia cinetică se realizează integral în interiorul rotorului, iar forțele care acționează asupra paletelor, generînd lucrul mecanic obținut la arborele turbinei, sînt în exclusivitate forțe de reacțiune.

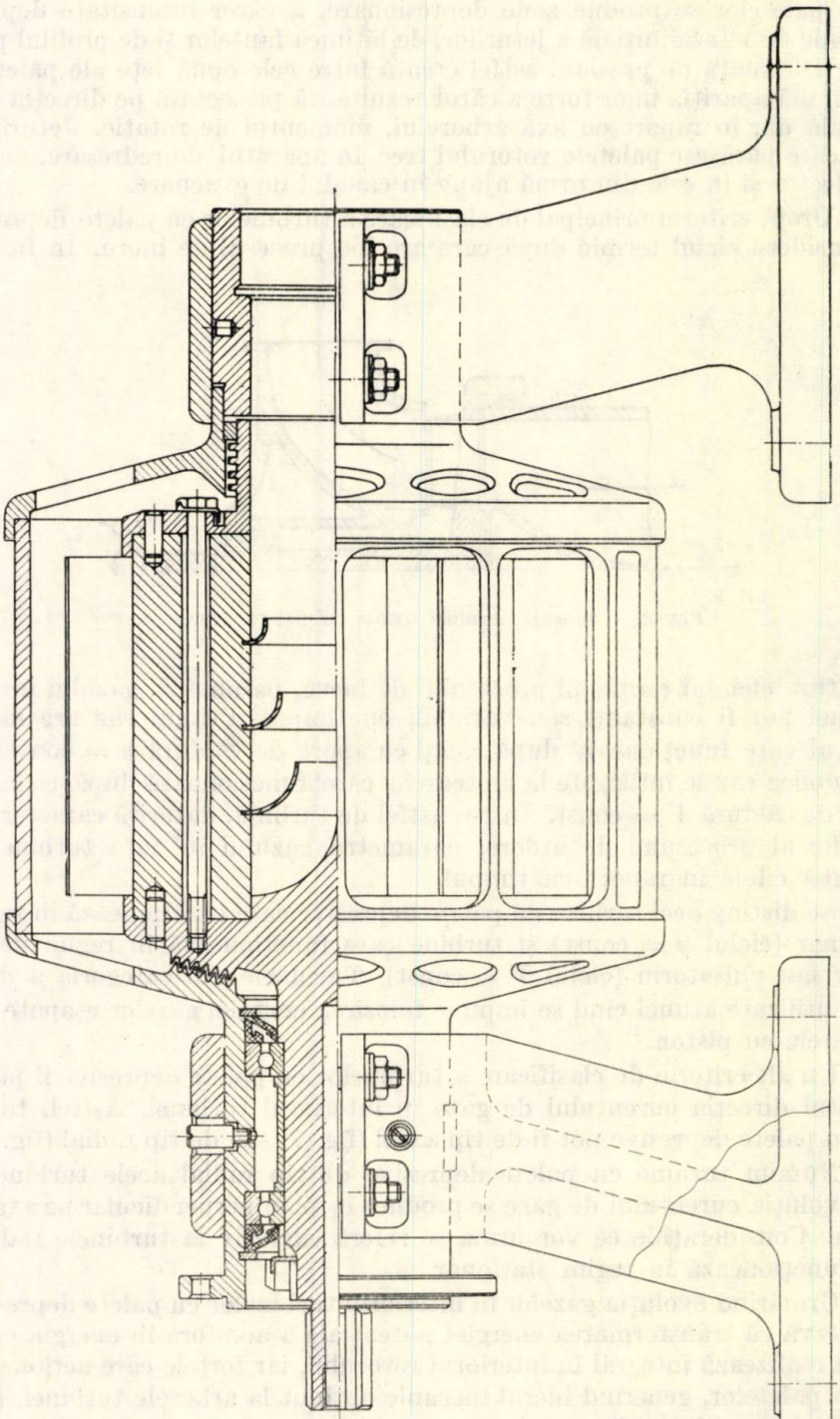


Fig. 3. — Schema turbinei radiale cu palete depresive.

3. PARAMETRII FUNCȚIONALI AI TURBINEI

În figura 4 s-a reprezentat în coordonate I, S evoluția gazelor din turbină. Punctul 0^* din această figură corespunde stării gazului frînat la intrarea în turbină.

Verticala $0-2_{iz}$ reprezintă procesul de destindere al gazelor în rotorul turbinei în cazul evoluției izentropice. În realitate, din cauza pierderilor

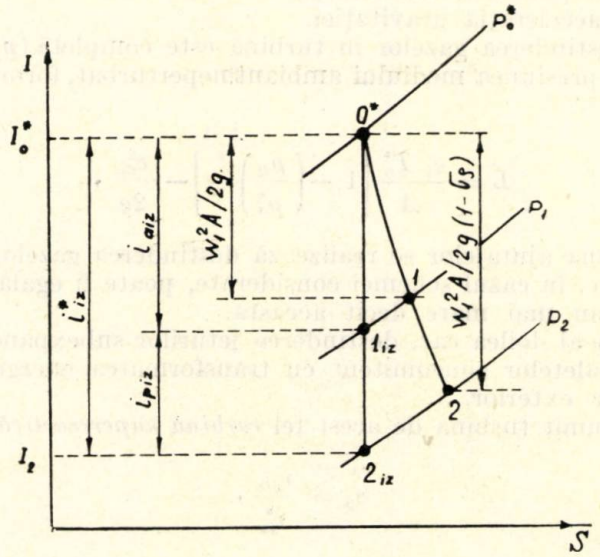


Fig. 4. — Reprezentarea grafică a procesului de destindere în turbina radială cu palete depresive.

inerente proceselor reale, destinderea gazelor se efectuează după curba $0-2$.

Lucrul mecanic rezultat din destinderea gazelor se transformă parțial în lucru obținut la arborele turbinei, iar restul servește pentru sporirea energiei cinetice a curentului și învingerea diverselor rezistențe.

Notînd cu L lucrul mecanic la arborele turbinei și cu C_{2iz} viteza gazelor la ieșirea din rotor (periferia paletelor), în baza notațiilor din figura 4 se poate scrie

$$I_0^* - I_{2iz} = i_{iz}^* = A\left(L + \frac{c_{2iz}^2}{2g}\right),$$

egalitate valabilă pentru 1 kg de gaz.

Exprimînd entalpiile în funcție de temperaturi, rezultă

$$c_p\,(T_0^* - T_{2iz}) = A\left(L + \frac{c_{2iz}^2}{2g}\right)$$

sau

$$c_p I_0^*\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_2^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] = A\left(L + \frac{c_{2iz}^2}{2g}\right),$$

de unde

$$L = \frac{c_p T_0^*}{A}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] - \frac{c_{2iz}^2}{2g}, \tag{1}$$

în care

A este echivalentul caloric al lucrului mecanic,
c_p — căldura specifică la presiune constantă a fluidului de lucru,
k — exponentul adiabatic,
g — acceleraţia gravitaţiei.

Dacă destinderea gazelor în turbină este completă ($p_2 = p_H$), unde p_H reprezintă presiunea mediului ambiant neperturbat, formula anterioară capătă forma

$$L = \frac{c_p T_0^*}{A}\left[1 - \left(\frac{p_H}{p_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] - \frac{c_{2iz}^2}{2g}. \tag{2}$$

În coroana ajutajelor se realizează destinderea gazelor pînă la presiunea p_1, care, în cazul schemei considerate, poate fi egală cu presiunea atmosferică sau mai mare decît aceasta.

În cel de-al doilea caz, destinderea jeturilor subexpandate continuă de-a lungul paletelor concomitent cu transformarea energiei cinetice în lucru mecanic exterior.

Am denumit turbina de acest fel *turbină superreactivă*, iar raportul

$$\sigma_\rho = \frac{i_{piz}}{i_{iz}^*}, \tag{3}$$

în care i_{piz} reprezintă căderea entalpică izentropică în coroana de palete, *grad de superreacţiune*.

Scriind ecuaţia conservării energiei în secţiunea 1—1 (fig. 1) a turbinei (pentru $p_1 = p_2$)

$$c_p T_0^* = c_p T_1 + \frac{A}{2g} w_{1iz}^2,$$

se obţine valoarea vitezei relative a gazelor în această secţiune în cazul evoluţiei izentropice :

$$w_{1iz} = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} R T_0^* \left[1 - \left(\frac{p_H}{p_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \tag{4}$$

şi în cazul evoluţiei reale

$$w_1 = \mu_H \sqrt{2g \frac{k}{k-1} R T_0^* \left[1 - \left(\frac{p_H}{p_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]},$$

unde μ_H reprezintă coeficientul vitezei în turbină pînă la intrarea în coroana de palete.

Dacă $p_1 \neq p_H$, rezultă

$$w_1 = \mu_H \sqrt{2g \frac{k}{k-1} RT_0^* \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}. \tag{5}$$

Temperatura gazelor în aceeaşi secţiune este egală cu

$$T_1 = T_0^* \left(\frac{p_1}{p_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}. \tag{6}$$

Din ecuaţia continuităţii rezultă pentru un debit dat G_g mărimea secţiunii fantelor în funcţie de viteză sau de raportul presiunilor :

$$S_f = \frac{G_g v_g}{w_1 \varepsilon},$$

unde ε reprezintă coeficientul de contracţie al fantelor.

Exprimînd volumul specific al gazelor cu ajutorul relaţiei

$$v_g = v_{g_0}^* \left(\frac{p_0^*}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{RT_0^*}{p_0^*} \left(\frac{p_0^*}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

şi introducînd valoarea vitezei dată de ecuaţia (4), se obţine

$$S_f = \frac{G_g \sqrt{RT_0^*}}{\mu_H \varepsilon p_0^*} \frac{1}{\sqrt{2g \frac{k}{k-1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0^*}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}}$$

Notînd

$$\Phi = \sqrt{2g \frac{k}{k-1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0^*}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_1}{p_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}, \tag{7}$$

expresia lui S_f capătă forma

$$S_f = \frac{G_g \sqrt{RT_0^*}}{\mu_H \varepsilon p_0^* \Phi}. \tag{8}$$

Valoarea lui Φ este maximă pentru

$$\frac{p_1}{p_0^*} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

care reprezintă raportul critic al presiunilor corespunzător vitezei sunetului ($M_1 = \lambda_1 = 1$) în secţiunea de ieşire a fantelor.

Secţiunea critică

$$S_{fcr} = \frac{G_g \sqrt{RT_0^*}}{\mu_H \varepsilon p_0^* \Phi_{max}} = \frac{G_g \sqrt{RT_0^*}}{\mu_H \varepsilon p_0^* \sqrt{2g\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}} \tag{9}$$

depinde de parametrii iniţiali ai curgerii, de debit şi de natura fluidului (k; R).

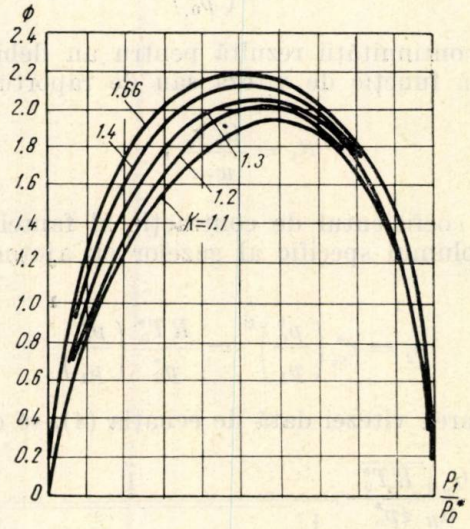


Fig. 5. — Variaţia parametrului Φ în funcţie de raportul presiunilor şi exponentul adiabatic.

În figura 5 s-a reprezentat variaţia lui Φ în funcţie de raportul presiunilor $\frac{p_1}{p_0^*}$ şi de exponentul k.

Întrucît eficienţa maximă a efectului Coandă are loc pentru o valoare a raportului $\frac{p_1}{p_0^*}$ apropiată de valoarea critică [7], este interesant de determinat mărimea secţiunii critice a fantelor turbinei de tip „deschis" în acest caz.

Considerînd ca mediu de lucru aerul, se obţine

$$S_{fcr} = \frac{1{,}13}{\mu \varepsilon} \cdot G_g \sqrt{T_0^*}.$$

Întrucît în cazul turbinei radiale

$$S_{fcr} = b_{cr}\, h\, \frac{\pi D}{t},$$

unde b_{cr} reprezintă deschiderea critică a fantei, h lățimea fantei, t pasul rețelei ajutajelor și D diametrul coroanei ajutajelor, rezultă

$$D = \frac{1{,}13}{\mu_H \varepsilon} \cdot \frac{t}{\pi b_{cr} h} G_g \sqrt{T_0^*}.$$

Pentru alte condiții inițiale ale curgerii, diametrul coroanei ajutajelor se determină cu ajutorul formulei

$$D = \frac{t}{\mu_H \varepsilon \pi b_0 h} \cdot \frac{G_g \sqrt{R T_0^*}}{\sqrt{2g \frac{k}{k-1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0^*}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_1}{p_0^*}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]}} \tag{10}$$

În cazul turbinei superreactive ($\sigma_\rho > 0$), ecuația conservării energiei, fără considerarea pierderilor, furnizează egalitatea

$$i_{aiz} = i_{iz}^* - i_{piz},$$

care capătă forma

$$i_{aiz} = i_{iz}^* (1 - \sigma_\rho)$$

dacă se are în vedere relația (3).

Exprimînd i_{iz}^* cu ajutorul temperaturilor T_0^* și T_2, se obține

$$\frac{A}{2g} w_{1iz}^2 = c_p (T_0^* - T_2)(1 - \sigma_\rho),$$

de unde

$$w_{1iz} = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} R T_0^* \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right](1 - \sigma_\rho)}. \tag{11}$$

În cazul evoluției reale rezultă

$$w_1 = \mu_H \sqrt{2g \frac{k}{k-1} R T_0^* \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right](1 - \sigma_\rho)}, \tag{12}$$

expresie care pentru $p_2 = p_H$ devine

$$w_1 = \mu_H c_0 \sqrt{1 - \sigma_\rho}, \tag{13}$$

unde c_0 reprezintă viteza convențională care s-ar obține prin transformarea totală a căderii entalpice i_{iz}^* în energie cinetică.

Temperatura gazelor în aceeași secțiune este egală cu

$$T_1 = T_0^* \left(\frac{p_2}{p_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} (1 - \sigma_\rho). \tag{14}$$

Parametrii fluidului la ieșirea din coroana de palete pot fi determinați în primă aproximație pe baza teoriei jetului parțial limitat [18], considerînd direcția vitezei (fig. 6) tangentă la bordul de fugă al paletelor :

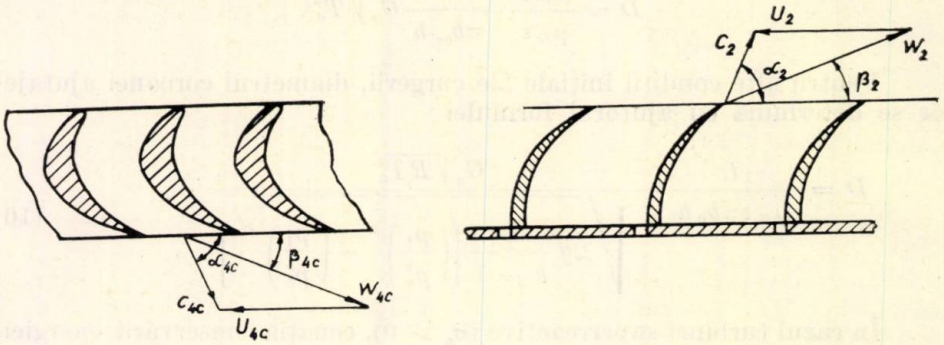


Fig. 6. — Triunghiurile de viteze la ieșirea din rețeaua mobilă de palete a turbinei clasice și a turbinei cu palete depresive.

$$w_2 = \mu_H \chi \frac{0{,}848}{\sqrt{\frac{a l_p}{2b_0} + 0{,}205}} \sqrt{2g \cdot \frac{k}{k-1} R T_0^* \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}, \tag{15}$$

$$T_2' = T_c + \psi \frac{0{,}73}{\sqrt{\frac{a l_p}{2b_0} + 0{,}205}} \left[T_0^* \left(\frac{p_2}{p_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} - T_c\right], \tag{16}$$

unde

l_p este lungimea paletelor,
a — coeficientul structurii turbulente a jeturilor,
b_0 — lățimea fantelor,
T_c — temperatura medie în domeniul limitat de intradosul paletei și frontiera jetului,
$\varkappa$, ψ — coeficienți care iau în considerație condițiile specifice în care evoluează jeturile de-a lungul paletelor.

Din triunghiul vitezelor în secțiunea 2—2, rezultă

$$c_2 = \sqrt{w_2^2 + u_2^2 - 2 w_2 u_2 \cos \beta_2}, \tag{17}$$

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{w_2 \cos \beta_2 - u_2}{c_2}\right). \tag{18}$$

Debitul de gaze la ieșirea din coroana paletelor este mai mare decît la ieșirea din coroana ajutajelor, datorită amestecului cu fluidul ambiant. Valoarea sa se determină în primă aproximație cu ajutorul relației

$$G_2 = 1{,}7 \frac{G_g}{\gamma_g} \cdot \gamma_2 \sqrt{\frac{a l_p}{2b_0} + 0{,}205}, \tag{19}$$

unde

$$\gamma_2 = \frac{p_2}{R\left[T_c + \psi \frac{0{,}58}{\sqrt{\frac{al_p}{2b_0} + 0{,}205}}(T_2 - T_c)\right]} \qquad (20)$$

reprezintă greutatea specifică medie a amestecului fluid în secțiunea 2—2 (extremitatea paletelor).

4. ECONOMICITATEA ȘI PUTEREA TURBINEI RADIALE CU PALETE DEPRESIVE

Randamentul turbinei radiale cu palete depresive este determinat, întocmai ca în cazul turbinelor clasice, de valoarea pierderilor de energie prin turbină.

În turbinele clasice cu gaze au loc următoarele pierderi de energie :

— pierderi determinate de valoarea energiei cinetice a gazelor care părăsesc coroana de palete ;

— pierderi cauzate de rezistențele gazodinamice din turbină (frecare, șocuri etc.) ;

— pierderi datorită scurgerii gazelor prin jocuri (între periferia paletelor și bandaj sau carcasă) ;

— pierderi determinate de existența frecării în lagărele arborelui turbinei.

În cazul turbinei radiale cu palete depresive pot fi menționate aceleași pierderi, mai puțin cele prin jocuri, care, datorită schemei scurgerii, la turbina cu palete depresive nu există.

Totodată trebuie relevat că pierderile determinate de valoarea energiei cinetice a gazelor într-o coroană mobilă de palete sînt mult mai mici la turbina cu palete depresive decît la turbinele clasice, ceea ce constituie o particularitate remarcabilă a acesteia.

Examinînd triunghiurile de viteze la ieșirea dintr-o rețea mobilă de palete a turbinei clasice de tip axial și coroana de palete a turbinei radiale cu palete depresive, rezultă următoarele.

Valoarea vitezei absolute c_{4c} la ieșirea din rețeaua mobilă de palete a turbinei clasice (fig. 6) este determinată de valorile componentelor c_{4cu} și c_{4ca}, egale respectiv cu

$$c_{4cu} = w_{4c} \cos \beta_{4c} - u_{4c},$$

$$c_{4ca} = w_{4c} \sin \beta_{4c}.$$

Valoarea vitezei absolute c_2 la ieșirea din coroana de palete a turbine cu palete depresive este, de asemenea, determinată de componentele c_{2r} și c_{2u} :

$$c_{2u} = w_2 \cos \beta_2 - u,$$

$$c_{2r} = w_2 \sin \beta_2.$$

Valoarea unghiului β_{4c} în cazul turbinei clasice este relativ mare, fiind cuprinsă în limitele 18 și 40°. Turbina radială cu palete depresive poate fi astfel realizată, încît unghiul β_2 să nu depășească 10°.

Considerînd pentru ambele tipuri de turbine aceleaşi viteze relative la ieşire ($w_{4c} = w_2 = w$) şi aceleaşi viteze tangenţiale ($u_{4c} = u_2 = u$), rezultă pentru vitezele absolute

$$c_{4c}^2 = w^2 + u^2 - 2uw \cos \beta_{4c},$$

$$c_2^2 = w^2 + u^2 - 2uw \cos \beta_2.$$

Deoarece

$$\beta_2 < \beta_{4c},$$

rezultă

$$c_2 < c_{4c},$$

ceea ce atestă că pierderea de energie cinetică în turbina cu palete depresive este mai mică decît în turbina clasică.

Pentru aprecierea gradului de utilizare a energiei în turbina cu palete depresive folosim noţiunea de randament relativ, definit, după cum se ştie, prin raportul dintre lucrul mecanic obţinut pe circumferinţa rotorului (la diametrul mediu al coroanei de palete) şi căderea izentropică totală de entalpie din turbină:

$$\eta_u = \frac{AL_u}{i_{iz}^*}.$$

Exprimînd căderea izentropică totală de entalpie prin relaţia

$$i_{iz}^* = \frac{A}{2g} c_0^2.$$

rezultă

$$\eta_u = 2g \frac{L_u}{c_0^2}.$$

Valoarea lucrului mecanic obţinut pe circumferinţa rotorului este

$$L_u = u \cdot F_u,$$

unde u reprezintă viteza tangenţială la diametrul mediu al coroanei mobile de palete, iar F_u forţa tangenţială care acţionează asupra paletelor.

Întrucît

$$F_u = \frac{c_0}{g} \eta_{ne},$$

unde η_{ne} este eficienţa normală a coroanei de palete depresive, expresia randamentului relativ capătă forma

$$\eta_u = 2 \frac{uc_0}{c_0^2} \eta_{ne}$$

sau (21)

$$\eta_u = 2 \frac{u}{c_0} \eta_{ne}.$$

Lucrul mecanic intern al turbinei, adică lucrul mecanic transmis arborelui turbinei, este

$$L_i = L_u - L_f = L_u\left(1 - \frac{L_f}{L_u}\right) = L_u\,(1 - \xi),$$

unde L_f reprezintă lucrul mecanic pierdut din cauza frecării dintre rotor și mediul înconjurător.

Se definește astfel randamentul indicat al turbinei :

$$\eta_i = \frac{AL_i}{i^*_{iz}} = \eta_u\,(1 - \xi). \tag{22}$$

Lucrul mecanic transmis în exterior de turbină (lucrul efectiv) diferă de L_i prin pierderile din paliere.

De aceea randamentul mecanic al turbinei este

$$\eta_m = \frac{L_{ef}}{L_i}, \tag{23}$$

iar randamentul efectiv

$$\eta_{ef} = \frac{AL_{ef}}{i^*_{iz}}. \tag{24}$$

Se observă că

$$\eta_{ef} = \eta_i\,\eta_m = \eta_u\,\eta_m\,(1 - \xi). \tag{25}$$

Puterea turbinei cu palete depresive se exprimă cu ajutorul relației

$$P = \frac{L_{ef}\,G_g}{75}.$$

Introducînd valoarea lui L_{ef} dată de (24), se obține

$$P = \eta_{ef}\,G_g\,\frac{L^*_{iz}}{75A}. \tag{26}$$

Experiențele efectuate de noi cu diverse tipuri de palete au evidențiat faptul că valoarea randamentului relativ al turbinei cu palete depresive este puternic influențată de valorile parametrilor geometrici ai paletelor și ale raportului $\frac{u}{c_0}$.

De asemenea s-a stabilit că pentru anumite grupe de valori date acestor parametri este posibilă obținerea unor randamente înalte, ceea ce este deosebit de important pentru perspectiva noului tip de turbină.

În afara acestor calități, turbinei radiale cu palete depresive îi mai sînt proprii o serie de avantaje evidente, și anume :

— simplitate constructivă ;

— răcire eficientă datorită faptului că fluidul de lucru evoluează numai pe extradosul paletelor ;

— se pretează ușor la o ecranare interioară cu material ceramic, ceea ce oferă posibilitatea creșterii substanțiale a temperaturii fluidului de lucru.

5. CONCLUZII

1. În afara procedeelor cunoscute, transformarea energiei cinetice a unui curent de gaze în energie mecanică obţinută la arborele turbinei este posibilă prin utilizarea *efectului Coandă*, definindu-se astfel un nou principiu funcţional în teoria turbinelor cu gaze.

2. Elementul esenţial al turbinelor care funcţionează pe baza noului principiu îl constituie paletele depresive, caracterizate prin aceea că scurgerea fluidului de lucru are loc pe o singură faţă a acestora, şi anume pe extrados.

3. Determinările preliminare asupra randamentului turbinelor cu palete depresive relevă posibilitatea obţinerii unei mari economicităţi a acestora, fapt de importanţă deosebită în condiţiile energeticii actuale.

4. Pentru evidenţierea completă a caracteristicilor funcţionale ale turbinelor cu palete depresive şi delimitarea domeniilor de utilizare ale acestora, sînt concomitent necesare studii teoretice aprofundate şi experimentări sistematice pe modele de diverse tipuri şi dimensiuni.

Primită la redacţie la 26 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. H. Coandă, *Procédé et dispositif pour faire devier une veine de fluide pénétrant dans un autre fluide*, Brevet Nr. 792 754, Paris, 1934.
2. E. Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari*, Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1957.
3. C. Teodorescu-Ţintea, *Contribuţii la studiul efectului Coandă şi al aplicaţiilor sale practice*, Teză de doctorat, Biblioteca Institutului politehnic Bucureşti, 1962.
4. — *Sur l'écoulement des jets plans dans le voisinage de parois solides au profil divergent, L'effet Coandă*, Rev. roum. sci. tech., — Mécanique Appliquée, **10**, *3* (1965).
5. U. H. von Glahn, *Use of the Coanda effect for jet deflection and vertical lift with multiple — flat — plate and curved plate, deflection surfaces*, NACA TN No. 4377 (1958).
6. U. H. von Glahn, *Use of the Coanda effect for obtaining jet deflection and lift with a single flat-plate deflection surface*, NACA TN Nol 4272 (1958).
7. A. B. Bailey, *Use of the Coanda effect for the deflection of jet sheets over smoothly curved surfaces*, UTIA TN No. 49 (1961).
8. C. K. Korbacher, *The Coanda effect at defflection surfaces detached from the jet nozzle*, Cand. Aer. Space J., **8**, *1* (1962).
9. W.E.B. Roderick, *Use of the Coanda effect for defflection of jet sheets over smoothly curved surface*, Part II, UTIA TN No. 51 (1961).
10. M. Kadosch, *Déviation des jets par adhérence à une paroi convexe*, J. Phys. Radium, Paris, **19**, *1* (1958).
11. H. Fernholz, *Umlenkung von Freistahlen an gekrümmten Wänden*, Berlin, Techn. Universität, 1964.
12. C. Teodorescu-Ţintea, *Reversor de tracţiune cu voleţi depresivi pentru avioanele cu reacţie*, Brevet nr. 2345/41446, O.S.I., Bucureşti, 1960.
13. — *Cercetări asupra reversării tracţiunii turbomotoarelor de avion cu ajutorul efectului Coandă*, Rev. transp. vol. **7**, *9* (1960).
14. C. Teodorescu-Ţintea, E. Moisei, *Dispozitiv cu voleţi depresivi pentru atenuarea zgomotului radiat de jetul motoarelor cu reacţie*, Brevet nr. 42.718, O.S.I., Bucureşti, 1960.
15. C. Teodorescu-Ţintea, *Aplicarea efectului Coandă la instalaţiile de amortizare a zgomotului generat de motoarele cu reacţie pe bancul de probă*, Bucureşti, Edit. de stat pentru imprimate şi publicaţii, 1965.
16. — *Turbină radială cu palete depresive*, Brevet nr. 42.186, O.S.I. Bucureşti, 1959.
17. — *Considération concernant la réalisation de certaines turbines basées sur l'effet Coandă*, The first European Mechanics Colloqvium on the Coanda effect. Berlin West, 5—6 April 1965.
18. G. A. Maximov, *Încălzire şi ventilaţie*, vol. II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1958.

ASUPRA INFLUENȚEI UNOR CONDIȚII LA LIMITĂ ÎN LUBRIFICAȚIA CU GAZE[1])

de V. N. CONSTANTINESCU, FL. DIMOFTE și GH. MARIN

Institutul de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

533 : 621.89

Se examinează condițiile la limită în lubrificația cu gaze funcționînd în regim hidrodinamic, dar avînd orificii sau fante puse în legătură cu atmosfera sau prin care se introduce gaz sub presiune. Problema interesează în special pentru lagărele circulare cu cuzinet complet, la care pentru stabilizarea mișcării se folosește în mod curent soluția de a se practica orificii sau fante.

Influența unei fante este studiată analitic pentru cazul mai simplu al mișcărilor bidimensionale, examinîndu-se atît problema determinării corecte a presiunii în dreptul fantei, cît și influența fantei asupra cantității de lubrifiant conținute în lagăr.

Rezultatele teoretice obținute sînt verificate calitativ prin determinări experimentale privind distribuția presiunilor într-un lagăr circular prevăzut cu o fantă pusă în contact direct cu atmosfera.

La o primă examinare, problema determinării corecte a condițiilor la limită în lubrificația cu gaze pare mai simplă decît aceeași problemă în cazul lubrificației cu lichide, unde fenomenul este complicat de faptul că o peliculă de lichid se rupe datorită cavitației, pătrunde aerul din exterior etc. Asemenea fenomene nu se produc în cazul cînd este folosit un gaz în calitate de lubrifiant, gazele suportînd atît suprapresiuni, cît și depresiuni.

De aceea condițiile la limită se scriu, pentru diferite tipuri de lagăre cu aer, relativ simplu, impunînd ca presiunea pe anumite frontiere în contact cu atmosfera (capetele lagărului etc.), să fie egală cu presiunea mediului înconjurător. Apare o dificultate numai în cazul lagărelor circulare cu cuzinet complet de alungire infinită, la care, capetele lagărului fiind deplasate la infinit, condițiile la limită directe pentru presiuni trebuie

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn.-Mécanique Appliquée", **12**, *1* (1967) (în limba engleză).

înlocuite cu o condiție de conservare a debitului sau a masei de gaz conținute în lagăr. Deși pentru cazul teoretic al unei mișcări pur bidimensionale în lagăr apare ca logic să se pună condiția ca masa de gaz lubrifiant să rămînă constantă (deoarece nu există contact direct cu mediul exterior), pentru lagăre reale de dimensiuni finite, dar de alungire mare, este mai corect să se folosească o condiție care să impună un debit masic total nul la capetele lagărului [1], [2], [3]. În acest mod, prin trecerea la limită pentru o alungire infinită se obțin în lagăre presiuni ceva mai mari, care reprezintă (după cum se poate verifica atît teoretic, cît și experimental) valorile-limită corecte, care se deduc fie impunînd ca alungirea să tindă către infinit, fie ca viteza suprafețelor să tindă către infinit.

În numeroase aplicații practice însă, lagărele lubrificate cu gaze nu funcționează în regim pur hidrodinamic. Astfel, de exemplu, o soluție curent folosită pentru evitarea frecării uscate la pornire și oprire constă în practicarea în lagăre a unor orificii sau fante și alimentarea sub presiune exterioară a lagărului. În plus, în numeroase cazuri, lagărele circulare cu cuzinet complet funcționînd la turații mari au practicate orificii sau fante în scopul stabilizării mișcării.

Asemenea lagăre (axiale sau radiale) care au practicate pe una dintre fețe orificii sau fante puse în contact cu atmosfera sau prin care se realizează o alimentare sub presiune nu mai pot fi, evident, considerate ca funcționînd în regim pur hidrodinamic, ci trebuie să se țină seama de influențele orificiilor sau fantelor asupra distribuției presiunilor.

Deși, pentru cazul de mai sus, ecuațiile de mișcare și chiar ecuația diferențială a presiunilor sînt aceleași ca și pentru cazul precedent al regimului hidrodinamic pur, condițiile la limită sînt în general într-atît de complexe, încît de cele mai multe ori soluționarea analitică a problemei devine imposibilă și este greu abordabilă chiar cu ajutorul mașinilor moderne de calcul (față de lubrificația cu lichide apare în plus dificultatea că, ecuațiile fiind neliniare, efectele nu se pot suprapune). De aceea în majoritatea cazurilor se studiază separat cele două situații extreme. La pornire și la oprire, cînd viteza suprafețelor este redusă, se neglijează efectul acesteia, considerîndu-se lagărul într-un regim pur hidrostatic, la care se ține seama numai de efectul alimentării exterioare, iar la viteze mari se consideră lagărul în regim hidrodinamic, neglijîndu-se eventual efectul prezenței orificiilor sau a fantelor.

În cele ce urmează ne propunem să examinăm mai atent efectul unui orificiu sau al unei fante asupra distribuției presiunilor îndeosebi la viteze mari, deoarece acest efect este de foarte multe ori important, modificînd substanțial distribuția presiunilor.

Totodată trebuie examinată problema determinării corecte a valorii presiunii în dreptul orificiului sau fantei, care nu totdeauna poate fi considerată ca egală cu presiunea mediului cu care fanta este pusă în contact (în particular, de exemplu, cu atmosfera înconjurătoare).

Așa după cum s-a mai menționat, caracterul neliniar al ecuațiilor problemei face extrem de dificilă o soluționare corectă a ei. De aceea se va căuta să se obțină în cele ce urmează unele indicații calitative pe baza studiului cazului mai simplu al lagărelor de alungire infinită.

1. LAGĂRE PLANE DE ALUNGIRE INFINITĂ

În cazul lagărelor plane de alungire infinită se va considera fanta practicată pe toată lungimea lagărului și pusă în legătură cu atmosfera.

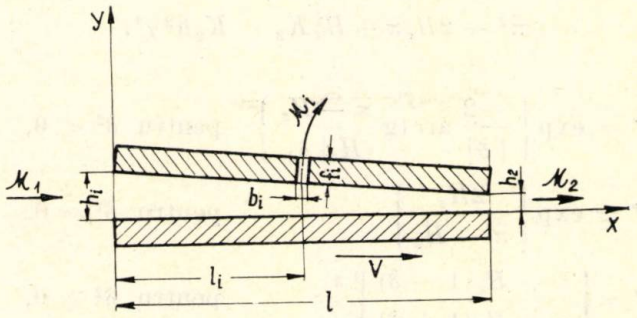


Fig. 1. — Lagăr plan (notații).

Principalele notații utilizate curent în cazul lagărelor plane sînt cele din figura 1, respectiv

$$\begin{aligned}
\bar{h} &= \frac{h}{h_m} = 1 + \varepsilon - 2\varepsilon\bar{x}, \\
\varepsilon &= \frac{2}{h_m}(h_1 - h_2) = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} = \frac{\dfrac{h_1}{h_2} - 1}{\dfrac{h_1}{h_2} + 1}, \\
h_m &= \frac{h_1 + h_2}{2}, \\
\nu &= \frac{2h_m}{l}\varepsilon, \\
H &= \frac{Vl}{p_0 h_m^2}; \quad \bar{H} = \frac{Vl}{p_0 h_2^2}, \\
H_\varepsilon &= \frac{3\mu V}{\nu h_m p_0} = \frac{3\mu Vl}{2p_0 \varepsilon h_m^2} = \frac{3}{2}\frac{(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon}\bar{H} = \frac{6}{\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1}\bar{H},
\end{aligned} \tag{1}$$

μ fiind viscozitatea gazului și p_0 presiunea mediului înconjurător (presiunea atmosferică).

Ecuația presiunilor în cazul lagărelor plane de alungire infinită [1] are forma

$$\frac{\bar{\pi}\cdot \mathrm{d}\bar{\pi}}{\bar{\pi}^2 - 2H_\varepsilon\bar{\pi} + H_\varepsilon^2 K_3} = \frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\bar{h}}, \tag{2}$$

unde

$$\bar{\pi} = \bar{h}\bar{p} \quad \text{şi} \quad K_3 = \frac{2K_1}{H_\varepsilon} \tag{3}$$

K_3 sau K_1 fiind constante de integrare.

Soluţia ecuaţiei (2) se scrie

$$\bar{\pi}^2 - 2H_\varepsilon\bar{\pi} + H_\varepsilon^2 K_3 = K_2\bar{h}^2\bar{\chi}^*, \tag{4}$$

în care

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}^* &= \exp\left\{\frac{-2}{|\delta|}\operatorname{arctg}\frac{\bar{\pi} - H_\varepsilon}{H_\varepsilon|\delta|}\right\} && \text{pentru } \delta^2 < 0,\\
\bar{\chi}^* &= \exp\left\{\frac{2H_\varepsilon}{\bar{\pi} - H_\varepsilon}\right\} && \text{pentru } \delta^2 = 0,\\
\bar{\chi}^* &= \left[\frac{\bar{\pi} - H_\varepsilon(1-\delta)}{\bar{\pi} - H_\varepsilon(1+\delta)}\right]^{1/\delta} && \text{pentru } \delta^2 > 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

iar $\delta = \sqrt{1 - K_3}$.

Introducerea corectă a condiţiilor la limită impune determinarea presiunii p_i în dreptul fantei. Această presiune se poate calcula avînd în vedere egalitatea dintre debitul de fluid care intră şi iese din lagăr (fig. 1).

Debitul de fluid care intră în lagăr şi parcurge lungimea l_i este dat de relaţia [1]

$$\mathcal{M}_1 = \left(\frac{\rho_0}{p_0}\right)\frac{3\mu V^2 l_i}{8\varepsilon_1 h_{m_1}} K_3'. \tag{6}$$

Debitul de fluid care iese prin fantă depinde de geometria şi de dimensiunile fantei, precum şi de diferenţa dintre presiunea în dreptul fantei p_1 şi presiunea mediului înconjurător p_0. De exemplu, considerînd fanta ca avînd o lărgime redusă b_i şi o grosime f_i, în ipoteza că scurgerea gazului prin aceasta este laminară, atunci [1]

$$\mathcal{M}_i = \left(\frac{\rho_i}{p_i}\right)\frac{b_i^3(p_i^2 - p_0^2)}{24\mu f_i}. \tag{7}$$

Debitul de fluid care parcurge porţiunea $(l - l_i)$ a lagărului şi iese pe la capăt este dat de relaţia

$$\mathcal{M}_2 = \left(\frac{\rho_i}{p_i}\right)\frac{3\mu V^2(l - l_i)}{8\varepsilon_2 h_{m_2}} K_3''. \tag{8}$$

Se poate scrie deci în final relaţia de continuitate

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_i. \tag{9}$$

Ţinînd seama de (6), (7), (8) şi considerînd evoluţia gazului izotermă, relaţia (9) devine

$$\frac{3\mu V^2 l_i}{\varepsilon_1 h_{m_1}} K_3' = \frac{3\mu V^2(l - l_i)}{\varepsilon_2 h_{m_2}} K_3'' + \frac{b_i^3(p_i^2 - p_0^2)}{3\mu f_i}. \tag{10}$$

În calculele de față se consideră lagărul împărțit în două porțiuni : în amonte și în aval de fantă.

Indicii 1 sau prim se referă la prima porțiune, avînd lungimea l_i ; indicii 2 sau secund se referă la porțiunea a doua, avînd lungimea $l - l_i$.

Cu aceste precizări și avînd în vedere notațiile (1) și (3) se obține

$$p_i = p_0 \sqrt{1 + \beta \overline{H} \left[\left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_i}{h_2} \right) K_1' - \left(1 + \frac{h_i}{h_2} \right) K_1'' \right]}, \tag{11}$$

în care

$$\beta = 6 \frac{f_i}{l} \left(\frac{h_2}{b_i} \right)^3, \tag{12}$$

iar pentru dimensiuni geometrice curente, practic, $\beta \cong 10^{-6} \ldots 10^{-2}$.

Calculele pot fi conduse mai departe prin aproximații succesive : se estimează într-o primă aproximație presiunea $p_i \cong p_0$ și se calculează constantele k_1' și k_1'' în această ipoteză.

De exemplu să considerăm fanta plasată la

$$l_i/l = 0{,}5\ ;\ 0{,}3\ ;\ 0{,}8 \tag{13}$$

și

$$h_1/h_2 = 1{,}5\ ;\ 4\ ;\ 9, \tag{14}$$

parametrul $\overline{H}$ avînd valori de 1 ; 3 ; 9 ; 20.

Utilizînd valorile constantei K din lucrarea [4], cu observația că

$$K_1 = K \frac{h_2}{h_m}, \tag{15}$$

se obțin următoarele valori pentru expresia

$$\overline{H} \left[\left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_i}{h_2} \right) K_1' - \left(1 + \frac{h_i}{h_2} \right) K_1'' \right] \tag{16}$$

Tabela 1

$\frac{h_1}{h_2}$	$\overline{H}$	$\overline{H}\left[\left(\frac{h_1}{h_2}+\frac{h_i}{h_2}\right)K_1' - \left(1+\frac{h_i}{h_2}\right)K_1''\right]$		
		$l_i/l = 0{,}5$	$l_i/l = 0{,}3$	$l_i/l = 0{,}8$
1,5	1	0,48	0,32	0,48
	3	1,50	0,96	2,16
	9	4,50	2,88	6,73
	20	11,00	6,40	15,20
4	1	2,60	3,56	2,40
	3	7,70	9,23	8,17
	9	24,10	20,70	34,20
	20	62,50	38,80	83,00
9	1	5,98	10,84	5,50
	3	16,50	29,20	16,80
	9	66,00	73,50	69,00
	20	152,00	142,00	147,00

Analizînd valorile obținute, se constată că pentru a avea $p_i/p_0 \geqslant 1{,}01$ (considerînd în medie $\beta = 10^{-3}$) este necesar ca expresia (16) să fie

$$\overline{H}\left[\left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_i}{h_2}\right)K_1' - \left(1 + \frac{h_i}{h_2}\right)K_1''\right] \geqslant 20. \tag{17}$$

Pentru valori mai mici ca 20 ale expresiei (16), presiunea $\overline{p}_i$ este aproximativ 1 și fanta are influență foarte mare, presiunea mediului înconjurător stabilindu-se în filmul de lubrifiant în zona fantei. În acest caz se poate considera lagărul ca fiind compus din două lagăre independente, avînd la capete presiunea p_0 și lungimile l_i și $l - l_i$; problemă rezolvată în întregime în lucrările apărute anterior [1] și [4].

Rezultă ca fiind interesant de urmărit în continuare numai cazurile corespunzătoare relației (17), care se referă, în general, la lagăre funcționînd într-un regim de viteze determinat de valoarea parametrului $\overline{H} \geqslant 9$ (dacă lagărele au raportul $h_1/h_2 \geqslant 4$).

Considerînd cele două porțiuni ale lagărului în amonte și în aval de fantă, condițiile la limită vor fi :
în amonte,

$$\begin{aligned} x &= 0 \qquad p = p_0, \\ x &= l_i \qquad p = p_i, \end{aligned} \tag{18}$$

în aval,

$$\begin{aligned} x &= l_i \qquad p = p_i, \\ x &= l \qquad p = p_0. \end{aligned} \tag{19}$$

Din soluția (4), scrisă pentru cele două porțiuni, rezultă ecuația

$$K_2' = \frac{\overline{h}_1^2 - 2H_\varepsilon'\overline{h}_1 + (H_\varepsilon')^2 K_3'}{\overline{h}_1^2 (\overline{\chi}^{*\prime})_1} = \frac{(\overline{\pi}_i')^2 - 2H_\varepsilon'\overline{\pi}_i' + (H_\varepsilon')^2 K_3'}{(\overline{h}_i')^2 (\overline{\chi}^{*\prime})_i} \tag{20}$$

în amonte și

$$K_2'' = \frac{(\overline{\pi}_i'')^2 - 2H_\varepsilon''\overline{\pi}_i'' + (H_\varepsilon'')^2 K_3''}{(\overline{h}_i'')^2 (\overline{\chi}^{*\prime\prime})_i} = \frac{\overline{h}_2^2 - 2H_\varepsilon''\overline{h}_2 + (H_\varepsilon'')^2 K_3''}{\overline{h}_2^2 (\overline{\chi}^{*\prime\prime})_2} \tag{21}$$

în aval, ecuații care permit calcularea valorilor pentru constantele K_2 și K_3.

Valorile cunoscute care apar în ecuațiile (20) și (21) se pot scrie cu ajutorul notațiilor (1) și (3) aplicate pe cele două intervale :

$$\begin{aligned} \overline{h}_1 &= \frac{h_1}{h_m} = \frac{2h_1/h_i}{1 + h_1/h_i}; & \overline{\pi}_i'' &= \overline{h}_i''\overline{p}_i = 2\frac{p_i}{p_0}\frac{h_i/h_2}{1 + h_i/h_2}, \\ \overline{\pi}_i' &= \overline{h}_i\overline{p}_i = 2\frac{p_i}{p_0}\frac{1}{1 + h_1/h_i}; & \overline{h}_2 &= \frac{h_2}{h_{m_2}} = \frac{2}{1 + h_i/h_2}, \\ \overline{h}_i' &= \frac{h_i}{h_{m_1}} = \frac{2}{1 + h_1/h_i}; & \overline{h}_i'' &= \frac{h_i}{h_{m_2}} = 2\frac{h_i/h_2}{1 + h_i/h_2}, \end{aligned} \tag{22}$$

iar pentru expresiile $\overline{\chi}^*$ se folosesc relațiile (5), ținînd seama de valorile (22).

Parametrii funcționali pentru cele două porțiuni de lagăr H_ε sau $\overline{H}$ se calculează, utilizînd relațiile (1), funcție de parametrul funcțional al lagărului luat în ansamblu:

$$\overline{H}_1 = \overline{H}\frac{l_i}{l}\left(\frac{h_2}{h_i}\right)^2; \quad H_{\varepsilon_1} = \frac{6}{\left(\frac{h_1}{h_i}\right)^2 - 1}\overline{H}_1,$$
$$\overline{H}_2 = \overline{H}\left(1 - \frac{l_i}{l}\right); \quad H_{\varepsilon_2} = \frac{6}{\left(\frac{h_i}{h_2}\right)^2 - 1}\overline{H}_2. \tag{23}$$

Valorile obținute pentru constantele K_2 și K_3 sînt prezentate în tabela 2.

Tabela 2

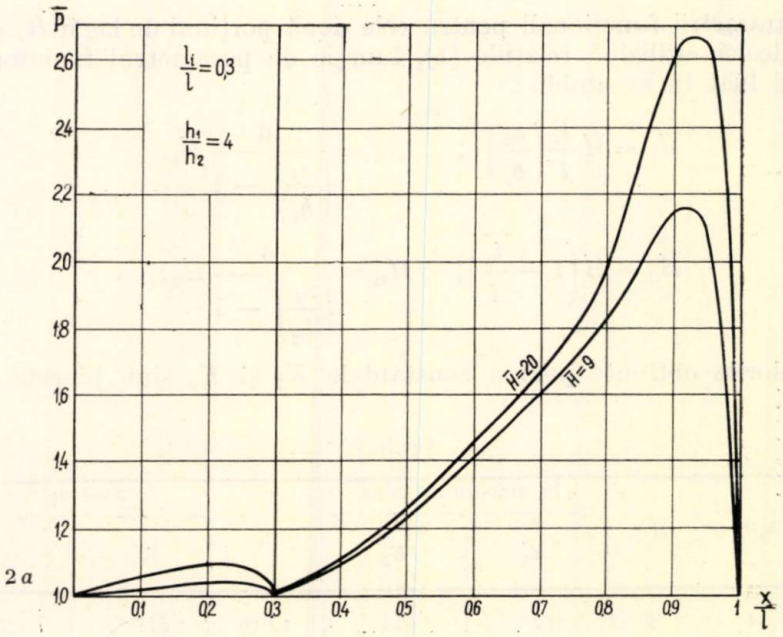
l_i/l	h_2/h_1	$\overline{H}$	În amonte de fantă		p_i	În aval de fantă	
			K_2'	K_3'		K_2''	K_3''
0,5	4	9	109	0,925	1,010	1 018	0,275
		20	374	0,466	1,030	4 400	0,132
	9	9	2,38	4,32	1,032	150	0,715
		20	2	2,28	1,071	630	0,386
0,3	4	9	84	0,785	1,010	530	0,5819
		20	225	0,395	1,018	2 200	0,293
	9	3	1,91	11	1,014	3,48	3,9
		9	1,97	4	1,034	3,28	1,8
		20	1,06	1,82	1,060	0,05	1,12
0,8	4	9	215	0,726	1,015	469	0,34
		20	830	0,379	1,041	1 950	0,164
	9	9	1,68	1,84	1,033	0,0152	1,128
		20	0,75	1,44	1,073	328	0,61

Valorile pentru constantele de mai sus permit trasarea distribuției de presiuni.

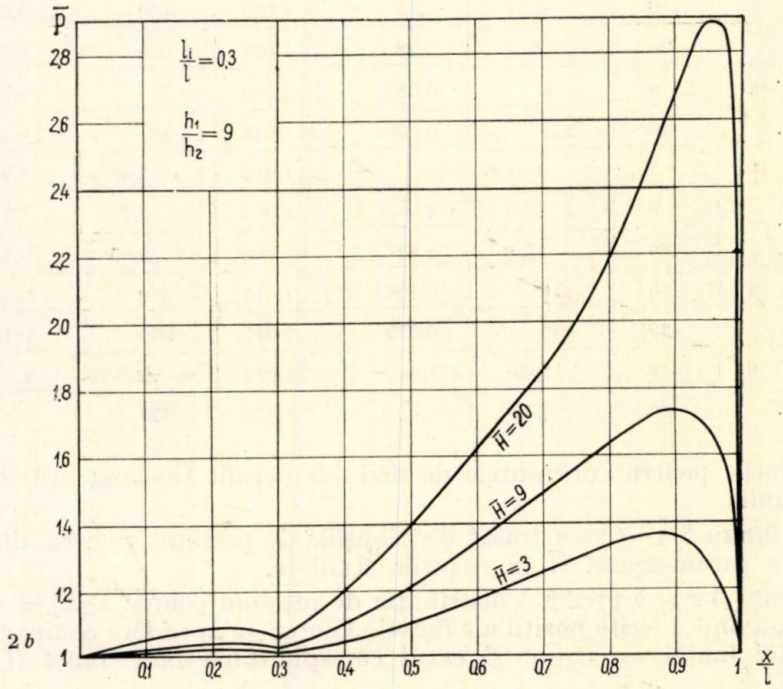
În figura 2 *a*—*f* s-au trasat distribuțiile de presiuni pentru diferite valori ale parametrului $\overline{H}$ în cazurile studiate.

Figura 3 *a* și *b* prezintă distribuția de presiuni pentru $h_1/h_2 = 4$ și 9 și $\overline{H} = 9$, avînd diferite poziții ale fantei. Pentru o apreciere comparativă a efectului fantei s-a trasat și cazul corespunzător fără fantă ($l_i = 0$ și $l_i = l$).

Din analiza acestor diagrame se constată influența deosebit de puternică a fantei asupra distribuției de presiuni în lagăr, indiferent de

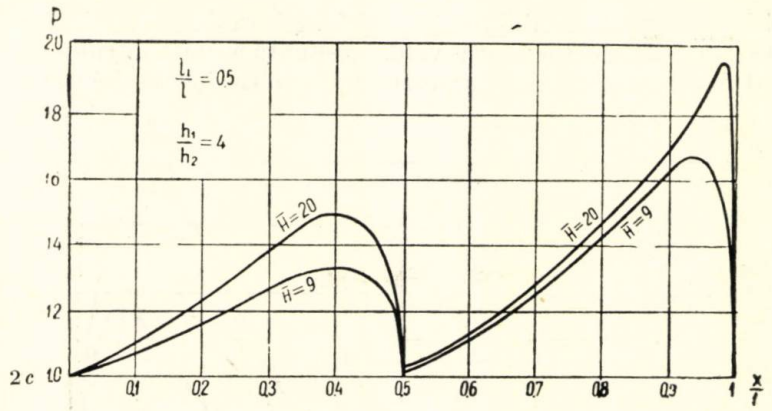


2 *a*

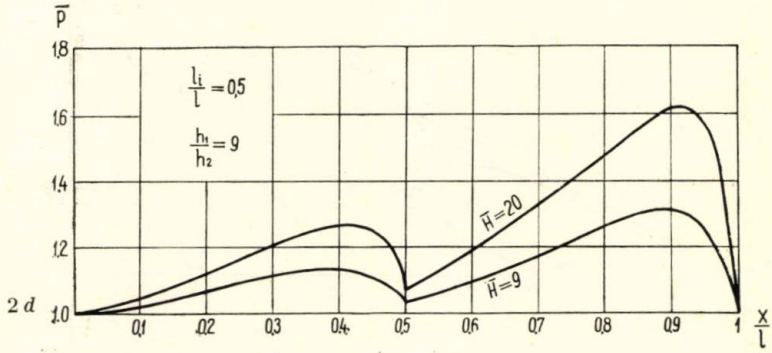


2 *b*

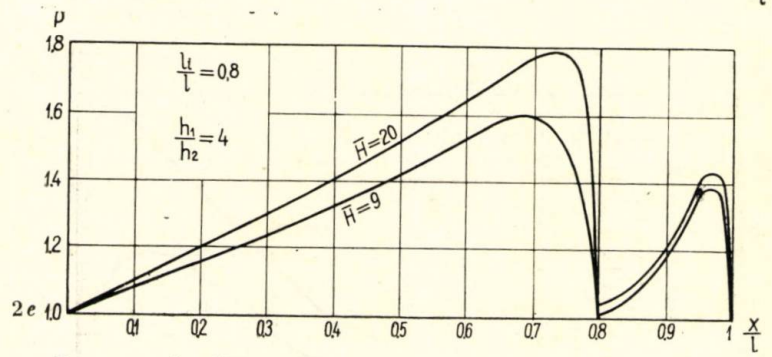
Fig. 2. — Influenţa unei fante asupra distribuţiei presiunilor într-un lagăr plan de alungire infinită.


p
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
$\frac{l_1}{l} = 0.5$
$\frac{h_1}{h_2} = 4$
$\bar{H}=20$
$\bar{H}=9$
$\bar{H}=20$
$\bar{H}=9$
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
$\frac{x}{l}$

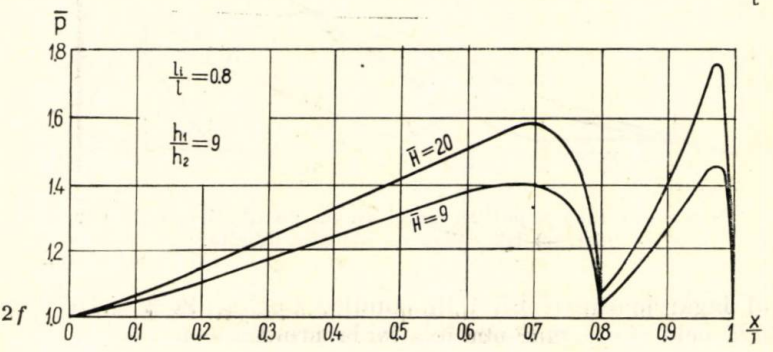
2 c


$\bar{p}$
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
$\frac{l_1}{l} = 0{,}5$
$\frac{h_1}{h_2} = 9$
$\bar{H}=20$
$\bar{H}=9$
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
$\frac{x}{l}$

2 d


p
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
$\frac{l_1}{l} = 0{,}8$
$\frac{h_1}{h_2} = 4$
$\bar{H}=20$
$\bar{H}=9$
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
$\frac{x}{l}$

2 e


$\bar{p}$
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
$\frac{l_1}{l} = 0.8$
$\frac{h_1}{h_2} = 9$
$\bar{H}=20$
$\bar{H}=9$
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
$\frac{x}{l}$

2 f

poziția ei de-a lungul lagărului (în dreptul fantei presiunea p_i fiind apropiată de p_0). De remarcat, de asemenea, valoarea-limită a parametrului $\beta = 10^{-3}$; valori mai mari ale acestui parametru sînt practic foarte greu de realizat,

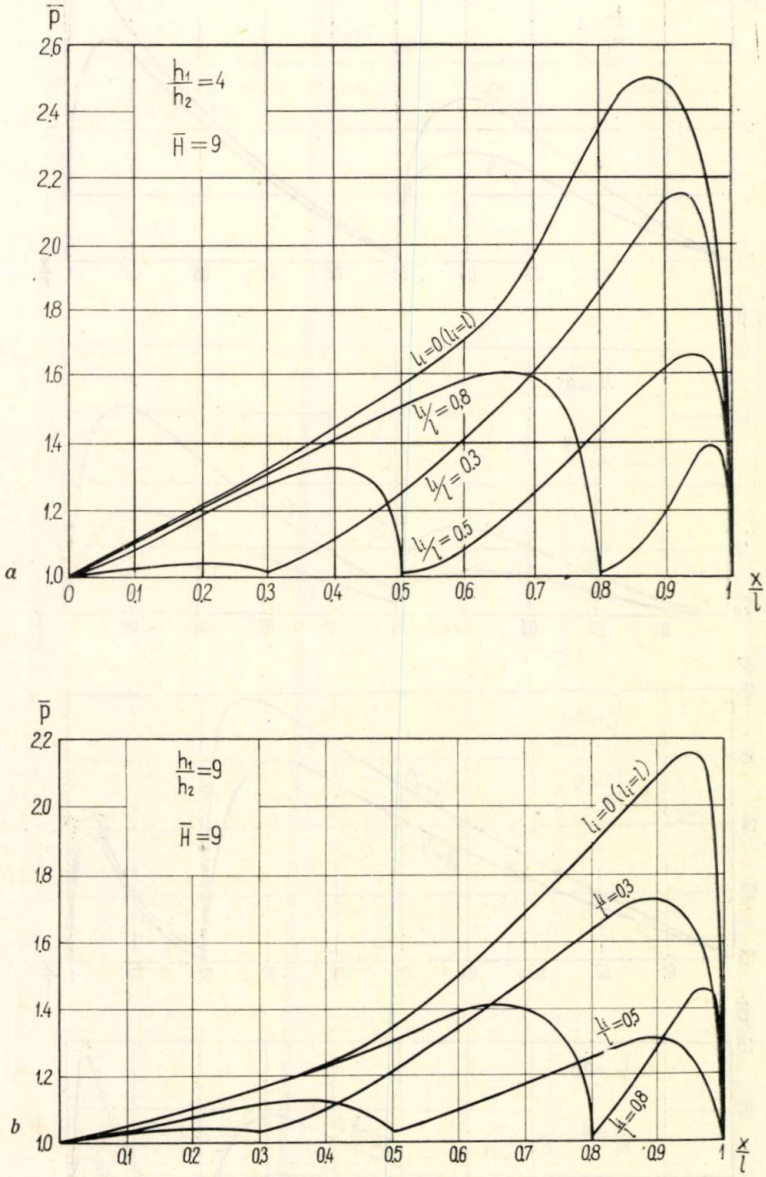


Fig. 3. — Influența poziției fantei asupra distribuției presiunilor într-un lagăr plan de alungire infinită.

în general lagărele funcționînd în condiții optime la $\beta \leqslant 10^{-3}$, ceea ce accentuează cele spuse mai sus relativ la presiunea p_i.

De asemenea se poate calcula în contiuare rezultanta presiunilor, respectiv coeficientul de încărcare ζ:

$$\zeta = \frac{P}{p_0 l} = \int_0^1 (\overline{p} - 1)\, d\overline{x} = \int_0^1 \overline{p}\, d\overline{x} - 1, \tag{24}$$

ale cărui valori pentru cazurile considerate sînt prezentate în diagramele din figura 4.

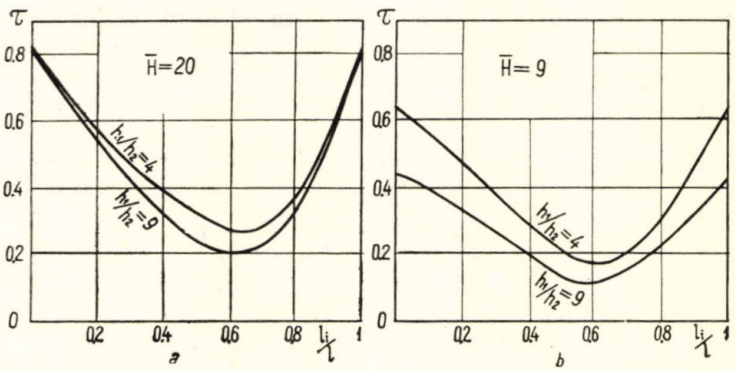


Fig. 4. — Influența unei fante și a poziției acesteia asupra rezultantei presiunilor într-un lagăr plan de alungire infinită.

Se remarcă influența defavorabilă a fantei în zona $l_i/l = 0{,}5 \ldots 0{,}7$ asupra coeficientului de încărcare ζ.

Rezultă deci că aproximația care se folosește curent, respectiv ipoteza de a considera în dreptul fantei presiunea atmosferică sau a mediului cu care este pusă în legătură fanta, este în general justificată. În realitate, ipoteza nu este satisfăcută riguros decît pentru unele cazuri cu totul excepționale, deoarece, pe de o parte, debitul care trece prin fantă trebuie să fie nul, iar pe de altă parte diferența dintre debitul care traversează stratul de lubrifiant de o parte și de alta a fantei este diferită de zero (această diferență anulîndu-se numai dacă fanta este complet astupată).

În aceste condiții, cazul considerat al unui lagăr bidimensional avînd o fantă se rezolvă simplu considerînd cele două porțiuni despărțite de fantă ca două lagăre independente.

Se remarcă, totuși, că presiunea p_i în dreptul fantei crește cu numărul $\overline{H}$, respectiv cu viteza suprafețelor, astfel încît influența fantei scade pe măsură ce influența compresibilității lubrifiantului devine importantă. Mai precis, debitul din stratul de lubrifiant care trebuie să iasă prin fantă crește cu $\overline{H}$; la un moment dat se ating în fantă condiții de scurgere critică, iar presiunea la ieșire din aceasta începe să crească, depășind, de exemplu, valoarea presiunii mediului înconjurător. Teoretic, cum debitul care poate traversa fanta este mărginit, influența fantei se anulează pentru $\overline{H} \to \infty$. Totuși, pentru dimensiuni și viteze uzuale o asemenea situație nu pote fi atinsă decît în mod excepțional.

În sfîrşit, influenţa propriu-zisă a unei fante asupra distribuţiei presiunilor este, evident, defavorabilă din punctul de vedere al capacităţii portante şi depinde de poziţia fantei, aşa după cum rezultă din diagramele prezentate.

LAGĂRE CIRCULARE DE ALUNGIRE INFINITĂ

În acest caz se va considera fanta de-a lungul unei generatoare a cuzinetului, plasată la unghiul θ_i faţă de linia centrelor şi pusă în legătură cu atmosfera.

Folosind notaţiile utilizate curent în studiul lagărelor circulare (fig. 5)

$$\begin{aligned} e &= \overline{O_1O_2}, & V &= r_1\omega, \\ c &= r_2 - r_1 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = h_m, & r_2/r_1 &= 1 + \frac{c}{r_1} = 1 + \psi \approx 1, \\ \varepsilon &= \frac{e}{c}, & \psi &= \frac{c}{r_1}, \\ h &= c(1 + \varepsilon\cos\theta), & H &= \frac{\mu\omega}{p_0\psi^2}, \end{aligned} \tag{25}$$

ecuaţia presiunilor se scrie [1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{h^3}{\mu}p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right] = 6V\frac{\mathrm{d}(ph)}{\mathrm{d}x}. \tag{26}$$

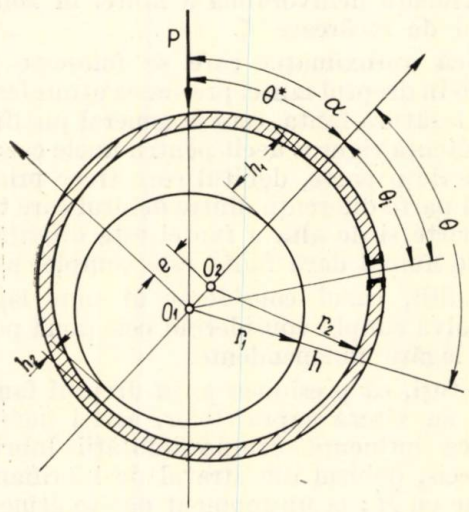


Fig. 5. — Lagăr circular (notaţii).

Independent de metoda de integrare, ecuaţia (22), fiind o ecuaţie de gradul doi, va conţine două constante arbitrare care trebuie determinate punînd două condiţii la limită. Pentru lagărele circulare cu cuzinet

complet, problema este analizată în detaliu în lucrarea [1]. Reamintim faptul că, în cazul unui lagăr circular cu cuzinet complet, din condiția ca debitul total lateral de lubrifiant să fie nul rezultă condiția

$$\int_0^{2\pi} \overline{p}^{1/\varkappa+1}\,\overline{h}^3\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\left(1+\frac{3}{2}\,\varepsilon^2\right), \tag{27}$$

care, împreună cu condiția de periodicitate pentru presiuni, permite determinarea constantelor.

În cazul în care există unul sau mai multe orificii sau fante, problema este mult mai complexă. Astfel, pentru un lagăr de alungire oarecare, în zonele dinspre capete, dacă lagărul este complet în regiunile respective, rezultă, procedînd analog ca pentru deducerea relației (2,7),

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{2\pi} \overline{p}^{1/\varkappa+1}\,\overline{h}^3\,\mathrm{d}\theta = \frac{\varkappa+1}{\varkappa}\,\frac{p_0^{1/\varkappa}}{\rho_0}\,\mathcal{M}_0. \tag{28}$$

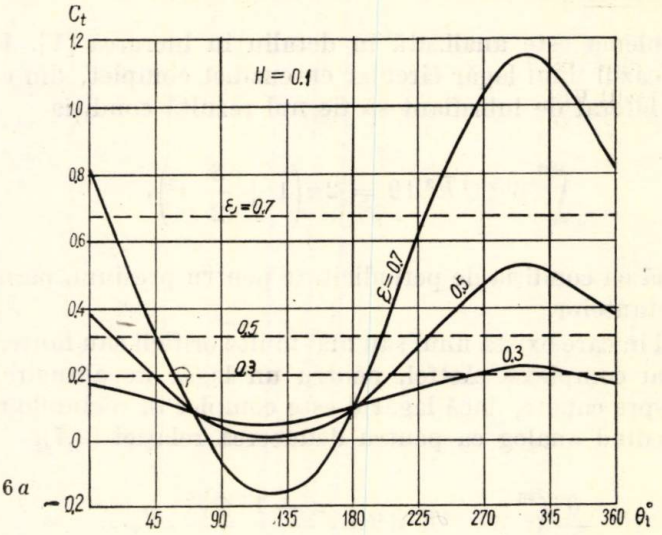
Se vede că, dacă nu există orificii sau fante, debitul total $\mathcal{M}_0$ care se scurge prin aceasta este nul, iar prin integrare în raport cu Z se regăsește condiția (27).

Condiția (28) este modificată dacă secțiunea considerată se găsește în dreptul unei fante sau orificiu, în sensul că atunci prin $\mathcal{M}_0$ trebuie să se înțeleagă nu debitul total, ci debitul care traversează orificiile sau fantele situate în intervalul $[-z\,;\,+z]$ (respectiv atunci $\mathcal{M}_0$ este o funcție de z).

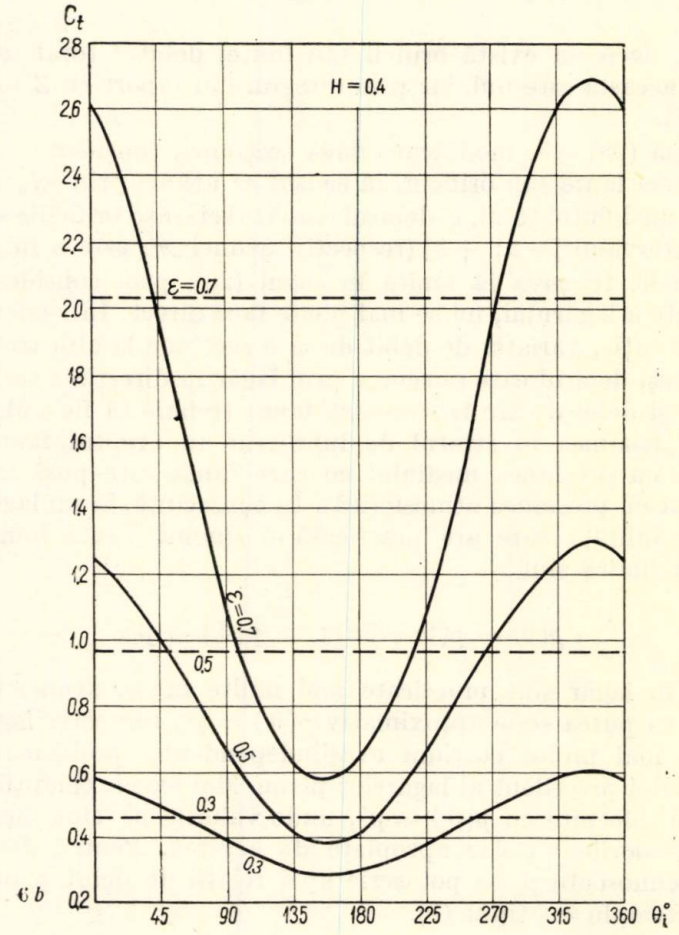
În sfîrșit, trecerea la limită în cazul (28), prin considerarea unei lățimi infinite a lagărului, nu se mai poate face direct. Într-adevăr, într-o asemenea situație, variația de debit de la o secțiune la alta trebuie să fie nulă, iar însuși debitul care se scurge prin lagăr în direcția z trebuie să fie nul. Atunci și debitul care traversează fanta trebuie să fie nul, respectiv rezultă că presiunea în stratul de lubrifiant în dreptul fantei trebuie să fie egală cu presiunea mediului cu care fanta este pusă în legătură (în particular cu presiunea atmosferică). În consecință, la un lagăr circular de alungire infinită care are practicată o singură fantă longitudinală, condițiile la limită sînt

$$p(\theta) = p(\theta+2\pi)\,; \qquad p(\theta_i) = p_i\,. \tag{29}$$

Dacă în lagăr sînt practicate mai multe fante, atunci în dreptul fiecăreia se va putea scrie aproximativ $p(\theta_i) = p_i$, respectiv lagărul va fi împărțit în mai multe porțiuni cvasiindependente, problema devenind similară cazului precedent al lagărelor plane. Mai exact, condițiile menționate trebuie înlocuite cu $p(\theta_i) = p_i'$, unde valorile p_i' sînt necunoscute, diferite de valorile p_i, dar apropiate de acestea. Pentru determinarea valorilor necunoscute p_i' se pot scrie apoi relații de debit pentru fiecare fantă, de exemplu de tipul (7).


C_t
H = 0.1
ε=0.7
0.5
0.3
ε=0.7
0.5
0.3
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
45
90
135
180
225
270
315
360
θ_i°

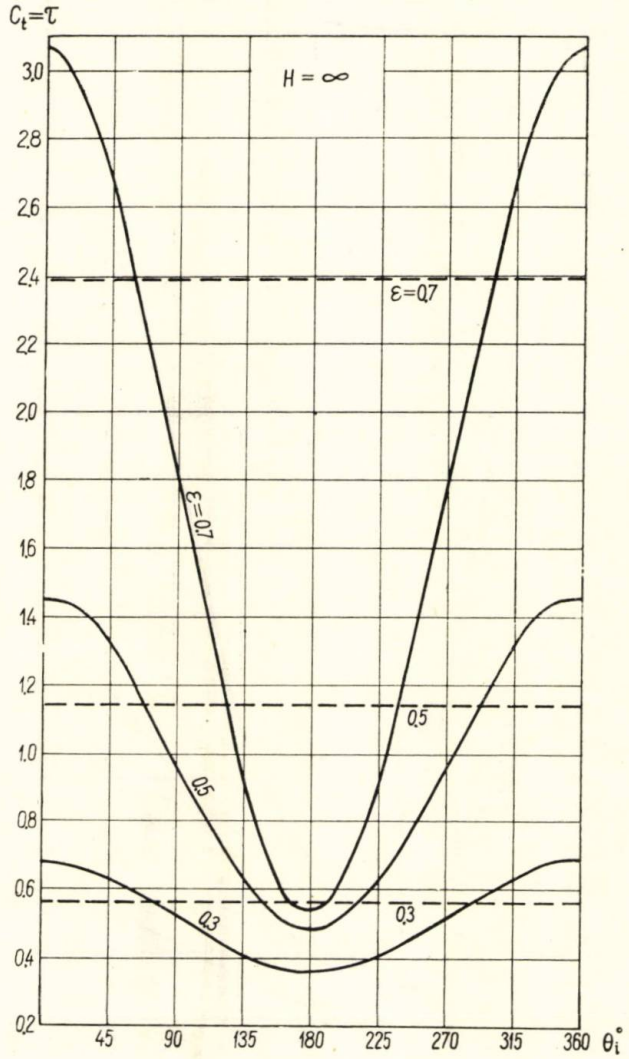
6 *a*

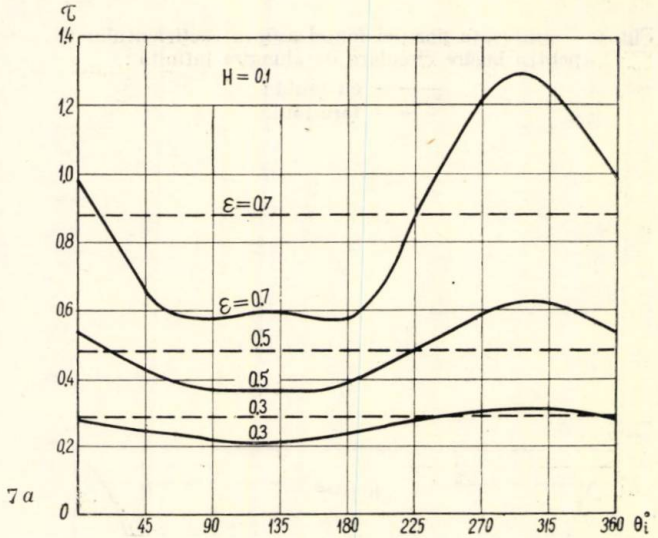

C_t
H = 0.4
ε=0.7
ε=0.7
0.5
0.5
0.3
0.3
2.8
2.6
2.4
2.2
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
45
90
135
180
225
270
315
360
θ_i°

6 *b*

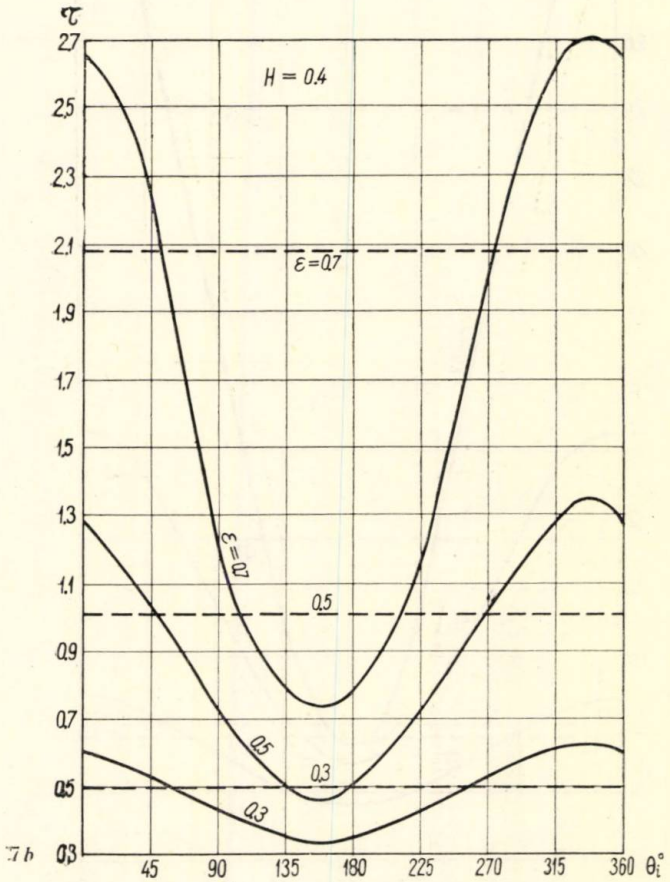
Fig. 6. — Influența poziției fantei asupra coeficientului C_t, pentru lagăre circulare de alungire infinită :

——— cu fantă ;
– – – fără fantă.



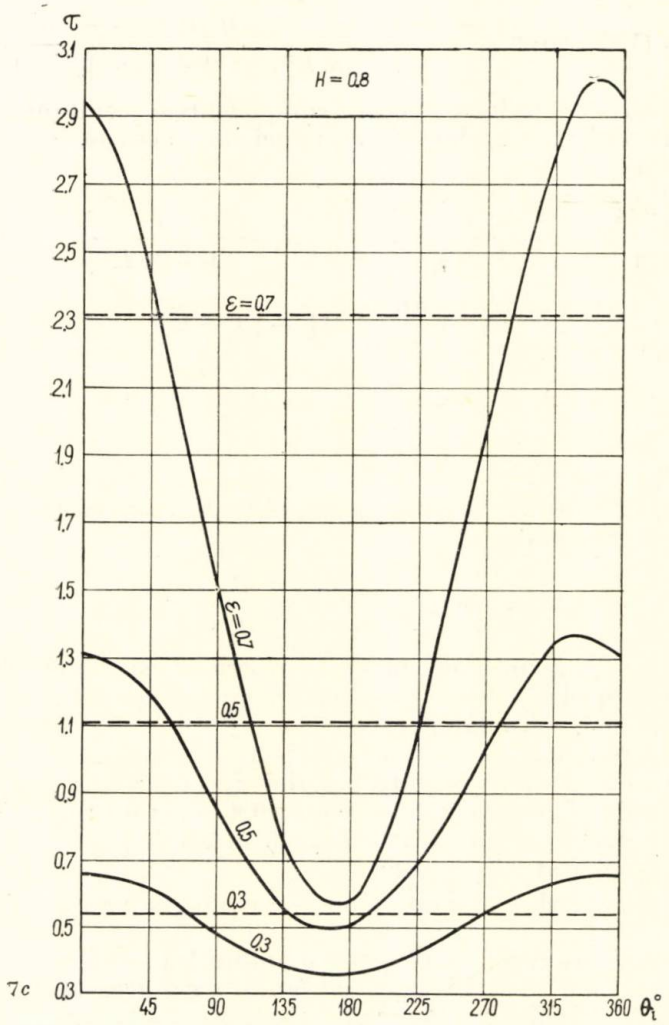

τ
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
H = 0.1
ε=0.7
ε=0.7
0.5
0.5
0.3
0.3
45
90
135
180
225
270
315
360
θi°

7 a


τ
2.7
2.5
2.3
2.1
1.9
1.7
1.5
1.3
1.1
0.9
0.7
0.5
0.3
H = 0.4
ε=0.7
ε=0.7
0.5
0.5
0.3
0.3
45
90
135
180
225
270
315
360
θi°

7 b

Fig. 7. — Influența poziției fantei asupra coeficientului de încărcare C_n pentru lagăre circulare de alungire infinită :
——— cu fantă ;
– – – fără fantă.



7c

Pentru a studia influența unei fante asupra distribuției presiunilor este suficient să se folosească una dintre metodele analitice sau numerice cunoscute, cu condițiile la limită (29). Să utilizăm, de exemplu, metoda „ph" [1], [5], în care caz, după impunerea primei condiții (29), soluția pentru presiuni este de forma

$$\overline{p} = \frac{k_1}{1+\varepsilon\cos\theta} + \frac{\varepsilon}{1+36H^2}\,\frac{6H\sin\theta+\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}, \tag{30}$$

unde constanta K_1 se va determina din ultima condiție (29), care adimensional se scrie

$$\text{la } \theta=\theta_i \quad \overline{p}=p_i=1, \tag{31}$$

de unde rezultă

$$k_1=(1+\varepsilon\cos\theta_i)\left[1-\frac{\varepsilon}{1+36H^2}\,\frac{6H\sin\theta_i+\cos\theta_i}{1+\varepsilon\cos\theta_i}\right]. \tag{32}$$

Coeficienții adimensionali pentru componentele rezultantei presiunilor în lungul liniei centrelor și normalei la aceasta se calculează cu formulele [1]

$$\frac{P_t}{2p_0r_1}=C_t=\frac{\pi}{\varepsilon}\,\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(K_1-\frac{1}{1+36H^2}\right), \tag{33}$$

$$\frac{P_n}{2p_0r_1}=C_n=\frac{\pi}{\varepsilon}\,\frac{6H}{1+36H^2}\,(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}), \tag{34}$$

și

$$\frac{P}{2p_0r_1}=\zeta=\sqrt{C_t^2+C_n^2}. \tag{35}$$

Unghiul θ^* dintre rezultanta presiunilor și linia centrelor rezultă imediat, avînd valoarea

$$\theta^*=\operatorname{arc\,tg}\frac{6H\sqrt{1-\varepsilon^2}}{K_1(1+36H^2)-1}. \tag{36}$$

Se remarcă de la început un fapt important, și anume lipsa constantei K_1 din expresia lui C_n (34) și deci independența acestui coeficient de existența și de poziția fantei.

Pentru a avea un aspect cît mai complet al problemei, calculele s-au efectuat luînd pentru excentricitate valorile $\varepsilon=0{,}3$; $0{,}5$; $0{,}7$ și pentru parametrul funcțional al lagărului $H=0{,}1$; $0{,}4$; $0{,}6$; $0{,}8$; ∞. Unghiul θ_i a luat valori cuprinse între 0 și 360° din 45 în 45 de grade. Rezultatele obținute sînt prezentate în tabela 3.

Pe baza rezultatelor obținute s-au trasat diagramele din figurile 6, 7 și 8.

Analizînd diagramele, se observă o îmbunătățire a proprietăților lagărelor în cazul cînd sînt prevăzute cu fantă, dacă aceasta este plasată în zona descărcată a lagărului. Pentru comparație s-au trasat pe diagrame și valorile pentru lagăre circulare fără fantă. Raportîndu-se la aceeași

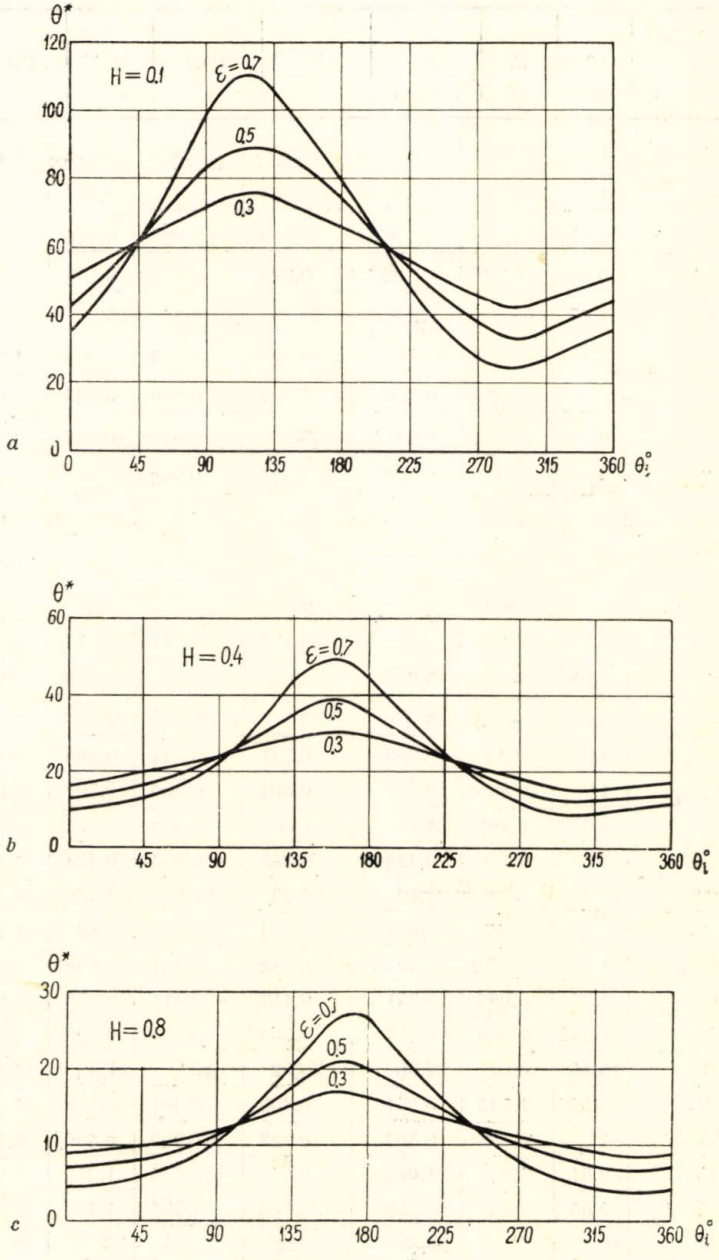


Fig. 8. — Influența poziției fantei asupra unghiului θ* pentru lagăre circulare de alungire infinită.

Tabela 3

H	ε	θ_i	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
0,1	0,3	K_1	1,08	0,965	0,868	0,85	0,922	1,075	1,132	1,15
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,911	0,836	0,823	0,879	0,997	0,041	1,054
		C_t	0,178	0,119	0,0687	0,0594	0,0955	0,176	0,205	0,214
		ζ	0,280	0,248	0,227	0,229	0,235	0,279	0,298	0,305
		θ^{*0}	51,67	63	72,5	74,75	66,34	57	46,67	45,33
	0,5	K_1	1,131	0,936	0,78	0,750	0,832	1,067	1,22	1,25
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,869	0,766	0,747	0,799	0,965	1,058	1,078
		C_t	0,382	0,194	0,0434	0,0164	0,0936	0,320	0,468	0,497
		ζ	0,533	0,418	0,375	0,372	0,383	0,491	0,597	0,618
		$\theta^{*\circ}$	43,08	62,16	83,42	87,20	76	55	38,25	36,67
	0,7	K_1	1,185	0,913	0,691	0,65	0,682	1,109	1,309	1,350
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,841	0,710	0,685	0,703	0,943	1,073	1,096
		C_t	0,812	0,321	−0,079	−0,153	0,1475	0,674	1,035	1,105
		ζ	0,990	0,651	0,572	0,587	0,584	0,880	1,220	1,245
		$\theta^{*\circ}$	35,50	60,83	98	105	79,50	41	28,83	27,17
0,4	0,3	K_1	1,26	1,11	0,893	0,741	0,744	0,895	1,111	1,28
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,8891	0,722	0,604	0,606	0,722	0,889	1,019
		C_t	0,575	0,497	0,386	0,307	0,308	0,386	0,498	0,584
		ζ	0,6	0,526	0,424	0,353	0,354	0,424	0,538	0,609
		θ^{*0}	17	20,16	24,50	29,83	29,67	24,40	19,33	16,67
	0,5	K_1	1,43	1,175	0,822	0,574	0,573	0,827	1,178	1,43
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,832	0,5973	0,4323	0,4313	0,5992	0,8343	1,001
		C_t	1,24	0,993	0,651	0,412	0,411	0,656	0,996	1,24
		ζ	1,272	1,035	0,717	0,509	0,509	0,722	1,04	1,272
		$\theta^{*\circ}$	13,50	16,67	24,50	35,82	36	24,33	16,67	13,50
	0,7	K_1	1,595	1,245	0,751	0,402	0,404	0,745	1,248	1,59
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,795	0,504	0,298	0,299	0,499	0,795	0,999
		C_t	2,61	1,98	1,088	0,64	0,644	1,075	1,985	2,6
		ζ	2,65	2,25	1,178	0,784	0,788	1,17	2,03	2,64
		$\theta^{*\circ}$	10	13	22,83	44,83	44,67	23	13	9
	0,3	K_1	1,28	1,14	0,93	0,747	0,722	0,856	1,077	1,26
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,8845	0,7264	0,591	0,5714	0,674	0,844	1,004
		C_t	0,623	0,553	0,446	0,35	0,337	0,407	0,52	0,614
		ς	0,636	0,566	0,463	0,372	0,359	0,426	0,535	0,625
		$\theta^{*\circ}$	11,50	13	16,3	20,16	20,90	17,58	13,50	11,83

Tabela 3 (continuare)

H	ε	θ_i	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
0,6	0,5	K_1	1,46	1,24	0,872	0,582	0,536	0,768	1,1285	1,049
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,854	0,608	0,416	0,396	0,540	0,780	0,973
		C_t	1,34	1,125	0,773	0,493	0,446	0,673	1,02	1,3
		ζ	1,36	1,145	0,802	0,538	0,498	0,706	1,04	1,315
		$\theta^{*\circ}$	9	10,83	15,67	23,50	25,67	17,83	12	9,33
	0,7	K_1	1,65	1,335	0,82	0,412	0,35	0,668	1,18	1,59
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,814	0,512	0,272	0,235	0,422	0,724	0,963
		C_t	2,84	2,26	1,35	0,614	0,521	1,075	1,995	2,735
		ζ	2,85	2,28	1,39	0,697	0,617	1,128	2,02	2,75
		$\theta^{*\circ}$	6,67	8,47	13,83	28,25	33,32	17	9,40	7
0,8	0,3	K_1	1,29	1,16	0,94	0,755	0,712	0,841	1,060	1,25
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,903	0,732	0,589	0,557	0,657	0,824	0,969
		C_t	0,645	0,611	0,464	0,369	0,346	0,412	0,527	0,624
		ζ	0,651	0,617	0,473	0,382	0,36	0,423	0,535	0,63
		$\theta^{*\circ}$	8,75	9,75	12	15	15,73	13,50	10,58	9
	0,5	K_1	1,48	1,27	0,9	0,59	0,522	0,734	1,1	1,41
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,857	0,613	0,408	0,361	0,504	0,748	0,954
		C_t	1,29	1,165	0,828	0,53	0,453	0,667	1,02	1,32
		ζ	1,305	1,195	0,845	0,556	0,506	0,688	1,035	1,34
		$\theta^{*\circ}$	7	8	11,50	17,50	20	14,20	9,25	7,25
	0,7	K_1	1,67	1,34	0,86	0,426	0,327	0,627	1,14	1,58
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,824	0,522	0,267	0,209	0,385	0,687	0,944
		C_t	2,93	2,39	1,475	0,692	0,514	1,052	1,975	2,77
		ζ	2,94	2,4	1,49	0,75	0,573	1,08	1,99	2,78
		θ^{*0}	4,5	6,25	10	20,50	26,50	13,75	7,50	4
∞	0,3	K_1	1,3	1,212	1	0,788	0,7	0,788	1	1,212
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,935	0,77	0,607	0,538	0,607	0,77	0,954
		$C_t=\zeta$	0,672	0,627	0,517	0,407	0,362	0,407	0,517	0,627
	0,5	K_1	1,5	1,373	1	0,647	0,5	0,647	1	1,353
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,902	0,667	0,43	0,334	0,43	0,667	0,902
		$C_t=\zeta$	1,45	1,325	0,965	0,625	0,483	0,625	0,965	1,325
	0,7	K_1	1,7	1,495	1	0,505	0,3	0,505	1	1,495
		$\overline{p}_{\theta=0}$	1	0,88	0,588	0,297	0,176	0,297	0,588	0,88
		$C_t=\zeta$	3,07	2,69	1,8	0,91	0,54	0,91	1,8	2,69

excentricitate, se observă o deplasare pe verticală a curbelor funcţie de viteze. Plasarea fantei în zonele de maxim de presiune scade foarte mult posibilităţile de încărcare a lagărelor, contribuind în acelaşi timp la mărirea tendinţei de instabilitate.

Zonele optime pentru poziţia fantei sînt în general la $\theta i = -$ $- 90° \ldots + 15°$, maximum de efect fiind obţinut între 0 şi $-45°$.

3. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE

Pentru a verifica în cazul lagărelor circulare influenţa unei fante asupra distribuţiei presiunilor, s-au efectuat unele determinări experimentale, prezentate în cele ce urmează.

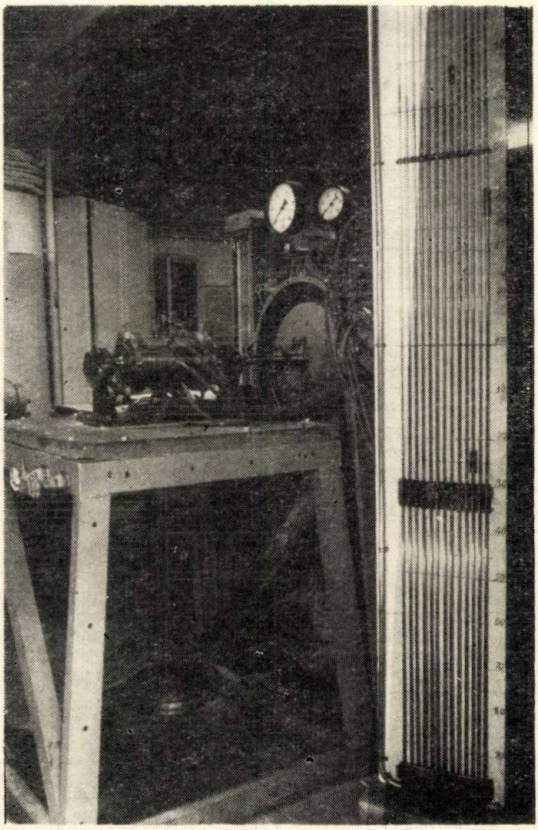


Fig. 9. — Instalaţie experimentală pentru determinarea distribuţiei presiunii în lagăre circulare lubrificate cu gaze.

Instalaţia folosită constă dintr-un batiu (fig. 9), avînd montat pe el un suport pentru susţinerea lagărului experimental, care este antrenat de un motor electric cu ajutorul unei transmisii prin curele trapezoidale şi un amplificator cu turaţie cu roţi dinţate.

Distribuția de presiuni în lagăr este măsurată cu un multimanometru cu mercur, legătura dintre acesta și prizele de presiune ale lagărului experimental fiind realizată prin tuburi de cauciuc. Pentru controlul bunei

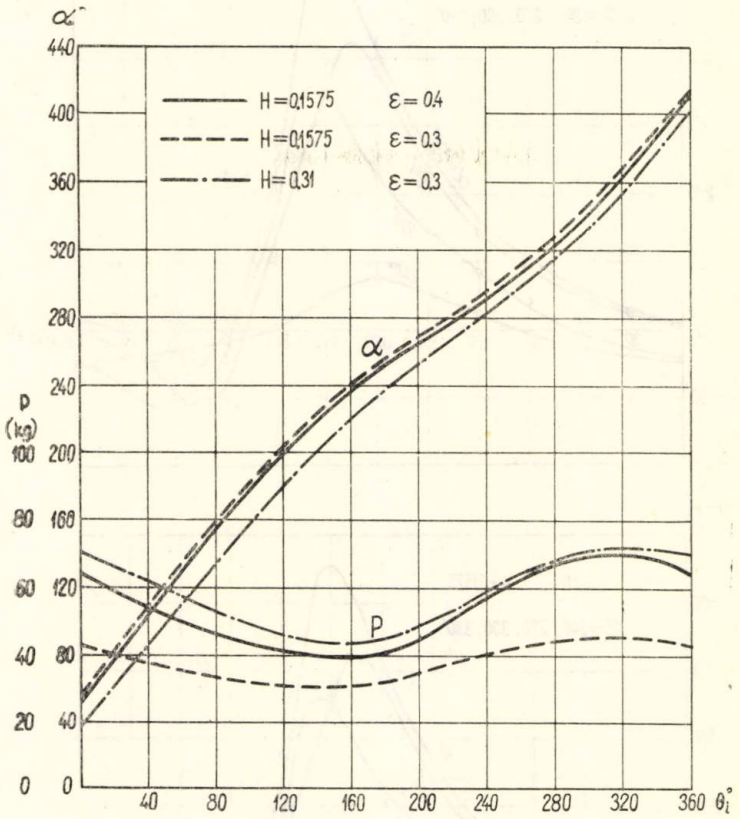
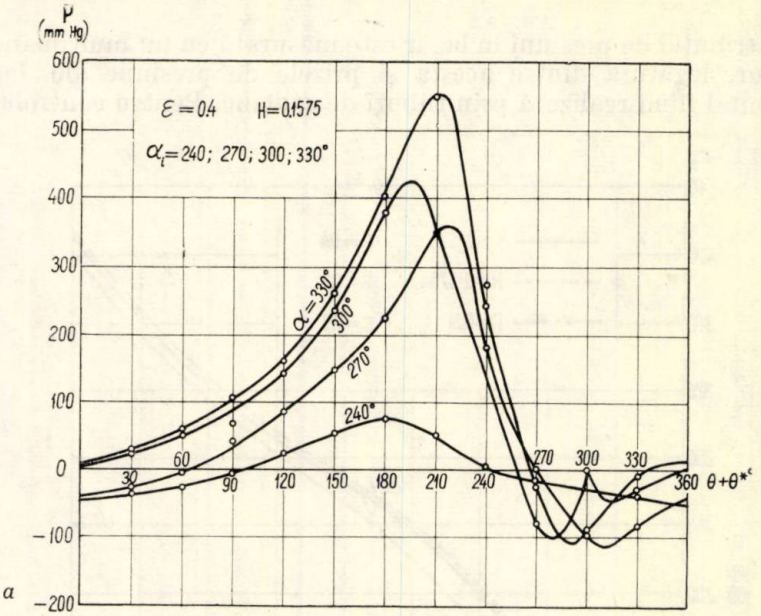


Fig. 10. — Curbele $\alpha(\theta_i)$ și $\frac{1}{a}P(\theta_i)$ pentru lagărul circular experimental în cazurile $\varepsilon = 0{,}3$, 0,4 și $n = 5\,400$ rot/min ($H = 0{,}1575$), $n = 10{,}400$ rot/min ($H = 0{,}31$).

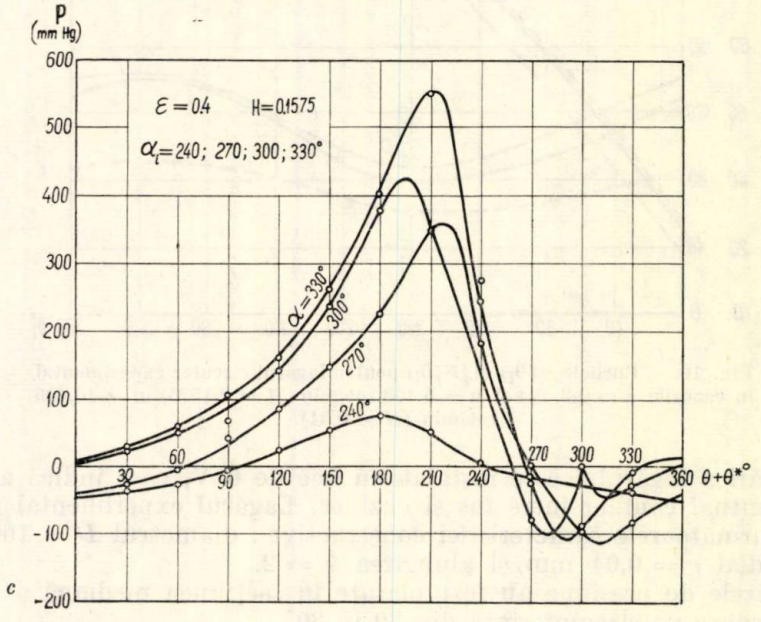
funcționări a lagărului este instalat un bec de 6 V, care indică apariția unui eventual contact între fus și cuzinet. Lagărul experimental utilizat a avut următoarele caracteristici constructive : diametrul $D = 100$ mm ; jocul radial $c = 0{,}04$ mm și alungirea $\lambda = 2$.

Prizele de presiune au fost plasate în secțiunea mediană a cuzinetului, dispuse pe circumferință din 30 în 30°.

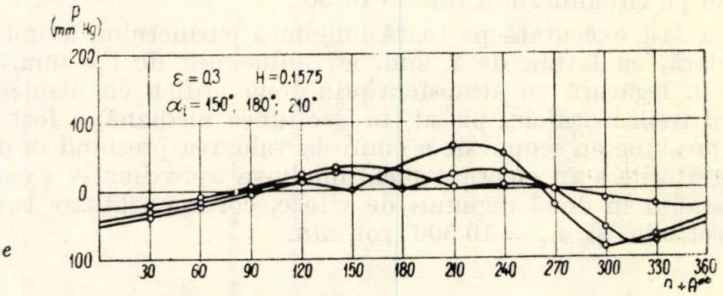
Fanta a fost executată pe toată lungimea cuzinetului, avînd forma dreptunghiulară, cu latura de 2 mm, iar adîncimea de 0,8 mm. Fanta a fost pusă în legătură cu atmosfera prin două orificii cu diametrul de 1 mm. Un al treilea orificiu, plasat în secțiunea mediană, a fost folosit ca priză de presiune cu scopul de a controla valoarea presiunii în dreptul fantei. Măsurătorile s-au efectuat menținîndu-se aproximativ excentricitatea ε constantă în două regimuri de viteze, corespunzătoare turațiilor $n_1 = 5\,400$ rot/min și $n_2 = 10\,500$ rot/min.


p
(mm Hg)
ε = 0.4 H=0.1575
α_i = 240; 270; 300; 330°
α_i = 330°
300°
270°
240°
600
500
400
300
200
100
0
−100
−200
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
330
360 θ+θ*°

a

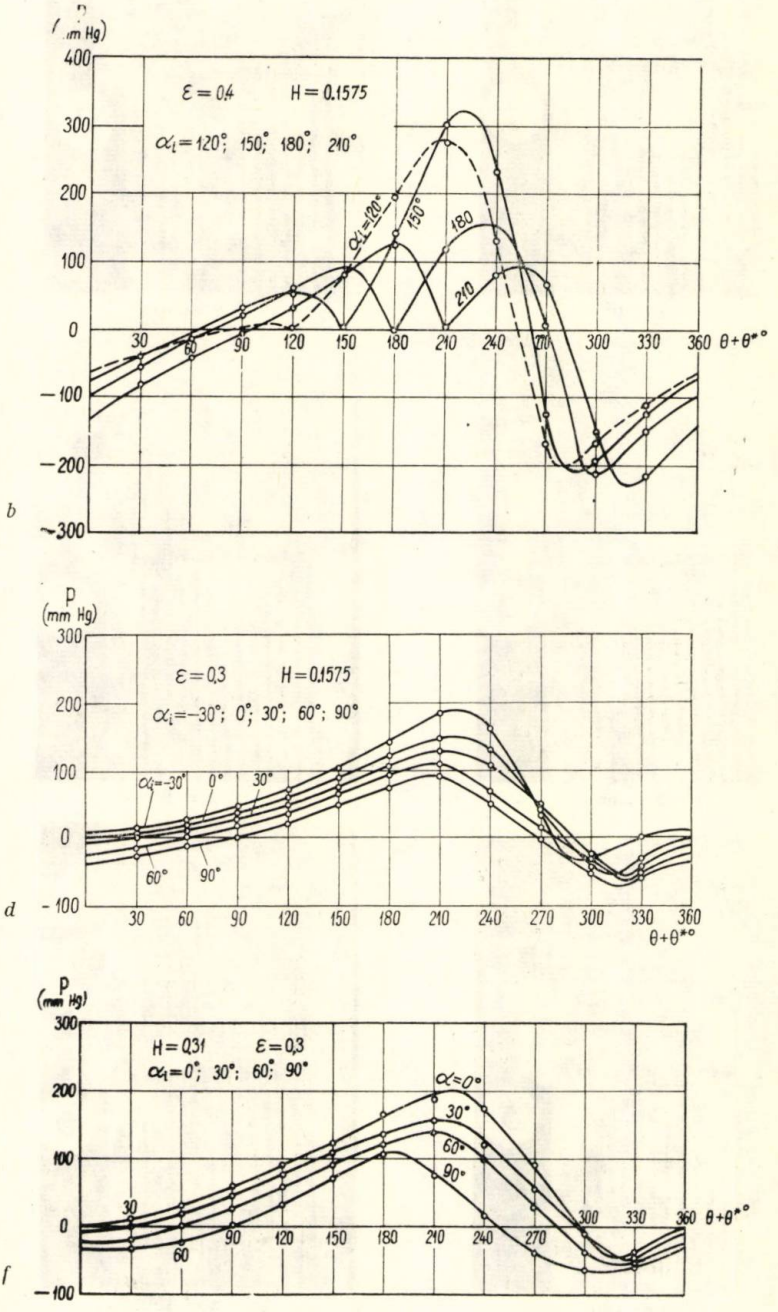

p
(mm Hg)
ε = 0.4 H=0.1575
α_i = 240; 270; 300; 330°
α_i = 330°
300°
270°
240°
600
500
400
300
200
100
0
-100
-200
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
330
360 θ+θ*°

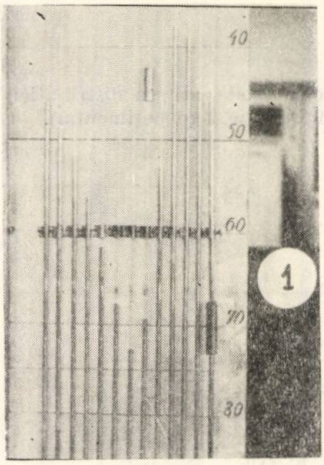
c


p
(mm Hg)
ε = 0.3 H = 0.1575
α_i = 150°; 180°; 210°
200
100
0
100
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
330
360

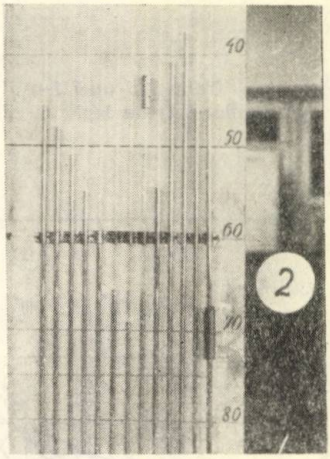
e

Fig. 11. — Influența unei fante și a poziției acesteia asupra distribuției presiunilor într-un lagăr circular de alungire $\lambda = 2$ (experimental).

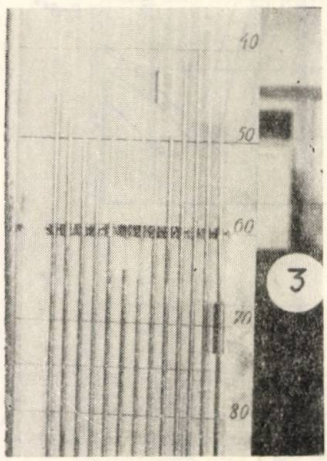




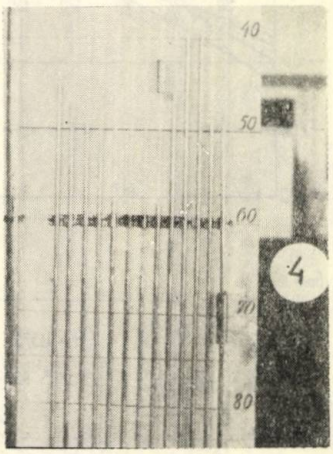
$\alpha = 0°$



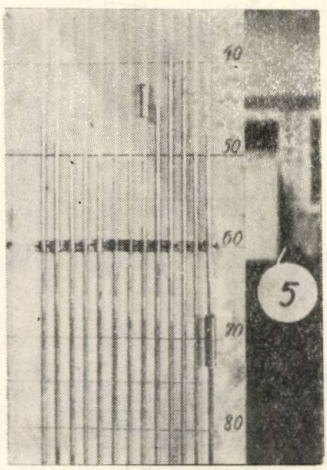
$\alpha = 30°$



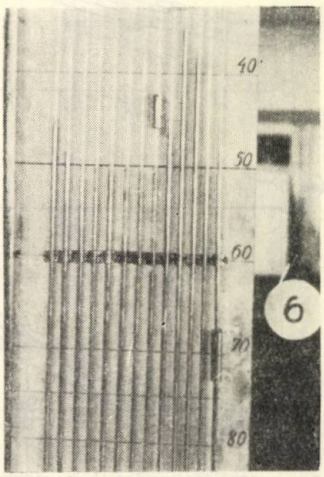
$\alpha = 60°$



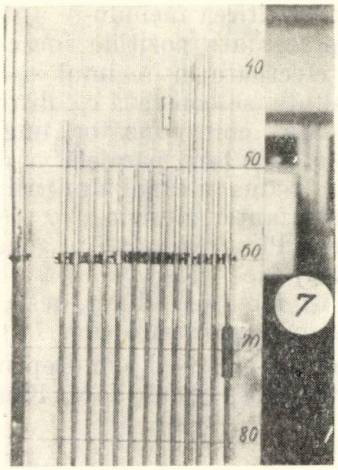
$\alpha = 90°$



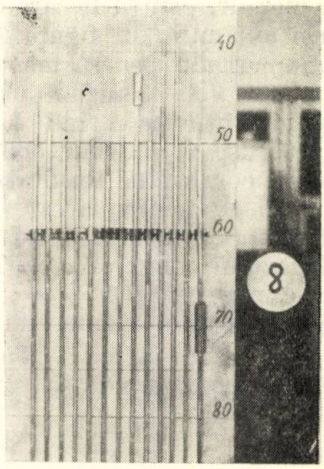
$\alpha = 120°$



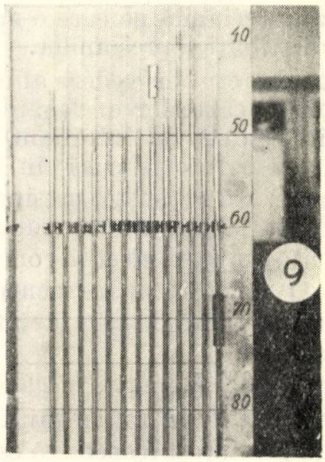
$\alpha = 150°$



$\alpha = 180°$



$\alpha = 210°$



$\alpha = 240°$

Fig. 12. — Distribuția de presiuni măsurate experimental în regimul $H = 0{,}1575$ și $\varepsilon = 0{,}3$.

Asimilînd aproximativ lagărul cu unul de alungire infinită, cu ajutorul rezultatelor date în figurile 7 și 8 s-au determinat în prealabil sarcinile și poziția liniei centrelor pentru o excentricitate dată și pentru diferite poziții ale fantei în raport cu direcția sarcinii și a liniei centrelor. Excentricitățile alese au fost $\varepsilon = 0{,}3$; 0,4 pentru $n_1 = 5\ 400$ rot/min și $\varepsilon = 0{,}3$ pentru $n_2 = 10\ 500$ rot/min.

Notînd cu α unghiul dintre direcția sarcinii și poziția fantei, s-au determinat în prealabil valorile aproximative $\alpha(\theta_i)$ și $P\ (\theta_i)$ necesare (fig. 10). Rezultatele determinărilor experimentale privind distribuția presiunilor sînt reprezentate în diagramele din figura 11. Pentru înregistrarea indicațiilor multimanometrului s-au fotografiat pozițiile coloa-

nelor de mercur, pentru fiecare caz în parte citirea făcîndu-se apoi direct pe clișeele obținute. În figura 12 sînt prezentate pozițiile succesive ale multimanometrului pentru măsurătorile efectuate în regimul $n_1 = 5\,400$ rot/min și $\varepsilon = 0{,}3$. Analizînd aceste rezultate, se constată că distribuțiile de presiuni obținute avînd fanta plasată corespunzător unghiurilor $\alpha_i = 0 \ldots 90°$ și $\alpha_i = 300 \ldots 360°$ indică o deplasare paralelă a curbelor pe verticală, confirmînd rezultatul teoretic dedus în cazul alungirii $\lambda = \infty$. Rezultă deci că pentru aceste poziții ale fantei alungirea $\lambda = 2$ este suficient de mare, neinfluențînd rezultatele. Plasarea fantei în zona încărcată a lagărului (unghiul $\alpha_i = 120 \ldots 270°$) face să se resimtă alungirea lagărului experimental $\lambda = \infty$; curbele își modifică aliura, scăpările de fluid pe la capetele cuzinetului fiind acum importante (fig. 11 *b* și *e*).

În toate cazurile însă se remarcă trecerea presiunii p în dreptul fantei prin valorile l, confirmîndu-se astfel corectitudinea condițiilor la limită (29).

4. CONCLUZII

Considerațiile și rezultatele prezentate arată în toate cazurile influența apreciabilă pe care o are existența unui orificiu sau a unei fante asupra distribuției presiunilor.

Din punctul de vedere al condițiilor la limită propriu-zise, în marea majoritate a cazurilor de lagăre funcționînd în regim hidrodinamic, presiunea în stratul de lubrifiant poate fi considerată egală cu presiunea mediului cu care este pusă în legătură fanta (în particular presiunea atmosferică). În realitate, presiunea în dreptul fantei crește cu numărul H și teoretic influența fantei tinde să dispară pentru $H \to \infty$, respectiv în cazul-limită în care efectul compresibilității lubrifiantului devine predominant. O excepție apare pentru lagărele circulare de alungire infinită cu o singură fantă, la care debitul care traversează fanta trebuie să fie totdeauna nul.

Din punct de vedere al distribuției presiunilor și capacității de încărcare, existența unor orificii sau fante poate fi favorabilă sau defavorabilă, după cum presiunea respectivă este mai mare sau mai mică decît presiunea care ar fi apărut în filmul de lubrifiant dacă fanta nu ar fi existat. În cazul particular al unei fante puse în contact cu atmosfera, influența este în general defavorabilă în cazul lagărelor axiale, dar poate fi favorabilă în cazul lagărelor circulare dacă este plasată în zona opusă încărcării. În cazul lagărelor circulare de alungire infinită, componenta rezultantei presiunilor normală pe linia centrelor nu este influențată de existența unei fante, în timp ce componenta rezultantei presiunilor după linia centrelor este puternic influențată de existența fantei (ceea ce explică efectul stabilizator al unei fante). În cazul lagărelor reale de alungire finită, efectul calitativ al unei fante este similar, fapt confirmat de determinările experimentale efectuate.

Primită la redacție la 30 decembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Lubrificația cu gaze*, București, Edit. Acad. R.P.R., 1963.
2. — *Sur le problème tridimensionnel de la lubrification aux gaz*, Rev. roum., sci. techn.-Mécanique Appliquée, **I**, *2*, 123—138 (1956).
3. H. G. Elrod, A. Burgdorfer, *Refinement of the theory of Gaz Lubricated Journal Bearing of Infinite Length*, Proc. of the First International Symposion on Gas Lubricated Bearings Washington, 1959, p. 93—118.
4. W. A. Gross, *Gas Film Lubrication*, New York, John Wiley & Sons, 1962.
5. J. S. Ausman, *An Improved Analytical Solution for Self-Acting, Gas-Lubricated Journal Bearings of Finite Length*, ASME Transactions, Series D, Journal of Basic Engineerings, **83**, *2*, June, 188—194 (1961).

CONSIDERAȚII ASUPRA UNEI PROBLEME VARIAȚIONALE PENTRU MANEVRA OPTIMĂ DE ÎNTÎLNIRE CU MINIMUM DE COMBUSTIBIL PE ORBITE CIRCULARE[1)]

de AL. MARINESCU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

531 : 629.136.3

În lucrare se studiază manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil a două aparate cosmice pe orbite circulare.
Se presupune că aparatul urmărit este un satelit al Pămîntului în mișcare (fără instalație de propulsie) pe o orbită circulară, iar aparatul urmăritor care se mișcă pe o orbită apropiată este prevăzut cu instalație de propulsie de mică tracțiune. Problema găsirii legilor optime de variație a parametrilor mișcării aparatului urmăritor revine în lucrarea de față pentru manevra optimă sus-menționată la o problemă variațională de extremum condiționat.

1. INTRODUCERE

Problema întîlnirii a două aparate cosmice pe orbite circulare prezintă în momentul de față un deosebit interes, deoarece, după cum se știe, pentru zborurile interplanetare în general și pentru zborul spre Lună în special ea are un rol hotărîtor.

Un mare interes practic îl prezintă optimizările manevrelor de întîlnire, și în acest sens optimizarea manevrei de întîlnire din punctul de vedere al consumului minim de combustibil trece pe prim plan.

De acest aspect al manevrei optime de întîlnire se ocupă prezenta lucrare, cu următoarele ipoteze :

[1)] Lucrarea este publicată într-o formă extinsă în limba rusă în Buletinul Institutului politehnic „Gh. Gheorghiu Dej", 2 (1966).

— aparatul urmărit A (fig. 1), lipsit de instalaţie de propulsie, se mişcă în jurul Pămîntului pe o orbită circulară de raza R avînd viteza unghiulară constantă ω;

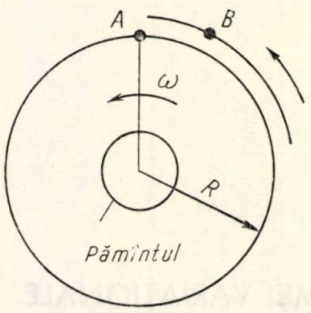


Fig. 1

— aparatul urmăritor B, prevăzut cu instalaţie de propulsie de mică tracţiune, se mişcă pe o orbită apropiată de cea a aparatului urmărit A, distanţa dintre ele la începerea manevrei de întîlnire fiind foarte mică în comparaţie cu R;

— se neglijează influenţa perturbaţiilor altor planete şi a rezistenţei la înaintare, considerîndu-se că aparatele se mişcă într-un cîmp de atracţie newtonian.

2. MANEVRA OPTIMĂ DE ÎNTÎLNIRE CU MINIMUM DE COMBUSTIBIL

Să definim acceleraţia datorită tracţiunii a aparatului urmăritor, cu alte cuvinte tracţiunea pe unitatea de masă prin vectorul

$$\vec{a}(t) = \frac{\text{tracţiune}}{M} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\vec{c}}{M}, \tag{1}$$

$\vec{c}$ fiind viteza efectivă de ejecţie, iar M masa aparatului urmăritor prevăzut cu motor rachetă. Notînd puterea totală cu

$$N(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right)c^2 \tag{2}$$

şi eliminînd $\vec{c}$ între relaţiile (1) şi (2), obţinem

$$\frac{a^2}{2N} = -\frac{\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}}{M^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{M}. \tag{3}$$

Prin integrare deducem din (3)

$$\frac{1}{M(t)} = \frac{1}{M_0} + \int_0^t \frac{a^2}{2N}\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

unde M_0 este masa iniţială. Impunînd puterii N condiţia [1]

$$N \leqslant N_d = \frac{1}{k}M_p,$$

unde N_d este puterea disponibilă, k masa specifică şi M_p masa furnizoare de putere, după timpul τ la sfîrşitul arderii avem

$$\frac{M_0}{M_f} = 1 + \frac{M_0}{M_p}\frac{k}{2}\int_0^\tau a^2\mathrm{d}t, \tag{5}$$

M_f fiind masa aparatului urmăritor la sfîrşitul arderii.

Mişcarea optimă cu minimum de combustibil are loc deci cînd expresia (5) devine minimă, cu alte cuvinte cînd integrala

$$J = \int_{t_0=0}^{t_1=\tau} a^2 \mathrm{d}t \tag{6}$$

este minimă.

În unele lucrări, folosindu-se metoda jocurilor diferenţiale, se analizează manevra de întîlnire cu minimum de combustibil presupunîndu-se nelimitate ca mărime componentele acceleraţiei $\vec{a}$ faţă de un sistem orbital.

În lucrarea de faţă, vom analiza pe o altă cale această manevră, fără să impunem vreo condiţie componentelor acceleraţiei $\vec{a}$, care, conform ipotezei, trebuie să rămînă în cadrul unor valori finite mici.

Analiza din prezenta lucrare arată că problema variaţională pentru manevra susamintită revine la o problemă de extremum condiţionat.

Considerăm aparatul urmărit A care se mişcă cu viteză constantă pe o orbită circulară de raza R de la centrul O al Pămîntului (fig. 2). De aparatul urmărit (ţinta) A este legat sistemul de axe $Axzy$, astfel încît z este în direcţia razei R, x în direcţia tangentei la orbită şi y normală pe planul xz. Fie B aparatul urmăritor, aflat pe o orbită în apropierea aparatului A, prevăzut, după cum am mai remarcat, cu instalaţie de propulsie. Să însemnăm cu a_x, a_z, a_y componentele după cele trei axe x, z, y ale acceleraţiei datorită tracţiunei. Considerînd $\sqrt{x^2 + z^2 + y^2} \ll R$, ecuaţiile aproximative de mişcare ale aparatului urmăritor faţă de sistemul respectiv sînt

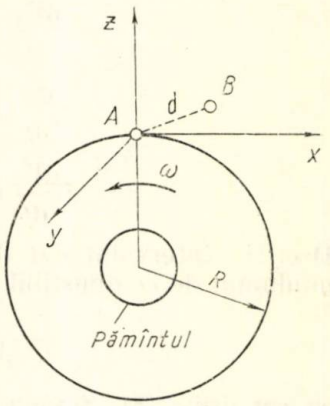


Fig. 2

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= 2\omega\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + a_x,\\
\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} &= -2\omega\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3\omega^2 z + a_z,\\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= -\omega^2 y + a_y
\end{aligned} \tag{7}$$

sau, notînd

$$V_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

$$V_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},$$

$$V_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

vom putea scrie ecuațiile de mișcare ale aparatului urmăritor sub forma

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= V_x, \\
\frac{dV_x}{dt} &= 2\omega V_z + a_x, \\
\frac{dz}{dt} &= V_z, \\
\frac{dV_z}{dt} &= -2\omega V_x + 3\omega^2 z + a_z, \\
\frac{dy}{dt} &= V_y, \\
\frac{dV_y}{dt} &= -\omega^2 y + a_y.
\end{aligned} \tag{8}$$

Deci, în intervalul dat de timp τ, problema manevrei de întîlnire cu minimum de combustibil revine la a găsi minimul integralei

$$J = \int_0^\tau (a_x^2 + a_z^2 + a_y^2)\, dt, \tag{9}$$

cu condițiile (8). Scriem ecuațiile (8) sub forma

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{dx}{dt} - V_x = 0, \\
\Phi_2 &= \frac{dV_x}{dt} - 2\omega V_z - a_x = 0, \\
\Phi_3 &= \frac{dz}{dt} - V_z = 0, \\
\Phi_4 &= \frac{dV_z}{dt} + 2\omega V_x - 3\omega^2 z - a_z = 0, \\
\Phi_5 &= \frac{dy}{dt} - V_y = 0, \\
\Phi_6 &= \frac{dV_y}{dt} + \omega^2 y - a_y = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

și, introducînd multiplicatorii lui Lagrange λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6, alcătuim funcția

$$F = a_x^2 + a_z^2 + a_y^2 + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \lambda_3\Phi_3 + \lambda_4\Phi_4 + \lambda_5\Phi_5 + \lambda_6\Phi_6. \tag{11}$$

Problema se reduce la a găsi minimul necondiționat al integralei

$$J' = \int_0^\tau F\, dt. \tag{12}$$

Se poate proba că, într-adevăr, de-a lungul extremalei funcționala (12) este minimă. Deoarece funcțiunea F depinde liniar de derivatele $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}, \ldots, \frac{dV_y}{dt}$, condiția lui Legendre ca variația a doua a funcționalei (12) să fie nenegativă, este îndeplinită.

Rezultă deci că funcționala (12) este minimă.

Folosind funcția (11), ecuațiile lui Euler

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dx}{dt}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dV_x}{dt}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dz}{dt}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dV_z}{dt}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dy}{dt}} = 0, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dV_y}{dt}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{da_x}{dt}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{da_z}{dt}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{da_y}{dt}} = 0$$

și condițiile deja menționate (10) conduc la sistemul de ecuații diferențiale care, integrat, va da funcțiile căutate : $x(t)$, $z(t)$ $y(t)$, $V_x(t)$, $V_z(t)$, $V_y(t)$, $a_x(t)$, $a_z(t)$, $a_y(t)$ $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_6(t)$, funcții care caracterizează manevra de

întîlnire cu minimum de combustibil. Efectuînd calculele, ecuațiile (13) ale lui Euler conduc la sistemul

$$\begin{aligned}
&\frac{d\lambda_1}{dt} &&= 0,\\
&-\lambda_1 + 2\omega\lambda_4 - \frac{d\lambda_2}{dt} &&= 0,\\
&-3\omega^2\lambda_4 - \frac{d\lambda_3}{dt} &&= 0,\\
&-2\omega\lambda_2 - \lambda_3 - \frac{d\lambda_4}{dt} &&= 0,\\
&\omega^2\lambda_6 - \frac{d\lambda_5}{dt} &&= 0,\\
&-\lambda_5 - \frac{d\lambda_6}{dt} &&= 0,\\
&2a_x - \lambda_2 &&= 0,\\
&2a_z - \lambda_4 &&= 0,\\
&2a_y - \lambda_6 &&= 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Din primele șase ecuații (14) deducem

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\lambda_6}{dt^2} + \omega^2\lambda_6 = 0,\\
&\frac{d^2\lambda_4}{dt^2} + \omega^2\lambda_4 = 2\omega C_1,\\
&\frac{d\lambda_2}{dt} = 2\omega\lambda_4 - C_1,
\end{aligned} \tag{15}$$

unde $C_1 = \lambda_1$ este o constantă. Soluțiile ecuațiilor (15) sînt

$$\begin{aligned}
\lambda_6 &= K_1 \cos\ \omega t + K_2 \sin\ \omega t,\\
\lambda_4 &= K_3 \cos\ \omega t + K_4 \sin\ \omega t + \frac{2C_1}{\omega},\\
\lambda_2 &= 2K_3 \sin\ \omega t - 2K_4 \cos\ \omega t + 3C_1 t + K_5^*,
\end{aligned} \tag{16}$$

cu care expresiile componentelor accelerației datorită tracțiunii devin cu $K_5^* = 2K_5$

$$\begin{aligned}
a_x &= K_3 \sin\ \omega t - K_4 \cos\ \omega t + \frac{3}{2} C_1 t + K_5,\\
a_z &= \frac{K_3}{2} \cos\ \omega t + \frac{K_4}{2} \sin\ \omega t + \frac{C_1}{\omega},\\
a_y &= \frac{K_1}{2} \cos\ \omega t + \frac{K_2}{2} \sin\ \omega t.
\end{aligned} \tag{17}$$

Avînd expresiile componentelor acceleraţiei $\vec{a}$, putem trece la integrarea sistemului de ecuaţii (8) pentru a deduce principalii parametri ai mişcării x, z, y, V_x, V_z, V_y. Într-adevăr, din ultimele două ecuaţii (8) scoatem

$$\frac{d^2V_y}{dt^2} + \omega^2 V_y = \frac{da_y}{dt}, \tag{18}$$

iar din a doua, a treia şi a patra ecuaţie (8) scoatem

$$\frac{d^2V_z}{dt^2} + \omega^2 V_z = \frac{da_z}{dt} - 2\omega a_x. \tag{19}$$

Ţinînd seama de expresiile (17) ale componentelor acceleraţiei ecuaţiile (18) şi (19) devin

$$\begin{aligned} \frac{d^2V_y}{dt^2} + \omega^2 V_y &= -\frac{K_1\omega}{2}\sin\omega t + \frac{K_2\omega}{2}\cos\omega t, \\ \frac{d^2V_z}{dt^2} + \omega^2 V_z &= -\frac{5\omega K_3}{2}\sin\omega t + \frac{5\omega K_4}{2}\cos\omega t - 3\omega C_1 t - 2\omega K_5. \end{aligned} \tag{20}$$

Avînd V_y şi V_z, se pot deduce prin simple integrări V_x, x, z şi y. Prin integrarea ecuaţiilor (20) obţinem

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{K_1 t + 4\alpha_1}{4}\cos\omega t + \frac{K_2\omega t - K_1 + 4\omega\alpha_2}{4\omega}\sin\omega t, \\ V_z &= \frac{5K_3 t + 4\alpha_3}{4}\cos\omega t + \frac{5K_4\omega - 5K_3 + 4\omega\alpha_4}{4\omega}\sin\omega t - \\ &\quad - \frac{3C_1}{\omega}t - \frac{2K_5}{\omega} \end{aligned} \tag{21}$$

cu ajutorul cărora deducem

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{5}{2}K_3\left[t\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\cos\omega t\right] + \frac{4\omega\alpha_3 - 2K_4}{2\omega}\sin\omega t + \\ &\quad + \frac{5}{2}K_4\left[-t\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right] - \frac{4\omega\alpha_4 - 3K_3}{2\omega}\cos\omega t - \\ &\quad - \frac{9}{4}C_1 t^2 - 3K_5 t + \alpha_5, \\ x &= \frac{5}{2}K_3\left[-\frac{t}{\omega}\cos\omega t + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega t\right] + \frac{8K_3 - 4\omega\alpha_4}{2\omega^2}\sin\omega t - \\ &\quad - \frac{5}{2}K_4\left[\frac{t}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega^2}\cos\omega t\right] - \frac{3K_4 + 4\omega\alpha_3}{2\omega^2}\cos\omega t - \\ &\quad - \frac{3}{4}C_1 t^3 - \frac{3}{2}K_5 t^2 + \alpha_5 t + \alpha_6, \end{aligned} \tag{22}$$

$$z = \frac{5}{4} K_3 \left[\frac{t}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t \right] + \frac{\alpha_3}{\omega} \sin \omega t +$$
$$+ \frac{5}{4} K_4 \left[-\frac{t}{\omega} \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t \right] - \frac{4\omega\alpha_4 - 5K_3}{4\omega^2} \cos \omega t -$$
$$- \frac{3C_1}{2\omega} t^2 - \frac{2K_5}{\omega} t + \alpha_7,$$

$$y = \frac{K_1}{4} \left[\frac{t}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t \right] + \frac{\alpha_1}{\omega} \sin \omega t +$$
$$+ \frac{K_2}{4} \left[-\frac{t}{\omega} \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t \right] - \frac{4\omega\alpha_2 - K_1}{4\omega^2} \cos \omega t + \alpha_8.$$

Pentru determinarea celor 14 constante C_1, K_1, $K_2, \ldots, K_5$, α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_8$ dispunem de valorile date ale mărimilor x, z, y, V_x, V_z, V_y, a_x, a_z, a_y (pentru $t = 0$ și $t = \tau$). Din condiția de acostare pentru $t = \tau$ rezultă că

$$x(\tau) = 0; \quad z(\tau) = 0; \quad y(\tau) = 0,$$
$$V_x(\tau) = 0; \quad V_z(\tau) = 0; \quad V_y(\tau) = 0,$$
$$a_x(\tau) = 0; \quad a_z(\tau) = 0; \quad a_y(\tau) = 0.$$

Pentru $t = 0$ sînt suficiente datele inițiale

$$x(0); \quad z(0); \quad y(0),$$
$$V_x(0); \quad V_z(0); \quad V_y(0),$$

care practic se pot determina la începutul manevrei. Expresiile constantelor gata calculate din condițiile de mai sus sînt

$$C_1 = \frac{A_{14}}{A_{12}} - \frac{A_{13}}{A_{12}} \cdot \frac{A_{12}A_{17} - A_{14}A_{15}}{A_{12}A_{16} - A_{13}A_{15}},$$

$$K_1 = -K_2 \operatorname{tg} \omega\tau,$$

$$K_2 = -\frac{V_y(0) \cos \omega(\tau) + \frac{A_3}{A_4} \sin \omega\tau}{A_1},$$

$$K_3 = -\frac{2C_1}{\omega \cos \omega\tau} - K_4 \operatorname{tg} \omega\tau,$$

$$K_4 = \frac{A_{12}A_{17} - A_{14}A_{15}}{A_{12}A_{16} - A_{13}A_{15}},$$

$$K_5 = C_1 \left(\frac{2}{\omega} \operatorname{tg} \omega\tau - \frac{3}{2} \tau \right) + K_4 (\cos \omega\tau + \operatorname{tg} \omega\tau \sin \omega\tau),$$

$$\alpha_1 = V_y(0),$$

$$\alpha_2 = \frac{A_3}{A_4},$$

$$\alpha_3 = C_1 A_5 + K_4 A_6 - \alpha_4 \operatorname{tg} \omega\tau,$$

$$\alpha_4 = \frac{V_x(0)}{A_9} - \frac{A_{10}}{A_9} C_1 - \frac{A_{11}}{A_9} K_4,$$

$$\alpha_5 = C_1 A_7 + K_4 A_8 + \alpha_4 (2 \sin \omega\tau \operatorname{tg} \omega\tau + 2 \cos \omega\tau),$$

$$\alpha_6 = x(0) + \frac{2A_5}{\omega} C_1 + \left(\frac{4}{\omega^2} + \frac{2A_6}{\omega}\right) K_4 - \frac{2 \operatorname{tg} \omega\tau}{\omega} \alpha_4,$$

$$\alpha_7 = z(0) + \frac{5}{\omega^3 \cos \omega\tau} C_1 + \frac{5}{2\omega^2} \operatorname{tg} \omega\tau K_4 + \frac{\alpha_4}{\omega},$$

$$\alpha_8 = \frac{A_2}{A_1} V_y(0) \cos \omega\tau - \frac{V_y(0)}{\omega} \sin \omega\tau + \frac{A_3}{A_4}\left(\frac{A_2}{A_1} \sin \omega\tau + \frac{1}{\omega} \cos \omega\tau\right).$$

În constantele de mai sus am notat

$$A_1 = \frac{1}{4}\left[-\tau \operatorname{tg} \omega\tau \cos \omega\tau + \left(\tau + \frac{\operatorname{tg} \omega\tau}{\omega}\right)\right],$$

$$A_2 = \left[\left(-\frac{\tau}{4\omega} \cos \omega\tau + \frac{1}{4\omega^2} \sin \omega\tau\right) - \frac{\operatorname{tg} \omega\tau}{4}\left(\frac{\tau}{\omega} \sin \omega\tau + \frac{2}{\omega^2} \cos \omega\tau\right)\right],$$

$$A_3 = \operatorname{tg} \omega\tau \frac{V_y(0) \cos \omega\tau}{A_1} - 2\omega^2 y(0) + 2\omega^2 \frac{A_2}{A_1} V_y(0) \cos \omega\tau -$$

$$- 2\omega^2 \frac{V_y(0)}{\omega} \sin \omega\tau,$$

$$A_4 = 2\omega - \frac{\sin \omega\tau \operatorname{tg} \omega\tau}{A_1} - 2\omega^2\left(\frac{A_2}{A_1} \sin \omega\tau + \frac{1}{\omega} \cos \omega\tau\right),$$

$$A_5 = -\frac{1}{\cos \omega\tau}\left[-\frac{5\tau}{2\omega} + \frac{5 \operatorname{tg} \omega\tau}{2\omega^2} - \frac{3\tau}{\omega} - \frac{2}{\omega}\left(\frac{2}{\omega} \operatorname{tg} \omega\tau - \frac{3}{2}\tau\right)\right].$$

$$A_6 = -\frac{1}{\cos \omega\tau}\left[-\frac{5}{4} \tau \cos \omega\tau \operatorname{tg} \omega\tau + \frac{5}{4} \tau \sin \omega\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{4\omega} \sin \omega\tau \operatorname{tg} \omega\tau - \frac{2}{\omega}(\cos \omega\tau + \operatorname{tg} \omega\tau \sin \omega\tau)\right],$$

$$A_7 = -\left[2A_5 \sin \omega\tau - \frac{5}{\omega \cos \omega\tau}\left(\tau \sin \omega\tau + \frac{1}{\omega} \cos \omega\tau\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{\omega^2} - \frac{9}{4} \tau^2 - 3\tau\left(\frac{2}{\omega} \operatorname{tg} \omega\tau - \frac{3}{2}\tau\right)\right],$$

$$A_8 = -\left[2A_6 \sin\omega\tau - \frac{5}{2}\operatorname{tg}\omega\tau\left(\tau\sin\omega\tau + \frac{1}{\omega}\cos\omega\tau\right) - \right.$$

$$- \frac{\sin\omega\tau}{\omega} + \frac{5}{2}\left(-\tau\cos\omega\tau + \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau\right) -$$

$$\left. - \frac{3}{2\omega}\cos\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau - 3\tau(\cos\omega\tau + \operatorname{tg}\omega\tau\sin\omega\tau)\right],$$

$$A_9 = 2\sin\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau + 2\cos\omega\tau - 2,$$

$$A_{10} = A_7 - \frac{7}{\omega^2\cos\omega\tau},$$

$$A_{11} = A_8 - \frac{7}{2\omega}\operatorname{tg}\omega\tau,$$

$$A_{12} = -\frac{5}{\omega\cos\omega\tau}\left(-\frac{\tau}{\omega}\cos\omega\tau + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega\tau\right) - \frac{8}{\omega^3}\operatorname{tg}\omega\tau +$$

$$+ \frac{2A_{10}}{A_9\omega}\sin\omega\tau - \frac{2A_5}{\omega}\cos\omega\tau - \frac{2A_{10}}{A_9\omega}\cos\omega\tau -$$

$$- \frac{3}{4}\tau^3 - \frac{3\tau^2}{2}\left(\frac{2}{\omega}\operatorname{tg}\omega\tau - \frac{3}{2}\tau\right) + \tau A_7 -$$

$$- \frac{\tau A_{10}}{A_9}(2\sin\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau + 2\cos\omega\tau) + \frac{2A_5}{\omega} +$$

$$+ \frac{2\operatorname{tg}\omega\tau}{A_9\omega}A_{10},$$

$$A_{13} = -\frac{5}{2}\operatorname{tg}\omega\tau\left(-\frac{\tau}{\omega}\cos\omega\tau + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega\tau\right) - \frac{4}{\omega^2}\sin\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau +$$

$$+ \frac{2A_{11}}{A_9\omega}\sin\omega\tau - \frac{5}{2}\left(\frac{\tau}{\omega}\sin\omega\tau + \frac{1}{\omega^2}\cos\omega\tau\right) - \frac{3}{2\omega^2}\cos\omega\tau -$$

$$- \frac{2A_6}{\omega}\cos\omega\tau - \frac{2\sin\omega\tau A_{11}}{A_9\omega} - \frac{3}{2}\tau^2(\cos\omega\tau + \operatorname{tg}\omega\tau\sin\omega\tau) +$$

$$+ \tau A_8 - \frac{\tau A_{11}}{A_9}(2\sin\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau + 2\cos\omega\tau) +$$

$$+ \frac{4}{\omega^2} + \frac{2A_6}{\omega} + \frac{2\operatorname{tg}\omega\tau A_{11}}{A_9\omega},$$

$$A_{14} = \frac{2\operatorname{tg}\omega\tau V_x(0)}{A_9\omega} - \frac{\tau V_x(0)}{A_9}(2\sin\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau + 2\cos\omega\tau) - x(0),$$

$$A_{15} = -\frac{5}{2\omega\cos\omega\tau}\left(\frac{\tau}{\omega}\sin\omega\tau + \frac{1}{\omega^2}\cos\omega\tau\right) + \frac{\sin\omega\tau}{\omega}A_5 +$$
$$+ \frac{\sin\omega\tau\,\mathrm{tg}\,\omega\tau\,A_{10}}{A_9\omega} + \frac{A_{10}}{A_9\omega}\cos\omega\tau - \frac{5}{2\omega^3} - \frac{3\tau^2}{2\omega} -$$
$$- \frac{2}{\omega}\tau\left(\frac{2}{\omega}\mathrm{tg}\,\omega\tau - \frac{3}{2}\tau\right) + \frac{5}{\omega^3\cos\omega\tau} - \frac{A_{10}}{A_9\omega},$$

$$A_{16} = -\frac{5\,\mathrm{tg}\,\omega\tau}{4}\left(\frac{\tau}{\omega}\sin\omega\tau + \frac{1}{\omega^2}\cos\omega\tau\right) + \frac{\sin\omega\tau\,A_6}{\omega} +$$
$$+ \frac{\sin\omega\tau\,\mathrm{tg}\,\omega\tau\,A_{11}}{A_9\omega} + \frac{5}{4}\left(-\frac{\tau}{\omega}\cos\omega\tau + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega\tau\right) +$$
$$+ \frac{A_{11}}{A_9\omega}\cos\omega\tau - \frac{5}{4\omega^2}\cos\omega\tau\,\mathrm{tg}\,\omega\tau + \frac{5}{2\omega^2}\mathrm{tg}\,\omega\tau -$$
$$- \frac{2\tau}{\omega}(\cos\omega\tau + \mathrm{tg}\,\omega\tau\sin\omega\tau) - \frac{A_{11}}{A_9\omega},$$

$$A_{17} = \frac{\sin\omega\tau\,\mathrm{tg}\,\omega\tau\,V_x(0)}{A_9\omega} + \frac{V_x(0)\cos\omega\tau}{A_9\omega} - \frac{V_x(0)}{A_9\omega} - z(0).$$

Aplicație

Cu următoarele date:

$x(0)$	$= 15\cdot10^3$ m	$V_x(0)$	$= -120$ m/s
$z(0)$	$= 9\cdot10^3$ m	$V_z(0)$	$= 0$
$y(0)$	$= 4\cdot10^3$ m	$V_y(0)$	$= 0$
R	$= 6{,}971\cdot10^6$ m	ω	$= 0{,}00119$ rad/s
		τ	$= 80$ s

s-au calculat după teoria dezvoltată mai sus componentele accelerației datorită tracțiunii a_x, a_z, a_y, caracterizînd manevra de întîlnire cu minimum de combustibil, rezultatele fiind înscrise în graficele din figurile 3, 4 și 5.

3. CONCLUZII

Analiza întreprinsă în prezenta lucrare arată că metodele obișnuite ale calculului variațional se pot aplica fără dificultate și pot duce la unele rezultate utile. Pentru manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil se poate ușor constata că, avînd fixate la acostare mărimile x, z, y, V_x, V_z, V_y, a_x, a_z, a_y și putînd estima — ceea ce practic este posibil la începutul manevrei de întîlnire — cinci din mărimile x, z, y, V_x, V_z, V_y, problema variațională a manevrei revine la o problemă de extremum condiționat.

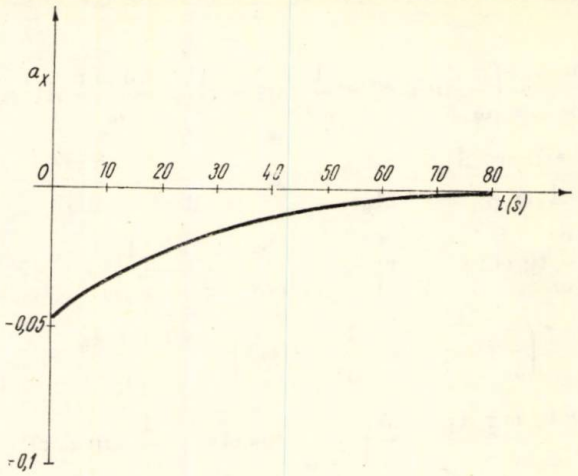


Fig. 3

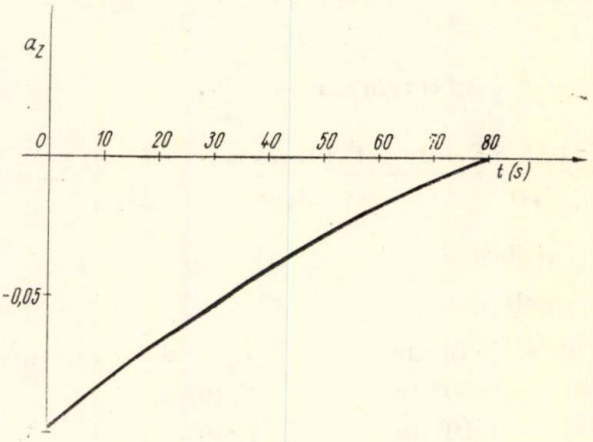


Fig. 4

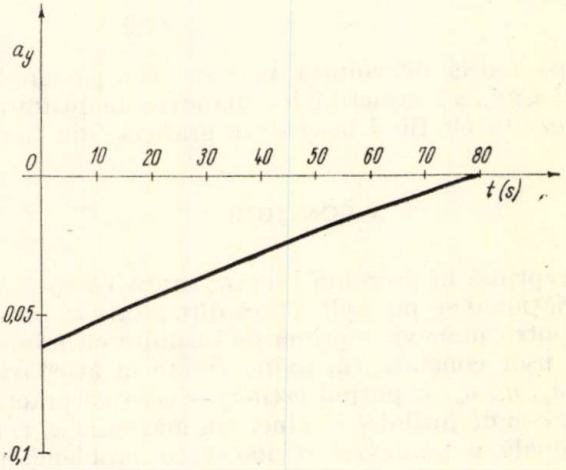


Fig. 5

Cu datele din paragraful precedent, calculele efectuate au dus pentru manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil la legile de variație din figurile 3, 4 și 5 pentru componentele accelerației datorite tracțiunii a_x, a_z, a_y.

Deoarece $x(0)$, $z(0)$ și $y(0)$ sînt pozitive, componentele a_x, a_z, a_y sînt negative, cu alte cuvinte componentele tracțiunii pe unitatea la masă sînt îndreptate în sens invers axelor x, z, y. Se remarcă variația aproape liniară a componentelor a_z, a_y.

Deoarece practic tracțiunea pe unitatea de masă nu poate scădea sub o anumită valoare, rezultă că a_x, a_z, a_y devin în realitate nule pentru un timp $\tau_1 < \tau$. Diferența de timp $\tau - \tau_1$ poate servi pentru finisarea manevrei de întîlnire, care poate cere chiar inversări de tracțiune, bineînțeles cu instalații auxiliare sau cu o rezervă de combustibil pentru instalația principală de propulsie. În exemplul considerat se vede că direcția axei x, în care există o viteză inițială, componenta a_x atinge practic valoarea zero mult înaintea celorlalte două componente, ceea ce corespunde realității.

Primită la redacție la 7 august 1965

BIBLIOGRAFIE

1. J. E. Irving, *Low thrust flight Space Technology, Chap.* 10, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1959.
2. B. H. Billik, *Some optimal low-acceleration redez vous maneuvres*, AIAA Journal, **2**, *3* 510—516 (1964).
3. Al. Marinescu, *Urcarea optimă a rachetelor cu un singur etaj*. St. cerc. mec. apl., *2* (1964)
4. M. M. Niță, D. St. Andreescu, *Zborul rachetei*, București, Edit. M.F.A., 1964.

RECENZII

PROF. Dr. TECHN. PAL CSONKA, — *Membranschalen*, „Bauingenieur-Praxis" Nr. 16, Berlin-München, Edit. W. Ernst und Sohn, 1966, 92 p.

În colecția de lucrări „Bauingenieur-Praxis" („Practica inginerului constructor") a cunoscutei edituri W. Ernst und Sohn din Berlin, a apărut recent un studiu al plăcilor curbe subțiri în stare de membrană de prof. dr. techn. Pal Csonka din Budapesta, personalitate binecunoscută printre inginerii constructori pentru lucrările lui în domeniul plăcilor autoportante.

Lucrările lui P. Csonka au fost publicate în reviste de specialitate din diferite țări. Și la noi în țară a publicat în „Revista construcțiilor și materialelor de construcții", în 1967, un articol privind problema învelitorilor din plăci curbe subțiri de translație, iar recent, în 1966, un studiu referitor la plăci curbe subțiri sectoriale pe contur poligonal.

În numeroasele articole publicate, P. Csonka a atacat în special problemele ce se pun inginerului constructor în studiul alcătuirii acoperișurilor din plăci curbe subțiri considerate în starea lor de membrană, de forme și structuri foarte variate, întîlnite în arhitectura modernă.

Articolele se caracterizează printr-o expunere clară și concisă, iar soluțiile se remarcă prin simplitatea și eleganța lor.

În cartea de față, autorul sistematizează ideile și metodele folosite în soluționarea diferitelor probleme atacate în publicațiile anterioare, prezentînd o lucrare de sinteză a plăcilor curbe subțiri în teoria de membrană.

În prefața lucrării, autorul arată că scopul urmărit este de a prezenta problemele astfel ca să poată fi ușor urmărite și înțelese de tinerii ingineri și tehnicieni fără a recurge la desfășurări matematice complicate, lucru de care cititorul se convinge ușor pe măsură ce înaintează în citirea cărții.

În introducerea cărții sînt prezentate noțiunile de bază, caracteristicile stării de membrană, problema curburii, clasificarea tipurilor de plăci fără dezvoltări de calcule, dar cu prezentarea de figuri clare și sugestive care permit înțelegerea lesnicioasă a elementelor ce intervin în soluționarea problemelor.

În capitolul II se examinează bazele teoretice și elementele matematice necesare, precizînd funcțiile ce dau suprafața, funcțiile de încărcare și ale eforturilor cu studiul variației acestora. Se stabilesc apoi ecuațiile generale de echilibru, funcțiile de eforturi după Pucher și condițiile de margine. Capitolul se încheie cu studiul eforturilor în suprafețele afine. Toate elementele sînt simple și clar expuse și prezentate în forma în care se folosesc în capitolul următor.

Capitolul III ocupă peste jumătate din volumul cărții, alcătuind esența lucrării, și anume : aplicațiile practice ale plăcilor curbe subțiri pentru diferite tipuri de acoperșuri formate din suprafețe de forme diferite așezate pe variate forme de contur în plan.

După prezentarea formulelor de bază generale, autorul trece la aplicarea lor pentru următoarele tipuri de suprafeţe :

— paraboloidul de rotaţie pe contur triunghiular echilateral, isoscel, dreptunghiular şi pătrat pentru sarcini uniforme şi parabolice ;

— suprafeţe de translaţie pe contur dreptunghiular cu diferite tipuri de încărcări, cupole şi suprafeţe cilindrice şi conoizi pe contur dreptunghiular ;

— hiperboloizi parabolici cu generatoare rectilinii ;

— paraboloizi hiperbolici în şa pe contur dreptunghiular ;

— diverse tipuri de acoperişuri alcătuite din diferite feluri de plăci strîmbe sau curbe, intersectate, cu rezemări punctuale avînd margini drepte sau curbe, cum se ivesc în numeroase forme arhitecturale moderne.

Un studiu mai amănunţit este consacrat paraboloidului pe contur eliptic şi unor tipuri de suprafeţe de revoluţie.

Capitolul se încheie cu suprafeţele de rezistenţă egală, studiate în special de prof. I. Pelikan de la Budapesta.

Cartea se încheie cu un capitol-anexă, consacrat studiului unor probleme ce intervin în calculul plăcilor curbe, dar care nu pot fi cuprinse în teoria de membrană.

Se examinează întîi sarcina de voalare pentru care se dau formule experimentale, apoi se cercetează perturbaţiile marginale cu un studiu mai amănunţit pentru suprafeţele cilindrice spre a putea trage unele indicaţii practice. Ultimul paragraf al acestei anexe cuprinde recomandări de ordin practic constructiv privind forma suprafeţelor, armarea plăcilor din beton armat şi particularităţi în execuţia acestora, atrăgîndu-se atenţia asupra unor măsuri de practică constructivă de care trebuie ţinut seama pentru obţinerea unei bune realizări.

Lucrarea, prin expunerea clară, ilustrată cu figuri bine alese şi sugestive care lămuresc punctele mai delicate ale descrierii, pune la îndemîna cititorului elementele necesare pentru a putea rezolva o serie de probleme din domeniul plăcilor curbe subţiri, de forme şi alcătuiri curent întîlnite în practică.

Dezvoltarea matematică este suficientă pentru soluţionarea problemelor puse de stabilirea eforturilor în starea de membrană, dar autorul dă şi indicaţii asupra aspectului general şi a chestiunilor pe care teoria de membrană singură nu le poate lămuri.

Cu tot numărul redus de pagini, cartea cuprinde un foarte bogat material, de mare folos inginerului care are de proiectat şi calculat plăci curbe subţiri.

O bibliografie cu autorii şi cărţile pe care cel ce doreşte să aprofundeze diferitele chestiuni tratate însoţeşte lucrarea.

Cartea se recomandă cu toată căldura atît studenţilor ce vor să se introducă în materie, cît şi inginerilor care au de proiectat astfel de lucrări. Expunerea o face accesibilă şi arhitecţilor care îşi pot da seama de implicaţiile pe care le aduc diferitele soluţii arhitecturale folosite atît de mult în alcătuirea acoperişurilor din plăci curbe subţiri.

Aurel A. Beleş

G. N. SAVIN, N. P. FLEIŞMAN, *Plastinki i obolociki s rebrami jeskosti* (Plăci plane şi curbe cu nervuri de rigidizare), Kiev, Naukova Dumka, 1964, 384 p., 109 fig.

Cartea are drept obiect expunerea problemelor legate de calculul plăcilor plane şi al plăcilor curbe cu elemente de rigidizare în forma unor curbe plane aşezate simetric faţă de planul median al pălcii. Cea mai mare parte a cărţii este dedicată studiului plăcii plane,

doar un capitol — ultimul — fiind dedicat formulării problemelor la limită pentru plăci curbe și unor metode de calcul pentru plăcile curbe de mică curbură.

Sînt formulate principalele ecuații și probleme ale plăcilor rigidizate sub forma clasică, demonstrîndu-se, pe calea folosită de Kirchhoff, pentru plăcile nerigidizate, teoreme de unicitate a soluției, după care se trece la formularea complexă a problemelor, urmînd metoda Kolosov-Mushelișvili pentru domenii multiplu-conexe, avîndu-se în vedere eficacitatea acestei metode pentru obținerea de soluții efective.

Sînt rezolvate apoi o seamă de probleme concrete de mai mică sau mai mare generalitate pentru diferite forme de plăci și pentru diferite condiții la limită, utilizîndu-se, printre alte metode, dezvoltările Fourier sau reducerea la ecuații de tip Fredholm.

Lucrarea reflectă în mare parte preocupările cercetătorilor din Kiev din cadrul Institutului de mecanică al Academiei Ucrainene de Științe, grupați în jurul Acad. G. N. Savin, privind studiul plăcilor cu găuri rigidizate sau nerigidizate, cercetări care au creat o școală binecunoscută și apreciată de către specialiști.

Cartea se adresează cercetătorilor și proiectanților din domeniile construcțiilor civile și industriale și construcțiilor de mașini, precum și cercetătorilor din domeniul teoriei elasticității, cărora le este utilă prin conținutul său de calcule duse pînă la tabele numerice, alături de dezvoltări teoretice interesante în cadrul problemei plane a elasticității pentru domenii multiplu conexe.

D. Drăghicescu

C. F. KOLLBRUNNER și N. HAJDIN, *Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Profil* (Torsiunea barelor cu pereți subțiri cu profil închis), Schweitzer Stahlbau-Vereinigung (Camera elvețiană de construcții metalice), Mitteilungen der Technischen Kommission (Comunicările Comisiei tehnice), Zürich, Verlag Schweitzer Stahlbau-Vereinigung, *32* (1966), 176 p. + 4 tabele pliante.

Cei doi autori au tratat problema torsiunii barelor cu pereți subțiri cu profil deschis în două broșuri anterioare [1]), evidențiind atît aspectele de statică care se pun, cît și pe cele de rezistență a materialelor. Problema se complică în cazul profilelor cu contur închis, în primul rînd deoarece nu se mai pot neglija deformațiile de lunecare în suprafața mediană. Aceste chestiuni prezintă o importanță deosebită pentru proiectarea inginerească, fiind tratate de autori cu multă competență, punînd accentul atît pe partea teoretică, cît și pe posibilitățile de aplicare practică.

Lucrarea este împărțită în patru capitole.

În primul capitol se prezintă o teorie aproximativă a barelor cu pereți subțiri cu profil închis, prin analogie cu teoria corespunzătoare barelor cu pereți subțiri cu profil deschis; se pune în evidență modul de deformare al barei și se dau unele exemple de calcul. O soluție mai exactă a problemei este dată în capitolul II; se studiază deformarea barei și se pun în evidență eforturile care apar pe secțiune. Menționăm integrarea ecuației diferențiale a problemei cu diferite condiții la limită. Se consideră astfel torsiunea barelor supuse atît acțiunii unor sarcini transversale (moment de torsiune concentrat într-un punct curent pe axa barei sau

[1]) Recenzate în St. cerc. mec. apl., **19**, *3* (1965) și **22**, *3* (1966).

moment de torsiune distribuit), cît şi acţiunii unor sarcini longitudinale (bimoment concentrat la un capăt al barei sau într-un punct curent al axei sale sau bimoment distribuit).

Calculul prin aproximarea cu plăci subţiri poligonale este făcut în capitolul III ; se pune în evidenţă modul de deformare al barei şi se rezolvă problema sub formă matriceală. Menţionăm un exemplu de calcul pentru o secţiune casetată. În particular se dau soluţii aproximative pentru profilele cu o axă de simetrie. În capitolul IV se pun în evidenţă unele metode de statică, utile în rezolvarea problemelor static nedeterminate.

Lucrarea este însoţită de o bibliografie de peste 50 de titluri. Două anexe cuprind tabele de valori pentru profile închise în formă dreptunghiulară şi în formă lenticulară (în formă de burtă de peşte).

Prin claritatea expunerii şi prin bogăţia materialului prezentat, această monografie poate fi folosită cu succes în practica de proiectare şi ca material informativ în cercetarea ştiinţifică.

P. P. Teodorescu

I. BABUŠKA, M. PRÁGER şi E. VITÁSEK, *Numerical Processes in Differential Equations* (Procese numerice în ecuaţii diferenţiale), Praga, SNTL, Publishers of technical literature ; Londra—New York—Sydney, Interscience Publishers, J. Wiley & Sons, 1966, X + 352 p.

Această lucrare constituie rezultatul studiilor efectuate între 1958 şi 1964 la Secţia de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale a Institutului de matematică al Academiei de Ştiinţe din Praga, sub conducerea prof. I. Babuška. Ea este dedicată în special problemelor care au preocupat pe autori ; se prezintă astfel diferite metode de calcul, interesante din punct de vedere teoretic şi care au de asemenea un interes practic pregnant. Exemplele de calcul care însoţesc expunerea nu au numai un caracter didactic ; ele ilustrează în primul rînd diferit fenomene care apar în practica de calcul sau a ideilor prezentate sau confruntă concluziile teoretice cu rezultatele practice.

În special lucrarea se limitează la probleme liniare, exceptînd probleme cu condiţii iniţiale pentru ecuaţii diferenţiale. Nu se fac de loc consideraţii în legătură cu probleme de valori proprii şi ecuaţii de tip hiperbolic.

Menţionăm de asemenea că metodele prezentate sînt convenabile pentru calculul cu ajutorul maşinilor electronice de calcul.

Volumul cuprinde şase capitole, urmate de o bibliografie de circa 80 de titluri şi un indice tematic.

După o scurtă introducere (capitolul 1), privind în special optimizarea şi stabilitatea numerică, se trece în capitolul 2 la problema stabilităţii proceselor numerice şi a unor procese de optimizare a calculelor ; menţionăm diferite estimări asimptotice şi studii de stabilitate numerică, O atenţie specială este acordată aproximării optimale a unei funcţionale într-un spaţiu Hilbert. Unele probleme de valori iniţiale pentru ecuaţii diferenţiale ordinare sînt cuprinse în capitolul 3 ; se pune accentul pe metoda diferenţelor finite şi pe formulele de tip Runge-Kutta, pentru care se fac estimări de erori.

În capitolul 4 se consideră probleme la limită pentru ecuaţii diferenţiale ordinare ; după ce se arată cum se pot transforma problemele la limită în probleme cu valori iniţiale, se trece la metoda diferenţelor finite. Pentru ecuaţiile de ordinul doi se indică şi un proces de optimizare. În legătură cu sistemele de ecuaţii algebrice liniare care apar în soluţionarea problemelor, se fac apoi diferite consideraţii, dîndu-se metode practice de rezolvare. Menţionăm apoi

aplicarea metodelor variaţionale de calcul. Autorii fac şi unele observaţii cu privire la stabilitatea proceselor numerice în rezolvarea problemelor la limită prin metodele aproximării optimale. Probleme analoge pentru ecuaţii cu derivate parţiale de tip eliptic se pun în capitolul 5 ; se foloseşte metoda diferenţelor finite şi se dau soluţii în special pentru ecuaţiile de ordinul doi. Şi în acest caz se introduc metode variaţionale, de exemplu metoda Kantorovici. În capitolul 6 se studiază ecuaţii cu derivate parţiale de tip parabolic ; metoda diferenţelor finite este aplicată pentru probleme uni- şi bidimensionale.

Din studiul acestei lucrări se desprinde ideea unei „arte a calculului numeric" ; aceasta nu impietează asupra caracterului matematic al problemei, dar sugerează faptul că pentru calculul numeric se cere talent, cunoştinţe şi experienţă, abilitate în alegerea a diferite metode de calcul şi în combinarea lor. Lucrarea este deosebit de interesantă şi are un caracter profund original ; ea poate fi folosită cu succes atît în practica de calcul, cît şi în cercetarea ştiinţifică în această direcţie.

P. P. Teodorescu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 24, nr. 2 1967

SUMAR

STUDII

Pag.

I. ANTON şi O. POPA, Determinarea sensibilităţii la cavitaţie a unei reţele de profile de formă oarecare 255

H. PASCAL, Curgerea unui amestec compresibil de lichid şi gaz printr-un mediu poros în regim tranzitoriu 271

D. MATEESCU, Aripi poligonale cu profil rombic în regim supersonic 291

R. WOINAROSKI, Cinematica solidului rigid fără punct fix în spaţiul euclidian cu patru dimensiuni 319

D. MANGERON, GH. SILAŞ, A. BRÎNDEU, şi A. HEGEDÜS, Asupra mişcării staţionare a unui sistem vibropercutant cînd ciocnirea nu se consideră instantanee 335

N. IOSIPESCU, Consideraţii asupra unui procedeu nou de încercare la forfecare pură a betonului 347

D. BODNĂRESCU, Asupra metodei Raskin şi Bagramov pentru dimensionarea garniturilor de prăjini de pompare la oboseală 361

D. PAVELESCU, Principalii parametri ai uzurii suprafeţelor plane în mişcare alternativă de alunecare. Instalaţie de modelare şi măsură (I) 369

N. G. POPINCEANU şi M. D. GAFIŢEANU, Contribuţii asupra noilor metode de încercare a rulmenţilor 381

R. C. BOGDAN şi T. V. HUNCHER, Sistematizarea generală şi calculul unitar al mecanismelor fundamentale plane, pentalatere şi patrulatere 401

CHR. PELECUDI, Folosirea acceleraţiilor compuse superioare în studiul multipolilor şi mecanismelor plane 423

M. GR. NĂSTASE, Stabilirea pe cale radiometrică a condiţiilor de utilizare optimă a surselor radioactive în gamadefectoscopie 443

NOTE

T. G. REDLOV, Vectori cvasiliberi şi poligoane funiculare spaţiale 455

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

CENTENARUL ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

* * * Sesiunea generală ştiinţifică din 21—24 septembrie 1966. Comunicări din domeniul mecanicii aplicate 461

RECENZII 473

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 481

St. Cerc. Mec. Apl., Tom. 24, Nr. 2, P. 253—484, Bucureşti, 1967

DETERMINAREA SENSIBILITĂȚII LA CAVITAȚIE A UNEI REȚELE DE PROFILE DE FORMĂ OARECARE *)

I. ANTON
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
și O. POPA
Institutul politehnic din Timișoara

532:517

Se construiește o metodă teoretică de determinare a sensibilității la cavitație a unei rețele de profile de formă oarecare, înțelegînd prin aceasta dependența funcțională dintre mărimile critice corespunzătoare incipienței fenomenului de cavitație: unghiul de incidență, coeficientul de presiune și abscisa relativă a acestuia. Raționamentul respectă ipoteza după care punctul de incipiență a fenomenului de cavitație coincide practic cu punctul de maxim absolut realizat de distribuția vitezei potențiale pe conturul profilului. Metoda propusă se reduce la soluționarea unor ecuații integrale de tip Fredholm de speța a doua. Folosind teoremele lui Fredholm, se demonstrează existența și unicitatea soluției obținute în ipoteza că circulația vitezei este determinată.

1. ENUNȚAREA METODEI

Ne propunem determinarea sensibilității la cavitație a unei rețele de profile fără a formula vreo restricție privind parametrii săi geometrici și hidrodinamici.

În conformitate cu definiția enunțată în cadrul unor lucrări anterioare [1] și [2], prin sensibilitatea la cavitație a unei rețele de profile hidrodinamice vom înțelege dependența funcțională dintre coeficientul minim absolut de presiune k_0, unghiul de incidență critic α_c și abscisa relativă λ_0/l, la care și unde se realizează acest minim absolut. Analitic, sensibilitatea la cavitație este exprimată de următoarele două funcții:

$$k_0 = k_0(\alpha_c), \tag{1.1}$$

$$\alpha_c = \alpha_c(\lambda_0/l). \tag{1.2}$$

*) Prezentată la Conferința de mecanică, București, septembrie 1965. Publicată în Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. appl. (în limba engleză), **11**, 2 (1967).

În cadrul lucrărilor citate au fost acceptate două ipoteze :

1) punctul de incipienţă a fenomenului de cavitaţie, de abscisă relativă λ_0/l, coincide practic cu punctul în care distribuţia de viteze realizează un maxim absolut ;

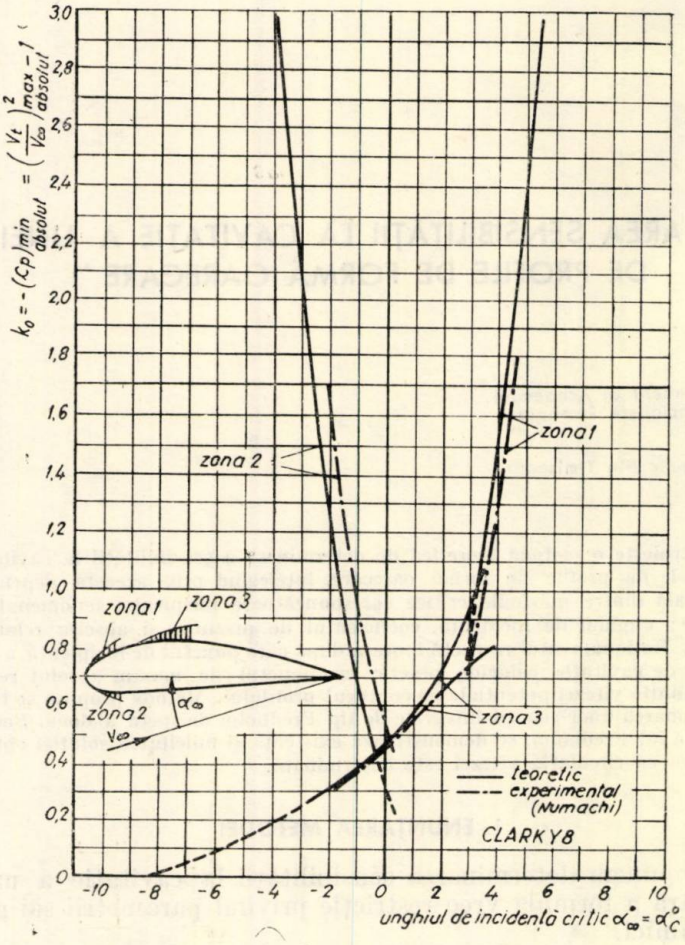


Fig. 1 a

2) cercetarea maximelor funcţiei de viteze poate fi făcută respectînd ipoteza mişcării potenţiale.

Ipotezele enunţate se folosesc şi se menţin numai în procesul dezvoltărilor de primă aproximaţie.

În mod obişnuit, aşa după cum arată experienţa, punctele de incipienţă a fenomenului de cavitaţie se distribuie în trei zone : o zonă aferentă extradosului profilului şi două zone aferente bordului de atac (pe extradosul şi pe intradosul acestuia). În scopul exemplificării, reproducem în figura 1 curbele teoretice de sensibilitate la cavitaţie ale profilului Clark Y, obţinute printr-o metodă teoretică originală în cadrul unei lucrări anterioare. Peste aceste curbe, în scopul ilustrării validităţii

ipotezelor și a metodei teoretice propuse, sînt suprapuse rezultatele experimentale obținute de F. Numachi [3] pentru același profil.

În general, pornind de la distribuția de viteze pe conturul profilului C, care poate fi determinată fie prin metoda transformărilor conforme,

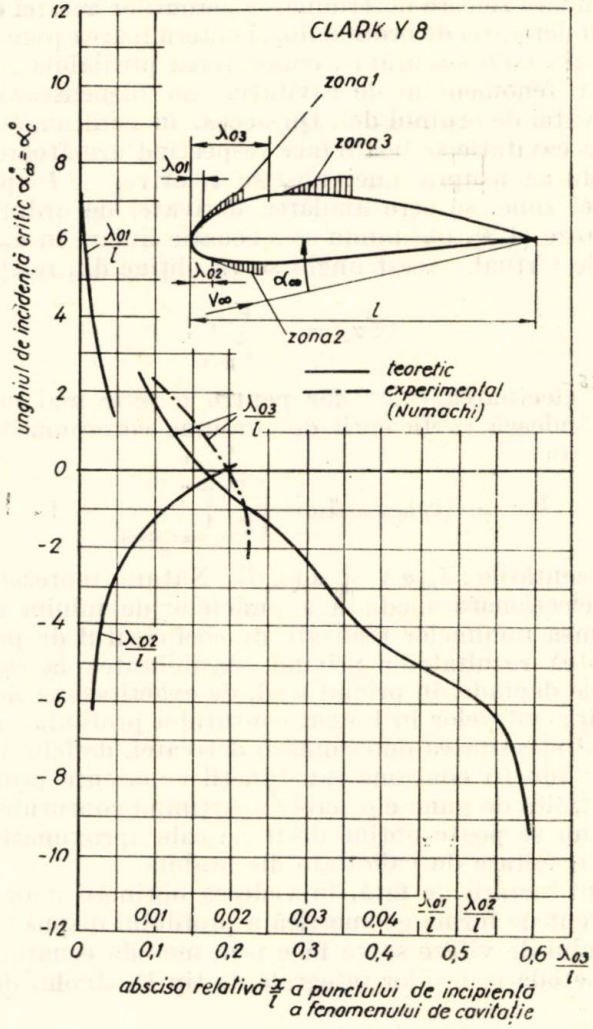


Fig. 1 b

fie prin metoda ecuațiilor integrale sau a ecuațiilor integrale singulare, în toate cazurile amintite viteza fiind exprimabilă în forma

$$V_t = V_{tx} \cos \alpha_\infty + V_{ty} \sin \alpha_\infty , \tag{1.3}$$

cercetarea maximelor acestei funcții, respectiv determinarea punctului de incipiență a fenomenului de cavitație, presupune calculul derivatei de

ordinul întîi a funcției de viteze în raport cu s, abscisa curbilinie a conturului C :

$$V_{t,s} = V_{tx,s} \cos \alpha_\infty + V_{ty,s} \sin \alpha_\infty \; ; \quad V_{t,s} = \frac{\partial V_t}{\partial s}. \tag{1.4}$$

În continuare se cere determinarea zerourilor acestei derivate, cercetarea semnului derivatei de ordinul doi și determinarea punctului de maxim absolut. Dar, așa cum s-a arătat, cunoașterea prealabilă a celor trei zone de incipiență a fenomenului de cavitație ne dispensează de cercetarea semnului derivatei de ordinul doi. De aceea, în continuare, determinarea sensibilității la cavitație se poate face respectînd următoarele etape :

a) fixîndu-ne asupra unei abscise relative x/l aparținînd uneia dintre cele trei zone, se cere anularea derivatei de ordinul întîi (1.4) a funcției de viteze (1.3), obținîndu-se o ecuație liniară în α_∞ : un unghi de incidență critic virtual. Acest unghi se va obține din relația

$$\operatorname{tg} \alpha_c = - \frac{V_{tx,s}}{V_{ty,s}}, \tag{1.5}$$

b) după efectuarea calculelor pentru o serie mai mare de abscise relative se calculează coeficienții de presiune corespunzători, respectînd relația cunoscută

$$k_0 = - (c_p)_{\text{min absolut}} = \left(\frac{V_t}{V_\infty} \right)^2_{\text{max absolut}} - 1, \tag{1.6}$$

și se fac reprezentările : $k_0(\alpha_c)$ și $\alpha_c(\lambda_0/l)$. Natura reprezentărilor grafice mijlocește o selecționare imediată a punctelor de minim absolut și relativ din mulțimea minimelor realizate de coeficientul de presiune.

Exactitatea rezultatelor privind sensibilitatea la cavitație a unei rețele de profile depinde, în primul rînd, de exactitatea soluțiilor obținute pentru repartiția vitezelor în lungul conturului profilului, iar în al doilea rînd, dată fiind necesitatea determinării derivatei, de felul în care se obțin aceste soluții : funcții continue sau funcții cunoscute prin valorile luate pe o mulțime finită de puncte discrete aparținînd conturului C. În ultimul caz, derivata nu se poate obține decît pe cale aproximativă, conducînd, în general, la rezultate de validitate discutabilă.

În cadrul lucrării de față, în vederea obținerii unor soluții cît mai exacte, indiferent de forma geometrică a profilului dispus în rețea, determinarea cîmpului de viteze se va face prin metoda ecuațiilor integrale, și anume prin metoda ecuațiilor integrale de tip Fredholm de speța a doua [4], [5] și [6].

În acest caz, soluțiile, deși de exactitate dorită, se obțin sub formă de valori luate de viteza V_t pe o mulțime finită de puncte discrete,ceea ce conduce la dificultățile semnalate în privința determinării derivatei.

În scopul obținerii unor soluții la fel de exacte atît pentru viteză, cît și pentru derivata sa, se impune ca soluțiile să fie determinate, în ambele cazuri, pe aceeași cale. De aceea în cele ce urmează se va construi o metodă care ne oferă derivata funcției de viteze în lungul conturului profilului tot sub forma soluției unei ecuații integrale de tip Fredholm de speța a doua.

2. DETERMINAREA REPARTIȚIEI DE VITEZE PE CONTURUL PROFILULUI

Să considerăm mișcarea plană și permanentă a unui fluid ideal și incompresibil în jurul rețelei de profile de contur C și de perioadă $\omega = te^{i\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)}$ (fig. 2). În acest caz, potențialul complex al mișcării se

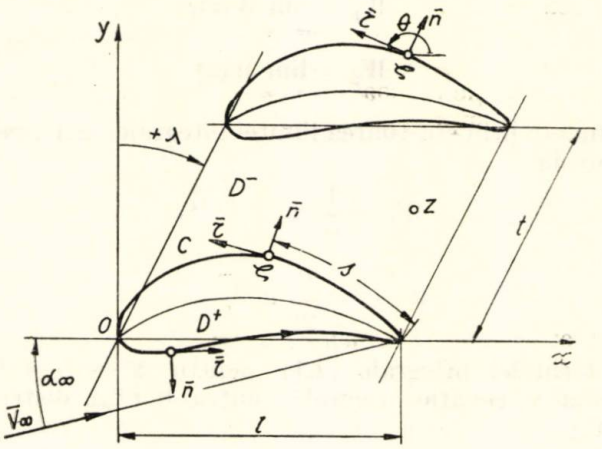


Fig. 2

reprezintă cu ajutorul unei funcții olomorfe și periodice, definită pe D^-, domeniul exterior rețelei de profile. Viteza complexă

$$W(z) = V_x(z) - iV_y(z),$$

fiind derivata potențialului complex, va fi tot o funcție olomorfă și periodică, definită pe același domeniu D^-.

Într'un punct oarecare $z \in D^-$, viteza complexă $W(z)$ poate fi definită, cu ajutorul valorilor pe care le ia pe conturul C, prin intermediul formulei integrale Cauchy :

$$W(z) = W_\infty - \frac{1}{2\pi i}\int_C K(\zeta, z; t, \lambda)\, W(\zeta)\, d\zeta, \qquad z \in D^-, \zeta \in C, \tag{2.1}$$

unde sensul de integrare acceptat este cel antiorar și unde funcția periodică $K(\zeta, z; t, \lambda)$ are expresia

$$K(\zeta, z; t, \lambda) = \frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \operatorname{cth}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}(\zeta - z)\right], \qquad z \in D^-, \zeta \in C, \tag{2.2}$$

Prin $W_\infty = V_\infty e^{-i\alpha_\infty}$ s-a notat media vitezelor asimptotice $W_1 = V_1 e^{-i\alpha_1}$ și $W_2 = V_2 e^{-i\alpha_2}$, prin t pasul rețelei și prin λ unghiul de instalare al rețelei (fig. 2).

Deoarece

$$\lim_{x \to \pm\infty} K(\zeta, z; t, \lambda) = \mp \frac{\pi}{t} e^{i\lambda}$$

și deoarece pentru Γ, circulația în jurul profilului dispus în rețea, convenim a accepta ca sens pozitiv pe cel orar, deci

$$\Gamma = -\int_C W(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \tag{2.3}$$

rezultă că vitezele asimptotice W_1 și W_2, definite după cum urmează:

$$W_1 = \lim_{x\to-\infty} W(z), \tag{2.4}$$

$$W_2 = \lim_{x\to+\infty} W(z) \tag{2.5}$$

și care se dobîndesc prin efectuarea limitei integralei (2.1), pentru $x \to \pm\infty$, vor avea expresia

$$W_1 = \frac{\Gamma}{2t}\, e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)}, \tag{2.6}$$

$$W_2 = -\frac{\Gamma}{2t}\, e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)}. \tag{2.7}$$

Limita formulei integrale (2.1) pentru $z \to \zeta_0 \in C$ ne va conduce la următoarea ecuație integrală pentru $W(\zeta_0)$, distribuția vitezelor pe conturul C:

$$W(\zeta_0) = 2W_\infty - \frac{1}{\pi i}\int_C K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)\, W(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \quad \zeta, \zeta_0 \in C. \tag{2.8}$$

$K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)$, nucleul ecuației integrale (2.8), este singular; el are un pol simplu în $\zeta = \zeta_0$, integrala urmînd a se considera în sensul valorii principale după Cauchy.

Notînd prin θ unghiul format de $\bar{\tau}$, tangenta pozitivă la conturul C, cu axa reală Ox și prin V_t, respectiv V_n, viteza tangentă și normală la conturul C, prin faptul că C este linia de curent, iar normala la contur este orientată spre D^-, vom avea

$$W(\zeta)e^{i\theta} = V_t(s) + iV_n(s) = V_t(s), \qquad s = \int_l^\zeta |\,\mathrm{d}\zeta\,|. \tag{2.9}$$

Înmulțind cu $e^{i\theta}$ ecuația integrală (2.8), ținînd seama de (2.9) și reținînd numai partea reală a expresiei obținute, rezultă o ecuație integrală pentru viteza V_t:

$$V_t(s_0) + \int_C \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\, e^{i\theta_0} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)\right\} V_t(s)\mathrm{d}s = 2V_\infty \cos(\theta_0 - \alpha_\infty). \tag{2.10}$$

Ecuația obținută are nucleul și termenul liber continue și reprezintă o ecuație integrală de tip Fredholm de speța a doua.

Ecuația integrală omogenă corespunzătoare ecuației integrale (2.10) va fi de forma

$$\mathring{V}_t(s_0) + \int_C \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\, e^{i\theta_0} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)\right\} \mathring{V}_t(s)\mathrm{d}s = 0. \tag{2.11}$$

În cadrul lucrării citate [6], folosind teoremele enunțate de Fredholm, se demonstrează existența soluției generale a ecuației neomogene (2.10) și unicitatea ei atunci cînd circulația Γ în jurul profilului este determinată. Soluția generală a problemei se obține prin rezolvarea unui sistem de ecuații integrale : două ecuații integrale neomogene, deduse din (2.10) pentru cazul particular al scurgerii în direcția axei Ox și a axei Oy, ambele mișcări fiind aciclice, și ecuația omogenă (2.11), corespunzătoare mișcării ciclice. Soluțiile se determină prin reducerea sistemului de ecuații integrale la un sistem echivalent de ecuații liniare. Gradul de exactitate a soluției va fi funcție de ordinul determinantului sistemului de ecuații echivalent, iar soluția se prezintă sub forma valorilor luate de funcția V_t pe o mulțime finită de puncte discrete, aparținînd conturului C.

3. DETERMINAREA DERIVATEI VITEZEI v_t CA SOLUȚIE A UNEI ECUAȚII INTEGRALE DE TIP FREDHOLM DE SPEȚA A DOUA

Vom porni de la ecuația integrală definită de relația (2.10), pe care o vom scrie sub forma următoare :

$$V_t(s_0) = \operatorname{Re}\left\{2W_\infty e^{i\theta_0} - \frac{1}{\pi i}\int_C e^{i\theta_0} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)\, W(\zeta)\, d\zeta\right\}, \qquad \zeta, \zeta_0 \in C.$$

Derivînd în raport cu arcul s_0, vom obține

$$V_{t,s_0} = \operatorname{Re}\left\{[2W_\infty e^{i\theta_0}]_{,s_0} - \frac{1}{\pi i}\int_C [e^{i\theta_0} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)]_{,s_0} W(\zeta)\, d\zeta\right\}, \quad (3.1)$$

operația de derivare sub semnul integral fiind permisă deoarece partea reală a integralei, respectiv partea imaginară a funcției de sub semnul integral, este continuă împreună cu derivata ei în raport cu s_0 pe tot domeniul de definiție.

Deoarece

$$d\zeta_0 = e^{i\theta_0} ds$$

și

$$\frac{\partial}{\partial s} \equiv e^{i\theta_0} \frac{d}{d\zeta_0}, \quad (3.2)$$

expresia (3.1) se va putea scrie sub formă următoare :

$$V_{t,s_0} = \operatorname{Re}\left\{e^{i\theta_0} \frac{d}{d\zeta_0}[2W_\infty e^{i\theta_0}] - \right.$$
$$\left. - \frac{e^{i\theta_0}}{i\pi}\int_C \frac{d}{d\zeta_0}[e^{i\theta_0} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)]\, W(\zeta) d\zeta\right\}. \quad (3.3)$$

Pentru a putea ajunge la forma unei ecuații integrale de tip Fredholm de speța a doua, vom căuta o formă convenabilă pentru expresia

de sub semnul integral. Efectuînd derivata acestui termen, vom obține

$$\frac{d}{d\zeta_0}\left[e^{i\theta_0}K(\zeta,\zeta_0;t,\lambda)\right]=\frac{de^{i\theta_0}}{d\zeta_0}K+e^{i\theta_0}\frac{dK}{d\zeta_0}, \tag{3.4}$$

dar, pe de o parte, ținînd seama de expresia nucleului $K(\zeta,\zeta_0;t,\lambda)$ dată de relația (2.2), pentru care în continuare vom folosi notația prescurtată K, rezultă că

$$\frac{dK}{d\zeta_0}=-\frac{dK}{d\zeta}.$$

Pe de altă parte, din

$$\frac{d}{d\zeta}\left[e^{-i\theta}K\right]=\frac{de^{-i\theta}}{d\zeta}K+e^{-i\theta}\frac{dK}{d\zeta},$$

rezultă că

$$\frac{dK}{d\zeta}=e^{i\theta}\frac{d}{d\zeta}\left[e^{-i\theta}K\right]-e^{i\theta}\frac{de^{-i\theta}}{d\zeta}K,$$

rezultat pe care înlocuindu-l în (3.4) vom obține următoarea dezvoltare utilă:

$$\frac{d}{d\zeta_0}\left[e^{i\theta_0}K\right]=\frac{de^{i\theta_0}}{d\zeta_0}K+e^{i(\theta+\theta_0)}\frac{de^{-i\theta}}{d\zeta}K-$$
$$-e^{i(\theta+\theta_0)}\frac{d}{d\zeta}\left[e^{-i\theta}K\right]. \tag{3.5}$$

Considerînd integrala din (3.3), unde vom înlocui derivata cu dezvoltarea dată de (3.5), se va obține o sumă de trei integrale după cum urmează:

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{e^{i\theta_0}}{i\pi}\int_C\frac{d}{d\zeta_0}\left[e^{i\theta}K(\zeta,\zeta_0;t,\lambda)\right]W(\zeta)\,d\zeta\right\}=$$
$$=\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{2i\theta_0}}{i\pi}\int_C e^{i\theta}W\frac{d}{d\zeta}\left[e^{-i\theta}K\right]d\zeta-\frac{e^{i\theta_0}}{i\pi}\frac{de^{i\theta_0}}{d\zeta_0}\int_C WK\,d\zeta-\right. \tag{3.6}$$
$$\left.-\frac{e^{2i\theta_0}}{i\pi}\int_C e^{i\theta}\frac{de^{-i\theta}}{d\zeta}KW\,d\zeta\right\}.$$

Vom considera fiecare integrală în parte. Prima integrală din (3.6) o vom efectua prin părți, operație permisă de faptul că funcția V_t posedă prin definiție o derivată continuă pe C, obținînd

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{2i\theta_0}}{i\pi}\int_C e^{i\theta}W\frac{d}{d\zeta}\left[e^{-i\theta_0}K\right]d\zeta\right\}=$$
$$=\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{e^{2i\theta_0}}{i\pi}e^{i\theta}W\right)(e^{-i\theta}K)\Big|_C-\frac{e_{2i\theta_0}}{i\pi}\int_C e^{-i\theta}K\frac{d}{d\zeta}\left[e^{i\theta}W\right]d\zeta\right\}. \tag{3.7}$$

Deoarece prima funcție din partea dreaptă a egalităților (3.7) este uniformă pe C, rezultă că

$$\operatorname{Re}\left\{\left(\frac{e^{2i\theta_0}}{i\pi}e^{i\theta}\,W\right)(e^{-i\theta}\,K)\right\}\Big|_C = \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{i(\theta_0-\theta)}\cdot V_t\cdot[e^{i\theta_0}K]}{i\pi}\right\}\Big|_C = 0 \quad (3.8)$$

și astfel (3.7) devine

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{2i\theta_0}}{i\pi}\int_C e^{i\theta}\,W\frac{d}{d\zeta}[e^{-i\theta}K]\,d\zeta\right\} = -\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{2i\theta_0}}{i\pi}\int_C (e^{-i\theta}K)V_{t,s}\,ds\right\}. \quad (3.9)$$

A doua integrală din (3.6) poate fi exprimată, în conformitate cu (2.10), după cum urmează:

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{e^{i\theta_0}}{i\pi}\frac{de^{i\theta_0}}{d\zeta_0}\int_C WK\,d\zeta\right\} = -\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta_0}\frac{de^{i\theta_0}}{d\zeta_0}(2W_\infty - W)\right\}. \quad (3.10)$$

A treia integrală poate fi exprimată sub forma următoare:

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{e^{2i\theta_0}}{i\pi}\int_C e^{i\theta}\frac{de^{-i\theta}}{d\zeta}\,KW\,d\zeta\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{2i\theta_0}}{\pi}\int_C (Ke^{-i\theta})(\theta_{,s}\,V_t)\,ds\right\}. \quad (3.11)$$

Făcînd înlocuirile în (3.3), vom obține ecuația integrală a vitezelor V_t sub forma unei ecuații integrale de tip Fredholm de speța a doua:

$$V_{t,s_0} + \int_C k_t(s_0, s)\,V_{t,s}\,ds = f(s_0), \quad (3.12)$$

unde nucleul este continuu și are expresia

$$k_t(s_0, s) = \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{2i\theta_0}}{i\pi}e^{-i\theta}K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)\right\}, \quad (3.13)$$

iar termenul liber, tot funcție continuă, este exprimat de

$$f(s_0) = \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{2i\theta_0}}{i\pi}(e^{-i\theta}K)(V_t\;\theta_{,s})\,ds\right\}. \quad (3.14)$$

În deducerea expresiei (3.14) s-a ținut seama de faptul că pe C, conturul profilului, are loc următoarea egalitate:

$$\operatorname{Re}\left\{W(\zeta_0)\,e^{i\theta_0}\frac{de^{i\theta_0}}{d\zeta_0}\right\} = \operatorname{Re}\{iV_t\,\theta_{,s_0}\} = 0. \quad (3.15)$$

Continuitatea nucleului k_t, a termenului liber f și validitatea egalității (3.8) vor fi demonstrate în cele ce urmează.

4. TERMENUL LIBER ȘI NUCLEUL ECUAȚIEI INTEGRALE

În cele ce urmează ne propunem să arătăm că nucleul ecuației integrale (3.12) este continuu și că termenul liber este exprimat de o integrală singulară care are sens: există în sensul valorii principale după Cauchy. De asemenea se va demonstra validitatea condiției (3.8).

În acest scop vom porni de la proiecțiile nucleului $K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)$ după direcția tangentei pozitive și normalei exterioare la conturul C: K_t și K_n. Astfel vom avea următoarea descompunere:

$$e^{i\theta_0} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda) = K_t(s_0, s) + i K_n(s_0, s). \tag{4.1}$$

Observăm de asemenea că funcția complexă a cărei parte reală reprezintă nucleul $k_t(s_0, s)$, conform relației (3.13), poate fi de asemenea descompusă după cum urmează:

$$\frac{1}{i\pi} e^{2i\theta_0} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda) e^{-i\theta} = k_t(s_0, s) + i k_n(s_0, s), \tag{4.2}$$

ceea ce reprezintă descompunerea după tangenta și normala la conturul C a următoarei funcții:

$$\frac{1}{i\pi} e^{i(\theta_0 - \theta)} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda).$$

Din transcrierea funcției complexe (4.2) sub forma

$$\frac{1}{i\pi} e^{2i\theta_0} K e^{-i\theta} = \frac{1}{i\pi} e^{-i(\theta - \theta_0)} (e^{i\theta_0} K)$$

rezultă posibilitatea exprimării componentelor k_t și k_n în funcție de componentele K_t și K_n după cum urmează:

$$k_t(s_0, s) = \frac{1}{\pi} [K_n(s_0, s) \cos(\theta - \theta_0) - K_t(s_0, s) \sin(\theta - \theta_0)], \tag{4.3}$$

$$k_n(s_0, s) = -\frac{1}{\pi} [K_t(s_0, s) \cos(\theta - \theta_0) + K_n(s_0, s) \sin(\theta - \theta_0)]. \tag{4.4}$$

Ținînd seama de (4.2), pentru nucleul integralei din termenul liber (3.14) cît și pentru funcția care figurează în condiția (3.8) vom obține următorele descompuneri:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{2i\theta_0}}{\pi} K e^{-i\theta} \theta_{,s}\right\} = -k_n(s_0, s) \cdot \theta_{,s}, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i\pi} \cdot e^{i(\theta_0 - \theta)} V_t(s) e^{i\theta} K\right\} = V_{t,s} k_t(s_0, s). \tag{4.6}$$

Deoarece, prin ipoteză C, conturul profilului, este neted, iar V_t, distribuția de viteze pe conturul C, este continuă, rezultă că atît comportarea funcțiilor k_t și k_n, cît și a funcțiilor (4.5) și (4.6) va fi pe deplin determinată de comportarea componentelor K_t și K_n din (4.1).

Dată fiind netezimea conturului C, rezultă posibilitatea unei reprezentări parametrice de forma următoare:

$$x = \mathrm{Re}\{\zeta \in C\} = x(\varphi), \tag{4.7}$$

$$y = I_m\{\zeta \in C\} = y(\varphi), \tag{4.8}$$

unde parametrul φ este definit pe intervalul $[0, 2\pi]$, astfel încît pentru φ, crescător de la 0 la 2π, conturul C să fie parcurs o singură dată în sens pozitiv (sensul care lasă domeniul D^- la dreapta). Funcțiile $x(\varphi)$ și $y(\varphi)$ sînt, prin ipoteză, cel puțin de două ori derivabile în funcție de φ, iar derivatele de ordinul întîi nu se anulează simultan nicăieri pe C.

În felul acesta se demonstrează [7] că nucleele K_t și K_n admit următoarele descompuneri:

$$K_t[s_0(\varphi_0),\ s(\varphi)] = \frac{h_t(\varphi_0, \varphi)}{2\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_2^0}} + \frac{1}{2\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2}, \tag{4.9}$$

$$K_n[s_0(\varphi_0),\ s(\varphi)] = \frac{h_n(\varphi_0, \varphi)}{2\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}, \tag{4.10}$$

unde funcțiile $h_t(\varphi_0, \varphi)$ și $h_n(\varphi_0, \varphi)$ sînt continue în tot domeniul celor două variabile φ și φ_0 și unde s-au considerat următoarele notații:

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0}, \qquad \dot{y}_0 = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0}. \tag{4.11}$$

Pentru $\varphi \to \varphi_0$, cele două funcții $h_t(\varphi_0, \varphi)$ și $h_n(\varphi_0, \varphi)$ au limite continue, și anume:

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} h_t(\varphi_0, \varphi) = \frac{\dot{x}_0 \ddot{x}_0 + \dot{y}_0 \ddot{y}_0}{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}, \tag{4.12}$$

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} h_n(\varphi_0, \varphi) = \frac{\dot{x}_0 \ddot{y}_0 - \dot{y}_0 \ddot{x}_0}{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}. \tag{4.13}$$

În conformitate cu relațiile (4.9) și (4.10), nucleul K_t este singular, iar nucleul K_n este continuu în punctul $\zeta = \zeta_0 \in C$. De aici rezultă că și nucleul k_t al ecuației integrale (3.12) este continuu în punctul $\zeta = \zeta_0 \in C$, unde, în conformitate cu relațiile (4.3), (4.10) și (4.13), va avea următoarea limită:

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} k_t(\varphi_0, \varphi) = \frac{1}{\pi} \lim_{s\to s_0} K_n(s_0, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{h_n(\varphi_0, \varphi_0)}{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}. \tag{4.14}$$

În conformitate cu (4.6), existența limitei (4.14) asigură uniformitatea funcției $V_t\, k_t$ pe conturul C și implicit îndeplinirea condiției enunțate (3.8).

Deoarece din (4.4) și (4.9) rezultă că k_n devine nemărginit pentru $\zeta \to \zeta_0$, rezultă că integrala din (3.14), termenul liber al ecuației integrale (3.12), este singulară pentru $\zeta = \zeta_0$, respectiv $\varphi = \varphi_0$. Din relațiile (4.4), (4.9) și (4.10) rezultă că există limita următoarei expresii:

$$\lim\left[k_n(\varphi_0, \varphi) + \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{2\pi\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right] = -\frac{1}{2\pi} \frac{h_t(\varphi_0, \varphi_0)}{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}. \tag{4.15}$$

În virtutea ultimului rezultat, dacă funcția

$$e^{i\theta} \frac{de^{-i\theta}}{d\zeta} W(\zeta) \tag{4.16}$$

verifică condiția Hölder pentru orice pereche de puncte aparținînd lui C, integrala din termenul liber (3.14) există în sensul valorii principale după Cauchy. În conformitate cu ipotezele enunțate în privința conturului C și a distribuției de viteze pe contur, rezultă că funcția de viteze (4.16) verifică condiția Hölder, de unde rezultă existența integralei din termenul liber și deci continuitatea acestui termen pentru orice punct aparținînd conturului C.

5. UNICITATEA SOLUȚIEI ECUAȚIEI INTEGRALE

Folosind teoremele lui Fredholm, se va arăta în cele ce urmează că ecuația integrală (3.12) admite o soluție unică. În acest scop, alături de ecuația integrală neomogenă (3.12), pe care o vom nota prin (J):

$$(J) \qquad V_{t,s_0} + \int_C k_t(s_0, s)\, V_{t,s}\, ds = f(s_0), \tag{5.1}$$

vom considera ecuația omogenă corespunzătoare, notată prin $(\mathring{J})$:

$$(\mathring{J}) \qquad \mathring{V}_{t,s_0} + \int_C k_t(s_0, s)\, \mathring{V}_{t,s}\, ds = 0, \tag{5.2}$$

și ecuația transpusă ecuației omogene $(\mathring{J})$, notată prin $(\widetilde{J})$:

$$(\widetilde{J}) \qquad \widetilde{V}_{t,s_0} + \int_C k_t(s, s_0)\, \widetilde{V}_{t,s}\, ds = 0, \tag{5.3}$$

unde, în conformitate cu (3.13), nucleul $k_t(s_0, s)$ are expresia

$$k_t(s_0, s) = \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{2i\theta_0}}{i\pi} e^{-i\theta} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)\right\}, \tag{5.4}$$

iar nucleul transpus $k_t(s, s_0)$ va fi de forma următoare:

$$k_t(s, s_0) = \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{2i\theta}}{i\pi} e^{-i\theta_0} K(\zeta_0, \zeta; t, \lambda)\right\}. \tag{5.5}$$

În conformitate cu teoremele lui Fredholm, ecuația neomogenă (J) va admite o soluție unică dacă și numai dacă ecuațiile omogene asociate $(\mathring{J})$ și $(\widetilde{J})$ admit numai soluții banale (egale cu zero). Tot în conformitate cu teoremele lui Fredholm, ecuațiile omogene asociate $(\mathring{J})$ și $(\widetilde{J})$ admit același număr de soluții. În particular, dacă una dintre ecuațiile omogene asociate admite numai soluția banală, acest lucru este valabil și pentru cealaltă ecuație omogenă.

Astfel, în vederea demonstrării unicității soluției ecuației integrale neomogene (J) va fi suficient să arătăm că una dintre ecuațiile omogene asociate $(\mathring{J})$ sau $(\widetilde{J})$ admite numai o soluție banală. În acest scop, în cele ce urmează se va demonstra că ecuația omogenă transpusă $(\widetilde{J})$ admite numai o soluție banală.

Deoarece în virtutea lui (2.2) are loc următoarea egalitate

$$K(\zeta,\ \zeta_0;\ t,\ \lambda) = -K(\zeta_0,\ \zeta;\ t,\ \lambda), \tag{5.6}$$

rezultă că nucleul transpus (5.5) se va putea exprima după cum urmează :

$$k_t(s,\ s_0) = -\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{2i\theta}}{i\pi}\, e^{-i\theta_0} K(\zeta,\ \zeta_0;\ t,\ \lambda)\right\}. \tag{5.7}$$

Înlocuind noua expresie a nucleului transpus în ecuația integrală omogenă $(\widetilde{J})$, vom obține

$$\operatorname{Re}\left\{\widetilde{V}_{t,s_0} - \frac{e^{-i\theta_0}}{i\pi}\int_C K(\zeta,\ \zeta_0;\ t,\ \lambda)\,\widetilde{V}_{t,s}\, e^{-i\theta}\, d\zeta\right\} = 0. \tag{5.8}$$

Dînd factor comun funcția $e^{-i\theta_0}$ și ordonînd, vom obține

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\theta_0}\left[(\widetilde{V}_{t,s_0}\, e^{-i\theta_0}) - \frac{1}{i\pi}\int_C K(\zeta,\ \zeta_0;\ t,\ \lambda)\,(\widetilde{V}_{t,s}\, e^{i\theta})\, d\zeta\right]\right\} = 0. \tag{5.9}$$

Observăm că parantezele pătrate ale ecuației (5.9) separă o altă ecuație omogenă, ecuație pe care o vom nota prin $(\widetilde{I})$:

$$(\widetilde{I}) \qquad \widetilde{F}(\zeta_0) - \frac{1}{i\pi}\int_C K(\zeta,\ \zeta_0;\ t,\ \lambda)\,\widetilde{F}(\zeta)\, d\zeta = 0, \tag{5.10}$$

unde, conform ecuației (5.9), funcția necunoscută $\widetilde{F}(\zeta)$ are expresia

$$\widetilde{F}(\zeta) = \widetilde{V}_{t,s}\, e^{i\theta}. \tag{5.11}$$

Deoarece pe C, conturul profilului, vom avea totdeauna îndeplinită condiția

$$e^{-i\theta} \neq 0, \tag{5.12}$$

rezultă că soluțiile ecuației omogene $(\widetilde{I})$ vor satisface ecuația (5.9). Mai mult, în virtutea egalității (5.11), cunoscînd soluțiile ecuației omogene $(\widetilde{I})$, cunoaștem implicit soluțiile ecuației omogene $(\widetilde{J})$ și invers. De aici rezultă că cele două ecuații integrale omogene $(\widetilde{J})$ și $(\widetilde{I})$ sînt echivalente.

În virtutea relației cunoscute din [6]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C K(\zeta,\ \zeta_0;\ t,\ \lambda)\, d\zeta = \frac{1}{2}, \tag{5.13}$$

rezultă că ecuația integrală omogenă $(\widetilde{I})$ admite o soluție unică egală cu o constantă. Fie această soluție de forma

$$\widetilde{F}(\zeta) = C\, e^{i\beta}, \tag{5.14}$$

unde modulul C și argumentul β sînt constante reale.

Din (5.11) rezultă că soluția ecuației integrale omogene $(\widetilde{J})$ este dată de următoarea ecuație :

$$\widetilde{V}_{t,s} = C\, e^{i(\beta-\theta)}. \tag{5.14'}$$

Dar funcția $V_{t,s}$ fiind prin definiție reală și cum pe conturul C, exceptînd o mulțime finită de puncte discrete, vom avea îndeplinită condiția

$$\beta - \theta \neq 0,$$

rezultă că egalitatea (5.14′) nu poate avea loc decît atunci cînd $C = 0$. Dar atunci atît soluția ecuației omogene $(\tilde{I})$, cît și soluția ecuației omogene $(\tilde{J})$ vor fi nule, deci

$$\tilde{F}(\zeta) \equiv 0, \quad \tilde{V}_{t,s} \equiv 0, \tag{5.15}$$

ceea ce, conform celor arătate, demonstrează unicitatea soluției ecuației integrale neomogene (J).

6. REZOLVAREA ECUAȚIEI INTEGRALE

În conformitate cu (1.3) și (1.4), viteza tangențială la conturul C și derivata ei vor putea fi exprimate după cum urmează :

$$V_t = V_\infty [v_{tx} \cos \alpha_\infty + v_{ty} \sin \alpha_\infty], \tag{6.1}$$

$$V_{t,s} = V_\infty [v_{tx,s} \cos \alpha_\infty + v_{ty,s} \sin \alpha_\infty]. \tag{6.2}$$

De aici termenul liber (3.14) al ecuației integrale neomogene (J) se poate exprima sub forma

$$f(s_0) = V_\infty [f_x(s_0) \cos \alpha_\infty + f_y(s_0) \sin \alpha_\infty], \tag{6.3}$$

unde

$$f_x(s_0) = \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{2i\theta_0}}{\pi} \int_C (e^{-i\theta} K)\, v_{tx} \theta_{,s}\, ds\right\}, \tag{6.4}$$

$$f_y(s_0) = \operatorname{Re}\left\{\frac{i e^{2i\theta_0}}{\pi} \int_C (e^{-i\theta} K)\, v_{ty} \theta_{,s}\, ds\right\}. \tag{6.5}$$

Ținînd seama de (6.1), (6.2) și (6.3), ecuația integrală neomogenă (J) se poate separa în două ecuații integrale corespunzătoare funcțiilor $v_{tx,s}$ și $v_{ty,s}$.

Astfel, problema determinării derivatei vitezei tangențiale la conturul C conduce la rezolvarea următoarelor ecuații integrale de tip Fredholm de speța a doua :

$$v_{tx,s_0} + \int_C k_t(s_0, s)\, v_{tx,s}\, ds = f_x(s_0), \tag{6.6}$$

$$v_{ty,s_0} + \int_C k_t(s_0, s)\, v_{ty,s}\, ds = f_y(s_0), \tag{6.7}$$

unde $v_{tx,s}$ reprezintă derivata vitezei tangențiale la conturul C, pentru cazul cînd $\alpha_\infty = 0$, iar $V_{ty,s}$ reprezintă derivata vitezei tangențiale la conturul C, pentru cazul cînd $\alpha_\infty = \pi/2$. În ambele cazuri, modulul vitezei asimptotice V_∞ este egal cu unitatea.

Primită la redacție la 16 iulie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. I. Anton, O. Popa, *Asupra caracteristicilor de cavitație ale unui profil izolat.* St. și cerc., Științe tehnice Timișoara, **10**, *2* (1963).
2. I. Anton, O. Popa, *Caracteristicile cavitaționale ale unei rețele de profile cu bordul de fugă rotunjit (profile Carafoli)*, St. și cerc., Științe tehnice Timișoara, **10**, *2* (1963).
3. F. Numachi, K. Tsunoda, I. Chida, *Cavitation Tests on Clark Y Profiles of Several Thickness Rations*, Rep. Inst. High. Sp. Mech., Tohoku Univ. vol. **8**, *47*, (1957).
4. E. Martensen, *Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmschen Integralgleichung*, Arch. Rational Mech. Anal. Vol. *3*, Number 3, (1959).
5. E. Martensen, K. V. Sengbusch, *Über die Randkomponenten ebener harmonischer Vektorfelder*, Arch. Rational Mech. Anal, Volume *5*, Number 1, (1960).
6. O. Popa, *Asupra mișcării potențiale în jurul rețelelor de profile Carafoli*, Comunicările Conferinței de mașini hidraulice din septembrie 1964, Timișoara, vol. II.
7. W. H. Isay, *Beitrag zur Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter*, ZAMM 33, 1953.
8. C. Jacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Acad. R.P.R. București, Gauthier-Villars, Paris, 1959.
9. N. J. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Groningen, 1953.

CURGEREA UNUI AMESTEC COMPRESIBIL DE LICHID ŞI GAZ PRINTR-UN MEDIU POROS ÎN REGIM TRANZITORIU[1])

de. H. PASCAL
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

532

Într-o lucrare anterioară [1] s-a studiat problema restabilirii presiunii de fund într-o sondă după închiderea acesteia, în cazul curgerii amestecului bifazic constituit din două faze imiscibile ţiţei şi apă. Rezultatele obţinute ne permit acum să putem trece la examinarea unor probleme care apar în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide exploatate în regim de gaze dizolvate, unde avem o curgere simultană de ţiţei şi gaze, acesta avînd loc în cazul cînd presiunea dinamică de zăcămînt este inferioară celei de saturaţie.

I. ECUAŢIILE FUNDAMENTALE

După cum s-a arătat în [2], curgerea nestaţionară a amestecului de ţiţei şi gaze printr-un mediu poros, omogen şi izotrop este descrisă de sistemul de ecuaţii neliniare

$$\nabla\left[\left(\frac{\omega(p)}{\beta(p)}\frac{\gamma_{g0}\,k_t(\sigma)}{\mu_t}+\frac{\gamma_g\,k_g(\sigma)}{\mu_g}\right)\nabla p\right]=m\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(p)}{\beta(p)}\gamma_{g0}\,\sigma+\gamma_g(1-\sigma)\right],$$

$$\nabla\left[\frac{k_t(\sigma)}{\beta(p)\,\mu_t}\nabla p\right]=m\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma}{\beta(p)}\right), \tag{I.1}$$

unde ∇ este operatorul $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}$, k_t şi k_g sînt permeabilităţile efective pentru ţiţei şi gaze, σ saturaţia în ţiţei a mediului poros, μ_t şi μ_g viscozităţile dinamice, γ_g greutatea specifică a fazei gazoase şi γ_{g0} greu-

[1]) Publicată în „Rev. Roum. Sci. Techn.-Mécanique Appliquée", **11**, *4* (1966) (în limba franceză).

tatea specifică la presiunea atmosferică, $\beta(p)$ coeficientul volumetric al țițeiului, iar $\omega(p)$ volumul de gaze dizolvate în țiței.

Pentru a simplifica pe cît posibil rezolvarea sistemului (I.1), vom ține seama că în general faza lichidă poate fi considerată practic incompresibilă, mai ales la presiuni diferențiale întîlnite în exploatarea sondelor [3]. De asemenea viscozitățile dinamice ale țițeiului și gazelor pot fi considerate practic invariabile cu presiunea.

În ceea ce privește volumul de gaze dizolvate, acesta poate fi determinat admițînd validitatea legii lui Henri și, în consecință, vom avea

$$\omega(p) = \alpha \frac{p}{p_a}, \tag{I.2}$$

unde α este coeficientul de solubilitate și p_a presiunea atmosferică. Pe de altă parte, din ecuația de stare termodinamică a fazei gazoase, în ipoteza evoluției izotermice, rezultă

$$\gamma_g = \frac{\gamma_{g0}}{\bar{z}} \frac{p}{p_a}, \tag{I.3}$$

$\bar{z}$ fiind factorul de abatere de la legea Boyle-Mariotte, exprimat la presiune și temperatură medie.

Cu aceste presupuneri, acceptabile din punctul de vedere al aplicațiilor practice, sistemul (I.1) poate fi scris sub forma [3],

$$\begin{gathered} \nabla\left[\left(\bar{\alpha}\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma)}{\mu_g}\right) p \nabla p\right] = m \frac{\partial}{\partial t}[\bar{\alpha} p \sigma + p(1-\sigma)], \\ \nabla\left[\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} \nabla p\right] = m \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \end{gathered} \tag{I.4}$$

unde prin $\bar{\alpha}$ s-a notat $\bar{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\bar{z}\bar{\beta}}$, $\bar{\beta}$ fiind coeficientul volumetric al țițeiului exprimat la presiunea medie.

Dacă admitem că într-un interval de variație a saturației, convenabil ales, permeabilitățile efective sînt funcții liniare de saturație de forma

$$\bar{\alpha}\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma)}{\mu_g} = a_1\sigma + b_1 \text{ și } \frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} = a_2\sigma + b_2, \tag{I.5}$$

atunci sistemul (I.4) devine (vezi [1])

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}[(a_1\sigma + b_1)\nabla^2 p^2 + a_1 \nabla\sigma\nabla p^2] = m(\bar{\alpha} - 1)\frac{\partial(p\sigma)}{\partial t} + m\frac{\partial p}{\partial t}, \\ (a_2\sigma + b_2)\nabla^2 p + a_2 \nabla\sigma\nabla p = m\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \end{gathered} \tag{I.6}$$

care permite determinarea funcțiilor necunoscute p și σ, respectiv distribuțiile presiunii și saturației, cu condițiile la limită și inițiale întîlnite în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide.

La fel ca în lucrarea [1], vom utiliza pentru rezolvarea sistemului (I.6) metoda perturbaţiilor, astfel încît vom considera pentru funcţiile p şi σ dezvoltările în serii de puteri după parametrul auxiliar ε[2])

$$\frac{p}{p_k} = 1 + \varepsilon\, p_1(x,\, y,\, z,\, t) + \varepsilon^2 p_2(x,\, y,\, z,\, t) + \ldots,$$
$$\sigma = \sigma_k + \varepsilon\, \sigma_1(x,\, y,\, z,\, t) + \varepsilon^2 \sigma_2(x,\, y,\, z,\, t) + \ldots. \tag{I.7}$$

Dacă ne limităm numai la aproximaţia de ordinul doi a soluţiei sistemului (I.6), respectiv la funcţiile p_1, p_2, σ_1 şi σ_2, atunci, introducînd relaţiile (I.7) şi (I.6) şi identificînd coeficienţii după puterile parametrului ε, vom obţine

$$p_k(a_2\,\sigma_k + b_2)\,\nabla^2 p_1 = m\frac{\partial \sigma_1}{\partial t},$$
$$p_k(a_1\,\sigma_k + b_1)\,\nabla^2 p_1 = m(\bar{\alpha} - 1)\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + m[1 + (\bar{\alpha} - 1)\,\sigma_k]\frac{\partial p_1}{\partial t}, \tag{I.8}$$

şi

$$p_k(a_1\,\sigma_k + b_1)[\nabla^2 p_2 + \nabla^2 p_1^2] + a_1 p_k[\nabla\sigma_1 \cdot \nabla p_1 + \sigma_1 \nabla^2 p_1] =$$
$$= m(\bar{\alpha} - 1)\, p_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + m(\bar{\alpha} - 1)\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} +$$
$$+ m(\bar{\alpha} - 1)\,\sigma_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} + m[1 + (\bar{\alpha} - 1)\,\sigma_k]\frac{\partial p_2}{\partial t}, \tag{I.9}$$
$$p_k(a_2\,\sigma_k + b_2)\,\nabla^2 p_2 + a_2 p_k[\sigma_1 \nabla^2 p_1 + \nabla\sigma_1 \cdot \nabla p_1] = m\frac{\partial \sigma_2}{\partial t}.$$

În felul acesta, rezolvarea sistemului (I.6) a fost redusă la rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare (I.8) şi (I.9), cu anumite condiţii la limită şi iniţiale care vor fi arătate mai departe.

Este uşor de observat că din (I.8) obţinem pentru determinarea funcţiilor p_1 şi σ_1 ecuaţiile omogene

$$\nabla^2 p_1 = \lambda\frac{\partial p_1}{\partial t} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = \Omega\frac{\partial p_1}{\partial t}, \tag{I.10}$$

unde

$$\lambda = \frac{m[1 + (\bar{\alpha} - 1)\,\sigma_k]}{p_k\left[\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}\right]} \text{ şi } \Omega = (a_2\,\sigma_k + b_2)\frac{\lambda p_k}{m} = \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\cdot\frac{\lambda p_k}{m}. \tag{I.11}$$

[2]) σ_k reprezintă valoarea saturaţiei mediului poros corespunzătoare stării de repaus a fluidelor, adică la presiunea p_k.

Din (I.9) rezultă ecuația neomogenă

$$\nabla^2 p_2 = \lambda \frac{\partial p_2}{\partial t} + \Phi_1(x, y, z, t), \tag{I.12}$$

unde termenul liber Φ_1 are expresia [1]

$$\Phi_1(x, y, z, t) = A \frac{\partial p_1^2}{\partial t} - B p_1(x, y, z, 0) \frac{\partial p_1}{\partial t} - \\ - C [\nabla p_1]^2 + D \nabla p_1 \cdot \nabla p_1(x, y, z, 0), \tag{I.13}$$

iar constantele A, B, C și D se obțin din relațiile

$$A = \frac{m(\bar{\alpha} - 1)\Omega - (a_1 \sigma_k + b_1) \frac{\lambda p_k}{2} - [a_1 - (\bar{\alpha} - 1) a_2] \frac{p_k \lambda \Omega}{2}}{p_k \left[\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g} \right]},$$

$$B = \Omega \frac{m(\bar{\alpha} - 1) + \lambda p_k [a_1 - (\bar{\alpha} - 1) a_2]}{p_k \left[\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g} \right]}, \tag{I.14}$$

$$C = \frac{a_1 \sigma_k + b_1 + [a_1 - (\bar{\alpha} - 1) a_2] \Omega}{\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}} \text{ și } D = \Omega \frac{a_1 - (\bar{\alpha} - 1) a_2}{\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}}.$$

Pe de altă parte, din (I.10) rezultă pentru funcția $\sigma_1(x, t)$, care reprezintă prima aproximație a distribuției saturației mediului poros, ecuația

$$\sigma_1 = \Omega p_1 + \varphi(x, y, z). \tag{I.15}$$

Cu condiția inițială $\sigma(x, y, z, 0) = \sigma_k$, avem din (I.7) $\sigma_1(x, y, z, 0) = 0$ și, în consecință, (I.15) devine

$$\sigma_1(x, y, z, t) = \Omega [p_1(x, y, z, t) - p_1(x, y, z, 0)]. \tag{I.16}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (I.9), (I.16) și (I.12) obținem pentru determinarea funcției $\sigma_2(x, y, z, t)$ ecuația

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = (a_2 \sigma_k + b_2) \frac{p_k}{m} \left[\lambda \frac{\partial p_2}{\partial t} + \Phi_1(x, y, z, t) \right] + \\ + a_2 p_k \frac{\Omega}{m} [p_1(x, y, z, t) - p_1(x, y, z, 0)] \times \lambda \frac{\partial p_1}{\partial t} + \\ + a_2 p_k \frac{\Omega}{m} [(\nabla p_1)^2 - \nabla p_1 \cdot \nabla p_1(x, y, z, 0)]. \tag{I.17}$$

Deoarece în cele ce urmează vom studia cazul cînd la momentul inițial curgerea începe din starea de repaus, atunci vom avea $p(x, y, z, 0) = p_k$, respectiv $p_1(x, y, z, 0) = \nabla p_1(x, y, z, 0) = 0$.

În ceea ce priveşte termenul $(\nabla p_1)^2$, vom ţine seama, după cum s-a arătat în lucrările [3], [4] şi [6], ca în cazul curgerii amestecului gaze-ţiţei gradienţii de presiune întîlniţi frecvent la exploatarea sondelor au în general valori mici, astfel încît termenul $(\nabla p_1)^2$ poate fi neglijat [3]). Prin urmare, funcţia $\Phi(x, y, z, t)$ devine

$$\Phi_1(x, y, z, t) = A \frac{\partial p_1^2}{\partial t}, \tag{I.18}$$

iar din (I.17) rezultă

$$\sigma_2(x, y, z, t) = (a_2 \sigma_k + b_2) \frac{\lambda p_k}{m} p_2(x, y, z, t) + \\ + \left[A(a_2 \sigma_k + b_2) + \frac{a_2 \lambda \Omega}{2}\right] \frac{p_k}{m} p_1^2(x, y, z, t) + \varphi(x, y, z), \tag{I.19}$$

sau, dacă ţinem seama de (I.5), vom avea

$$\sigma_2 = \frac{k_t(\sigma_k)}{m} \frac{\lambda p_k}{m} p_2 + \left(\frac{A k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{a_2 \Omega \lambda}{2}\right) \frac{p_k}{m} p_1^2 + \varphi(x, y, z). \tag{I.20}$$

II. CURGEREA MONDIMENSIONALĂ. PROBLEMA $p_k - p_0$ (APROXIMAŢIA DE ORDINUL DOI) [4])

Pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii (I.1) este necesar să cunoaştem condiţiile la limită şi iniţiale pe care trebuie să le satisfacă funcţiile $p(x, t)$, şi $\sigma(x, t)$. În acest scop vom considera problema binecunoscută în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide [5], şi anume aceea a unei sonde care exploatează, la o presiune variabilă în timp, un zăcământ de întindere infinită. În prima fază a exploatării, cînd frontul depresionar nu a atins limita exterioară a zăcămîntului, evoluţia în timp a debitului sondei şi distribuţia presiunii pot fi determinate admiţînd mediul, în care are loc curgerea, de întindere infinită. În acest caz, vom avea următoarele condiţii la limită şi iniţiale pentru funcţiile

$$t > 0 \begin{cases} p(\infty, t) = p_k, \\ p(0, t) = \varphi_0(t) \end{cases} \qquad t = 0 \begin{cases} p(x, 0) = p_k, \\ \sigma(x, 0) = \sigma_k, \end{cases} \tag{II.1}$$

iar pentru funcţiile $p_n(x, t)$ şi $\sigma_n(x, t)$ rezultă din (I.7)

$$t > 0 \begin{cases} p_1(\infty, t) = 0, \\ p_1(0, t) = -\dfrac{[p_k - \varphi_0(t)]}{\varepsilon p_k} = \dfrac{\varphi_1(t)}{\varepsilon}, \end{cases} \tag{II.2}$$

[3]) Deoarece pe baza relaţiei (I.16), considerînd cazul cînd curgerea începe din stare de repaus, avem $\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \Omega \left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)^2$, rezultă că neglijarea termenului $(\nabla p_1)^2$ este echivalentă cu presupunerea că saturaţia este o funcţie numai de timp.

[4]) Se utilizează clasificarea problemelor propusă în [5].

respectiv pentru $n = 2, 3, \ldots$

$$t > 0 \begin{cases} p_n(\infty, t) = 0, \\ p_n(0, t) = 0, \end{cases} \qquad t = 0 \begin{cases} p_n(x, 0) = 0, \\ \sigma_n(x, 0) = 0. \end{cases} \tag{II.3}$$

Soluția ecuației omogene (I.10) în cazul condițiilor (II.2) va fi

$$p_1(x, t) \equiv \frac{\sqrt{\lambda}\, x}{2\sqrt{\pi}\,\varepsilon} \int_0^t \frac{\varphi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{\lambda x^2}{4(t-\tau)}}\, d\tau, \tag{II.4}$$

iar pentru ecuația neomogenă (I.12), cu condițiile (II.3), putem scrie în general

$$p_n(x, t) = \frac{\sqrt{\lambda}\, x}{2\sqrt{\pi}\,\varepsilon^n} \int_0^t \frac{\psi_n(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{\lambda x^2}{4(t-\tau)}}\, d\tau + \tag{II.5}$$

$$+ \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon^n} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{n-1}(\xi, \tau) \times e^{-\frac{\lambda (x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}\, d\xi \right] d\tau,$$

unde funcțiile $\psi_n(\tau)$ se determină, pentru $n = 2, 3, \ldots$, din ecuația

$$\psi_n(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \left[\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{n-1}(\xi, \tau)\, e^{-\frac{\lambda \xi^2}{4(t-\tau)}}\, d\xi \right] d\tau. \tag{II.6}$$

În cazul exploatării sondei la o presiune constantă egală cu p_0, vom avea din (I.7) $p_1(0, t) = -\frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) = \text{const.}$ și, după efectuarea integralei din (II.4), se obține pentru prima aproximație a distribuției presiunii

$$p_1(z) = -\frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) \operatorname{erfc} z, \tag{II.7}$$

unde

$$z = \frac{\sqrt{\lambda}\, x}{2\sqrt{t}} \text{ și } \operatorname{erfc} z = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2}\, du. \tag{II.8}$$

Ținînd seama de (II.7) și de termenul liber (I.8), ecuația (II.5) conduce după efectuarea integralelor de mai sus la următoarea relație pentru funcția $p_2(x, t)$:

$$p_2 = -\frac{2A}{\lambda \varepsilon^2}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(z\, e^{-z^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) \operatorname{erfc} z - \frac{1}{\pi} e^{-2z^2} \right] \tag{II.9}$$

şi, prin urmare, distribuţia presiunii în cazul aproximaţiei de ordinul doi a soluţiei sistemului (I.6) va fi în conformitate cu (I.7)

$$\frac{p_k - p(x,\,t)}{p_k - p_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}}\right) + \\ + \frac{2A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}}\,e^{-\frac{\lambda x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{\pi}\,e^{-\frac{\lambda x^2}{2t}}\right]. \tag{II.10}$$

În ceea ce priveşte funcţia $\sigma_2(x,\,t)$, aceasta se determină din (I.20), care, cu condiţia iniţială $\sigma_2(x,\,0) = 0$ şi $p_1(x,\,0) = p_2(x,\,0) = 0$ rezultînd din (II.2) şi (II.3), devine

$$\sigma_2(x,\,t) = \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\,\frac{\lambda\,p_k}{m}\,p_2(x,\,t) + \left(A\,\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{a_2\,\lambda\Omega}{2}\right)\frac{p_k}{m}\,p_1^2(x,\,t). \tag{II.11}$$

Rezultă deci, ţinînd seama de relaţiile (II.7), (II.9) şi (I.16), că distribuţia saturaţiei poate fi scrisă, în conformitate cu (I.7), sub forma

$$\sigma(x,\,t) - \sigma_k = -\Omega\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}}\right) + \\ + \left[\frac{a_2\,\lambda\Omega}{2} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\,A\right]\frac{p_k}{m} \times \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}}\right)\right]^2 - \tag{II.12}$$

$$- 2\,\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\,\frac{p_k}{m}\,A\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}}\,e^{-\frac{\lambda x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) - \frac{1}{\pi}\,e^{-\frac{\lambda x^2}{2t}}\right].$$

Dacă presiunea la momentul iniţial este superioară celei de saturaţie, atunci saturaţia în ţiţei σ_k este egală cu $\sigma_k = 1 - \sigma_{ai}$, σ_{ai} fiind saturaţia în apă interstiţială, considerată imobilă. În cazul cînd presiunea iniţială este mai mică decît cea de saturaţie, în zăcămînt vor exista două faze, ţiţei şi gaze libere, cu o anumită distribuţie a saturaţiei, şi de aceea valoarea lui σ_k va trebui să fie determinată cu ajutorul curbei de restabilire a presiunii de fund, obţinută la o sondă după închiderea acesteia [1] sau cu metodele utilizate în prezent.

Rezultatele stabilite mai sus permit acum să trecem la efectuarea calculelor de prevedere asupra comportării unei sonde exploatate la o presiune inferioară celei de saturaţie, care produce simultan ţiţei şi gaze, în ceea ce priveşte evoluţia debitelor celor două faze, ţiţei şi gaze.

În conformitate cu validitatea legii lui D'Arcy referitoare la fiecare fază, putem scrie pentru debitul de ţiţei pe unitatea de secţiune, respectiv de gaze, următoarele relaţii :

$$Q_t(x,\,t) = -(a_2\,\sigma + b_2)\frac{\partial p}{\partial x} \text{ şi } Q_g(x,\,t) = -(a_1\,\sigma + b_1)\frac{p}{p_a}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{II.13}$$

care, pe baza relațiilor (I.4), devin

$$Q_t(x, t) = -\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t}\frac{\partial p}{\partial x} \text{ și } Q_g(x, t) = -\left(\bar{\alpha}\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma)}{\mu_g}\right)\frac{p}{p_a}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \text{(II.14)}$$

unde valoarea saturației în țiței $\sigma(x, t)$ se determină din (II.12).

Cu ajutorul relațiilor (II.14) și (II.10) obținem după cîteva calcule simple, pentru debitele de țiței și gaze corespunzătoare punctului $x = 0$, următoarele ecuații:

$$Q_t(0, t) = F\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t}\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x=0} =$$

$$= F\frac{k_t(\sigma_0)}{\sqrt{\pi}\,\mu_t}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{t}}(p_k - p_0)\left[1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\right], \quad \text{(II.15)}$$

$$Q_g(0, t) = F\left[\bar{\alpha}\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma)}{\mu_g}\right]\frac{p}{p_a}\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x=0} =$$

$$= F\left(\bar{\alpha}\frac{k_t(\sigma_0)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_0)}{\mu_g}\right)\frac{p_0\,p_k}{p_a\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\right], \quad \text{(II.16)}$$

unde F reprezintă secțiunea mediului poros.

Valoarea saturației σ_0, care rezultă din (II.12) pentru $x = 0$, are valoarea

$$\sigma_0 = \sigma_k - \Omega\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) + \left(A\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{a_2\lambda\Omega}{2}\right)\frac{p_k}{m}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2. \quad \text{(II.17)}$$

Un alt parametru a cărui cunoaștere în ceea ce privește evoluția în timp prezintă importanță practică este acela al rației gaze-țiței, care reprezintă raportul dintre debitul de gaze și cel de țiței. Astfel, din (II.14) vom avea

$$R_g(x, t) = \left(\bar{\alpha} + \frac{k_g(\sigma)}{k_t(\sigma)}\frac{\mu_t}{\mu_g}\right)\frac{p(x, t)}{p_a}, \quad \text{(II.18)}$$

unde funcțiile $\sigma(x, t)$ și $p(x, t)$ se obțin din (II.12) și (II.10).

Pe de altă parte, cunoscînd variația în timp a debitelor de țiței și gaze putem prevedea volumele corespunzătoare care pot fi extrase din zăcămînt pînă la un anumit timp. Dacă ținem seama că volumele de țiței și gaze sînt date de relațiile

$$V_t(t) = \int_0^t Q_t(0, \tau)\,d\tau \text{ și } V_g(t) = \int_0^t Q_g(0, \tau)\,d\tau, \quad \text{(II.19)}$$

atunci vom obţine, în conformitate cu (II.15) şi (II.16),

$$V_t(t) = 2F\frac{k_t(\sigma_0)}{\sqrt{\pi}\,\mu_t}(p_k - p_0)\sqrt{\lambda t}\left[1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\right], \tag{II.20}$$

$$V_g(t) = F\left(\alpha\frac{k_t(\sigma_0)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_0)}{\mu_g}\right)\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\frac{p_k p_0}{p_a}\sqrt{\lambda t}\left[1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\right]. \tag{II.21}$$

Deoarece rapiditatea convergenţei seriilor (I.7), care reprezintă soluţia sistemului de ecuaţii (I.1), nu poate fi stabilită decît prin calcule numerice, vom examina comportarea funcţiilor p_1 şi p_2, pentru valorile parametrului adimensional $\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}}$ întîlnite în practică. Astfel, în tabela 1 sînt redate valorile funcţiilor $\overline{p}_1(x, t)$ şi $\overline{p}_2(x, t)$.

Tabela 1

$\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}}$	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$
0,05	0,9436	0,01018
0,1	0,8875	0,020128
0,3	0,6713	0,051655
0,5	0,4795	0,06492
0,6	0,3961	0,06468
0,8	0,2579	0,05499
1	0,1573	0,039657
1,2	0,0897	0,025071
1,6	0,02365	0,0072881
1,8	0,011	0,003445
2	0,00468	0,000052
2,4	0,0002	0,000031

Aici prin $\overline{p}_1$ şi $\overline{p}_2$ s-au notat

$$\overline{p}_1 = \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}}\right) \text{ şi } \overline{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}}\,e^{-\frac{\lambda x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{\pi}e^{-\frac{\lambda x^2}{2t}}. \tag{II.22}$$

Din tabela 1 este uşor de observat că, atunci cînd avem satisfăcută condiţia $\frac{2A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) < 0{,}1$, funcţia $p_2(x, t)$ poate fi în general neglijată în raport cu $p_1(x, t)$. În acest caz, distribuţia presiunii din punct de vedere calitativ devine identică cu cea obţinută pentru curgerea unui fluid omogen printr-un mediu poros [5].

Deoarece coeficientul $\frac{A}{\lambda}$ este o constantă care depinde numai de caracteristicile mediului poros, de proprietăţile fizice şi de distribuţia

fluidelor care-l saturează la momentul inițial, respectiv cînd acestea se aflau în stare de repaus, rezultă că influența neliniarității ecuațiilor asupra distribuției presiunii va depinde de diferența de presiune la care se exploatează sonda. Dacă aceasta este relativ mare, astfel încît să avem $\frac{2A}{\lambda}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)>0{,}1$, atunci convergenta seriilor (I.7) este slabă și, prin urmare, pentru determinarea corectă a distribuției presiunii va trebui să ținem seama de aproximațiile de ordin superior, respectiv de funcțiile $p_2, p_3, \ldots$ Observațiile de mai sus rămîn de asemenea valabile și în cazul variației în timp a debitelor de țiței și gaze, date de relațiile (II.15) și (II.16).

Pe de altă parte, din tabela 1 putem de asemenea observa că pentru $\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}} \cong 0{,}03$ presiunea devine egală cu p_0, curgerea putînd fi considerată practic staționară.

Mai sus s-a menționat că, după ce frontul depresionar a atins limita exterioară a zăcămîntului, acesta nu mai poate fi considerat infinit. În acest caz, distribuția presiunii, respectiv a debitului, va fi influențată de condițiile existente pe conturul care delimitează zăcămîntul, unde putem avea două situații, și anume: fie o presiune constantă pe un contur alimentat, fie un debit nul cînd conturul este închis, adică impermeabil.

Vom considera în cele ce urmează cazul unui zăcămînt de lungime finită l, avînd o presiune constantă pe conturul exterior și exploatat din stare de repaus. Condițiile la limită și inițiale pentru presiune vor fi

$$t>0\begin{cases} p(l,\ t)=p_k, \\ p(0,\ t)=\varphi_0(t); \end{cases} \qquad t=0\begin{cases} p(x,\ 0)=p_k, \\ \sigma(x,\ 0)=\sigma_k, \end{cases} \tag{II.23}$$

iar pentru funcțiile p_1 și p_n

$$t>0\begin{cases} p_1(l,\ t)=0, \\ p_1(0,\ t)=-\dfrac{1}{\varepsilon}\left(1-\dfrac{\varphi_0(t)}{p_k}\right)=\dfrac{\varphi_1(t)}{\varepsilon}; \end{cases} \qquad t=0\begin{cases} p_1(x,\ 0)=0, \\ \sigma_1(x,\ 0)=0, \end{cases} \tag{II.24}$$

$$t>0\begin{cases} p_n(l,\ t)=0, \\ p_n(0,\ t)=0, \end{cases} \qquad t=0\begin{cases} p_n(x,\ 0)=0, \\ \sigma_n(x,\ 0)=0, \end{cases} \tag{II.25}$$

pentru $n=2,\ 3,\ \ldots$

Pentru condițiile (II.24), soluția ecuației (I.6) va fi

$$p_1(x,\ t)=\frac{2}{\varepsilon}\,\frac{\pi}{\lambda l^2}\sum_{m=1}^{\infty} m\,e^{-\frac{\pi^2 m^2 t}{\lambda l^2}}\sin m\pi\frac{x}{l}\int_0^t [1-\varphi_0(\tau)]\,e^{\frac{\pi^2 m^2 \tau}{\lambda l^2}}\,d\tau \tag{II.26}$$

și dacă considerăm cazul examinat anterior, și anume acela al exploatării la o presiune constantă, atunci cînd vom avea $p_1(0,\ t)=-\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)$ și,

în consecinţă, ecuaţia (II.26) devine

$$p_1(x,t) = -\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)\left[1-\frac{x}{l}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\dfrac{\pi x}{l}}{m}\,e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{\lambda l^2}}\right]. \quad \text{(II.27)}$$

Pe de altă parte, pentru condiţiile la limită şi iniţiale (II.25), soluţia ecuaţiei neomogene (I.8) poate fi scrisă sub forma

$$p_n(x,t) = \int_0^t\int_0^l G(x,u,t-\tau)\,\Phi_{n-1}(u,\tau)\,du\,d\tau, \quad \text{(II.28)}$$

unde $G(x, u, t-\tau)$, care reprezintă funcţia lui Green, se exprimă în acest caz prin relaţia

$$G(x,u,t-\tau) = \frac{2}{\lambda l}\sum_{m=1}^{m=\infty} e^{-\frac{\pi^2 m^2(t-\tau)}{\lambda l^2}}\sin m\,\pi\frac{x}{l}\sin m\,\pi\frac{u}{l}. \quad \text{(II.29)}$$

Dat fiind faptul că pentru valorile timpului care de fapt prezintă interes practic, seria (I.27) este rapid convergentă, rezultă că în aplicaţiile practice ne putem limita numai la primul termen şi în consecinţă funcţia $\Phi_1(x, t)$ va fi

$$\Phi_1(x,t) = \frac{A}{\varepsilon^2}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)^2 e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}}\left[1-\frac{x}{l}-\frac{2}{\pi}e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}}\sin\pi\frac{x}{l}\right]\sin\pi\frac{x}{l}. \quad \text{(II.29')}$$

După efectuarea integralelor din (II.28), pentru $n = 2$, se obţine

$$p_2(x,t) = \frac{2A}{\pi\,\lambda\,\varepsilon^2}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)^2 e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}}\left[\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}+\frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}}-1\right)\right]\sin\pi\frac{x}{l} \quad \text{(II.30)}$$

şi, prin urmare, distribuţia presiunii în cazul cînd ne limităm numai la aproximaţia de ordinul doi a soluţiei va fi

$$\begin{aligned}\frac{p}{p_k} &= 1-\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)\left[1-\frac{x}{l}-\frac{2}{\pi}\sin\pi\frac{x}{l}\,e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}}\right]+\\ &+\frac{2A}{\pi\,\lambda}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)^2 e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}}\left[\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}+\frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}}-1\right)\right]\sin\pi\frac{x}{l}.\end{aligned} \quad \text{(II.31)}$$

În ceea ce priveşte distribuţia saturaţiei, aceasta se determină, în conformitate cu (II.11) şi (I.16), din ecuaţia

$$\begin{aligned}\sigma(x,t)-\sigma_k &= \Omega\,p_1(x,t)+\\ &+\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\frac{\lambda p_k}{m}p_2(x,t)+\left(\frac{\lambda\,\Omega\,a_2}{2}+\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}A\right)\frac{p_k}{m}p_1^2(x,t),\end{aligned} \quad \text{(II.32)}$$

unde funcţiile $p_1(x, t)$ şi $p_2(x, t)$ se obţin din (II.27) şi (II.30).

Ţinînd seama de faptul că saturaţia medie ponderată după distanţă este definită de relaţia

$$\bar{\sigma}(t) = \frac{1}{l}\int_0^l \sigma(x, t)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sigma_k + \frac{\Omega}{l}\int_0^l p_1(x, t)\,\mathrm{d}x + \frac{k_l(\sigma_k)}{\mu_t}\frac{\lambda p_k}{m l}\int_0^l p_2(x, t)\,\mathrm{d}x + \tag{II.32'}$$

$$+\left(\frac{\lambda a_2}{2}\frac{\Omega}{} + \frac{k_l(\sigma_k)}{\mu_t}A\right)\frac{p_k}{m l}\int_0^l p_1^2(x, t)\,\mathrm{d}x,$$

atunci după efectuarea integralelor de mai sus rezultă

$$\bar{\sigma}(t) = \sigma_k - \Omega\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}}\right] +$$

$$+\frac{4A}{\pi^2}\cdot\frac{\lambda p_k}{m}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2}(\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} - 1)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} + \tag{II.33}$$

$$+\left(\frac{\lambda a_2\,\Omega}{2} + \frac{k_l(\sigma_k)}{\mu_t}A\right)\frac{p_k}{m}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{1}{3} - \frac{12}{\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} + \frac{2}{\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi^2 l}{\lambda l^2}}\right].$$

Dacă introducem noţiunea de presiune medie ponderată după distanţa definită în acelaşi mod cu saturaţia medie ponderată, atunci vom avea

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{l}\int_0^l p(x, t)\,\mathrm{d}x = p_k - \frac{(p_k - p_0)}{2}\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}}\right] +$$

$$+\frac{4A}{\pi^2}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2}(\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} - 1)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}}. \tag{II.33'}$$

Pe baza rezultatelor de mai sus putem stabili evoluţia în timp a debitului de ţiţei, respectiv de gaze, precum şi raţia de gaze. Astfel, utilizînd relaţiile (II.14) şi (I.3) şi ţinînd seama că $p(0, t) = p_0$, vom avea

$$Q_t(x, t) = \frac{F k_t(\sigma)}{\mu_t} p_k\left(\varepsilon\frac{\partial p_1}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial p_2}{\partial x}\right)$$

şi (II.34)

$$Q_g(x, t) = F\left(\bar{\alpha}\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma)}{\mu_g}\right)\frac{p_k \cdot p_0}{p_a}\left(\varepsilon\frac{\partial p_1}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial p_2}{\partial x}\right),$$

unde $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ şi $\frac{\partial p_2}{\partial x}$ se obţin din relaţiile

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{l\varepsilon}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\left[1 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\cos m\pi\frac{x}{l}\mathrm{e}^{-\frac{m^2\pi^2 t}{\lambda l^2}}\right],$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{2A}{\lambda l\varepsilon^2}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2}(\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} - 1)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}}\cos\pi\frac{x}{l}. \tag{II.35}$$

Ţinînd seama de relaţiile de mai sus, debitele de ţiţei şi de gaze în punctele $x = 0$ şi $x = l$, corespunzătoare sondei şi conturului de alimentare, vor fi

$$Q_t(0, t) = \frac{F k_t(\sigma_0)}{\mu_t} \frac{p_k}{l} \left[\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2\pi^2 l}{\lambda l^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{A}{\lambda} \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2 \left[\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2} \left(e^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} - 1\right) \right] e^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} \right],$$

$$Q_t(l, t) = \frac{F k_t(\sigma_k)}{\mu_t} \frac{p_k}{l} \left[\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-\frac{m^2\pi^2 l}{\lambda l^2}}\right) - \right. \tag{II.36}$$

$$\left. - \frac{2A}{\lambda} \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2 \left[\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2} \left(e^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} - 1\right) \right] e^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} \right],$$

$$Q_g(0, t) = F \left(\bar{\alpha} \frac{k_t(\sigma_0)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_0)}{\mu_g} \right) \frac{p_k p_0}{l p_a} \left[\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2\pi^2 l}{\lambda l^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2A}{\lambda} \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2 \left[\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2} \left(e^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} - 1\right) \right] e^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} \right], \tag{II.37}$$

$$Q_g(l, t) = F \left(\bar{\alpha} \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g} \right) \frac{p_k p_0}{l p_a} \left[\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-\frac{m^2\pi^2 l}{\lambda l^2}}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2A}{\lambda} \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2 \left[\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2} \left(e^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} - 1\right) \right] e^{-\frac{\pi^2 l}{\lambda l^2}} \right],$$

unde σ_0 este saturaţia în ţiţei corespunzătoare punctului $x = 0$, care se obţine din (II.32) pentru $x = 0$:

$$\sigma_0 = \sigma_k - \Omega \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) + \left(\frac{a_2 \lambda \Omega}{2} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} A \right) \frac{p_k}{m} \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2, \tag{II.38}$$

iar σ_k cea de pe conturul de alimentare $x = l$, care în acest caz corespunde cu cea existentă la momentul iniţial, cînd cele două faze se găseau în stare de repaus.

Din (II.37) şi (II.38) este uşor de observat că, atunci cînd $t \to \infty$, debitele de ţiţei şi gaze tind către cele corespunzătoare regimului staţionar, şi anume

$$Q_t(0, \infty) = \frac{F k_t(\sigma_0)}{\mu_t} \frac{p_k - p_0}{l}, \qquad Q_t(l, \infty) = \frac{F k_t(\sigma_k)}{\mu_t} \frac{p_k - p_0}{l},$$

$$Q_g(0, \infty) = F \left(\bar{\alpha} \frac{k_t(\sigma_0)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_0)}{\mu_g} \right) \frac{p_0}{p_a} \frac{p_k - p_0}{l}. \tag{II.39}$$

Pe de altă parte, saturaţia σ_0 în punctul $x = 0$ pentru $t \to \infty$ tinde, după cum rezultă din (II.32), către cea dată de relaţia (II.38), iar saturaţia

medie ponderată tinde, în conformitate cu (II.33), către valoarea

$$\bar{\sigma}(\infty) = \sigma_k - \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\frac{\Omega}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda a_2 \Omega}{2} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} A\right)\frac{p_k}{m}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2. \quad \text{(II.39')}$$

Considerațiile expuse pentru zăcămîntul infinit în ceea ce privește prevederea evoluției în timp a ratiei de gaze pot fi aplicate și în acest caz, întrucît distribuțiile presiunii și saturației sînt cunoscute din (II.31) și (II.32).

În conformitate cu relațiile (II.19), volumele de țiței și gaze, în condiții de zăcămînt, extrase din sondă din momentul punerii în exploatare a acesteia și pînă la un timp oarecare t vor fi

$$V_t(0,t) = \frac{Fk_t(\sigma_0)}{\mu_t}\frac{p_k - p_0}{l}\left\{t + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{\lambda l^2}} + \frac{2A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\lambda l^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}\right)\left(1 - e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}}\right) - \frac{32\,\lambda l^2}{6\,\pi^4}\left(e^{-\frac{2\pi^2 t}{\lambda l^2}} - 2\,e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}} + 1\right)\right]\right\},$$

$$V_g(0,t) = F\left(\bar{\alpha}\frac{k_t(\sigma_0)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_0)}{\mu_g}\right)\frac{p_k - p_0}{l}\frac{p_0}{p_a}\left\{t + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{\lambda l^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\left[\frac{\lambda l^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}\right)\left(1 - e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}}\right) - \frac{32\,\lambda l^2}{6\,\pi^4}\left(e^{-\frac{2\pi^2 t}{\lambda l^2}} - 2\,e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}} + 1\right)\right]\right\}. \quad \text{(II.40)}$$

Pe baza unor considerații absolut analoge cu cele făcute mai sus, obținem volumele de țiței și gaze care pătrund în zona de drenaj, aferentă conturului de alimentare al sondei, în cazul cînd presiunea pe contur este constantă. Astfel în acest caz vom avea

$$V_t(l,t) = \frac{Fk_t(\sigma_k)}{\mu_t}\frac{p_k - p_0}{l}\left\{t - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{\lambda l^2}}}{m^2} - \frac{2A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\lambda l^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}\right)\left(1 - e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}}\right) - \frac{32\,\lambda l^2}{6\pi^4}\left(e^{-\frac{2\pi^2 t}{\lambda l^2}} - 2\,e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}} + 1\right)\right]\right\},$$

$$V_g(l,t) = F\left(\bar{\alpha}\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}\right)\frac{p_0}{p_a}\cdot\frac{p_k - p_0}{l}\left\{t - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{\lambda l^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\left[\frac{\lambda l^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}\right)\left(1 - e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}}\right) - \frac{32\,\lambda l^2}{6\pi^4}\left(e^{-\frac{2\pi^2 t}{\lambda l^2}} - 2\,e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}} + 1\right)\right]\right\}. \quad \text{(II.41)}$$

În felul acesta, diferenţele dintre volumele de ţiţei şi gaze extrase din sondă şi cele intrate prin conturul de alimentare vor fi

$$\Delta V_t = \int_0^t [Q_t(0, t) - Q_t(l, t)]\,dt = V_t(0, t) - V_t(l, t),$$
$$\Delta V_g = \int_0^t [Q_g(0, t) - Q_g(l, t)]\,dt = V_g(0, t) - V_g(l, t), \tag{II.42}$$

care pot fi determinate din (II.40) şi (II.41).

Cu ajutorul relaţiilor stabilite mai sus pot fi efectuate prevederi asupra volumelor de ţiţei şi gaze existente într-un zăcămînt exploatat în regim de gaze dizolvate la o presiune diferenţială constantă, precum şi a factorului de recuperare, la orice moment de timp de la punerea sondei în exploatare.

Pentru a putea stabili rapiditatea convergenţei seriilor (I.7), care reprezintă soluţia sistemului (I.6) în cazul exploatării sondei la presiune diferenţială constantă, vom examina, la fel ca în cazul zăcămîntului infinit, comportarea funcţiilor p_1 şi p_2, precum şi a derivatelor acestora, în funcţie de timp. În tabela 2 sînt redate derivatele $\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}$ şi $\frac{\partial p_2}{\partial x}$, calculate în punctele $x = 0$ şi $x = l$, pentru diferite valori ale timpului adimensional $\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}$, care prezintă interes practic, unde s-a notat

$$\left.\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{\lambda l^2}}, \quad \left.\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}\right|_{x=l} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{\lambda l^2}},$$
$$\left.\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x}\right|_{x=0} = \left[\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}} - 1\right)\right] e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}} \tag{II.43}$$

şi

$$\left.\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x}\right|_{x=l} = -\left[\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}} - 1\right)\right] e^{-\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}}.$$

Tabela 2

$\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}$	$\left.\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}\right\|_{x=0}$	$\left.\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x}\right\|_{x=0}$	$\left.\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}\right\|_{x=l}$	$\left.\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x}\right\|_{x=l}$
0,8	1,8986	0,11201	0,1014	−0,11201
1	1,7358	0,13535	0,2642	−0,13535
1,2	1,6024	0,151	0,3976	−0,151
1,5	1,4462	0,1613	0,5538	−0,1613
2	1,2706	0,1536	0,7294	−0,1536
2,5	1,164	0,1297	0,836	−0,1297
3	1,1	0,1025	0,9	−0,1025
4	1,0366	0,0549	1	−0,0549

Din tabelă putem remarca că pentru $\frac{2A}{\lambda}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)<0{,}1$ termenul $\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x}$ este practic neglijabil comparativ cu $\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}$, astfel încît pentru stabilirea evoluţiei în timp a debitelor putem considera în aplicaţiile practice numai prima aproximaţie a soluţiei sistemului (I.6). Dacă condiţia de mai sus nu este satisfăcută, adică $\frac{2A}{\lambda}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)>0{,}1$, atunci apare necesar să ţinem seama de aproximaţiile de ordin superior. Aceasta înseamnă că din punct de vedere calitativ, pentru cazul cînd $\frac{2A}{\lambda}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)>0{,}1$, comportarea hidrodinamică a sondei care produce simultan ţiţei şi gaze diferă de cazul cînd în zăcămînt curge numai o singură fază. Cum rapiditatea convergentei seriilor (I.3) depinde, după cum s-a arătat în lucrarea [1], de termenul $\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)^n$, rezultă că şi în cazul exploatării sondei la presiuni diferenţiale relativ mari va trebui să ţinem seama, pentru o aproximare mai bună a soluţiei sistemului (I.1), de aproximaţiile de ordin superior, respectiv de $p_2, p_3, \ldots, p_n$.

II. PROBLEMA $Q-P$ (APROXIMAŢIA DE ORDINUL DOI)

În cele ce urmează vom examina cazul cunoscut sub denumirea de zăcămînt închis, cînd conturul care delimitează zăcămîntul este impermeabil.

La fel ca pentru zăcămîntul cu contur de alimentare, putem avea două cazuri în ceea ce priveşte cunoaşterea condiţiilor la limită existente pe conturul sondei, şi anume fie evoluţia presiunii în timp, fie evoluţia debitului.

Dacă ne referim la cazul exploatării sondei din stare de repaus cu presiune constantă pe conturul acesteia, atunci condiţiile la limită şi iniţiale pe care trebuie să le satisfacă funcţiile $p(x, t)$ şi $\sigma(x, t)$ vor fi

$$t>0\begin{cases}p(0,\ t)=p_0,\\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=l}=0;\end{cases}\qquad t=0\begin{cases}p(x,\ 0)=p_k,\\ \sigma(x,\ 0)=\sigma_k,\end{cases}\tag{III.1}$$

iar pentru funcţiile p_n şi σ_n vom avea

$$t>0\begin{cases}p_1(0,\ t)=-\dfrac{1}{\varepsilon}\left(1-\dfrac{p_0}{p_k}\right),\\ \left.\dfrac{\partial p_1}{\partial x}\right|_{x=l}=0,\end{cases}\qquad t=0\begin{cases}p_1(x,\ 0)=0,\\ \sigma_1(x,\ 0)=0,\end{cases}\tag{III.2}$$

$$t>0\begin{cases}p_n(0,\ t)=0,\\ \left.\dfrac{\partial p_n}{\partial x}\right|_{x=l}=0;\end{cases}\qquad t=0\begin{cases}p_n(x,0)=0,\\ \sigma_n(x,0)=0,\ \text{cînd } n=2,3,\ldots\end{cases}\tag{III.3}$$

Pentru condiţiile (II.2), soluţia ecuaţiei (I.10) poate fi scrisă sub forma

$$p_1(x, t) = -\frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\left[1 - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}}{(2m+1)}\, e^{-(2m+1)^2\frac{\pi^2 \cdot t}{4\lambda l^2}}\right] \tag{III.4}$$

în ceea ce priveşte soluţia ecuaţiei neomogene (I.12), care satisface condiţiile (III.3), pentru $n = 2$, aceasta poate fi scrisă sub forma

$$p_2(x, t) = -\frac{2}{\lambda l}\int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau)\, \Phi_1(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{III.5}$$

unde funcţia lui Green se obţine din relaţia

$$G(x, \xi, t - \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{4\lambda l^2}(t-\tau)} \sin(2m+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{l} \sin(2m+1)\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{l}. \tag{III.6}$$

În cazul valorilor lui t care prezintă interes practic, seria (III.4) este rapid convergentă, astfel încît ne putem limita numai la primul termen pentru determinarea funcţiei $\Phi_1(x, t)$. Rezultă deci

$$\Phi_1(x, t) = 2Ap_1(x, t)\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{2\pi A}{\varepsilon^2\lambda l^2}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[1 - \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\, e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{t}{\lambda l^2}}\right] \times$$

$$\times\, e^{-\frac{\pi}{4}\frac{t}{\lambda l_1^2}} \sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{l} \tag{III.7}$$

şi, prin urmare, după efectuarea integralelor din (IV.5) vom obţine

$$p_2(x, t) = -\frac{2\pi A}{\varepsilon^2\lambda^2 l^2}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[t\, e^{-\frac{\pi}{4}\frac{t}{\lambda l^2}} \sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{l} + \right.$$

$$+ \frac{128\,\lambda l^2}{\pi^4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi^2 t}{2\lambda l^2}} - e^{-\frac{(2m+1)^2\pi^2 t}{4\lambda l^2}}}{[(2m+1)^2 - 2](2m-1)(2m+1)(2m+3)} \times$$

$$\left. \times \sin(2m+1)\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l}\right]. \tag{III.8}$$

Pe de altă parte, seria din (III.8) este de asemenea rapid convergentă şi în consecinţă putem scrie

$$p_2(x, t) = -\frac{8A}{\varepsilon^2\lambda\pi}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{\pi}{4\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}} - 1\right)\right] e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{t}{\lambda l^2}} \sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}. \tag{III.9}$$

Cunoscînd acum funcţiile $p_1(x, t)$ şi $p_2(x, t)$, putem stabili distribuţia saturaţiei mediului poros, utilizînd în acest scop relaţiile arătate mai sus, din ecuaţia

$$\sigma(x, t) = \sigma_k + \Omega p_1(x, t) + \left(\frac{a_2 \lambda \Omega}{2} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} A\right) \frac{p_k}{m} p_1^2(x, t) + \\ + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} \frac{\lambda p_k}{m} p_2(x, t), \qquad \text{(III.10)}$$

iar pentru distribuţia presiunii

$$\frac{p}{p_k} = 1 - \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\left[1 - \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{t}{\lambda l^2}} \sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right] - \frac{8A}{\lambda\pi}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{\pi^2}{4}\frac{t}{\lambda l^2} + \right. \\ \left. + \frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{t}{\lambda l^2}} - 1\right)\right] e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{t}{\lambda l^2}} \sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}. \qquad \text{(III.11)}$$

Din (III.11) rezultă pentru debitele de ţiţei şi gaze a sondei corespunzătoare punctului $x = 0$ următoarele relaţii:

$$Q_t(0, t) = \frac{F_t k_t(\sigma_0)}{\mu_t} p_k \left[\frac{\partial p_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} + \frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=0}\right] =$$

$$= \frac{2F k_t(\sigma_0)}{l\mu_t} p_k \left\{\left[\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{t}{\lambda l^2}} - \frac{2A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} + \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. + \frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{t}{\lambda l^2}} - 1\right)\right] e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}}\right\},$$

$$Q_g(0, t) = F\left(\overline{\alpha}\frac{k_t(\sigma_0)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_0)}{\mu_g}\right)\frac{p_k \cdot p_0}{p_a}\left[\frac{\partial p_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} + \frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=0}\right] =$$

$$= F\left(\overline{\alpha}\frac{k_t(\sigma_0)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_0)}{\mu_g}\right)\frac{p_k \cdot p_0}{p_a}\left\{\left[\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{t}{\lambda l^2}} - \frac{2A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} + \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. + \frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}} - 1\right)\right] e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}}\right\}, \qquad \text{(III.12)}$$

unde saturaţia pe conturul sondei σ_0 rezultă din (III.10), pentru $x = 0$, a cărei valoare este

$$\sigma_0 = \sigma_k - \Omega\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) + \left(\frac{a_2 \lambda \Omega}{2} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} A\right)\frac{p_k}{m}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2. \qquad \text{(III.13)}$$

La capătul închis al zăcămîntului, variaţia în timp a saturaţiei se obţine din (III.10) pentru $x = l$.

Dacă ne referim la cazul cînd presiunea în toate punctele zăcămîntului a scăzut pînă la valoarea corespunzătoare capătului deschis, adică

în cazul epuizării totale din punct de vedere fizic, atunci pentru $t \to \infty$ vom obține din (III.12) $Q_l(0, \infty) = Q_g(0, \infty) = 0$, iar saturația va fi egală cu cea dată de relația (III.13).

La fel ca pentru cazurile considerate anterior, vom examina comportarea funcțiilor $\overline{p}_1$ și $\overline{p}_2$ în punctul $x = l$ și al derivatelor $\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}$ și $\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x}$ în punctul $x = 0$.

În tabela 3 sînt redate valorile $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$ și $\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}$ și $\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x}$ în funcție de valorile timpului adimensional $\frac{\pi t^2}{\lambda l^2}$, care prezintă interes în aplicațiile practice, unde s-a notat

$$\overline{p}_1(l, t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2 t}{4\lambda l^2}}}{(2m+1)},$$

$$\overline{p}_2(l, t) = \left[\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}} - 1\right)\right] e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}},$$

$$\left.\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}\right|_{x=0} = e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}}; \quad \left.\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x}\right|_{x=0} = \left[\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}} - 1\right)\right] e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}}. \quad \text{(III.14)}$$

Tabela 3

$\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}$	$\overline{p}_1(l, t)$	$\overline{p}_2(l, t)$	$\left.\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}\right\|_{x=0}$	$\left.\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x}\right\|_{x=0}$
0,025	0,0952	0,004343	0,9048	0,004343
0,05	0,1813	0,001531	0,8187	0,001531
0,1	0,3297	0,04712	0,6703	0,04712
0,12	0,4512	0,08166	0,5488	0,08166
0,2	0,55	0,11201	0,4493	0,11201
0,25	0,632	0,1353	0,3679	0,1353
0,5	0,8647	0,1536	0,1353	0,1536
1	0,982	0,0549	0,0183	0,0549

După cum rezultă din tabela 3, marginea superioară a funcției $\overline{p}_1(l, t)$ este întotdeauna mai mare decît a funcției $\overline{p}_2(l, t)$ pentru orice valoare a lui t, respectiv pînă la epuizarea zăcămîntului care poate fi considerată cînd $\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2} \cong 1$, unde presiunea devine egală cu $p(l, \infty) = p_0$.

Dacă avem satisfăcută condiția $\frac{8A}{\lambda}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)<0{,}1$, atunci seria (I.7) devine rapid convergentă și, în consecință, pentru stabilirea variației presiunii la capătul închis al zăcămîntului putem considera numai prima aproximație a soluției sistemului (I.6), deci funcția $p_1(x, t)$. Pe de altă parte, în cazul evoluției în timp a debitelor de țiței și gaze se observă că derivata $\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x}\Big|_{x=0}$ poate fi neglijată în raport cu $\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}\Big|_{x=0}$, numai dacă avem satisfăcută condiția $\frac{2A}{\lambda}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)<0,1$, valabilă în intervalul $0<\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}<0{,}25$. Pentru $0{,}25<\frac{\pi^2 t}{\lambda l^2}<\infty$ rezultă $\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x}\Big|_{x=0}>\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}\Big|_{x=0}$ și, prin urmare, este necesar să avem $\frac{2A}{\lambda}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)<0{,}01$, astfel încît prima aproximație a soluției să devină satisfăcătoare în scopul stabilirii variației debitelor de țiței și gaze a sondei.

Primită la redacție la 9 februarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. H. Pascal, *L'écoulement d'un fluide biphasique à travers un milieu poreux en régime transitoire*, Rev. Roum. Sci. Techn. — MÉCANIQUE APPLIQUÉE, *2* (1966).
2. M. Muskat, *Physical principles of oil production*, McGraw Hill Book, New York 1949.
3. G. B. Pahacev, *Podzemnaia ghidravlika*, pag. 362, Moskva 1961.
4. J. Martin, *Simplified equation of flow in gas reservoirs and the theoretical foundation drive multiphase pressure buildup analyses*, AI. ME. 1959.
5. A. Houpeurt, *Éléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux*, Paris 1958.
6. J. Martin, *Analysis of pressure transients in two-phase radial flow*, Transaction A.I.M.E., 1963.

ARIPI POLIGONALE CU PROFIL ROMBIC ÎN REGIM SUPERSONIC[1])

de D. MATEESCU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

În această lucrare se studiază scurgerea supersonică în jurul aripilor poligonale cu profil rombic la care grosimea profilului variază în lungul anvergurii după un polinom omogen.
Pentru determinarea vitezei axiale de perturbație se utilizează metoda analogiei hidrodinamice, elaborată de prof. E. Carafoli, precum și rezultatele obținute de autor în lucrări anterioare.
Ca exemple de calcul se determină caracteristicile aerodinamice ale unor forme concrete de aripi poligonale cu profil rombic.

NOTAȚII

U_∞ — viteza curentului neperturbat;
a_∞ — viteza sunetului în condițiile curentului neperturbat;

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach;

$B = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \operatorname{ctg} \mu$ — unde μ este unghiul Mach;

h, f, g, b, η — dimensiunile geometrice ale aripii poligonale definite în figura 1, în funcție de care l, λ, L, h_1, η_1 sînt definite prin relațiile

$$l = \frac{b}{h}, \quad \lambda = \frac{b}{\eta - g}, \quad L = \frac{b}{f},$$

$$h_1 = 1 + f - h, \quad \eta_1 = 1 + f - \eta; \quad (1)$$

[1]) Publicată în Rev. Roum. Sci. Techn.—MÉC. APPL., **12**, 2 (1967) (în limba engleză).

$2t$ — grosimea maximă a profilului aripii în secțiunea centrală;

Z — cota extradosului aripii într-un punct oarecare al acesteia;

$Ox_1x_2x_3$ — sistem triortogonal de coordonate având axa Ox_1 paralelă cu viteza curentului neperturbat U_∞, iar axa Ox_3 fiind normală pe planul aripii;

u, v, w — vitezele de perturbație după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3 din mișcarea în jurul aripii poligonale considerate;

$C_p = -2\dfrac{u}{U_\infty}$ — coeficientul de presiune exprimat în ipoteza micilor perturbații;

ρ_∞ — densitatea aerului în condițiile curentului neperturbat;

S — suprafața unei jumătăți din aripa poligonală considerată;

R — coeficientul rezistenței de undă;

$Gx_1^*x_2x_3$, $FX_1x_2x_3$, $O_1\xi_1\xi_2x_3$, $O_3\xi_1^*\xi_2x_3$ — sisteme triortogonale de coordonate definite prin relațiile

$$x_1^* = x_1 - g,\ \left(y^* = \frac{x_2}{x_1^*} = \frac{x_2}{x_1 - g}\right), \tag{2}$$

$$X_1 = x_1 - 1,\ \left(Y = \frac{x_2}{X_1} = \frac{x_2}{x_1 - 1}\right), \tag{2'}$$

$$\xi_1 = x_1 - h,\ \xi_2 = x_2 - b,\ \left(\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{x_2 - b}{x_1 - h}\right), \tag{2''}$$

$$\xi_1^* = x_1 - h,\ \left(\eta^* = \frac{\xi_2}{\xi_1^*} = \frac{x_2 - b}{x_1 - h}\right); \tag{2'''}$$

$x = \mathfrak{y} + i\mathfrak{z}$ — plan complex definit prin transformarea

$$\mathfrak{y} = \frac{y}{1 - B^2z^2},\ \mathfrak{z} = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2z^2},\ \left(y = \frac{x_2}{x_1},\ z = \frac{x_3}{x_1}\right), \tag{3}$$

în care axa reală $o\mathfrak{y}$ reproduce la aceeași scară axa oy din planul fizic, deoarece pentru $x_3 = 0$ avem

$$x = \mathfrak{y} = y; \tag{4}$$

x^*, X, ξ, ξ^* — plane complexe auxiliare obținute prin transformări analoge cu (3), care vor fi utilizate pentru studiul mișcărilor conice din vîrfurile G, F, O_1, O_3; pe aripă $x_3 = 0$ vom avea în mod asemănător

$$x^* = y^*,\quad X = Y,\quad \xi = \eta,\quad \xi^* = \eta^*. \tag{5}$$

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În această lucrare ne propunem ca, utilizînd rezultatele obținute în lucrările anterioare [1], [2], să tratăm scurgerea supersonică în jurul aripilor poligonale cu profil rombic, la care grosimea profilului aripii variază în lungul anvergurii după o funcție polinomială oarecare de x_2.

Să considerăm în acest sens o aripă poligonală de grosime simetrică avînd forma în plan ca în figura 1, din care se pot deduce prin particu-

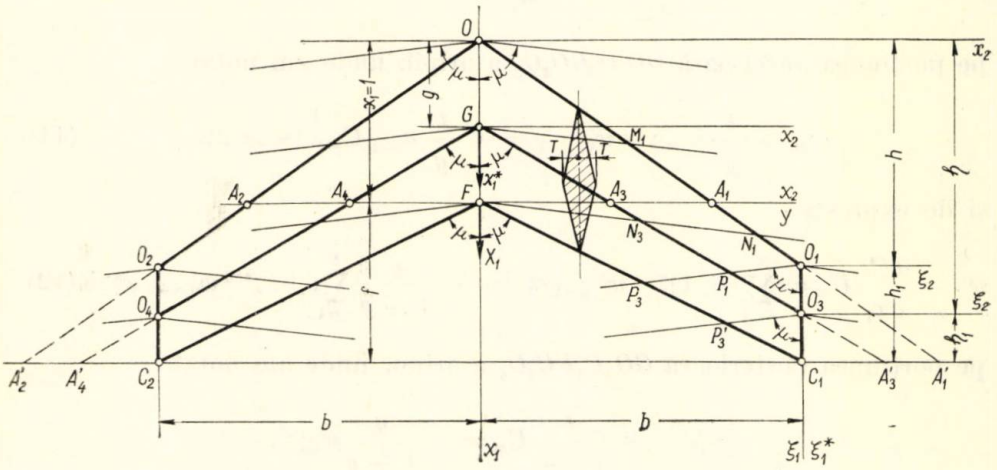


Fig. 1

larizare diferitele forme curente pentru aplicațiile practice. Să mai considerăm de asemenea că suprafața extradosului aripii este definită de ecuația

$$Z = \frac{t}{g}\left(x_1 \mp \frac{h}{b}\,x_2\right)\left(1 - \sum_{n=2}^{N}(\pm 1)^{n-1}\,a_{n-1}\,x_2^{n-1}\right) \tag{6}$$

pe porțiunea anterioară $OO_1O_3GO_4O_2$ a aripii și de ecuația

$$Z^* = \frac{t}{1-g}\left(1 - x_1 \pm \frac{f}{b}\,x_2\right)\left(1 - \sum_{n=2}^{N}(\pm 1)^{n-1}\,a_{n-1}\,x_2^{n-1}\right), \tag{7}$$

pe porțiunea posterioară $GO_3C_1FC_2O_4$ a aripii, unde semnele de sus se referă la $x_2 > 0$, iar cele de jos la $x_2 < 0$, și unde t reprezintă jumătate din grosimea maximă a profilului aripii din secțiunea centrală.

Este evident că aripa poligonală astfel definită are în fiecare secțiune $x_2 = \text{const}$ un profil rombic, a cărui grosime maximă T variază în lungul anvergurii după legea

$$T = t\left(1 \mp \frac{h-f}{b}\,x_2\right)\left(1 - \sum_{n=2}^{N}(\pm 1)^{n-1}\,a_{n-1}\,x_2^{n-1}\right); \tag{8}$$

grosimile maxime ale profilelor aripii se găsesc pe dreptele GO_3 şi GO_4 caracterizate geometric prin abscisele g şi η, ultima fiind dată de relaţia

$$\eta = h + g(1 + f - h) = h + gh_1. \tag{9}$$

În ceea ce priveşte viteza verticală pe aripă, aceasta va fi dată, ţinînd seama de (6) şi (7), de expresia

$$w = \frac{\partial Z}{\partial x_1} U_\infty = \sum_{n=1}^{N} (\pm 1)^{n-1} w_{0,n-1} x_2^{n-1} \tag{10}$$

pe porţiunea anterioară $OO_1O_3GO_4O_2$ a aripii, unde am notat

$$w_{00} = \frac{t}{g} U_\infty; \quad w_{0,n-1} = -\frac{t}{g} a_{n-1} U_\infty, \ (n \geqslant 2), \tag{11}$$

şi de expresia

$$w^* = \frac{\partial Z^*}{\partial x_1} U_\infty = \sum_{n=1}^{N} (\pm 1)^{n-1} w^*_{0,n-1} x_2^{n-1} = -\frac{g}{1-g} \sum_{n=1}^{N} (\pm 1)^{n-1} w^*_{0,n-1} x_2^{n-1} \tag{12}$$

pe porţiunea posterioară $GO_3C_1FC_2O_4$ a aripii, unde am notat

$$\begin{aligned} w^*_{00} &= -\frac{t}{1-g} U_\infty = -\frac{g}{1-g} w_{00}; \\ w^*_{0,n-1} &= \frac{t}{1-g} a_{n-1} U_\infty = -\frac{g}{1-g} w_{0,n-1} \quad (n \geqslant 2). \end{aligned} \tag{13}$$

Ca şi în cazul aripii unghiulare de grosime simetrică, pe planul Ox_1x_2 în afara aripii vom avea, datorită simetriei scurgerii de pe extradosul şi intradosul aripii, condiţia

$$w = 0. \tag{14}$$

Ţinînd seama de această condiţie precum şi de relaţiile (10) şi (11), vom putea considera în ipoteza perturbaţiilor mici că scurgerea în jurul aripii poligonale definite mai sus reprezintă suprapunerea scurgerilor supersonice în jurul următoarelor aripi triunghiulare fictive de grosime simetrică :

a) aripa triunghiulară $OA'_1A'_2$, pe extradosul căreia viteza verticală w este definită prin relaţia (10);

b) aripa triunghiulară fictivă $GA'_3A'_4$, pe extradosul căreia viteza w^G este dată de relaţia

$$\begin{aligned} w^G = w^* - w &= -\sum_{n=1}^{N} (\pm 1)^{n-1} W_{0,n-1} x_2^{n-1} = \\ &= -\sum_{n=1}^{N} (\pm 1)^{n-1} x_1^{*n-1} W_{0,n-1} y^{*n-1}, \end{aligned} \tag{15}$$

unde x_1^* și y^* sînt definite prin relațiile (2) și unde

$$W_{00} = w_{00} - w_{00}^* = \frac{t}{g(1-g)} U_\infty ;$$
$$W_{0,n-1} = w_{0,n-1} - w_{0,n-1}^* = -\frac{t}{g(1-g)} a_{n-1} U_\infty \quad (n \geqslant 2); \tag{16}$$

c) aripa triunghiulară fictivă FC_1C_2, pe extradosul căreia viteza verticală w^F este dată de relația

$$w^F = -w^G = \sum_{n=1}^{N} (\pm 1)^{n-1} W_{0,n-1} x_2^{n-1} = \sum_{n=1}^{N} (\pm 1)^{n-1} X_1^{n-1} W_{0,n-1} Y^{n-1}, \tag{17}$$

unde X_1 și Y sînt definite prin relațiile (2'), iar coeficienții $W_{0,n-1}$ au valorile din (17);

d) aripa triunghiulară fictivă $O_1A_1'C_1$, pe extradosul căreia viteza verticală w^{I} este dată de relația

$$w^{\mathrm{I}} = -w = -\sum_{n=1}^{N} w_{0,n-1} (\xi_2 + b)^{n-1} =$$
$$= -\sum_{m=1}^{N} \beta_{0,m-1} \xi_2^{m-1} = -\sum_{m=1}^{N} \xi_1^{m-1} \beta_{0,m-1} \eta_1^{m-1}, \tag{18}$$

unde ξ_1, ξ_2, η_1 sînt definite prin relațiile (2'''), iar coeficienții $\beta_{0,m-1}$ au valorile

$$\beta_{0,m-1} = \sum_{n=m}^{N} C_{n-1}^{m-1} b^{n-m} w_{0,n-1}; \tag{19}$$

e) aripa triunghiulară fictivă $O_3A_3'C_1$, pe extradosul căreia viteza verticală w^{III} este dată de relația

$$w^{\mathrm{III}} = -w^G = \sum_{n=1}^{N} W_{0,n-1} (\xi_2 + b)^{n-1} =$$
$$= \sum_{m=1}^{N} \beta_{0,m-1}^* \xi_2^{m-1} = \sum_{m=1}^{N} \xi_1^{*m-1} \beta_{0,m-1}^* \eta_1^{*m-1}, \tag{20}$$

unde ξ_1^*, ξ_2, η_1^* sînt definite prin relațiile (2''), (2'''), iar coeficienții $\beta_{0,m-1}^*$ au valorile

$$\beta_{0,m-1}^* = \sum_{n=m}^{N} C_{n-1}^{m-1} b^{n-m} W_{0,n-1}; \tag{21}$$

f) aripa triunghiulară fictivă $O_2A_2'C_2$, care este simetrică cu aripa $O_1A_1'C_1$ față de axa Ox_1;

g) aripa triunghiulară fictivă $O_4A_4'C_2$, care este simetrică cu aripa $O_3A_3'C_1$ față de axa Ox_1.

În acest mod problema a fost redusă la studiul unor mișcări conice de diferite ordine în jurul unor aripi triunghiulare fictive, pe care le vom determina în cele ce urmează utilizînd metoda analogiei hidrodinamice [3] — [5], elaborată de prof. E. Carafoli.

2. DETERMINAREA VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE

Ținînd seama de descompunerea problemei efectuată mai sus, viteza axială de perturbație în jurul aripii poligonale cu profil rombic poate fi exprimată sub forma

$$u = u^0 + u^G + u^F + u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}} + u^{\mathrm{III}} + u^{\mathrm{IV}}, \tag{22}$$

unde u^0, u^G, u^F, u^{I}, u^{II}, u^{III}, u^{IV} reprezintă vitezele axiale de perturbație în jurul aripilor triunghiulare fictive, avînd vîrfurile în O, G, F, O_1, O_2, O_3,O_4.

Dată fiind simetria aripii față de axa Ox_1, în cele ce urmează ne vom ocupa numai de determinarea vitezelor u^0, u^G, u^F, u^{I}, u^{III}, deoarece vitezele u^{II} și u^{IV} se pot deduce cu ușurință din u^{I} și u^{III} din considerente de simetrie.

a) *Determinarea vitezei axiale* u^O. După cum am arătat mai sus, mișcarea din vîrful O reprezintă însumarea unor scurgeri conice de diferite ordine în jurul aripii triunghiulare OA_1', A_2'. Vom putea astfel scrie pentru u^O

$$u^O = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} u_{n-1}^O = Re \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \mathcal{U}_{n-1}^O, \tag{23}$$

în care funcțiile vitezei axiale $\mathcal{U}_{n-1}^O$ au expresia

$$\mathcal{U}_{n-1}^O = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{K_{n,q}^0}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} x^q \left[\operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}} \right] + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} Q_{n,2q}^O x^{2q} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{1}{B^2 x^2}} + \tag{24}$$

$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{n,q}^0 x^{2q} \sqrt{1 - B^2 x^2},$$

unde $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ și $E\left(\frac{n-2}{2}\right)$ reprezintă cel mai mare întreg conținut în $\frac{n-1}{2}$ și, respectiv $\frac{n-2}{2}$, unde constantele $K_{n,q}^O$, $Q_{n,2q}^O$ și $D_{n,2q}^O$ se determină în modul indicat în [1]. Vom obține astfel pentru mișcările conice de ordinul 1 și 2 următoarele expresii ale acestor constante:

$$K_{10}^O = -\frac{2 w_{00} l}{\pi}, \tag{25}$$

pentru $n = 1$, și

$$K_{20}^{O} = -\frac{2}{\pi}\frac{w_{01}l^2}{1-B^2l^2}, \quad K_{21}^{O} = \frac{2}{\pi}\frac{B^2l^3w_{01}}{1-B^2l^2}, \quad D_{20}^{O} = \frac{2}{\pi}\frac{l^2w_{01}}{1-B^2l^2}, \tag{26}$$

pentru $n = 2$, unde coeficienții $w_{0,n-1}$ sînt dați de relațiile (10).

Vom menționa că expresia (24) rămîne valabilă și în cazul bordurilor supersonice $\left(l > \frac{1}{B}\right)$, în acest caz trebuind însă să ținem seama de relația cunoscută

$$\frac{\arg \operatorname{ch}\theta}{\sqrt{1-B^2l^2}} = \frac{\operatorname{arc}\cos\theta}{\sqrt{B^2l^2-1}}. \tag{27}$$

b) *Determinarea vitezei axiale* u^G. După cum rezultă din (15), mișcarea din vîrful G reprezintă suprapunerea unor mișcări conice de diferite ordine în jurul aripii fictive $GA_3'A_4'$, astfel că u^G va fi de forma

$$u^G = \sum_{n=1}^{N} x_1^{*n-1}\, u_{n-1}^G = Re \sum_{n=1}^{N} x_1^{*n-1}\, \mathcal{U}_{n-1}^G, \tag{28}$$

în care funcțiile vitezei axiale $\mathcal{U}_{n-1}^G$ au expresia

$$\mathcal{U}_{n-1}^G = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{K_{n,q}^G}{\sqrt{1-B^2\lambda^2}}\, x^{*q}\left[\arg \operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1-Bx^*)}{2B(\lambda-x^*)}} + \right.$$

$$+ (-1)^q \arg \operatorname{ch}\left.\sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1+Bx^*)}{2B(\lambda+x^*)}}\right] + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} Q_{n,2q}^G\, x^{*2q} \arg \operatorname{ch}\sqrt{\frac{1}{B^2x^{*2}}} + \tag{29}$$

$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{n,2q}^G\, x^{*2q}\sqrt{1-B^2x^{*2}},$$

unde constantele $K_{n,q}^G$, $Q_{n,2q}^G$, $D_{n,2q}^G$ se determină în același mod.

Vom avea astfel

$$K_{10}^G = \frac{2W_{00}\lambda}{\pi}, \quad \left(\lambda = \frac{b}{b-g}\right), \tag{30}$$

pentru $n = 1$, și

$$K_{20}^G = \frac{2}{\pi}\frac{W_{01}\lambda^2}{1-B^2\lambda^2}, \quad K_{21}^G = -\frac{2}{\pi}\frac{B^2\lambda^3W_{01}}{1-B^2\lambda^2}, \quad D_{20}^G = -\frac{2}{\pi}\frac{W_{01}\lambda^2}{1-B^2\lambda^2}, \tag{31}$$

pentru $n = 2$, coeficienții $W_{0,n-1}$ fiind dați de relațiile (16).

Vom menționa că, ținînd seama de o relație analogă cu (27), expresia (29) rămîne valabilă și în cazul cînd $\lambda > \frac{1}{B}$.

c) *Determinarea vitezei axiale* u^F. În mod asemănător, u^F va fi dat de relația

$$u^F = \sum_{n=1}^{N} X_1^{n-1} u_{n-1}^F = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N} X_1^{n-1} \mathcal{U}_{n-1}^F , \tag{32}$$

în care funcțiile vitezei axiale $\mathcal{U}_{n-1}^F$ au expresia

$$\mathcal{U}_{n-1}^F = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{K_{n,q}^F}{\sqrt{1-B^2L^2}} X^q \left[\operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+BL)(1-BX)}{2B(L-X)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+BL)(1+BX)}{2B(L+X)}} \right] + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} Q_{n,2q}^F X^{2q} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{1}{B^2X^2}} + \tag{33}$$

$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{n,2q}^F X^{2q} \sqrt{1-B^2X^2} ,$$

unde constantele $K_{n,q}^F$, $Q_{n\,2q}^F$, $D_{n,2q}^F$ se determină în modul indicat în [1]. Astfel se obține pentru $n = 1$.

$$K_{10}^F = -\frac{2W_{00}L}{\pi}, \quad \left(L = \frac{b}{f}\right), \tag{34}$$

iar pentru $n = 2$

$$K_{20}^F = -\frac{2}{\pi}\frac{W_{01}L^2}{1-B^2L^2}, \quad K_{21}^F = \frac{2}{\pi}\frac{B^2L^3W_{01}}{1-B^2L^2}, \quad D_{20}^F = \frac{2}{\pi}\frac{W_{01}L^2}{1-B^2L^2}. \tag{35}$$

Vom observa că, în cazul cînd bordurile de fugă FC_1 și FC_2 sînt supersonice $\left(L > \frac{1}{B}\right)$, viteza axială u^F este nulă pe aripă.

d) *Determinarea vitezei axiale* u^I. Ținînd seama de (18), vom putea scrie pentru u^I:

$$u^I = \sum_{n=1}^{N} \xi_1^{n-1} u_{n-1}^I = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N} \xi_1^{n-1} \mathcal{U}_{n-1}^I , \tag{36}$$

în care

$$\mathcal{U}_{n-1}^I = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{K_{n,q}^I}{\sqrt{1-B^2l^2}} \xi^q \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-B\xi)}{2B(l-\xi)}} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n-1} Q_{n,q}^I \xi^q \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{1}{B^2\xi^2}} + \sum_{q=0}^{n-2} D_{n,q}^I \xi^q \sqrt{1-B^2\xi^2} . \tag{37}$$

Constantele care intervin în această expresie se determină în modul indicat în [1], rezultînd pentru $n = 1$

$$K_{10}^I = \frac{2\beta_{00}l}{\pi}, \tag{38}$$

iar pentru $n = 2$

$$K_{20}^{\mathrm{I}} = \frac{2}{\pi}\frac{\beta_{01} l^2}{1 - B^2 l^2}, \quad K_{21}^{\mathrm{I}} = -\frac{2}{\pi}\frac{B^2 l^3 \beta_{01}}{1 - B^2 l^2}, \tag{39}$$

$$D_{20}^{\mathrm{I}} = -\frac{\beta_{01} l^2}{\pi(1 - B^2 l^2)}, \quad Q_{21}^{\mathrm{I}} = 0.$$

Expresia (37) își păstrează valabilitatea, ținînd seama de relația (27), și în cazul bordului OO_1 supersonic $\left(l > \frac{1}{B}\right)$.

e) *Determinarea vitezei axiale* u^{III}. Într-un mod asemănător va rezulta pentru u^{III} expresia

$$u^{\mathrm{III}} = \sum_{n=1}^{N} \xi_1^{*n-1} u_{n-1}^{\mathrm{III}} = \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{N} \xi_1^{*n-1} \mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{III}}, \tag{40}$$

în care

$$\mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{III}} = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{K_{n,q}^{\mathrm{III}}}{\sqrt{1 - B^2\lambda^2}} \xi^{*q} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + B\lambda)(1 - B\xi^*)}{2B(\lambda - \xi^*)}} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n-1} Q_{n,q}^{\mathrm{III}} \xi^{*q} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{1}{B^2 \xi^{*2}}} + \sum_{q=0}^{n-2} D_{n,q}^{\mathrm{III}} \xi^{*q} \sqrt{1 - B^2 \xi^{*2}}. \tag{41}$$

Pentru mișcările conice de ordinul 1 și 2, constantele care intervin în această expresie vor fi date de relațiile

$$K_{10}^{\mathrm{III}} = -\frac{2\beta_{00}^* \lambda}{\pi} \tag{42}$$

și, respectiv,

$$K_{20}^{\mathrm{III}} = -\frac{2}{\pi}\frac{\beta_{01}^* \lambda^2}{1 - B^2\lambda^2}, \quad K_{21}^{\mathrm{III}} = \frac{2}{\pi}\frac{B^2 \lambda^3 \beta_{01}^*}{1 - B^2\lambda^2}, \tag{43}$$

$$D_{20}^{\mathrm{III}} = \frac{\beta_{01}^* \lambda^2}{\pi(1 - B^2\lambda^2)}, \quad Q_{21}^{\mathrm{III}} = 0.$$

Expresia (41) își păstrează valabilitatea și pentru $\lambda > \frac{1}{B}$, cu aceeași observație ca mai sus.

3. DETERMINAREA REZISTENȚEI DE UNDĂ

Dată fiind simetria aripii față de axa Ox_1, coeficientul rezistenței de undă poate fi exprimat sub forma

$$C_d = -\frac{4}{S U_\infty^2}\left[\int_S u w^* \, \mathrm{d}S + \int_{OO_1O_3G} u(w - w^*) \, \mathrm{d}S\right], \tag{44}$$

unde S reprezintă suprafaţa unei jumătăţi de aripă şi unde elementul de suprafaţă $\mathrm{d}S$ poate fi pus sub forma

$$\mathrm{d}S = x_1\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y = x_1^*\,\mathrm{d}x_1^*\,\mathrm{d}y^* = X_1\,\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}Y = \xi_1\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\eta_1 = \xi_1^*\,\mathrm{d}\xi_1^*\,\mathrm{d}\eta^*. \quad (45)$$

Viteza axială de perturbaţie fiind dată de expresia (22), vom putea exprima coeficientul de rezistenţă sub forma

$$C_d = C_d^O + C_d^{*O} + C_d^G + C_d^{*G} + C_d^F + C_d^{*F} + C_d^{\mathrm{I}} + C_d^{*\mathrm{I}} + C_d^{\mathrm{III}} \quad (46)$$

sau încă, dacă ţinem seama de (23), (28), (36), (40), sub forma

$$C_d = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}(C_{dm}^{On} + C_{dm}^{*On} + C_{dm}^{Gn} + C_{dm}^{*Gn} + C_{dm}^{Fn} + C_{dm}^{*Fn} + C_{dm}^{\mathrm{I}n} + C_{dm}^{*\mathrm{I}n} + C_{dm}^{\mathrm{III}n}), \quad (47)$$

în care am notat, pentru poziţia din figura 1 a conurilor Mach,

$$C_{dm}^{On} = -\,\mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{OO_1O_3G} x_1^{m+n-1}\,\mathcal{U}_{n-1}^O\,W_{0,\,m-1}\,y^{m-1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y, \quad (48a)$$

$$C_{dm}^{*On} = -\,\mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{S} x_1^{m+n-1}\,\mathcal{U}_{n-1}^O\,w_{0,\,m-1}^*\,y^{m-1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y, \quad (48b)$$

$$C_{dm}^{Gn} = -\,\mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{GM_1O_1C_3} x_1^{*m+n-1}\,\mathcal{U}_{n-1}^G\,w_{0,\,m-1}\,y^{*m-1}\,\mathrm{d}x_1^*\,\mathrm{d}y^*, \quad (48c)$$

$$C_{dm}^{*Gn} = -\,\mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{GO_3C_1F} x_1^{*m+n-1}\,\mathcal{U}_{n-1}^G\,w_{0,\,m-1}^*\,y^{*m-1}\,\mathrm{d}x_1^*\,\mathrm{d}y^*, \quad (48d)$$

$$C_{dm}^{Fn} = -\,\mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{FN_1O_1C_1} X_1^{m+n-1}\,\mathcal{U}_{n-1}^F\,w_{0,\,m-1}\,Y^{m-1}\,\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}Y, \quad (48e)$$

$$C_{dm}^{*Fn} = \mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{FN_3O_3C_1} X_1^{m+n-1}\,\mathcal{U}_{n-1}^F\,W_{0,\,m-1}\,Y^{m-1}\,\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}Y, \quad (48f)$$

$$C_{dm}^{\mathrm{I}n} = -\,\mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{O_1P_1O_3} \xi_1^{m+n-1}\,\mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{I}}\,\beta_{0,\,m-1}^*\,\eta^{m-1}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\eta, \quad (48g)$$

$$C_{dm}^{*\mathrm{I}n} = -\,\mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{O_1P_3C_1} \xi_1^{m+n-1}\,\mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{I}}\,(\beta_{0,\,m-1} - \beta_{0,\,m-1}^*)\,\eta^{m-1}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\eta, \quad (48h)$$

$$C_{dm}^{\mathrm{III}n} = -\,\mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{O_3P_3'C_1} \xi_1^{*m+n-1}\,\mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{III}}\,(\beta_{0,m-1} - \beta_{0,\,m-1}^*)\,\eta^{*m-1}\,\mathrm{d}\xi_1^*\,\mathrm{d}\eta^*. \quad (48i)$$

4. APLICAȚIILE LA STUDIUL UNOR ARIPI POLIGONALE CU PROFIL ROMBIC

În cele ce urmează ne propunem să determinăm viteza axială de perturbație și deci distribuția de presiuni, deoarece

$$C_p = -2\frac{u}{U_\infty}, \tag{49}$$

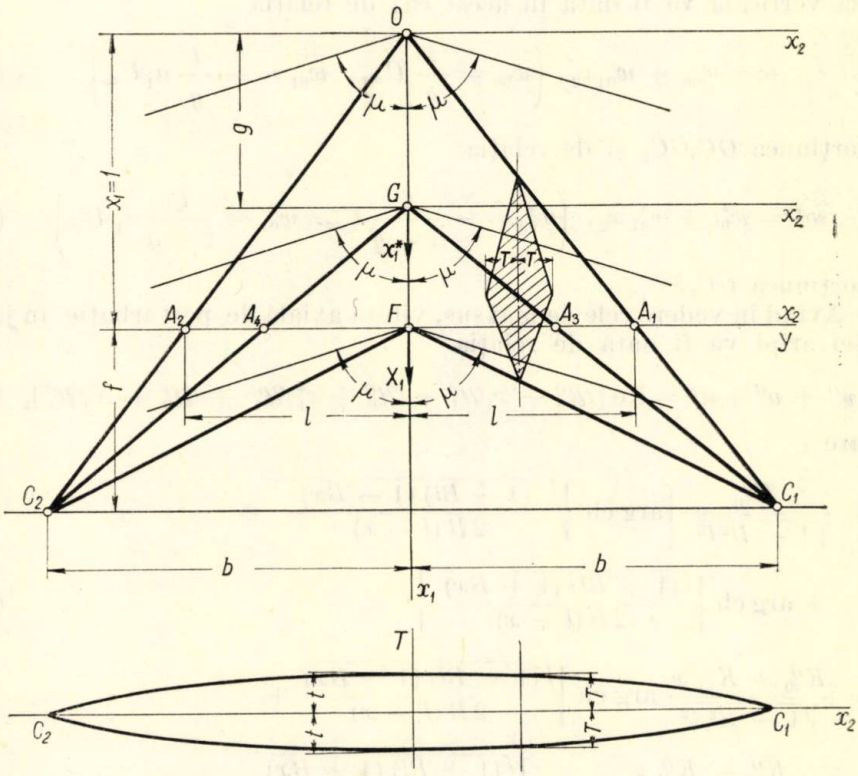


Fig. 2

precum și coeficientul de rezistență, pentru cîteva forme concrete de aripi poligonale cu profil rombic.

a) *Aripa în coadă de rîndunică cu profil rombic.* Să considerăm aripa în coadă de rîndunică din figura 2, la care suprafața extradosului aripii este dată de ecuația

$$Z = \frac{t}{g}\left(x_1 \mp \frac{1+f}{b}x_2\right)(1 \mp a_1 x_2) \tag{50}$$

pe porțiunea anterioară OC_1GG_2 și de ecuația

$$Z^* = \frac{t}{1-g}\left(1 - x_1 \pm \frac{f}{b}x_2\right)(1 \mp a_1 x_2) \tag{51}$$

pe porțiunea posterioară GC_1FC_2, unde semnele de sus se referă la $x_2 > 0$, iar cele de jos la $x_2 < 0$.

În mod evident, profilul acestei aripi într-o secțiune oarecare $x_2 =$ =const este rombic, grosimea maximă a profilului, T, variind parabolic în lungul anvergurii, adică

$$T = t\left(1 \mp \frac{x_2}{b}\right)(1 \mp a_1 x_2). \tag{52}$$

Viteza verticală va fi dată în acest caz de relația

$$w = w_{00} \pm w_{01} x_2, \quad \left(w_{00} = \frac{t}{g} U_\infty, \; w_{01} = -\frac{t}{g} a_1 U_\infty\right) \tag{53}$$

pe porțiunea OC_1GC_2 și de relația

$$w^* = w^*_{00} \pm w^*_{01} x_2, \quad \left(w^*_{00} = -\frac{t}{1-g} U_\infty, \; w^*_{01} = \frac{t}{1-g} a_1 U_\infty\right) \tag{54}$$

pe porțiunea GC_1FC_2.

Avînd în vedere cele de mai sus, viteza axială de perturbație în jurul acestei aripi va fi dată de relația

$$u = u^O + u^G + u^F = \mathrm{Re}\,[\mathcal{U}^O_0 + x_1\mathcal{U}^O_1 + \mathcal{U}^G_0 + x^*_1\mathcal{U}^G_1 + \mathcal{U}^F_0 + X_1\mathcal{U}^F_1], \tag{55}$$

în care

$$\mathcal{U}^O_0 = \frac{K^0_{10}}{\sqrt{1 - B^2 l^2}}\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}}\right], \tag{56}$$

$$\mathcal{U}^O_1 = \frac{K^O_{20} + K^O_{21} x}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} +$$

$$+ \frac{K^O_{20} - K^O_{21} x}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}} + D^O_{20}\sqrt{1 - B^2 x^2}. \tag{56'}$$

$$\mathcal{U}^G_0 = \frac{K^G_{10}}{\sqrt{1 - B^2\lambda^2}}\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1-Bx^*)}{2B(\lambda - x^*)}} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1+Bx^*)}{2B(\lambda + x^*)}}\right], \tag{57}$$

$$\mathcal{U}^G_1 = \frac{K^G_{20} + K^G_{21} x^*}{\sqrt{1 - B^2\lambda^2}} \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1-Bx^*)}{2B(\lambda - x^*)}} +$$

$$+ \frac{K^G_{20} - K^G_{21} x^*}{\sqrt{1 - B^2\lambda^2}} \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1+Bx^*)}{2B(\lambda + x^*)}} + D^G_{20}\sqrt{1 - B^2 x^{*2}}. \tag{57'}$$

$$\mathcal{U}_0^F = \frac{K_{10}^F}{\sqrt{1-B^2L^2}}\left[\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1+BX)}{2B(L+X)}} + \right.$$

$$\left. + \arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1+BX)}{2B(L+X)}}\right], \tag{58}$$

$$\mathcal{U}_1^F = \frac{K_{20}^F + K_{21}^F X}{\sqrt{1-B^2L^2}}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-BX)}{2B(L-X)}} +$$

$$+ \frac{K_{20}^F - K_{21}^F X}{\sqrt{1-B^2L^2}}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1+BX)}{2B(L+X)}} + D_{20}^F\sqrt{1-B^2X^2}, \tag{58'}$$

unde

$$K_{10}^O = -\frac{2tU_\infty l}{\pi g},\quad K_{20}^O = \frac{2}{\pi}\frac{ta_1U_\infty l^2}{g(1-B^2l^2)},\quad K_{21}^O = -\frac{2}{\pi}\frac{B^2l^3ta_1U_\infty}{g(1-B^2l^2)},$$

$$D_{20}^O = -\frac{2}{\pi}\frac{ta_1U_\infty l^2}{g(1-B^2l^2)}, \tag{59}$$

$$K_{10}^G = \frac{2tU_\infty\lambda}{\pi g(1-g)},\quad K_{20}^G = -\frac{2}{\pi}\frac{ta_1U_\infty\lambda^2}{g(1-g)(1-B^2\lambda^2)},$$

$$K_{21}^G = \frac{2}{\pi}\frac{B^2\lambda^3ta_1U_\infty}{g(1-g)(1-B^2\lambda^2)},\quad D_{20}^G = \frac{2}{\pi}\frac{ta_1U_\infty\lambda^2}{g(1-g)(1-B^2\lambda^2)}, \tag{60}$$

$$K_{10}^F = -\frac{2tU_\infty L}{\pi g(1-g)},\quad K_{20}^F = \frac{2}{\pi}\frac{ta_1U_\infty L^2}{g(1-g)(1-B^2L^2)},$$

$$K_{21}^F = -\frac{2}{\pi}\frac{B^2L^3ta_1U_\infty}{g(1-g)(1-B^2L^2)},\quad D_{20}^F = -\frac{2}{\pi}\frac{ta_1U_\infty L^2}{g(1-g)(1-B^2L^2)}, \tag{61}$$

$$l = \frac{b}{1+f},\quad \lambda = \frac{b}{1+f-g},\quad L = \frac{b}{f},\quad W_{00} = \frac{t}{g(1-g)}U_\infty,$$

$$W_{01} = -\frac{ta_1}{g(1-g)}U_\infty. \tag{62}$$

În ceea ce privește coeficientul de rezistență, acesta va fi dat de relația

$$C_d = C_d^O + C_d^{*O} + C_d^G + C_d^{*G} + C_d^F + C_d^{*F} =$$

$$= \sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}(C_{dm}^{On} + C_{dm}^{*On} + C_{dm}^{Gn} + C_{dm}^{*Gn} + C_{dm}^{Fn} + C_{dm}^{*Fn}), \tag{63}$$

în care

$$C_{dm}^{On} = -\operatorname{Re}\frac{4W_{0,m-1}}{SU_\infty^2}\int_0^{\frac{g\lambda}{\lambda-g}} x_1^{m+n-1}\,dx_1\int_0^{l}\mathcal{U}_{n-1}^{O}\,y^{m-1}\,dy\,, \tag{64}$$

$$C_{dm}^{*On} = -\operatorname{Re}\frac{4w_{0,m-1}^{*}}{SU_\infty^2}\int_0^{\frac{L}{L-g}} x_1^{m+n-1}\,dx_1\int_0^{l}\mathcal{U}_{n-1}^{O}\,y^{m-1}\,dy\,, \tag{64'}$$

$$C_{dm}^{Gn} = -\operatorname{Re}\frac{4w_{0,m-1}}{SU_\infty^2}\int_0^{\frac{gl}{y^*-l}} x_1^{*m+n-1}\,dx_1^{*}\int_{\lambda}^{a'}\mathcal{U}_{n-1}^{G}\,y^{*m-1}\,dy^{*}, \tag{64''}$$

$$C_{dm}^{*Gn} = -\operatorname{Re}\frac{4w_{0,m-1}^{*}}{SU_\infty^2}\int_0^{\frac{(1-g)L}{L-y^*}} x_1^{*m+n-1}\,dx_1^{*}\int_0^{\lambda}\mathcal{U}_{n-1}^{G}\,y^{*m-1}\,dy^{*}, \tag{64'''}$$

$$C_{dm}^{Fn} = -\operatorname{Re}\frac{4w_{0,m-1}}{SU_\infty^2}\int_0^{Y-l} X_1^{m+n-1}\,dX_1\int_L^{a''}\mathcal{U}_{n-1}^{F}\,Y^{m-1}\,dY, \tag{64''''}$$

$$C_{dm}^{*Fn} = \operatorname{Re}\frac{4W_{0,m-1}}{SU_\infty^2}\int_0^{\frac{(1-g)\lambda}{Y-\lambda}} X_1^{m+n-1}\,dX_1\int_L^{a''}\mathcal{U}_{n-1}^{F}\,Y^{m-1}\,dY, \tag{64'''''}$$

unde limitele de integrare au următoarele valori:

$$a' = \frac{1}{B}\ \text{pentru}\ \lambda < \frac{1}{B};\quad a' = \lambda\ \text{pentru}\ \lambda > \frac{1}{B},$$

$$a'' = \frac{1}{B}\ \text{pentru}\ L < \frac{1}{B};\quad a'' = L\ \text{pentru}\ L > \frac{1}{B}.$$

Este ușor de văzut că, dacă $\lambda > \frac{1}{B}$ și $L > \frac{1}{B}$, vom avea

$$C_{dm}^{Gn} = 0\,,\quad (C_d^G = 0) \tag{65}$$

și, respectiv,

$$C_{dm}^{Fn} = C_{dm}^{*Fn} = 0,\quad (C_d^F = C_d^G = 0)\,. \tag{66}$$

Considerînd cazul cînd toate bordurile aripii sînt subsonice, vom obține pentru coeficienții de rezistență din relațiile (64) următoarele expresii valabile numai pentru $n \leqslant 2$ (pentru care $Q_{n,2q} = 0$):

$$C_{dm}^{On} + C_{dm}^{*On} = -\frac{4}{(m+n)\,SU_\infty^2}\left\{\sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}^{O}\sum_{r=d}^{m+q-1}(-1)^r\frac{(m+q-1)!}{r!\,(m+q-r-1)!}\times\right.$$

$$\times\left[g^{m+n}W_{0,m-1}\lambda^{m+q-1}E_{m+n-r,q}^{O} + w_{0,m-1}^{*}L^{m+q-1}E_{m+n-r,q}^{*O}\right] +$$

$$+\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{n,2q}^{O}\sum_{r=0}^{m+2q-1}(-1)^r\frac{(m+2q-1)!}{r!\,(m+2q-1-r)!}\times$$

$$\left.\times\left[g^{m+n}W_{0,m-1}\lambda^{m+2q-1}P_{m+u-r}^{O} + w_{0,m-1}^{*}L^{m+2q-1}P_{m+n-r}^{*O}\right]\right\}, \tag{67}$$

$$C_{dm}^{Gn} + C_{dm}^{*Gn} = -\frac{4}{(m+n)\,SU_\infty^2}\left\{\sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}^{G} \sum_{r=0}^{m+q-1} \frac{(m+g-1)!}{r!(m+q-r-1)!} \times\right.$$

$$\times [g^{m+n} w_{0,m-1} l^{m+q-1} E_{m+n-r,q}^{G} + (-1)^r (1-g)^{m+n} w_{0,m-1}^{*} L^{m+q-1} E_{m+n-r,q}^{*G}] +$$

$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{n,2q}^{G} \sum_{r=0}^{m+2q-1} \frac{(m+2q-1)!}{r!(m+2q-r-1)!} [g^{m+n} w_{0,m-1} l^{m+2q-1} P_{m+n-r}^{G} +$$

$$\left. + (-1)^r (1-g)^{m+n} w_{0,m-1}^{*} L^{m+2q-1} P_{m+n-r}^{*G}] \right\}, \tag{67'}$$

$$C_{dm}^{Fn} + C_{dm}^{*Fn} = -\frac{4}{(m+n)\,SU_\infty^2}\left\{\sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}^{F} \sum_{r=0}^{m+q-1} \frac{(m+g-1)!}{r!(m+g-r-1)!} \times\right.$$

$$\times [w_{0,m-1} l^{m+q-1} E_{m+n-r,q}^{F} - (1-g)^{m+n} W_{0,m-1} \lambda^{m+q-1} E_{m+n-r,q}^{*F}] +$$

$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{n,2q}^{F} \sum_{r=0}^{m+2q-1} \frac{(m+2g-1)!}{r!(m+2q-r-1)!} \times$$

$$\left. \times [w_{0,m-1} l^{m+2q-1} P_{m+n-r}^{F} - (1-g)^{m+n} W_{0,m-1} \lambda^{m+2q-1} P_{m+n-r}^{*F}] \right\}, \tag{67''}$$

în care expresiile integralelor $E_{m+n-r,q}^{O}$, P_{m+n-r}^{O}, $E_{m+n-r,q}^{*O}$, P_{m+n-r}^{*O}, $E_{m+n-r,q}^{G}$, P_{m+n-r}^{G}, $E_{m+n-r,q}^{*G}$, P_{m+n-r}^{*G}, $E_{m+n-r,q}^{F}$, P_{m+n-r}^{F}, $E_{m+n-r,q}^{*F}$, P_{m+n-r}^{*F} sînt date în anexa de calcul și în care

$$S = \frac{b}{2}. \tag{68}$$

b) *Aripa dublu trapezoidală cu profil rombic.* Să considerăm aripa dublu trapezoidală din figura 3, definită prin ecuația suprafeței extradosului

$$Z = \frac{t}{g}\left(x_1 \mp \frac{h}{b} x_2\right). \tag{69}$$

pe porțiunea $OO_1O_3GO_4O_2$ și

$$Z^* = \frac{t}{1-g}\left(1 - x_1 \pm \frac{f}{b} x_2\right) \tag{70}$$

pe porțiunea $GO_3C_1FC_2O_4$.

Este evident că la această aripă grosimea profilului rombic variază liniar în anvergură,

$$T = t\left(1 \mp \frac{h-f}{b} x_1\right), \tag{71}$$

și se găsește pe dreptele GO_3 și GO_4, definite prin distanțele g și h, ultima fiind dată de relația (9).

Viteza verticală pe aripă este dată în acest caz de relaţiile

$$w = \frac{t}{g} U_\infty, \quad w^* = -\frac{t}{1-g} U_\infty \tag{72}$$

pe porţiunile $OO_1O_3GO_4O_2$ şi respectiv $GO_3C_1FC_2O_4$.

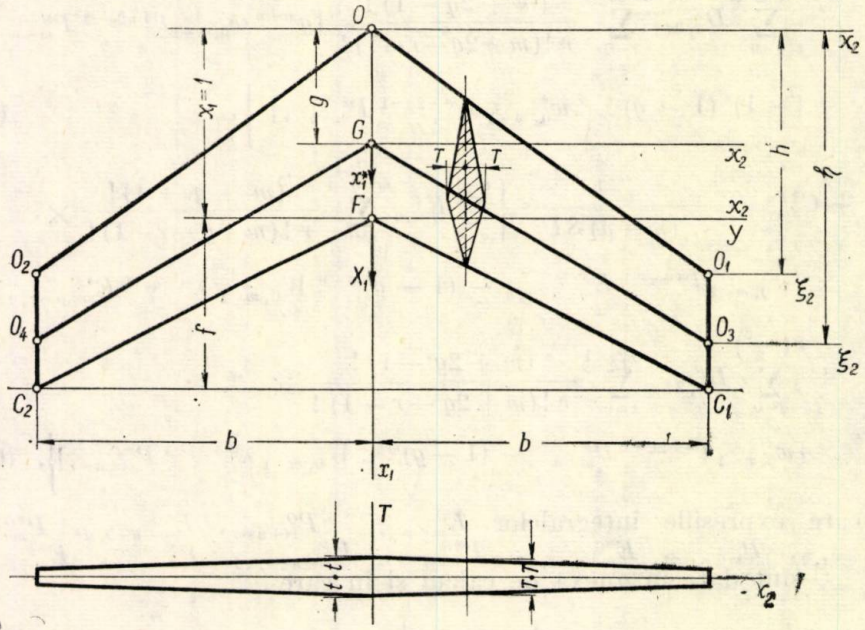


Fig. 3

În ceea ce priveşte viteza axială de perturbaţie, aceasta va fi dată de relaţia

$$u = u^o + u^G + u^F + u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}} + u^{\mathrm{III}} + u^{\mathrm{IV}} =$$
$$= \mathrm{Re}\,(\mathcal{U}_0^o + \mathcal{U}_0^G + \mathcal{U}_0^F + \mathcal{U}_0^{\mathrm{I}} + \mathcal{U}_0^{\mathrm{III}}) + u^{\mathrm{II}} + u^{\mathrm{IV}}, \tag{73}$$

în care funcţiile vitezei axiale $\mathcal{U}_0^o$, $\mathcal{U}_0^G$ şi $\mathcal{U}_0^F$ au aceleaşi expresii cu cele din (56), (57) şi (58), $\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}}$ şi $\mathcal{U}_0^{\mathrm{III}}$ avînd expresiile

$$\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}} = \frac{2}{\pi} \frac{t\,U_\infty\,l}{g\sqrt{1-B^2l^2}} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-B\xi)}{2B(l-\xi)}}, \tag{74}$$

$$\mathcal{U}_0^{\mathrm{III}} = -\frac{2}{\pi} \frac{t\,U_\infty\,\lambda}{g(1-g)\sqrt{1-B^2\lambda^2}} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1-B\xi^*)}{2B(\lambda-\xi^*)}}, \tag{74'}$$

iar vitezele axiale u^{II} şi u^{IV} se deduc datorită simetriei din expresiile stabilite pentru u^{I} şi u^{III}.

Ţinînd seama de cele de mai sus, vom obţine pentru coeficientul de rezistenţă expresia

$$C_{\bar{a}} = C_d^O + C_d^{*O} + C_d^G + C_d^{*G} + C_d^F + C_d^{*F} + C_d^{\mathrm{I}} + C_d^{*\mathrm{I}} + C_d^{\mathrm{III}}, \tag{75}$$

în care

$$C_d^O = -\frac{2t}{g(1-g)\,SU_\infty}\,\mathrm{Re}\left[g^2\int_0^{\frac{b}{b}}\frac{\lambda^2}{(\lambda-y)^2}\,\mathcal{U}_0^O\,\mathrm{d}y + b^2\int_{\frac{b}{b}}^{l}\frac{1}{y^2}\,\mathcal{U}_0^O\,\mathrm{d}y\right], \tag{76a}$$

$$C_d^{*O} = \frac{2t}{(1-g)\,SU_\infty}\,\mathrm{Re}\left[\int_0^{\frac{b}{1+f}}\frac{L^2}{L^2-y^2}\,\mathcal{U}_0^O\,\mathrm{d}y + b^2\int_{\frac{b}{1+f}}^{l}\frac{1}{y^2}\,\mathcal{U}_0^O\,\mathrm{d}y\right], \tag{76b}$$

$$C_d^G = -\frac{2t}{gSU_\infty}\,\mathrm{Re}\left[b^2\int_\lambda^{a'}\frac{1}{y^{*2}}\,\mathcal{U}_0^G\,\mathrm{d}y + g^2\int_{a'}^{\frac{1}{B}}\frac{l^2}{(y^*-l)^2}\,\mathcal{U}_0^G\,\mathrm{d}y^*\right], \tag{76c}$$

$$C_d^{*G} = \frac{2t}{(1-g)\,SU_\infty}\,\mathrm{Re}\left[(1-g)^2\int_0^{\frac{b}{1+f-g}}\frac{L^2}{(L-y^*)^2}\,\mathcal{U}_0^G\,\mathrm{d}y^* + b^2\int_{\frac{b}{1+f-g}}^{\lambda}\frac{1}{y^{*2}}\,\mathcal{U}_0^G\,\mathrm{d}y^*\right], \tag{76d}$$

$$C_d^F = -\frac{2t}{gSU_\infty}\,\mathrm{Re}\left[b^2\int_L^{a''}\frac{1}{Y^2}\,\mathcal{U}_0^F\,\mathrm{d}Y + \int_{a''}^{\frac{1}{B}}\frac{l^2}{(Y-l)^2}\,\mathcal{U}_0^F\,\mathrm{d}Y\right], \tag{76e}$$

$$C_d^{*F} = \frac{2t}{g(1-g)\,SU_\infty}\,\mathrm{Re}\left[b^2\int_L^{a'''}\frac{1}{Y^2}\,\mathcal{U}_0^F\,\mathrm{d}Y + (1-g)^2\int_{a'''}^{\frac{1}{B}}\frac{\lambda^2}{(Y-\lambda)^2}\,\mathcal{U}_0^F\,\mathrm{d}Y\right], \tag{76f}$$

$$C_d^{\mathrm{I}} = -\frac{2t}{g(1-g)\,SU_\infty}\,(h-h)^2\,\mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{B}}^{0}\frac{\lambda^2}{(\lambda-\eta)^2}\,\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{d}\eta\,, \tag{76g}$$

$$C_d^{*\mathrm{I}} = \frac{2t}{(1-g)\,SU_\infty}\,h_1^2\,\mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{B}}^{0}\frac{L^2}{(L-\eta)^2}\,\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{d}\eta\,, \tag{76h}$$

$$C_d^{\mathrm{III}} = \frac{2t}{(1-g)\,SU_\infty}\,h_1^2\,\mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{B}}^{0}\frac{L^2}{(L-\eta^*)^2}\,\mathcal{U}_0^{\mathrm{III}}\,\mathrm{d}\eta^*, \tag{76i}$$

unde limitele de integrare a', a'', a''' au valorile

$$a' = \frac{b}{h-g}\ \text{pentru}\ \frac{b}{h-g} < \frac{1}{B};\quad a' = \frac{1}{B}\ \text{pentru}\ \frac{b}{h-g} > \frac{1}{B},$$

$$a'' = \frac{b}{h-1}\ \text{pentru}\ \frac{b}{h-1} < \frac{1}{B};\quad a'' = \frac{1}{B}\ \text{pentru}\ \frac{b}{h-1} > \frac{1}{B},$$

$$a''' = \frac{b}{h-1}\ \text{pentru}\ \frac{b}{h-1} < \frac{1}{B};\quad a''' = \frac{1}{B}\ \text{pentru}\ \frac{b}{h-1} > \frac{1}{B}$$

și unde

$$S = \frac{1 + f - h}{2} b . \tag{77}$$

Efectuînd calculele pentru cazul cînd $\frac{b}{1+f} > \frac{1}{B}$, în care caz bordurile de atac și de fugă ale aripii sînt supersonice $\left(l > \frac{1}{B},\ L > \frac{1}{B}\right.$ și deci $\left.\text{și } \lambda > \frac{1}{B}\right)$, vom obține pentru coeficienții de rezistență următoarele expresii :

$$C_d^o = \frac{2t^2}{g^2(1-g)\,S} \frac{1}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \left\{ g^2 l \lambda \left[\frac{\lambda (b - \eta l)}{(\eta\lambda - b)(\lambda - l)} + \right.\right.$$

$$+ \frac{l^2}{\lambda^2 - l^2} \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{Bl} + \frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{\sqrt{B^2\lambda^2 - 1}} \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - l^2} \left(1 -$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{B\lambda} \right)\right] + b(\eta l - b) \right\}, \tag{78a}$$

$$C_d^{*o} = - \frac{2t^2}{g(1-g)\,S} \frac{1}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \left\{ lL \left[\frac{[L(b - (1+f) l)}{(L(1+f) - b)(L - l)} + \right.\right.$$

$$+ \frac{l^2}{L^2 - l^2} \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{Bl} + \frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{\sqrt{B^2 L^2 - 1}} \frac{2L^2}{L^2 - l^2} \left(1 -$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{BL} \right)\right] + b[(1+f) l - b] \right\}, \tag{78b}$$

$$C_d^G = 0 , \tag{78c}$$

$$C_d^{*G} = \frac{2t^2}{g(1-g)^2\,S} \frac{1}{\sqrt{B^2\lambda^2 - 1}} \left\{ (1-g)^2 \lambda L \left[\frac{L(b - (1+f-g)\lambda)}{(L(1+f-g) - b)(L - \lambda)} + \right.\right.$$

$$+ \frac{\lambda^2}{L^2 - \lambda^2} \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{B\lambda} + \frac{\sqrt{B^2\lambda^2 - 1}}{\sqrt{B^2 L^2 - 1}} \frac{2L^2}{L^2 - \lambda^2} \left(1 -$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{BL} \right)\right] + b[(1+f-g)\lambda - b] \right\}, \tag{78d}$$

$$C_d^F = C_d^{*F} = 0 , \tag{78e}$$

$$C_d^{\mathrm{I}} = \frac{2t^2}{g^2(1-g)} \frac{(\eta - h)^2}{\pi S} \frac{l\lambda}{\lambda - l} \left[\frac{l}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \arccos \frac{1}{Bl} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda}{\sqrt{B^2\lambda^2 - 1}} \arccos \frac{1}{B\lambda} \right], \tag{78f}$$

$$C_a^{*\mathrm{I}} = -\frac{2t^2}{g(1-g)}\,\frac{h_1^2}{\pi S}\,\frac{lL}{L-l}\left[\frac{l}{\sqrt{B^2l^2-1}}\arccos\frac{1}{Bl} - \right.$$

$$\left. - \frac{L}{\sqrt{B^2L^2-1}}\arccos\frac{1}{BL}\right], \tag{78g}$$

$$C_a^{\mathrm{III}} = \frac{2t^2}{g(1-g)}\,\frac{h_1^2}{\pi S}\,\frac{\lambda L}{L-\lambda}\left[\frac{\lambda}{\sqrt{B^2\lambda^2-1}}\arccos\frac{1}{B\lambda} - \right.$$

$$\left. - \frac{L}{\sqrt{B^2L^2-1}}\arccos\frac{1}{BL}\right]. \tag{78h}$$

c) *Aripa dreptunghiulară cu profil rombic.* Să considerăm aripa dreptunghiulară din figura 4, la care grosimea profilului rombic este constantă în lungul anvergurii. Suprafața extradosului acestei aripi este definită prin ecuația

$$Z = \frac{t}{g}x_1, \quad Z^* = \frac{t}{1-g}(1-x_1) \tag{79}$$

pe porțiunile $O_1O_3O_4O_2$ și, respectiv, $O_3C_1C_2O_4$, iar viteza verticală este dată de relațiile (72) pe aceleași porțiuni.

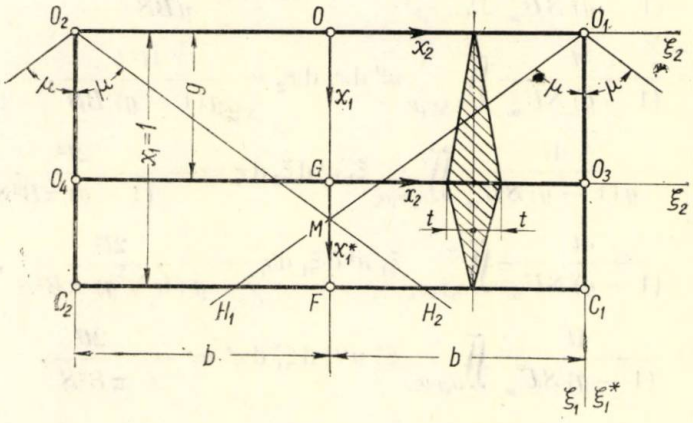


Fig. 4

Ținînd seama de cele arătate mai sus și de rezultatele obținute în [1] și [2], viteza axială de perturbație pe această aripă va fi

$$u = u^O + u^G + u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}} + u^{\mathrm{III}} + u^{\mathrm{IV}}, \tag{80}$$

în care

$$u^O = -\frac{tU_\infty}{gB}, \quad u^G = \frac{tU_\infty}{g(1-g)B}, \tag{81}$$

$$u^{\mathrm{I}} = \operatorname{Re} \frac{2}{\pi} \frac{tU_\infty}{gB} \arccos \sqrt{\frac{1 - B\xi}{2}},$$

$$u^{\mathrm{III}} = - \operatorname{Re} \frac{2}{\pi} \frac{tU_\infty}{g(1-g)B} \arccos \sqrt{\frac{1 - B\xi^*}{2}}, \tag{81'}$$

vitezele axiale u^{II} și u^{IV} deducîndu-se din u^{I} și u^{III}. În expresiile de mai sus avem

$$\operatorname{Re} \xi = \eta = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad \operatorname{Re} \xi^* = \eta^* = \frac{\xi_2}{\xi_1^*} = \frac{\xi_2}{\xi_1 - g}. \tag{82}$$

Pentru determinarea coeficientului de rezistență să considerăm cazul cînd conurile Mach din vîrfurile O_1 și O_2 nu intersectează bordurile laterale O_1C_1 și O_2C_2 $\left(\frac{1}{B} < 2b\right)$, pentru care obținem

$$C_d = C_d^o + C_d^{*o} + C_d^{*G} + C_d^{\mathrm{I}} + C_d^{*\mathrm{I}} + C_d^{\mathrm{III}}, \tag{83}$$

unde

$$C_d^o = - \frac{4t}{gSU_\infty} \iint_{OO_1O_3G} u^o \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 = \frac{4t^2 b}{gBS}, \tag{84}$$

$$C_d^{*o} = \frac{4t}{(1-g)SU_\infty} \iint_{GO_3C_1F} u^o \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 = - \frac{4t^2 b}{gBS}, \tag{84'}$$

$$C_d^{*G} = \frac{4t}{(1-g)SU_\infty} \iint_{GO_3C_1F} u^G \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 = \frac{4t^2 b}{g(1-g)BS}, \tag{84''}$$

$$C_d^{\mathrm{I}} = - \frac{4t}{g(1-g)SU_\infty} \iint_{O_1P_1O_3} \xi_1 u^{\mathrm{I}} \, \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\eta = - \frac{2t^2}{(1-g)\pi B^2 S}, \tag{84'''}$$

$$C_d^{*\mathrm{I}} = \frac{4t}{(1-g)SU_\infty} \iint_{O_1P_3C_1} \xi_1 u^{\mathrm{I}} \, \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\eta = \frac{2t^2}{g(1-g)\pi B^2 S}, \tag{84''''}$$

$$C_d^{\mathrm{III}} = \frac{4t}{(1-g)SU_\infty} \iint_{O_3P_3'C_1} \xi_1^* u^{\mathrm{III}} \, \mathrm{d}\xi_1^* \, \mathrm{d}\eta^* = - \frac{2t^2}{\pi B^2 S}. \tag{84'''''}$$

ANEXĂ

Expresiile integralelor $E_{l,q}^o$, P_l^o care intervin în relația (67):

$$E_{l,q}^o = \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} \int_0^l \frac{\lambda^l}{(\lambda - y)^l} \left[\operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 - By)}{2B(l - y)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 + By)}{2B(l + y)}} \right] \mathrm{d}y =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{\lambda}{(t-1)\sqrt{1-B^2 l^2}} \left\{ (-1)^q \left[\frac{\lambda^{t-1}}{(\lambda-l)^{t-1}} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\lambda^{t-1}}{(\lambda+l)^{t-1}} \right] \operatorname{arg\,ch} \frac{1+Bl}{2\sqrt{Bl}} - \left[1 - \frac{\lambda^{t-1}}{2(\lambda-l)^{t-1}} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\lambda^{t-1}}{2(\lambda+l)^{t-1}} \right] \operatorname{arg\,ch} \frac{1}{Bl} + \frac{\lambda^t}{2(t-1)} \sum_{p=1}^{t-1} \left[\frac{1}{(\lambda-l)^{t-p}} - \right.\right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{(\lambda+l)^{t-p}} \right] J_p^o \right\}, \tag{85}$$

$$P_t^o = \operatorname{Re} \int_0^l \frac{\lambda^t}{(\lambda-y)^t} \sqrt{1-B^2 y^2}\, \mathrm{d}y = \frac{\lambda}{(t-1)B} \left[\operatorname{Re} \sqrt{1-B^2 l^2}\, \frac{\lambda^{t-1}}{(\lambda-l)^{t-1}} - \right.$$

$$\left. - 1 + B^2 \lambda^t J_{t-1}^o - B^2 \lambda^{t-1} J_{t-2}^o \right], \tag{85'}$$

unde

$$J_t^o = \operatorname{Re} \int_0^l \frac{\mathrm{d}y}{(\lambda-y)^t \sqrt{1-B^2 y^2}} =$$

$$= \frac{1}{(t-1)(1-B^2\lambda^2)\lambda^{t-1}} \left[\operatorname{Re} \sqrt{1-B^2\lambda^2}\, \frac{\lambda^{t-1}}{(\lambda-l)^{t-1}} - \right.$$

$$\left. - 1 - (2t-3) B^2 \lambda^t J_{t-1}^o + (t-2) B^2 \lambda^{t-1} J_{t-2}^o \right], \tag{86}$$

$$J_1^o = \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{1-B^2\lambda^2}} \left[2 \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1-Bl)}{2B(\lambda-l)}} - \operatorname{arg\,ch} \frac{1}{B\lambda} \right], \tag{86'}$$

$$J_2^o = \operatorname{Re} \frac{1}{(1-B^2 l^2)\lambda} \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{1-B^2 l^2}\, \frac{\lambda}{\lambda-l} - \right.$$

$$\left. - 1 - \frac{B^2\lambda^2}{\sqrt{1-B^2\lambda^2}} \left[2 \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1-Bl)}{2B(\lambda-l)}} - \operatorname{arg\,ch} \frac{1}{B\lambda} \right] \right\}, \tag{86''}$$

$$J_3^o = \frac{1}{2(1-B^2 l^2)^2 \lambda^2} \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{1-B^2 l^2}\, \frac{\lambda^2}{(\lambda-l)^2} (1 - 4B^2\lambda^2 + 3B^2\lambda l) - \right.$$

$$- (1 - 4B^2\lambda^2) + (1 + 2B^2\lambda^2) \frac{B^2\lambda^2}{\sqrt{1-B^2\lambda^2}} \times$$

$$\left. \times \left[2 \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1-Bl)}{2B(\lambda-l)}} - \operatorname{arg\,ch} \frac{1}{B\lambda} \right] \right\}. \tag{86'''}$$

Expresiile integralelor $E^{*o}_{t,q}$, P^{*o}_t care intervin în relația (67):

$$E^{*o}_{t,q} = \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{1-B^2l^2}}\int_0^l \frac{L^t}{(L-y)^t}\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-By)}{2B(l-y)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+By)}{2B(l+y)}}\right]\mathrm{d}y =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{L}{(t-1)\sqrt{1-B^2l^2}}\left\{(-1)^q\left[\frac{L^{t-1}}{(L-l)^{t-1}} - \frac{L^{t-1}}{(L+l)^{t-1}}\right]\operatorname{arg\,ch}\frac{1+Bl}{2\sqrt{Bl}} - \right.$$

$$\left. - \left[1 - \frac{L^{t-1}}{2(L-l)^{t-1}} - \frac{L^{t-1}}{2(L+l)^{t-1}}\right]\operatorname{arg\,ch}\frac{1}{Bl}\right\} +$$

$$+ \frac{L^t}{2(t-1)}\sum_{p=1}^{t-1}\left[\frac{1}{(L-l)^{t-p}} - \frac{1}{(L+l)^{t-p}}\right]J^{*o}_p, \tag{87}$$

$$P^{*o}_t = \operatorname{Re}\int_0^l \frac{L^t}{(L-y)^t}\sqrt{1-B^2y^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{L}{(t-1)\,B}\left[\operatorname{Re}\sqrt{1-B^2l^2}\,\frac{L^{t-1}}{(L-l)^{t-1}} - 1 + B^2L^tJ^{*o}_{t-1} - \right.$$

$$\left. - B^2L^{t-1}J^{*o}_{t-2}\right], \tag{87'}$$

unde

$$J^{*o}_t = \operatorname{Re}\int_0^l \frac{\mathrm{d}y}{(L-y)^t\sqrt{1-B^2y^2}} =$$

$$= \frac{1}{(t-1)(1-B^2L^2)L^{t-1}}\left[\operatorname{Re}\sqrt{1-B^2l^2}\,\frac{L^{t-1}}{(L-l)^{t-1}} - \right.$$

$$\left. - 1 - (2t-3)\,B^2L^tJ^{*o}_{t-1} + (t-2)\,B^2L^{t-1}J^{*o}\right], \tag{88}$$

$$J^{*o}_1 = \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{1-B^2L^2}}\left[2\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-Bl)}{2B(L-l)}} - \operatorname{arg\,ch}\frac{1}{BL}\right], \tag{88'}$$

$$J^{*o}_2 = \frac{1}{(1-B^2L^2)L}\operatorname{Re}\left\{\sqrt{1-B^2l^2}\,\frac{L}{L-l} - \right.$$

$$\left. - 1 - \frac{B^2L^2}{\sqrt{1-B^2L^2}}\left[2\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-Bl)}{2B(L-l)}} - \operatorname{arg\,ch}\frac{1}{BL}\right]\right., \tag{88''}$$

$$J^{*o}_3 = \frac{1}{2(1-B^2L^2)^2L^2}\operatorname{Re}\left\{\sqrt{1-B^2l^2}\,\frac{L^2}{(L-l)^2}(1-4B^2L^2+3B^2Ll) - \right.$$

$$- (1-4B^2L^2) + (1+2B^2L^2)\frac{B^2L^2}{\sqrt{1-B^2L^2}}\times$$

$$\left.\times\left[2\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-Bl)}{2B(L-l)}} - \operatorname{arg\,ch}\frac{1}{BL}\right]\right. . \tag{88'''}$$

Expresiile integralelor $E^G_{l,q}$, P^G_l *care intervin în relația* (67′):

$$E^G_{l,q} = \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{1-B^2\lambda^2}} \int_\lambda^{a'} \frac{l^t}{(y^*-l)^t} \left[\operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1-By^*)}{2B(\lambda-y^*)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1+By^*)}{2B(\lambda+y^*)}} \right] dy^*, \tag{89}$$

$$P^G_l = \operatorname{Re} \int_\lambda^{a'} \frac{l^t}{(y^*-l)^t} \sqrt{1-B^2y^{*2}}\, dy^*. \tag{89′}$$

Dacă $a' = \lambda$, $\left(\lambda > \frac{1}{B}\right)$, atunci

$$E^G_{l,q} = 0, \quad P^G_l = 0. \tag{90}$$

Dacă $a' = \frac{1}{B}$, $\left(\lambda < \frac{1}{B}\right)$, atunci

$$E^G_{l,q} = \frac{(-1)^{t+q+1} l}{(t-1)\sqrt{1-B^2\lambda^2}} \left[\frac{l^{t-1}}{(l-\lambda)^{t-1}} - \frac{l^{t-1}}{(l+\lambda]^{t-1}} \right] \operatorname{arg\,ch} \frac{1+B\lambda}{2\sqrt{B\lambda}} +$$

$$+ \frac{(-1)^t l^t}{2(t-1)} \sum_{p=1}^{t-1} \left[\frac{1}{(l-\lambda)^{t-p}} + \frac{(-1)^q}{(l+\lambda)^{t-p}} \right] J^G_p, \tag{91}$$

$$P^G_l = \frac{(-1)^{t+1} l}{(t-1)B} \left[\sqrt{1-B^2\lambda^2}\, \frac{l^{t-1}}{(l-\lambda)^{t-1}} - B^2 l^t J^G_{t-1} + B^2 l^{t-1} J^G_{t-2} \right], \tag{91′}$$

unde

$$J^G_t = \operatorname{Re} \int_\lambda^{\frac{1}{B}} \frac{dy^*}{(l-y^*)^t \sqrt{1-B^2y^{*2}}} =$$

$$= -\frac{1}{(t-1)(1-B^2l^2)l^{t-1}} \left[\sqrt{1-B^2\lambda^2}\, \frac{l^{t-1}}{(l-\lambda)^{t-1}} + \right.$$

$$\left. + (2t-3) B^2 l^t J^G_{t-1} - (t-2) B^2 l^{t-1} J^G_{t-2} \right], \tag{92}$$

$$J^G_1 = -\frac{2}{\sqrt{1-B^2l^2}} \operatorname{arg\,sh} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-B\lambda)}{2B(\lambda-l)}}, \tag{92′}$$

$$J^G_2 = \frac{1}{(1-B^2l^2)l} \left[\sqrt{1-B^2\lambda^2}\, \frac{l}{\lambda-l} + \right.$$

$$\left. + \frac{2B^2l^2}{\sqrt{1-B^2l^2}} \operatorname{arg\,sh} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-B\lambda)}{2B(\lambda-l)}} \right]. \tag{92″}$$

$$J^G_3 = -\frac{1}{2(1-B^2l^2)^2 l^2} \left[\sqrt{1-B^2\lambda^2}\, \frac{l^2}{(\lambda-l)^2} (1-4B^2l^2+3B^2l\lambda) + \right.$$

$$\left. + (1+2B^2l^2) \frac{2B^2l^2}{\sqrt{1-B^2l^2}} \operatorname{arg\,sh} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-B\lambda)}{2B(\lambda-l)}} \right]. \tag{92‴}$$

Expresiile integralelor $E^{*G}_{t,q}$, P^{*G}_t *care intervin în relația* (67′):

$$E^{*G}_{t,q} = \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{1-B^2\lambda^2}}\int_0^\lambda \frac{L^t}{(L-y^*)^t}\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1-By^*)}{2B(\lambda-y^*)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+B\lambda)(1+By^*)}{2B(\lambda+y^*)}}\right]\mathrm{d}y^* =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{L}{(t-1)\sqrt{1-B^2\lambda^2}}\left\{(-1)^q\left[\frac{L^{t-1}}{(L-\lambda)^{t-1}} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{L^{t-1}}{(L+\lambda)^{t-1}}\right]\operatorname{arg\,ch}\frac{1+B\lambda}{2\sqrt{B\lambda}} -$$

$$\left. - \left[1 - \frac{L^{t-1}}{2(L-\lambda)^{t-1}} - \frac{L^{t-1}}{2(L+\lambda)^{t-1}}\right]\operatorname{arg\,ch}\frac{1}{B\lambda}\right\} +$$

$$+ \frac{L^t}{2(t-1)}\sum_{p=1}^{t-1}\left[\frac{1}{(L-\lambda)^{t-p}} - \frac{1}{(L+\lambda)^{t-p}}\right]J^{*G}_p, \tag{93}$$

$$P^{*G}_t = \operatorname{Re}\int_0^\lambda \frac{L^t}{(L-y^*)^t}\sqrt{1-B^2y^{*2}}\,\mathrm{d}y^* =$$

$$= \frac{L}{(t-1)B}\left[\operatorname{Re}\sqrt{1-B^2\lambda^2}\,\frac{L^{t-1}}{(L-\lambda)^{t-1}} - \right.$$

$$\left. - 1 + B^2L^tJ^{*G}_{t-1} - B^2L^{t-1}J^{*G}_{t-2}\right], \tag{93′}$$

unde

$$J^{*G}_t = \operatorname{Re}\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}y^*}{(L-y^*)^t\sqrt{1-B^2y^{*2}}} =$$

$$= \frac{1}{(t-1)(1-B^2L^2)L^{t-1}}\left[\operatorname{Re}\sqrt{1-B^2\lambda^2}\,\frac{L^{t-1}}{(L-\lambda)^{t-1}} - 1 - \right.$$

$$\left. - (2t-3)B^2L^tJ^{*G}_{t-1} + (t-2)B^2L^{t-1}J^{*G}_{t-2}\right], \tag{94}$$

$$J^{*G}_1 = \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{1-B^2L^2}}\left[2\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-B\lambda)}{2B(L-\lambda)}} - \operatorname{arg\,ch}\frac{1}{BL}\right], \tag{94′}$$

$$J^{*G}_2 = \frac{1}{(1-B^2L^2)L}\operatorname{Re}\left\{\sqrt{1-B^2\lambda^2}\,\frac{L}{L-\lambda} - 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{B^2L^2}{\sqrt{1-B^2L^2}}\left[2\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-B\lambda)}{2B(L-\lambda)}} - \operatorname{arg\,ch}\frac{1}{BL}\right]\right\}, \tag{94″}$$

$$J_3^{*G} = \frac{1}{2(1-B^2L^2)^2L^2}\operatorname{Re}\left\{\sqrt{1-B^2\lambda^2}\,\frac{L^2}{(L-\lambda)^2}(1-4B^2L^2+\right.$$

$$+3B^2\lambda L)-(1-4B^2L^2)+$$

$$+(1+2B^2L^2)\,\frac{B^2L^2}{\sqrt{1-B^2L^2}}\left[2\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-B\lambda)}{2B(L-\lambda)}}-\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{arg\,ch}\frac{1}{BL}\right]\right\}. \tag{94'''}$$

Expresiile integralelor $E_{l,q}^F$, P_l^F care intervin în relația (67''):

$$E_{l,q}^F = \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{1-B^2L^2}}\int_L^{a''}\frac{l^t}{(Y-l)^t}\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-BY)}{2B(L-Y)}}+\right.$$

$$\left.+(-1)^q\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-BY)}{2B(L-Y)}}\right]\mathrm{d}Y, \tag{95}$$

$$P_l^F = \operatorname{Re}\int_L^{a''}\frac{l^t}{(Y-l)^t}\sqrt{1-B^2Y^2}\,\mathrm{d}Y. \tag{95'}$$

Dacă $a''=L,\left(L>\dfrac{1}{B}\right)$, atunci

$$E_{l,q}^F=0,\quad P_l^F=0. \tag{96}$$

Dacă $a''=\dfrac{1}{B},\ \left(L<\dfrac{1}{B}\right)$, atunci

$$E_{l,q}^F = \frac{(-1)^{t+q+1}l}{(t-1)\sqrt{1-B^2L^2}}\left[\frac{l^{t-1}}{(l-L)^{t-1}}-\frac{l^{t-1}}{(l+L)^{t-1}}\right]\operatorname{arg\,ch}\frac{1+BL}{2\sqrt{BL}}+$$

$$+\frac{(-1)^t l^t}{2(t-1)}\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{(l-L)^{t-p}}-\frac{(-1)^q}{(l+L)^{t-p}}\Bigg]J_p^F, \tag{97}$$

$$P_l^F = \frac{(-1)^{t+1}l}{(t-1)B}\left[\sqrt{1-B^2L^2}\,\frac{l^{t-1}}{(l-L)^{t-1}}-B^2l^tJ_{t-1}^F+B^2l^{t-1}J_{t-2}^F\right], \tag{97'}$$

unde

$$J_l^F = \operatorname{Re}\int_L^{\frac{1}{B}}\frac{\mathrm{d}Y}{(l-Y)^t\sqrt{1-B^2Y^2}} =$$

$$= -\frac{1}{(t-1)(1-B^2l^2)\,l^{t-1}}\left[\sqrt{1-B^2L^2}\,\frac{l^{t-1}}{(l-L)^{t-1}}+\right.$$

$$\left.+(2t-3)\,B^2l^tJ_{t-1}^F-(t-2)\,B^2l^{t-1}J_{t-2}^F\right], \tag{98}$$

$$J_1^F = -\frac{2}{\sqrt{1-B^2l^2}} \operatorname{arg\,sh} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-BL)}{2B(L-l)}}, \tag{98'}$$

$$J_2^F = \frac{1}{(1-B^2l^2)l}\left[\sqrt{1-B^2L^2}\,\frac{l}{L-l} + \right.$$

$$\left. + \frac{2B^2l^2}{\sqrt{1-B^2l^2}} \operatorname{arg\,sh} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-BL)}{2B(L-l)}}\right], \tag{98''}$$

$$J_3^F = -\frac{1}{2(1-B^2l^2)^2l^2}\left[\sqrt{1-B^2L^2}\,\frac{l^2}{(L-l)^2}(1-4B^2l^2+3B^2lL) + \right.$$

$$\left. + (1+2B^2l^2)\frac{2B^2l^2}{\sqrt{1-B^2l^2}} \operatorname{arg\,sh} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-BL)}{2B(L-l)}}\right]. \tag{98'''}$$

Expresiile integralelor $E_{t,q}^{*F}$, P_t^{*F}, *care intervin în relația* (67'').

$$E_{t,q}^{*F} = \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{1-B^2L^2}}\int_L^{a''}\frac{\lambda^t}{(Y-\lambda)^t}\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-BY)}{2B(L-Y)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1+BY)}{2B(L+Y)}}\right]\mathrm{d}y, \tag{99}$$

$$P_t^{*F} = \operatorname{Re}\int_L^{a''}\frac{\lambda^t}{(Y-\lambda)^t}\sqrt{1-B^2Y^2}\,\mathrm{d}Y. \tag{99'}$$

Dacă $a'' = L$, $\left(L > \frac{1}{B}\right)$, atunci

$$E_{t,q}^{*F} = 0, \quad P_t^{*F} = 0. \tag{100}$$

Dacă $a'' = \frac{1}{B}$, $\left(L < \frac{1}{B}\right)$, atunci

$$E_{t,q}^{*F} = \frac{(-1)^{t+q+1}\lambda}{(t-1)\sqrt{1-B^2L^2}}\left[\frac{\lambda^{t-1}}{(\lambda-L)^{t-1}} - \frac{\lambda^{t-1}}{(\lambda+L)^{t-1}}\right]\operatorname{arg\,ch}\frac{1+BL}{2\sqrt{BL}} +$$

$$+ \frac{(-1)^t\lambda^t}{2(t-1)}\sum_{p=1}^{t-1}\left[\frac{1}{(\lambda-L)^{t-p}} - \frac{(-1)^q}{(\lambda+L)^{t-p}}\right]J_p^{*F}, \tag{101}$$

$$P_t^{*F} = \frac{(-1)^{t+1}\lambda}{(t-1)B}\left[\sqrt{1-B^2L^2}\,\frac{\lambda^{t-1}}{(\lambda-L)^{t-1}} - B^2\lambda^t J_{t-1}^{*F} + B^2\lambda^{t-1}J_{t-2}^{*F}\right], \tag{101'}$$

unde

$$J_t^{*F} = \mathrm{Re}\int_L^{\frac{1}{B}} \frac{\mathrm{d}Y}{(\lambda - Y)^t \sqrt{1 - B^2 Y^2}} =$$

$$= -\frac{1}{(t-1)(1 - B^2\lambda^2)\lambda^{t-1}}\left[\sqrt{1 - B^2L^2}\,\frac{\lambda^{t-1}}{(\lambda - L)^{t-1}} + \right.$$

$$\left. + (2t-3)\,B^2\lambda^t J_{t-1}^{*F} - (t-2)\,B^2\lambda^{t-1} J_{t-2}^{*F}\right], \tag{102}$$

$$J_1^{*F} = -\frac{2}{\sqrt{1 - B^2\lambda^2}} \arg\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{(1 + B\lambda)(1 - BL)}{2B(L - \lambda)}}, \tag{102'}$$

$$J_2^{*F} = \frac{1}{(1 - B^2\lambda^2)\lambda}\left[\sqrt{1 - B^2L^2}\,\frac{\lambda}{L - \lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{2B^2\lambda^2}{\sqrt{1 - B^2\lambda^2}} \arg\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{(1 + B\lambda)(1 - BL)}{2B(L - \lambda)}}\right], \tag{102''}$$

$$J_3^{*F} = -\frac{1}{2(1 - B^2\lambda^2)^2\lambda^2}\left[\sqrt{1 - B^2L^2}\,\frac{\lambda^2}{(L - \lambda)^2}(1 - 4B^2\lambda^2 + 3B^2\lambda L) + \right.$$

$$\left. + (1 + 2B^2\lambda^2)\,\frac{2B^2\lambda^2}{\sqrt{1 - B^2\lambda^2}} \arg\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{(1 + B\lambda)(1 - BL)}{2B(L - \lambda)}}\right]. \tag{102'''}$$

Primită la redacție la 19 noiembrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Dan Mateescu, *Supersonic flow around polygonal wings. Thin wings and wings of symmetrical thickness*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **11**, *3* (1966).
2. — *Aerodynamic characteristics of polygonal wings of symmetrical thickness in supersonic flow*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Méc. Appl., **11**, *4* (1966).
3. E. Carafoli, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluțiilor din mișcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale*, Com. Acad. R.P.R., **2**, *9—10* (1952).
4. E. Carafoli, M. Ionescu, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires ou à épaisseur symétrique*, Rev. Méc. Appl., **2**, *1* (1957).
5. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*, București, Edit. tehnică, 1956.
6. E. Carafoli, Dan Mateescu, *Sur une classe d'ailes delta à incidence et pente variables d'après des fonctions homogènes en régime supersonique*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **10**, *2* (1955).
7. Dan Mateescu, *Tragflügel mit besonderer Abschlussfläche in Überschallströmung*, Méc. Appl., **8**, *1* (1963).

MUSEUM FUYEIUM BUDAPESTI KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

CINEMATICA SOLIDULUI RIGID FĂRĂ PUNCT FIX ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN CU PATRU DIMENSIUNI[1])

de R. WOINAROSKI
Institutul de petrol, gaze și geologie

531.1

Într-o lucrare anterioară [1] am studiat natura varietății generată de un plan instantaneu de rotație în timpul mișcării generale a rigidului fără punct fix. Pentru determinarea varietății s-a folosit cu acel prilej curba loc geometric al punctului $\overset{\bullet}{P}$ din planul instantaneu de rotație [2].

În această lucrare vom studia acele mișcări rigide fără punct fix din spațiul euclidian cu patru dimensiuni în decursul cărora planele instantanee de rotație generează varietăți tridimensionale, euclidiene. Deoarece, așa după cum se va arăta în cele ce urmează, asemenea varietăți nu conțin puncte $\overset{\bullet}{P}$, vom relua calculele, folosind pentru determinarea varietății, în locul curbei punctelor $\overset{\bullet}{P}$, curba locului geometric al centrului instantaneu de rotație[2]).

I. NATURA VARIETĂȚII GENERATĂ ÎN SPAȚIUL FIX DE CĂTRE UN PLAN INSTANTANEU DE ROTAȚIE

1. *Componentele tensorului metric.* Pentru calculul componentelor g_{rs} ale tensorului metric corespunzător varietății generată de planul mobil, se raportează spațiul euclidian cu patru dimensiuni la un sistem de coordonate *cartezian normal* y^i ($i = 1, 2, 3, 4$), iar varietatea se consideră determinată de curba (C), loc geometric al centrului instantaneu de rotație C în raport cu reperul $O\,y^1\,y^2\,y^3\,y^4$, la care raportăm mișcarea rigidului și de doi vectori unitari, ortogonali, $\bar{a}$ și $\bar{b}$, aplicați în C.

---

[1]) Prezentată la Conferința de mecanică, București, septembrie 1965.

[2]) În lucrările [5] și [6] sînt prezentate probleme care se încadrează în domeniul geometriei mișcărilor sistemelor materiale și au, ca atare, puncte de contact cu lucrarea de față. Menționăm, de asemenea, că în lucrarea [7] se stabilesc cîteva proprietăți ale unor varietăți biriglate, tridimensionale, analoge cu varietățile generate de un plan instantaneu de rotație.

Coordonatele y^i ale unui punct curent din varietatea generată de planul mobil au expresiile

$$y^i = c^i(x^3) + x^1 a^i(x^3) + x^2 b^i(x^3) \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (1)$$

în care c^i, a^i și b^i sînt componentele contravariante ale vectorilor $\overline{OC}$, $\overline{a}$ și $\overline{b}$, iar x^1 și x^2 reprezintă două variabile independente, care împreună cu x^3, arcul curbei (C), constituie un sistem de coordonate curbilinii, la care raportăm în cele ce urmează varietatea generată de planul mobil.

Amintim, de asemenea, relațiile

$$\frac{dc^i}{dx^3} = u^i + \alpha a^i + \beta b^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{da^i}{dx^3} = p^i - rb^i, \\ \dfrac{db^i}{dx^3} = q^i + ra^i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (3)$$

stabilite în lucrarea [2], unde s-au notat cu u^i, p^i, și q^i componentele contravariante ale vectorilor componenți normali la planul mobil, corespunzători vectorilor $\dfrac{d\overline{OC}}{dx^3}$, $\dfrac{d\overline{a}}{dx^3}$ și $\dfrac{d\overline{b}}{dx^3}$.

În sfîrșit, avînd în vedere că, așa cum s-a arătat tot în lucrarea [2], în planul generator direcțiile vectorilor $\overline{a}$ și $\overline{b}$ pot fi alese astfel încît vectorii $\overline{p}$ și $\overline{q}$ să fie ortogonali, se recunoaște că componentele vectorilor $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{p}$, $\overline{q}$ și $\overline{u}$ îndeplinesc următoarele condiții:

$$\begin{cases} a^i a_i = b^i b_i = 1, \\ a^i b_i = a^i p_i = a^i q_i = a^i u_i = 0, \\ b^i p_i = b^i q_i = b^i u_i = 0, \\ p^i q_i = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (4)$$

De asemenea, observînd că x^3 este arcul curbei (C), se recunoaște că din (2) rezultă

$$u^i u_i + \alpha^2 + \beta^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (5)$$

După pregătirile acestea, calculul expresiilor componentelor covariante ale tensorului metric se face pornind de la relațiile de definiție [3]

$$g_{rs} = g_{sr} = \frac{\partial y^i}{\partial x^r} \frac{\partial y_i}{\partial x^s} \qquad (i = 1, 2, 3, 4\,;\ r, s = 1, 2, 3), \quad (6)$$

ale acestor componente și ținînd seama, pe de o parte, de expresiile (1) ale coordonatelor y^i, iar pe de altă parte de condițiile (4) și (5).

Astfel, după calcule ușor de refăcut, se găsesc următoarele expresi pentru componentele covariante ale tensorului metric:

$$\begin{cases} g_{11} = 1; \quad g_{12} = g_{21} = 0; \quad g_{13} = g_{31} = \alpha + rx^2, \\ g_{22} = 1; \quad g_{23} = g_{32} = \beta - rx^1, \\ g_{33} = 1 + (r^2 + p^2)(x^1)^2 + (r^2 + q^2)(x^2)^2 + 2((u^i p_i - r\beta)x^1 + \\ \qquad + (2u^i q_i + r\alpha)x^2. \end{cases} \tag{7}$$

Avînd în vedere aceste rezultate, se găsește pentru discriminantul formei pătratice fundamentale

$$g = \| g_{rs} \|$$

expresia următoare:

$$g = u^2 + p^2(x^1)^2 + q^2(x^2)^2 + 2u^i p_i x^1 + 2u^i q_i x^2. \tag{8}$$

Precizăm că în relațiile (7) și (8) s-au folosit următoarele notații:

$$\begin{cases} u^2 = u^i u_i, \\ p^2 = p^i p_i, \\ q^2 = q^i q_i. \end{cases} \tag{9}$$

Componentele contravariante g^{rs} ale tensorului metric se pot calcula acum pornind de la relația de definiție [3]

$$g^{rs} = \frac{(-1)^{r+s}}{g} \times (\text{minorul lui } g_{rs}).$$

Făcînd calculele, care nu prezintă dificultăți, se găsesc următoarele rezultate:

$$\begin{cases} g^{11} = \dfrac{u^2 + \alpha^2 + p^2(x^1)^2 + (q^2 + r^2)(x^2)^2 + 2u^i p_i x^1 + 2(u^i q_i + r\alpha)x^2}{g}, \\ g^{12} = g^{21} = \dfrac{(\alpha + rx^2)(\beta - rx^1)}{g}, \\ g^{13} = g^{31} = -\dfrac{\alpha + rx^2}{g}, \\ g^{22} = \dfrac{u^2 + \beta^2 + (p^2 + r^2)(x^1)^2 + q^2(x^2)^2 + 2(u^i p_i - r\beta)x^1 + 2u^i q_i x^2}{g}, \\ g^{23} = g^{32} = -\dfrac{\beta - rx^1}{g}, \\ g^{33} = \dfrac{1}{g}. \end{cases} \tag{10}$$

2. *Simbolurile lui Christoffel* se pot calcula acum pornind de la relația de definiție [3]

$$\Gamma_{rst} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^t} + \frac{\partial g_{st}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rt}}{\partial x^s}\right).$$

Făcînd calculele, pe care nu le redăm, deoarece nu prezintă alte dificultăți decît aceea de a fi laborioase, se găsesc pentru cele optsprezece simboluri distincte următoarele expresii :

$$\left\{\begin{aligned}
&\Gamma_{111} = \Gamma_{112} = \Gamma_{113} = \Gamma_{121} = \Gamma_{122} = \Gamma_{131} = \Gamma_{132} = \Gamma_{212} = \Gamma_{222} = \\
&\quad = \Gamma_{223} = \Gamma_{232} = 0, \\
&\Gamma_{123} = -\Gamma_{213} = -r, \\
&\Gamma_{133} = (p^2 + r^2)\, x^1 + u^i p_i - r\beta, \\
&\Gamma_{233} = (q^2 + r^2)\, x^2 + u^i q_i + r\alpha, \\
&\Gamma_{313} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x^3} + x^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x^3} - (p^2 + r^2)\, x^1 - u^i p_i + r\beta, \\
&\Gamma_{323} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x^3} - x^1 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x^3} - (q^2 + r^2)\, x^2 - u^i q_i - r\alpha, \\
&\Gamma_{333} = \left(p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x^3} + r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x^3}\right)(x^1)^2 + \left(q \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x^3} + r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x^3}\right)(x^2)^2 + \\
&\quad + x^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}(u^i p_i - r\beta) + x^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}(u^i q_i + r\alpha).
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Cu ajutorul relației

$$\Gamma_{rst} = \Gamma_{tsr}$$

se determină apoi expresiile celorlalte simboluri ale lui Christoffel.

3. *Tensorul Riemann — Christoffel*, corespunzător unei varietăți riemanniene tridimensionale, are, după cum se știe [3], numai șase componente covariante distincte :

$$R_{1212}\,;\ R_{1213}\,;\ R_{1223},$$

$$R_{1313}\,;\ R_{1323}\,;\ R_{2323}.$$

Pentru calculul expresiilor acestor componente se folosește relația de definiție

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta\, \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha\, \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta\, \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha\, \partial x^\gamma}\right) +$$
$$+ g^{\lambda\mu}\Gamma_{\alpha\lambda\delta}\Gamma_{\beta\mu\gamma} - g^{\lambda\mu}\Gamma_{\alpha\lambda\gamma}\Gamma_{\beta\mu\delta}.$$

Deoarece calculele sînt laborioase şi nu prezintă dificultăţi, trecem peste ele şi dăm în continuare numai rezultatele la care conduc. Ele au următoarele forme :

$$\begin{cases} R_{1212} = R_{1213} = R_{1223} = 0, \\ R_{1313} = \dfrac{-p^2[u^2 + (qx^2)^2 + 2(u^i q_i)x^2] + (u^i p_i)^2}{g}, \\ R_{1323} = \dfrac{p^2q^2x^1x^2 + p^2(u^i q_i)\,x^1 + q^2(u^i p_i)\,x^2 + (u^i p_i)(u^i q_i)}{g}, \\ R_{2323} = \dfrac{-q^2[u^2 + (px^1)^2 + 2(u^i p_i)\,x^1] + (u^i q_i)^2}{g}. \end{cases} \tag{12}$$

4. *Varietăţi euclidiene.* Din examinarea expresiilor (12) rezultă că ele sînt identic nule atunci şi numai atunci cînd sînt identic satisfăcute condiţiile uneia dintre grupările următoare :

$$p^2 = 0\,;\ q^2 = 0, \tag{I}$$

$$p^2 = 0\,;\ u^2 = 0, \tag{II$_1$}$$

$$p^2 = 0\,;\ u^i = \lambda q^i, \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{II$_2$}$$

$$q^2 = 0\,;\ u^2 = 0, \tag{III$_1$}$$

$$q^2 = 0\,;\ u^i = \lambda p^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{III$_2$}$$

Se ştie însă [3] că, atunci cînd tensorul Riemann-Christoffel are toate componentele nule, este totdeauna posibil să se înlocuiască variabilele x^1, x^2, x^3 cu altele, astfel ca noile expresii ale componentelor tensorului metric să fie constante. Se poate enunţa, aşadar, următoarea propoziţie : *în oricare dintre cazurile* (*I*), (*II*$_1$), (*II*$_2$), (*III*$_1$), (*III*$_2$) *şi numai în aceste cazuri, varietatea generată de un plan mobil ce nu trece printr-un punct fix este euclidiană.*

Observaţia 1°. Avînd în vedere expresiile (16) ale coordonatelor punctului $\dot{P}$, date în [2], se recunoaşte că în nici unul dintre cazurile (I), (II$_1$), (II$_2$), (III$_1$), (III$_2$) varietatea generată de planul mobil nu conţine puncte $\dot{P}$ şi faptul acesta justifică calculele din paragrafele precedente.

Observaţia 2° se referă la condiţiile (I). În primul rînd se recunoaşte imediat că ele păstrează aceeaşi formă dacă se înlocuieşte curba (C) cu curba descrisă de un punct oarecare $\overset{\circ}{P}$ din planul generator.

Într-adevăr, deoarece înlocuirea punctului C cu punctul $\overset{\circ}{P}$ revine la înlocuirea vechilor coordonate x^1, x^2, x^3 cu noile coordonate x'^1, x'^2, x'^3, legate de cele vechi prin relaţiile

$$\begin{cases} x^1 = \overset{\circ}{x}{}^1 + x'^1, \\ x^2 = \overset{\circ}{x}{}^2 + x'^2, \\ x^3 = x^3(x'^3), \end{cases} \tag{13}$$

în care x^1 și x^2 reprezintă coordonatele lui P în planul general, iar x'^3 arcul curbei descrise de P, rezultă că schimbarea propusă are ca urmare înlocuirea relațiilor (3) cu următoarele :

$$\begin{cases} \dfrac{da^i}{dx'^3} = p'^i - r' b^i, \\ \dfrac{db^i}{dx'^3} = q'^i + r' a^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \tag{3'}$$

din care se deduc imediat relațiile

$$\begin{cases} p'^i = p^i \dfrac{dx^3}{dx'^3}, \\ q'^i = q^i \dfrac{dx^3}{dx'^3}, \\ r' = r \dfrac{dx^3}{dx'^3}. \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \tag{14}$$

Din acestea însă rezultă

$$p'^i = q'^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{I'}$$

atunci cînd sînt îndeplinite condițiile (I).

Mai departe se poate arăta că, în cazul de care ne ocupăm, planul generator rămîne paralel cu un plan invariabil legat de reperul $Oy^1y^2y^3y^4$.

Pentru aceasta trebuie observat, în primul rînd, că sistemul de ecuații (3) are forma următoare :

$$\begin{cases} \dfrac{da^i}{dx^3} = - rb^i, \\ \dfrac{db^i}{dx^3} = ra^i, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \tag{3''}$$

cînd sînt îndeplinite condițiile (I).

Apoi, avînd în vedere că, oricare ar fi indicele i, sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \dfrac{da^i}{dx^3} = - rb^i, \\ \dfrac{db^i}{dx^3} = ra^i, \end{cases} \tag{15}$$

admite ca sistem fundamental funcțiile

$$\begin{cases} a^i_1 = \cos\theta\,; \quad b^i_1 = - \sin\theta, \\ a^i_2 = \sin\theta\,; \quad b^i_2 = \cos\theta, \end{cases}$$

în care

$$\theta = \int (-r)\,\mathrm{d}x^3,$$

și ținînd seama de aceasta rezultă că integrala generală a ecuațiilor (3″) poate fi scrisă sub forma

$$\begin{cases} a^i = \overset{\circ}{a}{}^i \cos\theta + \overset{\circ}{b}{}^i \sin\theta, \\ b^i = -\overset{\circ}{a}{}^i \sin\theta + \overset{\circ}{b}{}^i \cos\theta \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{16}$$

dacă se notează cu $\overset{\circ}{a}{}^i$ și $\overset{\circ}{b}{}^i (i = 1, 2, 3, 4)$ componentele a doi vectori unitari ortogonali. Din această formă a integralei generale rezultă însă că planul generator este totdeauna paralel cu planul determinat de punctul 0 și suporturile vectorilor $\overset{\circ}{\bar{a}}$ și $\overset{\circ}{\bar{b}}$.

Observația 3°. Se poate arăta că condițiile (II_1) se transformă în condițiile (II_2) atunci cînd curba (C) se înlocuiește cu curba descrisă de un punct $\overset{\circ}{P}$ luat la întîmplare în planul mobil.

Într-adevăr, avînd în vedere relațiile (1), expresiile coordonatelor y^i ale punctului $\overset{\circ}{P}$ se scriu sub forma

$$\overset{\circ}{y}{}^i = c^i + \overset{\circ}{x}{}^1 a^i + \overset{\circ}{x}{}^2 b^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{1'}$$

Derivîndu-le în raport cu x'^3, arcul curbei descrise de $\overset{\circ}{P}$, și ținînd seama de relațiile (2) și de condițiile (II_1), se obțin relațiile

$$\frac{\mathrm{d}\overset{\circ}{y}{}^i}{\mathrm{d}x'^3} = \left(\alpha + \frac{\mathrm{d}\overset{\circ}{x}{}^1}{\mathrm{d}x^3} + r\overset{\circ}{x}{}^2\right)\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x'^3} a^i + \left(\beta + \frac{\mathrm{d}\overset{\circ}{x}{}^2}{\mathrm{d}x^3} - r\overset{\circ}{x}{}^1\right)\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x'^3} b^i + \overset{\circ}{x}{}^2 q^i \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x'^3},$$

$$(i = 1, 2, 3, 4) \tag{17}$$

din care, prin comparare cu (2), se deduc relațiile

$$u'^i = \overset{\circ}{x}{}^2 q^i \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x'^3} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Aceste relații se mai pot scrie însă și sub forma

$$u'^i = \lambda' q'^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{18$_1$}$$

dacă se ține seamă de relațiile (14) și se notează

$$\lambda' = \overset{\circ}{x}{}^2.$$

Pe de altă parte, tot din (14) rezultă că în cazul (II_1) avem

$$p'^2 = 0. \tag{18$_2$}$$

Se recunoaște însă că relațiile (18$_1$) și (18$_2$) reprezintă tocmai forma (II_2) a condițiilor îndeplinite cînd varietatea generată de planul mobil este euclidiană.

Reciproc se poate arăta că, în cazul condițiilor (II_2), înlocuirea curbei (C) cu curba descrisă de un punct $\overset{\circ}{P}$, ales la întîmplare pe o anumită

dreaptă situată în planul generator și paralelă cu suportul lui $\bar{a}$, transformă condițiile (II_2) în (II_1).

Pentru acest scop se pornește tot de la relațiile (1′) și se derivează în ambele părți în raport cu x'^3 arcul curbei care înlocuiește pe (C). De data aceasta însă se ține seama de relațiile (2) și de condițiile (II_2). Se ajunge astfel la relațiile

$$\frac{dy^i}{dx'^3} = \left(\alpha + \frac{dx^1}{dx^3} + r\overset{\circ}{x}^2\right)\frac{dx^3}{dx'^3}a^i + \left(\beta + \frac{dx^2}{dx^3} - r\overset{\circ}{x}^1\right)\frac{dx^3}{dx'^3}b^i + \\ + (\lambda + \overset{\circ}{x}^2)q^i\frac{dx^3}{dx'^3}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (17')$$

din care, prin comparare cu (2), se deduc relațiile

$$u'^i = (\lambda + \overset{\circ}{x}^2)q^i\frac{dx^3}{dx'^3} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Se recunoaște astfel că, atunci cînd $\overset{\circ}{P}$ aparține dreptei

$$\lambda + \overset{\circ}{x}^2 = 0 \qquad (19)$$

din planul generator, toate componentele u'^i sînt nule :

$$u'^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (18'_1)$$

Cum, pe de altă parte, în cazul (II_2) relația (18_2) rămîne în vigoare, rezultă, așa cum s-a anunțat, că schimbarea punctului C cu un punct al dreptei (19) are ca urmare transformarea condițiilor (II_2) în condițiile $(18'_1)$ și (18_2), care au aceeași formă cu (II_1).

Încheiem această observație precizînd că, în cazul condițiilor (II_1), dreapta (19) este paralela, dusă prin C, la direcția vectorului $\bar{a}$.

Observația 4°. Se poate arăta că condițiile (III_1) și (III_2) au proprietăți analoge acelora despre care s-a tratat în cuprinsul observației precedente. Deoarece calculele necesare pentru aceasta sînt întru totul asemănătoare cu cele din observația 3°, nu insistăm asupra lor. Precizăm numai că, în cazul condițiilor (III_2) și (III_1), rolul dreptei (19) îl are dreapta

$$\lambda + \overset{\circ}{x}^1 = 0, \qquad (19')$$

respectiv paralela, dusă prin C, la direcția vectorului $\bar{b}$.

De asemenea, se poate arăta, așa cum se va face într-o lucrare ce va urma, că planul este tangent la o suprafață desfășurabilă, generată de dreapta (19) sau (19′) în cazul (II_2) sau (III_2), iar în cazul (II_1) sau (III_1) de suportul vectorului $\bar{a}$ sau $\bar{b}$, aplicați în C.

Observația 5°. Examinînd numărătorii expresiilor din (12), se constată că ei sînt identic nuli și în cazul în care sînt identic îndeplinite condițiile

$$p^2 = 0\,;\; q^2 = 0\,;\; u^2 = 0. \qquad (IV)$$

Examinînd în acest caz și expresia (8) a discriminantului formei pătratice fundamentale, se constată că ea este identic nulă. Rezultă de aici că în cazul (IV) varietatea descrisă de planul mobil este degenerată și se poate arăta că ea se reduce la un plan.

Pentru aceasta trebuie observat, în primul rînd, că primele două condiții (IV) impun planului mobil, așa cum s-a arătat în cuprinsul observației 2°, să rămînă paralel cu un plan invariabil legat de reperul $Oy^1y^2y^3y^4$. Dacă se alege acest reper astfel ca planul Oy^1y^2 să coincidă cu poziția inițială a planului mobil, vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$, ale căror componente figurează în (16), pot fi considerați egali cu versorii $\bar{e}_1$ și $\bar{e}_2$ ai axelor Oy^1 și Oy^2.

Rezultă astfel pentru $\bar{a}$ și $\bar{b}$ expresiile

$$\begin{cases} \bar{a} = \bar{e}_1 \cos\theta + \bar{e}_2 \sin\theta, \\ \bar{b} = \bar{e}_1 (-\sin\theta) + \bar{e}_2 \cos\theta. \end{cases} \tag{20}$$

În al doilea rînd, avînd în vedere a treia condiție (IV) și relațiile (2), se recunoaște că expresia derivatei vectorului $\overline{OC}$ are în cazul acesta expresia

$$\frac{d\overline{OC}}{dx^3} = \bar{e}_1(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta) + \bar{e}_2(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta),$$

din care se deduce că derivatele coordonatelor c^3 și c^4 ale punctului C sînt nule :

$$\frac{dc^3}{dx^3} = 0, \qquad \frac{dc^4}{dx^3} = 0.$$

Integrînd și avînd în vedere că poziția inițială a planului mobil coincide cu planul Oy^1y^2, se găsesc pentru c^3 și c^4 următoarele expresii :

$$\begin{cases} c^3 = 0, \\ c^4 = 0, \end{cases} \tag{21}$$

de unde se deduce că curba (C) este cuprinsă în planul Oy^1y^2.

Dacă se introduc acum în (1), în locul lui a^i, b^i și c^i, expresiile lor (20) și (21), se găsește rezultatul

$$y^3 = 0, \qquad y^4 = 0,$$

cu ajutorul căruia se recunoaște că planul mobil se deplasează în planul Oy^1y^2 și, ca urmare, varietatea pe care o generează se confundă cu acel plan.

II. NATURA VARIETĂȚII GENERATĂ ÎN SPAȚIUL MOBIL DE CĂTRE ACELAȘI PLAN INSTANTANEU DE ROTAȚIE

5. *Generalități.* În paragrafele ce urmează ne propunem să analizăm, pentru fiecare dintre cazurile menționate în prima parte a acestei lucrări, natura varietății generată de același plan instantaneu de rotație prin înregistrarea pozițiilor lui față de reperul $\Omega\eta^1\eta^2\eta^3\eta^4$, invariabil legat de solidul rigid.

Este necesar pentru aceasta să amintim cîteva relații de care ne vom servi și care se pot găsi și în lucrarea [4].

Astfel, relațiile dintre coordonatele y^l și η^λ, corespunzătoare unui punct oarecare al rigidului cînd raportăm poziția lui la reperul $Oy^1y^2y^3y^4$ și la reperul $\Omega\eta^1\eta^2\eta^3\eta^4$, au forma

$$y^l = \underset{\Omega}{y^l} + \alpha^l_\lambda \eta^\lambda \qquad (l, \lambda = 1, 2, 3, 4) \quad (22)$$

dacă notăm cu $\underset{\Omega}{y^l}$ coordonatele originii Ω a reperului mobil, iar cu α^l_λ

$$\alpha^l_\lambda = \alpha^\lambda_l = \cos\,(\widehat{Oy^l, \Omega\eta^\lambda}),$$

cosinusul unghiului axelor Oy^l, $\Omega\eta^\lambda$. Amintim, de asemenea, că studiu nostru se referă la mișcările pentru care

$$\| \alpha^l_\lambda \| = 1.$$

Rezultă că între componentele a^l și α^λ, b^l și β^λ, corespunzătoare vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ cînd sînt raportați la cele două repere, există relațiile

$$\begin{cases} a^l = \alpha^l_\lambda \alpha^\lambda, \\ b^l = \alpha^l_\lambda \beta^\lambda. \end{cases} \qquad (l, \lambda = 1, 2, 3, 4) \quad (23)$$

Vitezele se distribuie punctelor solidului rigid conform relațiilor

$$\frac{dy^l}{dt} = \frac{\overset{\Omega}{dy^l}}{dt} + \omega^l_{.k}(y^k - \underset{\Omega}{y^k}), \qquad (l, k = 1, 2, 3, 4) \quad (24)$$

în care s-a notat cu

$$\omega^l_{.k} = \frac{d\alpha^l_\lambda}{dt}\alpha^\lambda_k = -\frac{d\alpha^k_\lambda}{dt}\alpha^\lambda_l = -\omega^k_{.l} \qquad (l, k = 1, 2, 3, 4),$$

componentele mixte ale tensorului rotației instantanee.

Mai departe, coordonatele c^l ale centrului instantaneu de rotație se determină cu relațiile

$$0 = \frac{\overset{\Omega}{dy^k}}{dt} + \omega^k_{.l}(c^l - \underset{\Omega}{y^l}) \qquad (l, k = 1, 2, 3, 4) \quad (25)$$

și sînt legate de coordonatele lui γ^λ, în raport cu reperul mobil, prin relații de forma (21)

$$c^l = \underset{\Omega}{y^l} + \alpha^l_\lambda \gamma^\lambda \qquad (l, \lambda = 1, 2, 3, 4).$$

Derivînd în raport cu timpul ambele părți ale acestora și avînd în vedere (25), se găsesc relațiile

$$\frac{dc^l}{ds}\dot{s} = \alpha^l_\lambda \frac{d\gamma^\lambda}{d\sigma}\dot{\sigma} \qquad (l, \lambda = 1, 2, 3, 4) \quad (26)$$

în care s și σ reprezintă arcul curbelor (C) și (Γ), obținute prin înregistrarea pozițiilor centrului instantaneu de rotație pe cele două repere $Oy^1y^2y^3y^4$ și $\Omega\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4$.

Din relațiile (26) se deduc următoarele:

$$\frac{dc^l}{ds} = \alpha^l_\lambda \frac{d\gamma^\lambda}{d\sigma} \qquad (l, \lambda = 1, 2, 3, 4) \quad (26')$$

și

$$\dot{s} = \dot{\sigma}, \qquad (26'')$$

care arată că în orice moment curbele (C) și (Γ) sînt tangente și se rostogolesc în timpul mișcării una pe cealaltă fără alunecare.

Pentru cele ce urmează sînt necesare și relațiile

$$\begin{cases} \omega^l_{.k} a^k = \omega b^l, \\ \omega^l_{.k} b^k = -\omega a^l, \end{cases} \qquad (l, k = 1, 2, 3, 4), \quad (27)$$

prin care se exprimă faptul că versorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt coplanari cu un plan instantaneu de rotație.

În sfîrșit, amintim relațiile

$$\frac{d\gamma^\lambda}{d\sigma} = \mu^\lambda + a\alpha^\lambda + b\beta^\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, 3, 4) \quad (28)$$

și

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha^\lambda}{d\sigma} = \pi^\lambda - \rho\beta^\lambda, \\ \dfrac{d\beta^\lambda}{d\sigma} = u^\lambda + \rho\alpha^\lambda, \end{cases} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, 4) \quad (29)$$

analogele relațiilor (2) și (3). Ele corespund elementelor varietății generate de planul instantaneu de rotație în raport cu reperul mobil $\Omega\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4$.

6. *Cazul* $p^2 = 0$; $q^2 = 0$. Dacă se derivează în raport cu timpul ambele părți în primele relații (23) și se ține seama de aceste condiții și de relațiile (3), (26''), (27) și (29), se ajunge la relațiile

$$[(\rho - r)\dot{s} - \omega]\, b^l = (\alpha^l_\lambda \pi^\lambda)\,\dot{\sigma} \qquad (l, \lambda = 1, 2, 3, 4), \quad (30)$$

din care, înmulțind ambele părți cu b_l, sumînd și avînd în vedere relațiile evidente

$$\begin{cases} b^l b_l = 1, \\ \alpha^l_\lambda \pi^\lambda b_l = \alpha^l_\lambda b_l \pi^\lambda = \beta_\lambda \pi^\lambda = 0, \end{cases}$$

se deduce relația

$$(\rho - r)\,\dot{s} - \omega = 0.$$

Ținînd însă seama de acest rezultat, se recunoaște că relațiile (30) se reduc la forma

$$\alpha^l_\lambda \pi^\lambda = 0, \qquad (l, \lambda = 1, 2, 3, 4)$$

din care, avînd în vedere (22), se deduce

$$\pi^\lambda = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, 3, 4). \quad (31)$$

Procedînd în mod analog cu celelalte relaţii (23), se găsesc rezultatele următoare :

$$u^\lambda = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, 3, 4). \quad (32)$$

Împreună cu (31) ele arată că în acest caz sînt îndeplinite condiţiile

$$\pi^2 = 0 ; u^2 = 0,$$

care sînt identice cu condiţiile (I).

Se poate afirma, aşadar, că în cazul condiţiilor (I) varietatea descrisă de planul instantaneu de rotaţie în raport cu reperul invariabil legat de solidul rigid este de aceeaşi natură cu varietatea generată de acel plan în raport cu reperul la care raportăm mişcarea rigidului.

În particular rezultă şi faptul că planul instantaneu de rotaţie rămîne paralel cu un plan invariabil legat de reperul mobil.

7. *Cazul* $p^2 = 0 ; u^2 = 0$. În paragraful precedent s-a arătat că, atunci cînd este îndeplinită condiţia

$$p^2 = 0,$$

este îndeplinită şi condiţia

$$\pi^2 = 0. \qquad (31')$$

Dacă în (26') se introduc expresiile din partea dreaptă a relaţiilor (2) şi (28) şi se ţine seama şi de (23), se obţin relaţiile

$$u^l + (\alpha - a)\, a^l + (\beta - b)\, b^l = \alpha^l_\lambda \mu^\lambda \qquad (l, \lambda = 1, 2, 3, 4) \quad (33')$$

din care, înmulţind cu a_l, sumînd şi avînd în vedere relaţiile evidente

$$\begin{cases} u^l a_l = 0, \; a^l a_l = 1, \; b^l a_l = 0, \\ \alpha^l_\lambda \mu^\lambda a_l = \alpha^l_\lambda a_l \mu^\lambda = \alpha_\lambda \mu^\lambda = 0, \end{cases}$$

se deduce

$$\alpha = a.$$

În mod asemănător se poate deduce din (33) şi relaţia

$$\beta = b,$$

care, împeună cu cea precedentă, reduce relaţiile (33) la forma

$$u^l = \alpha^l_\lambda \mu^\lambda \qquad (l, \lambda = 1, 2, 3, 4). \quad (34)$$

Avînd în vedere relaţia $\| \alpha^l_\lambda \| = 1$, se recunoaşte însă că din (34) rezultă

$$\mu^\lambda = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, 4) \quad (35)$$

atunci cînd este îndeplinită condiţia

$$u^2 = 0.$$

Relaţiile (35) sînt echivalente însă cu relaţia

$$\mu^2 = 0, \qquad (35')$$

care, împreună cu (31'), reprezintă condiţii identice cu condiţiile (II_1).

Se recunoaște, așadar, că și în cazul condițiilor (II_1) varietățile descrise de planul instantaneu de rotație în raport cu cele două repere sînt de aceeași natură.

8. *Cazul* $p^2 = 0$; $u^i = \lambda q^i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Din cele arătate în § 6 rezultă că și în acest caz (31′) își păstrează valabilitatea.

Pe de altă parte, derivînd în raport cu timpul ambele părți în relațiile scrise pe rîndul al doilea din (23) și avînd în vedere relațiile (26″), (27) și (29), se ajunge la relațiile

$$q^l \dot{s} - [(\rho - r)\,\dot{s} - \omega]\,a^l = (\alpha^l_\lambda u^\lambda)\,\dot{\sigma}, \qquad (l, \lambda = 1, 2, 3, 4). \quad (36)$$

Din acestea, înmulțind în ambele părți cu a_l, sumînd și avînd în vedere relațiile ușor de stabilit

$$\begin{cases} a_l q^l = 0, \quad a^l a_l = 1, \\ \alpha^l_\lambda u^\lambda\, a_l = \alpha^l_\lambda a_l u^\lambda = \alpha_\lambda u^\lambda = 0, \end{cases}$$

rezultă relația

$$(\rho - r)\,\dot{s} - \omega = 0,$$

în virtutea căreia (36) se reduc la forma mai simplă

$$q^l = \alpha^l_\lambda u^\lambda \qquad (l, \lambda = 1, 2, 3, 4). \quad (36')$$

Substituind acum în relațiile

$$u^l = \lambda q^l \qquad (l = 1, 2, 3, 4)$$

pe u^l și q^l cu expresiile din partea dreaptă a relațiilor (34) și (36′) și schimbînd indicele mut λ cu ρ, se obține

$$\alpha^l_\rho(\mu^\rho - \lambda u^\rho) = 0 \qquad (l, \rho = 1, 2, 3, 4),$$

iar dacă se are în vedere (22), se deduc imediat relațiile

$$\mu^\rho = \lambda\, u^\rho \qquad (\rho = 1, 2, 3, 4). \quad (37)$$

Se poate afirma, așadar, că în cazul de față varietatea generată de planul mobil în raport cu reperul $\Omega\eta^1\eta^2\eta^3\eta^4$ îndeplinește condițiile (31′) și (37). Aceste condiții sînt însă identice cu condițiile (II_2). Rezultă de aici că și de această dată varietățile generate de planul instantaneu de rotație prin înregistrarea pozițiilor lui pe cele două repere sînt de aceeași natură.

Observație. Faptul că factorul λ din condițiile (37) este identic cu factorul λ care figurează în condițiile (II_2) are ca urmare faptul că dreapta (19) coincide cu dreapta care aparține varietății înregistrate pe reperul mobil și îndeplinește același rol cu rolul pe care-l are (19) în varietatea înregistrată pe reperul la care raportăm mișcarea rigidului.

9. *Cazul* $q^2 = 0$; $u^2 = 0$. În acest caz, condițiile (35) continuă să fie îndeplinite. De asemenea, avînd în vedere prima condiție din cazul de față, relațiile (22) și (36′), se recunoaște că și condițiile următoare sînt îndeplinite:

$$u^\lambda = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, 3, 4). \quad (38)$$

Condițiile (35) și (38) sînt însă echivalente cu următoarele :

$$u^2 = 0 \; ; \; \mu^2 = 0.$$

În sfîrșit, aceste condiții fiind identice cu condițiile (III_1), se recunoaște că și în acest caz cele două varietăți generate de planul instantaneu de rotație sînt de aceeași natură.

10. *Cazul* $q^2 = 0$; $u^i = \lambda p^i$, ($i = 1, 2, 3, 4$). Prima condiție fiind aceeași ca în cazul precedent, se înțelege că și în cazul de față condițiile (38) sînt îndeplinite.

Mai departe, pornind de la primele relații (23) și folosind un procedeu de calcul analog cu acela care ne-a condus la relațiile (36′), se stabilesc următoarele relații :

$$p^l = \alpha^l_\lambda \pi^\lambda \qquad (l, \lambda = 1, 2, 3, 4). \quad (39)$$

Substituind acum în condițiile

$$u^l = \lambda p^l \qquad (l = 1, 2, 3, 4)$$

pe u^l și pe p^l cu expresiile din partea dreaptă a relațiilor (34) și (39), se ajunge pînă la urmă să se recunoască faptul că în cazul de față sînt îndeplinite și condițiile

$$\mu^\rho = \lambda \pi^\rho, \qquad (\rho = 1, 2, 3, 4). \quad (40)$$

Condițiile (38) și (40) sînt însă echivalente cu (III_2), de unde rezultă din nou că natura celor două varietăți este aceeași.

Observație. Întemeindu-se pe faptul că factorii λ din condițiile (III_2) și (40) sînt identici, putem face aceeași afirmație ca la sfîrșitul § 8 cu privire la dreapta (19′).

11. *Cazul* $p^2 = 0$; $q^2 = 0$; $u^2 = 0$. În § 6 s-a arătat că, atunci cînd sînt îndeplinite primele două dintre condițiile cazului de față, sînt îndeplinite și condițiile

$$\pi^2 = 0 \; ; \; u^2 = 0.$$

De asemenea, în § 7 s-a stabilit că îndeplinirea ultimei condiții a cazului de care ne ocupăm are ca urmare îndeplinirea condiției

$$\mu^2 = 0. \qquad (35')$$

Rezultă, așadar, că, atunci cînd sînt îndeplinite toate trei condițiile cazului de față, sînt îndeplinite și condițiile

$$\pi^2 = 0 \; ; \; u^2 = 0 \; ; \; \mu^2 = 0.$$

Acestea sînt însă identice cu condițiile (IV). În consecință, se poate afirma că în acest caz și varietatea generată de planul instantaneu de rotație, prin raportarea poziției lui la reperul $\Omega\eta^1\eta^2\eta^3\eta^4$, degenerează într-un plan invariabil legat de acel reper.

Întemeindu-ne pe cele arătate în paragrafele părții a doua a acestei lucrări, putem formula următoarea concluzie : *cînd varietatea generată de un plan instantaneu de rotație, prin înregistrarea poziției lui pe reperul* $Oy^1y^2y^3y^4$ *la care raportăm mișcarea solidului rigid fără punct fix*

din spațiul euclidian cu patru dimensiuni, este euclidiană, varietatea generată de același plan prin raportarea poziției lui la reperul $\Omega\eta^1\eta^2\eta^3\eta^4$ *invariabil legat de corpul mobil este de aceeași natură.*

Într-o lucrare viitoare vom prezenta un studiu referitor la refacerea mișcării cu ajutorul celor două varietăți generate de planul instantaneu de rotație în raport cu cele două repere.

Primită la redacție la 24 iunie 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Woinaroski, *Geometria varietăților curbe cu trei dimensiuni generate de un plan mobil în* E_n (2), Lucrările Institutului de petrol, gaze și geologie din București, **VIII** (1962).
2. — *Geometria varietăților curbe cu trei dimensiuni, generate de un plan mobil în* E_n (1).
3. P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, t. vol. V, Paris, Gauthier-Villars, 1933.
4. R. Woinaroski, *Cinematica sistemelor nedeformabile, fără punct fix, în spațiul euclidian cu patru dimensiuni*, Buletinul Institutului de petrol, gaze și geologie, **XII** (1964).
5. D. Mangeron, *Kgrafoanaliticeskim metodam kinematiki materialnih sistem*, DAN SSSR, **102**, *5* (1955).
6. D. Mangeron, Gh. Ciobanu, A. Brainer, *Problema distribuției accelerațiilor de ordin oarecare în mișcarea sistemelor oarecare*, Buletinul Institutului politehnic Iași **II**, **(VI)** *1*, (1956).
7. Ștefania Rușcior, *Varietăți biriglate în* S_4, Buletinul Institutului politehnic Iași **V**, **(IX)**, *1* (1959).

ASUPRA MIȘCĂRII STAȚIONARE A UNUI SISTEM VIBROPERCUTANT CÎND CIOCNIREA NU SE CONSIDERĂ INSTANTANEE[1])

de D. MANGERON
Institutul politehnic din Iași
și GH. SILAȘ, A. BRÎNDEU, A. HEGEDÜS
Institutul politehnic din Timișoara

539.3 : 517.9

În lucrare se determină durata ciocnirii și intervalul de timp dintre două ciocniri cînd masele ce se ciocnesc sînt legate elastic (fig. 1), iar ciocnirea nu este instantanee. Forța de contact dintre ciocane se consideră dată de legea lui Hertz $P = k_1 \xi^{1/2}$.
Ecuația diferențială neliniară care descrie mișcarea sistemului în decursul ciocnirii se integrează cu metoda aproximării poligonale [5]. Se stabilesc astfel condițiile (15) și (16), în care se realizează mișcarea staționară a sistemului. Se determină și forța maximă de contact necesară pentru determinarea stărilor de tensiune a corpurilor ce se ciocnesc.
Rezultatele teoretice se verifică experimental cu o instalație electronică ce are schema din figura 3.

Studiul ciocnirii corpurilor masive libere a fost făcut, ținîndu-se cont de deformațiile locale, în lucrările [1], [2]. În cazul cînd unul dintre corpuri are o legătură elastică, studiul s-a făcut în lucrarea [2], pe baza acelorași deformații.

Mecanismele vibropercutante au fost studiate în ipoteza că ciocnirile sînt instantanee [6], [7]. Trebuie menționat că această ipoteză aduce simplificări în calcule, dar este numai o aproximare a fenomenului real.

În prezenta lucrare vom face studiul unui mecanism vibropercutant ținînd seama de deformațiile locale ce se produc în timpul ciocnirii.

[1]) Prezentată la Conferința de mecanică, București, septembrie 1965. Publicată în Rev. Roum. Sci. Tech.—Mécanique Appliquée, **11**, *2*, 1967 (în limba germană).

1. Să considerăm sistemul vibropercutant din figura 1, care constă dintr-o masă percutantă m suspendată pe un arc cu constanta elastică k și un element fix.

Generatorul de vibrații este solidar legat cu masa percutantă. Vibrațiile pot fi obținute printr-una din metodele cunoscute, de exemplu prin două excentrice ce se rotesc în sens invers cu viteza unghiulară constantă ω. În acest fel, asupra masei percutante m va acționa pe verticală forța perturbatoare $F=F_0 \sin(\omega t+\varphi)$. Folosind două excentrice de masă $\frac{m_0}{2}$ fiecare, cu excentricitatea e, avem $F_0 = m_0 e\ \omega^2$.

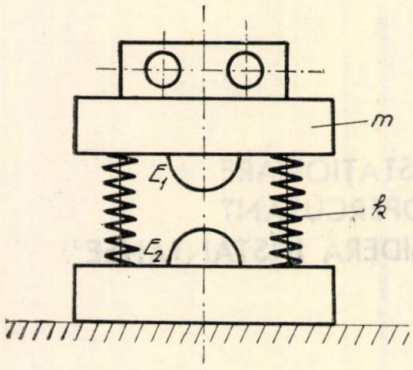


Fig. 1

Masa percutantă și elementul fix se ciocnesc prin intermediul a două emisfere E_1 și E_2, pe care le vom numi ciocane. Vom nota cu δ distanța dintre ciocane în cazul echilibrului static.

Aici vom considera numai cazul cînd vitezele de ciocnire sînt suficient de mici și tensiunile care apar la ciocnire nu întrec limita de elasticitate. S-a arătat că pentru bile de oțel teoria ciocnirii elastice este valabilă în cazul vitezelor ce nu întrec cîteva sute de cm/s [1].

În timpul ciocnirii, cele două ciocane se vor deforma. Notînd cu $\xi\ (\xi > 0)$ apropierea celor două ciocane, forța de contact P o vom considera dată de relația lui Hertz

$$P = k_1\, \xi^{3/2}, \tag{1}$$

unde pentru ciocanele de formă sferică avem [2]

$$k_1 = \frac{2}{3(1-\mu^2)} E \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Considerînd ca origine poziția de echilibru static al masei m și sensul pozitiv în sus, ecuația diferențială a mișcării acestei mase va fi

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t + \varphi) + P. \tag{2}$$

În intervalele dintre ciocniri, ecuația (2) nu conține forța P. În decursul ciocnirii, între x și ξ avem următoarea relație:

$$x = -\delta - \xi. \tag{3}$$

Dînd acestei relații un sens mai larg (considerînd pentru ξ și valori negative), o putem interpreta ca o transformare de coordonate. Ecuația diferențială (2) devine

$$m\ddot{\xi} + k\xi + P(\xi) = -k\delta - F_0 \sin(\omega t + \varphi), \tag{4}$$

unde

$$P(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \xi \leqslant 0, \\ k_1 \xi^{3/2} & \text{pentru } \xi > 0. \end{cases}$$

Ecuația (4) poate fi scrisă sub o formă mai simplă, folosind următoarele schimbări de variabile:

$$\tau = t \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\varphi}{p}; \qquad \eta = \xi \left(\frac{k_1}{k}\right)^2 \tag{5}$$

și notațiile

$$a = \left(\frac{k_1}{k}\right)^2 \delta; \qquad b = \frac{F_0 k_1^2}{k^3}; \qquad p = \omega \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ecuația diferențială a mișcării devine

$$\eta'' + \eta + f(\eta) = -a - b \sin p\tau, \tag{6}$$

unde

$$f(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \eta \leqslant 0, \\ \eta^{3/2} & \text{pentru } \eta > 0. \end{cases}$$

Deci ecuația (6) descrie întregul fenomen, în care pentru $\eta \leqslant 0$ avem etapa dintre două ciocniri succesive, iar pentru $\eta > 0$ ciocnirea propriu-zisă.

2. Să studiem mișcarea sistemului între două ciocniri succesive ($\eta \leqslant 0$). Pentru aceasta vom integra ecuația (6). Originea timpului $t = 0$ va fi luată la sfîrșitul ciocnirii. Deci pentru $\tau = \frac{\varphi}{p}$ avem $\eta = 0$. Notînd cu $-\alpha$ ($\alpha > 0$) valoarea derivatei η' în acest moment, vom obține

$$\eta = A \sin\left(\tau - \frac{\varphi}{p}\right) + B \cos\left(\tau - \frac{\varphi}{p}\right) - a - \theta \sin p\tau, \tag{7}$$

în care s-a notat

$$A = -\alpha + p\,\theta \cos\varphi; \qquad B = a + \theta \sin\varphi; \qquad \theta = \frac{b}{1 - p^2}.$$

Relația (7) descrie mișcarea masei m pînă în momentul în care η devine din nou zero. Deci sfîrșitul acestui interval definit prin τ_0 se găsește rezolvînd ecuația

$$A \sin\left(\tau_0 - \frac{\varphi}{p}\right) + B \cos\left(\tau_0 - \frac{\varphi}{p}\right) - a - \theta \sin p\ \tau_0 = 0. \tag{8}$$

De asemenea se poate determina mărimea $(\eta')_{\tau=\tau_0} = \beta$, necesară pentru studiul etapei următoare (ciocnirea următoare):

$$\beta = A \cos\left(\tau_0 - \frac{\varphi}{p}\right) - B \sin\left(\tau_0 - \frac{\varphi}{p}\right) - \theta\, p \cos p\ \tau_0. \tag{9}$$

3. Elementele mişcării determinate la sfîrşitul etapei anterioare reprezintă condiţii iniţiale pentru mişcarea care are loc în timp ce ciocanele se află în contact. În această perioadă este valabilă ecuaţia diferenţială a mişcării (6) pentru $\eta > 0$, cu condiţiile iniţiale $\eta = 0$ şi $\eta' = \beta\,(\tau = \tau_0)$. Ecuaţia (6) este neliniară. Pentru integrarea ei vom folosi o metodă de aproximare poligonală elaborată de noi într-o altă lucrare [5], pe care o considerăm cea mai potrivită cazului studiat.

Pentru a aplica această metodă este necesar să stabilim în prealabil valoarea maximă a lui η, şi anume η_m. Ţinînd cont de faptul că timpul de ciocnire este scurt, vom putea scrie în orice moment τ al ciocnirii, în prima aproximaţie, că $\sin p\tau \cong \sin p\tau_0$.

Din integrala primă a ecuaţiei (6), şi anume

$$5\eta'^2 + 4\eta^{5/2} + 5\eta^2 + 10\lambda\eta - 5\beta^2 = 0,$$

unde

$$\lambda = a + b \sin p\tau_0,$$

se poate determina η_m din condiţia $\eta' = 0$. Valoarea lui η_m va fi rădăcina ecuaţiei

$$4\eta^{5/2} + 5\eta^2 + 10\lambda\eta - 5\beta^2 = 0. \tag{10}$$

Se poate arăta că ecuaţia (10) admite o singură rădăcină reală. Metoda aproximării poligonale amintită constă în înlocuirea caracteristicii neliniare $F(\eta) = \eta + f(\eta)$ printr-o linie poligonală, în aşa fel încît eroarea medie pătratică să fie minimă. Prima latură a poligonului se va alege în aşa fel ca să reprezinte chiar partea liniară a caracteristicii. Laturile poligonului se exprimă prin ecuaţii de forma

$$g_i(\eta) = m_i\eta + n_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

unde m_i şi n_i sînt constante ce se determină din condiţiile de continuitate

$$g_{i-1}(\eta_i) = g_i(\eta_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

şi din ecuaţiile

$$\int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} [g_i(\eta) - F(\eta)]\,d\eta = 0, \qquad \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} [g_i(\eta) - F(\eta)]\,\eta\,d\eta = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

În cazul nostru, cu $F(\eta) = \eta + \eta^{3/2}$, vom face aproximare poligonală luînd $n = 2$, iar pentru o precizie mai mare $n = 3$. Elementele necesare obţinute pentru cazul aproximării biliniare se află în tabela 1, iar pentru aproximare triliniară în tabela 2.

Deoarece am aproximat caracteristica neliniară cu un poligon, pe fiecare interval corespunzător unei laturi ecuaţia diferenţială (6) devine liniară. Folosind rezultatele cuprinse în tabele, se obţine soluţia pe un anumit interval $i(\eta_i \leqslant \eta \leqslant \eta_{i+1})$ sub forma

$$\eta = A_i \sin \sqrt{m_i}(\tau - \tau_i) + B_i \cos \sqrt{m_i}(\tau - \tau_i) - \frac{a + n_i}{m_i} - \frac{b}{m_i - p^2} \sin p\,\tau_i, \tag{11}$$

unde constantele de integrare A_1 și B_1 se determină din condițiile de la începutul intervalului, care coincid cu cele de la sfîrșitul intervalului precedent. Astfel, dacă presupunem la începutul intervalului $\tau = \tau_i$, $\eta = \eta_i$ și $\eta' = \eta'_i$, se obține

$$A_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}}\left(\eta'_i + \frac{pb}{m_i - p^2}\cos p\ \tau_i\right),$$
$$B_i = \eta_i + \frac{a + n_i}{m_i} + \frac{b}{m_i - p^2}\sin p\ \tau_i. \tag{12}$$

Tabela 1

i	m_i	n_i	η
0	1	0	$0 \leqslant \eta \leqslant 0{,}162\ \eta_m$
1	$1 + 1{,}127 \cdot \eta^{1/2}$	$-0{,}1826 \cdot \eta^{3/2}$	$0{,}162\ \eta_m \leqslant \eta \leqslant \eta_m$

Tabela 2

i	m_i	n_i	η
0	1	0	$0 \leqslant \eta \leqslant 0{,}08\ \eta_m$
1	$1 + 0{,}792 \cdot \eta_m^{1/2}$	$-0{,}06336 \cdot \eta_m^{3/2}$	$0{,}08\ \eta_m \leqslant \eta \leqslant 0{,}494\ \eta_m$
2	$1 + 1{,}292 \cdot \eta_m^{1/2}$	$-0{,}310 \cdot \eta_m^{3/2}$	$0{,}494\ \eta_m \leqslant \eta \leqslant \eta_m$

Deoarece η_{i+1} este o valoare cunoscută cuprinsă în tabelele 1 și 2, date prin înlocuirea ei în ecuația (11), vom obține ecuația

$$\eta_{i+1} = A_i \sin\sqrt{m_i}(\tau_{i+1} - \tau_i) + B_i \cos\sqrt{m_i}(\tau_{i+1} - \tau_i) - \\ - \frac{a + n_i}{m_i} - \frac{b}{m_i - p^2}\sin p\ \tau_{i+1}, \tag{13}$$

din care se determină τ_{i+1}, sfîrșitul intervalului i.

Prin înlocuirea lui τ_{i+1} în derivata expresiei (11) se obține $(\eta')_{\tau=\tau_{i+1}} = \eta'_{i+1}$,

unde

$$\eta'_{i+1} = A_i\sqrt{m_i}\cos\sqrt{m_i}(\tau_{i+1} - \tau_i) - B_i\sqrt{m_i}\sin\sqrt{m_i}(\tau_{i+1} - \tau_i) - \\ - \frac{bp}{m_i - p^2}\cos p\ \tau_{i+1}. \tag{14}$$

Elementele obținute prin relațiile (13) și (14) constituie condițiile inițiale ($\tau = \tau_{i+1}$) pentru intervalul următor, pentru care calculele se fac la fel.

În ultimul interval, procedînd ca mai sus, $\eta = \eta_n$ va trebui să aibă valoarea maximă η_m. De aceea la sfîrșitul acestui ultim interval derivata

η_n' determinată va trebui să rezulte zero. Dacă această condiție nu este îndeplinită, calculul trebuie reluat cu o altă valoare a lui η_m.

După metoda de mai sus am studiat ciocnirea din momentul cînd η avea valoarea zero pînă la valoarea η_m. Vom proceda absolut analog în studiul ciocnirii de la η_m la $\eta = 0$. În acest moment vom obține pentru τ valoarea τ_s și pentru η' valoarea $-\gamma$.

Calculul făcut permite determinarea tuturor parametrilor care caracterizează fenomenul de ciocnire în sistemele vibropercutante. Astfel se obține timpul total de ciocnire $\Delta t_c = (\tau_s - \tau_0)\sqrt{\frac{m}{k}}$, durata fiecărei faze a ciocnirii, și anume comprimarea $\Delta t_c' = (\tau_n - \tau_0)\sqrt{\frac{m}{k}}$ și destinderea $\Delta t_c'' = (\tau_s - \tau_n)\sqrt{\frac{m}{k}}$. De asemenea se obține deformația maximă $\xi_m = \left(\frac{k}{k_1}\right)^2 \eta_m$ și forța maximă de contact $p_{max} = k_1 \xi_m^{3/2}$.

4. Metoda de calcul prezentată se referă la un ciclu al mișcării compus din mișcarea dintre două ciocniri succesive și ciocnirea propriu-zisă. Mișcarea sistemului fiind o succesiune de astfel de cicluri, studiul complet se va face trecînd de la un ciclu la următorul. Condițiile inițiale pentru un ciclu sînt cele finale ale ciclului precedent. Astfel, pentru ciclul următor celui expus mai sus vom avea ca moment inițial $\tau = \tau_s$ și condițiile inițiale $\eta = 0$, $\eta' = -\gamma$.

Într-un regim tranzitoriu, ciclurile nu se repetă identic. Studiul acestui regim necesită în general calcule multe, însă problema poate fi programată și rezolvată la mașinile electronice de calcul.

Ne vom ocupa în mod deosebit de mișcarea staționară a sistemului vibropercutant, adică atunci cînd mișcarea se repetă identic în fiecare ciclu. Pentru aceasta este necesar ca vitezele la începutul și la sfîrșitul unui ciclu să fie egale, iar forța perturbatoare să se repete identic. Pentru a fi îndeplinită prima condiție va trebui să avem

$$a = \gamma. \tag{15}$$

A doua condiție este îndeplinită în cazul cînd perioada $T = \left(\tau_s - \frac{\varphi}{p}\right)\sqrt{\frac{m}{k}}$ a mișcării staționare este un multiplu al perioadei forței perturbatoare:

$$T = \left(\tau_s - \frac{\varphi}{p}\right)\sqrt{\frac{m}{k}} = r\frac{2\pi}{\omega} \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Dacă în ecuațiile (15) și (16) am reușit să exprimăm valorile intermediare ale lui τ și η' din ecuațiile intermediare (8), (9), (13) și (14) cu ajutorul valorilor a și φ', atunci aceste ecuații ar constitui un sistem de două ecuații cu două necunoscute. Rezultă deci că mișcarea staționară se realizează numai cînd aceste condiții sînt verificate, deci numai pentru anumite valori ale lui a și φ.

Cum exprimările de mai sus ale lui τ și η' sînt foarte greu de efectuat, va trebui să determinăm două valori aproximative ale lui α și φ cu care vom începe calculele. Dacă α și φ calculate din ecuațiile (15)

și (16) nu sînt egale cu valorile de la început, vom relua calculele cu noile valori. Folosirea acestei metode duce la rezultate suficient de exacte, însă necesită multe calcule, mai ales că se folosește iterația. Rezolvarea se poate face în condiții bune folosind un program ciclic la mașina electronică de calcul.

În ce privește valorile aproximative de început ale lui α și φ, vom ține seama de faptul că pentru majoritatea sistemelor vibropercutante durata ciocnirii nu influențează esențial elementele mișcării [2]. Aceasta înseamnă că se pot obține concluzii privind mișcarea sistemului vibropercutant, folosind ipoteza ciocnirii instantanee. Deci calculele pot fi efectuate în prima aproximație pornind de la valorile obținute pentru necunoscute în studiul ciocnirii instantanee. Astfel, pe baza teoriei ciocnirii elastice instantanee rezultă $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ și $\alpha = (\theta - a)\ \mathrm{tg}\ \frac{\pi r}{p}$, pe care le vom folosi ca valori inițiale de calcul.

Dacă timpul de ciocnire este scurt în raport cu perioada forței perturbatoare, și anume sub cîteva sutimi din perioada forței perturbatoare — condiție în general îndeplinită la mecanismele vibropercutante —, se pot face unele aproximări care ne conduc la un calcul suficient de simplu și exact. Din relațiile (13) și (14), după aproximațiile ce se pot face în aceste condiții, se obține

$$\eta'^2_{i+1} = \eta'^2_i - 2m_i\,(\eta_{i+1} - \eta_i)\left(\frac{\eta_{i+1}+\eta_i}{2} + \frac{a + n_i}{m_i} - \frac{b}{m_i - p^2}\right). \qquad (17)$$

În relația (17), pentru fiecare etapă este necunoscută mărimea η'_{i+1}, celelalte fiind determinate fie din tabelele 1 și 2, fie din etapa anterioară.

Pentru determinarea lui τ_{i+1} se obține din relațiile (13) și (14) după simplificare următoarea ecuație:

$$\cos\left[\sqrt{m_i}\,(\tau_{i+1} - \tau_i) + \psi_i\right] = \frac{\eta'_{i+1}}{\eta'_i}\cos\psi_i, \qquad (18)$$

unde

$$\mathrm{tg}\ \psi_i = \frac{B_i}{A_i}.$$

Cu ajutorul formulelor (17) și (18) se pot calcula toate mărimile necunoscute care apar la ciocnire.

Cînd condiția amintită nu este îndeplinită, formulele (17) și (18) pot fi folosite pentru a obține valori aproximative, care urmează să fie îmbunătățite pe baza ecuațiilor (13) și (14).

Ca exemplu vom considera un sistem vibropercutant cu următoarele caracteristici $a = 1{,}611 \cdot 10^{10}$, $b = 34{,}2 \cdot 10^{10}$ și $p = 3{,}26$. Acest caz corespunde unui sistem vibropercutant cu $m = 0{,}53$ kgfs^2/m, $k = 2{,}5$ kgf/cm, $R = 1$, 5 cm, $\omega = 100$ rad/s, $\delta = 3$ mm, $F_0 = 31{,}8$ kgf.

Vom face presupunerea că durata ciocnirii este suficient de mică, astfel că vom face simplificările arătate anterior. Pentru calcul se alege un poligon cu trei laturi, avînd elementele determinate în tabela 2, unde $\eta_m = 9{,}0740 \cdot 10^8$ se obține din ecuația (10).

Aplicînd succesiv relaţia (17), se obţin următoarele valori :

$$\eta_0' = 13{,}86 \cdot 10^{10},\ \eta_1' = 13{,}85 \cdot 10^{10},\ \eta_2' = 12{,}67 \cdot 10^{10},\ \eta_3' = 0,$$

$$\eta_4' = -12{,}67 \cdot 10^{10},\ \eta_5' = -13{,}85 \cdot 10^{10},\ \eta_6' = -13{,}86 \cdot 10^{10}.$$

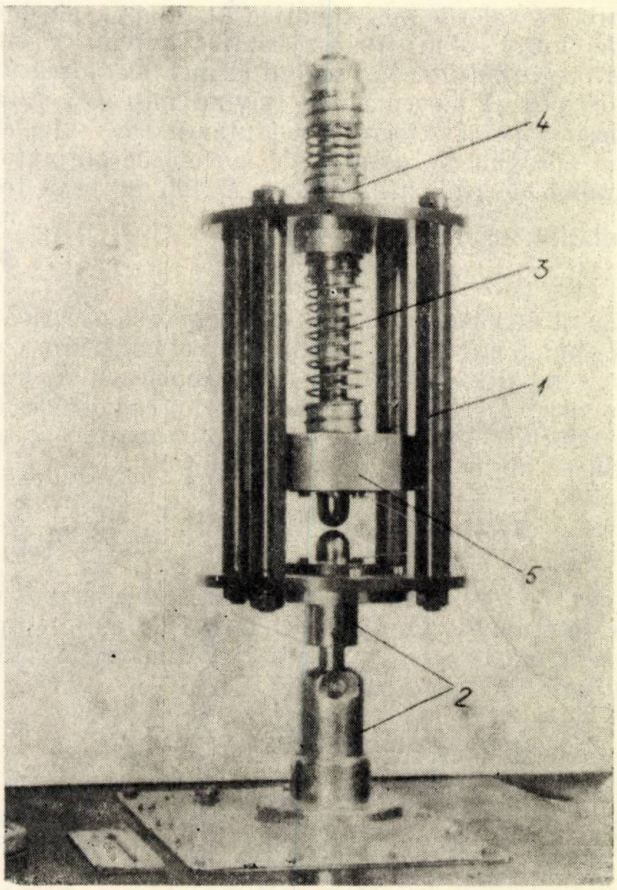


Fig. 2

În mod asemănător, folosind relaţia (18), se obţin

$$\tau_0 = 3{,}3728,\ \tau_1 = 3{,}3732,\ \tau_2 = 3{,}3759,\ \tau_3 = 3{,}3826,$$

$$\tau_4 = 3{,}3924,\ \tau_5 = 3{,}3955,\ \tau_s = \tau_6 = 3{,}3960.$$

Deci durata ciocnirii rezultă $\Delta t_c = 0{,}75 \cdot 10^{-3}$ s, deformaţia maximă $\xi_m = 0{,}0169$ cm, iar forţa maximă $P_{max} = 2\,550$ kgf.

5. Studiul experimental al fenomenului de ciocnire s-a făcut cu un sistem vibropercutant din figura 2. Masa percutantă 5 este suspendată elastic prin arcurile 3 de un suport 1. Suportul 1 este aşezat pe o masă vibrantă 2, care efectuează vibraţii armonice. Vibraţiile rectilinii relative ale masei 5 faţă de suportul 1 se execută datorită ghidajului 4, fixat de

suportul 1. Forța perturbatoare în această mișcare relativă este determinată de vibrația armonică a suportului 1, identică cu a masei vibrante 2. Pentru ca frecarea să nu influențeze mișcarea sistemului, ghidajul barei, de care este legată masa percutantă, este realizat cu bile.

Între masa percutantă 5 și baza suportului 1 au loc ciocniri prin intermediul ciocanelor de formă semisferică, așezate pe aceste elemente. Vibrațiile suportului 1, legat de masa vibrantă, nu sînt influențate de percuții.

Mișcarea relativă a masei percutante 5 față de suportul 1 este descrisă de ecuația diferențială (4), în care $F_0 = m\omega^2 h$, unde ω și h sînt amplitudinea și pulsația mișcării armonice a suportului. Dispozitivul realizat este un model potrivit pentru studiul experimental al sistemelor vibropercutante analizate mai înainte.

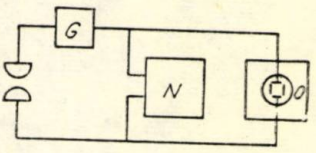


Fig. 3

Prin modificarea parametrilor dispozitivului putem realiza diferite cazuri de mișcare pentru sistemul vibropercutant studiat. Astfel se poate schimba forța perturbatoare prin modificarea amplitudinii și pulsației masei vibrante. De asemenea distanța dintre ciocane se reglează cu ajutorul unei piulițe de strîngere. Există posibilitatea de a schimba și alte elemente, ca, de exemplu, arcurile, masa percutantă etc.

Cu dispozitivul descris s-au măsurat duratele diferitelor faze ale mișcării. Pentru aceasta s-a conceput o instalație electrică cu care s-a măsurat atît timpul de ciocnire, cît și intervalul de timp dintre două ciocniri. Schema instalației de măsură se află în figura 3 și se compune din generatorul de impulsuri G, osciloscopul O și numărătorul de impulsuri N. Circuitul electric alimentat de la generatorul de impulsuri G se închide prin cele două ciocane în contact, fiind izolate de restul instalației.

Pentru determinarea timpului dintre ciocniri s-a folosit osciloscopul O, prevăzut cu un aparat de filmare. Pe plăcile de deviație verticale ale osciloscopului se aplică tensiunea dată de generatorul G. La fiecare ciocnire, osciloscopul primește tensiune și prin filmare se obține cîte o linie verticală, deoarece timpul de ciocnire este scurt. Cunoscînd viteza de înaintare a filmului, distanța dintre două linii determină timpul dintre ciocniri. Numărul de linii de pe film este egal cu numărul de ciocniri care au avut loc.

Numărătorul de impulsuri N numără impulsurile date de generator atîta timp cît ciocanele se află în contact. Cunoscînd acest număr și frecvența impulsurilor, rezultă cu o precizie mare timpul de ciocnire. În regimul staționar pe care-l studiem, numărătorul electronic rămîne în circuit pe durata mai multor ciocniri, mai ales că perioada mișcării masei percutante este mică. Numărul de impulsuri corespunzător unei ciocniri se află prin împărțirea numărului total de impulsuri înregistrat de numărător cu numărul ciocnirilor, determinat mai sus.

6. Pentru încercări s-a folosit un model de sistem vibropercutant, avînd caracteristicile din exemplul de calcul dat anterior pentru amplitudinea masei vibrante h cuprinsă între 1 și 6 mm, iar distanța dintre ciocane δ între 0 și 4 mm. Din calcule rezultă $k_1 = 1{,}16 \cdot 10$ kgcm$^{-3/2}$.

Ținînd seama de formula ciocnirii instantanee $\alpha = (\theta - a)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi r}{p}$, deoarece $a > 0$, $\theta - a < 0$, rezultă $\mathrm{tg}\,\pi r \cong \mathrm{tg}\,r < 0$, deci $r = 2$. Acest rezultat s-a confirmat experimental, adică timpul între ciocniri este dublul perioadei de oscilație a masei vibrante.

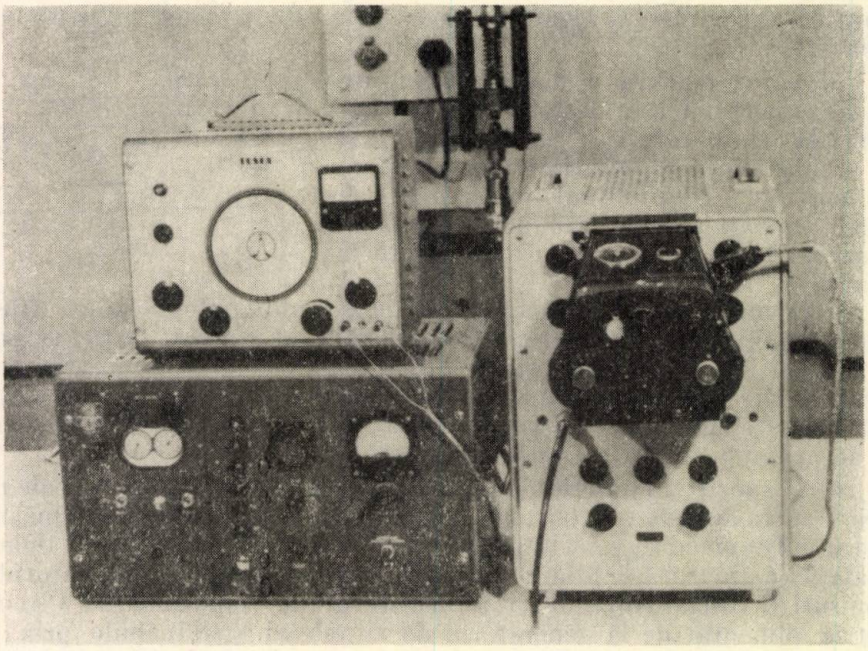


Fig. 4

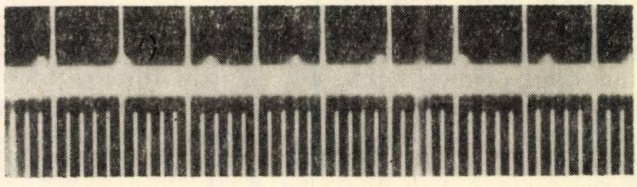


Fig. 5

Pentru mai multe situații ale dispozitivului cu valori concrete ale caracteristicilor în regim staționar, s-au făcut citiri la numărător și pe film. În figura 5 se arată un asemenea film, obținut pentru $\delta = 3$ mm, $h = 6$ mm și $\omega = 100$ rad/s. Pentru comparație este indicată și baza de timp de 0,1 s. S-a determinat timpul dintre ciocniri și s-a găsit egal cu 0,125 s, același în toate experiențele efectuate. Măsurătorile sînt foarte apropiate de rezultatele teoretice. Anterior am arătat că $r = 2$, ceea ce înseamnă că perioada $T = r\,\frac{2\pi}{\omega} = 0{,}1256$ s. Cum durata ciocnirii este foarte scurtă, cea mai mare parte a perioadei T reprezintă timpul dintre două ciocniri, pentru care experimental s-a găsit 0,125 s.

Duratele ciocnirilor pentru cazurile studiate au fost găsite cu valori cuprinse între 1 și 2,5 microsecunde, fiind mai mari în general ca cele rezultate din calcul.

CONCLUZII

1. S-a stabilit teoretic și s-a verificat experimental că perioada mișcării staționare a unui sistem vibropercutant, cînd ciocnirea nu se consideră instantanee, este un multiplu al perioadei forței perturbatoare. Regimul staționar s-a realizat în toate experiențele.

2. În toate cazurile experimentate, timpul de ciocnire variază foarte puțin cu distanța dintre ciocane și cu amplitudinea forței perturbatoare.

3. Determinarea forței P_{max} este importantă, deoarece cu ajutorul ei se poate determina starea de tensiune în elementele vibropercutorului sau acestea se pot verifica din punct de vedere al rezistenței la șocuri.

4. Studiul ciocnirii pentru viteze mai mari decît cele expuse la început necesită considerarea proprietăților elastoplastice ale materialelor. În unele cazuri se poate presupune că la ciocniri repetate deformațiile plastice nu se mai produc dacă forța de contact nu depășește valoarea maximă atinsă la prima ciocnire [2].

5. Menționăm, în fine, posibilitățile de tratare teoretică a schemelor matematice obținute, folosind aparatul de investigație științifică a sistemelor oscilatoare neliniare, dezvoltat de autori în [15] — [19].

Primită la redacție la 4 octombrie 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. А. Н. Динник, *Удар и сжатие упругих тел.* Избр. труды, т. I, Киев, Изд. АН УССР, 1952.
2. A. D. Ponomariev, V. L. Biderman, K. K. Liharev, V. M. Makușin, N. N. Malinin, V. L. Feodosiev, *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. III, București, Edit. tehnică, 1964.
3. Я. М. Раскин, *К вопросу о коэффициенте восстановления скорости при ударе реальных тел*, Изв. высш. учеб. заведений, Машиностроение, 2 (1961).
4. В. В. Багреев, *Определение максимального значения силы удара по системе с одной степенью свободы при учете местных деформаций.* Вопросы прикладной механики, Тр. Моск. ин-та инж. ж-д транспорта, 193 (1964).
5. Gh. Silaș, D. Mangeron, L. Brîndeu, *Metodă de aproximare poligonală pentru sistemele cu caracteristică neliniară*, Bul. Inst. politehn., Iași, s.n., XII, (XVII), 1—2 (1966).
6. L. Hamburger, G. H. Buzdugan, *Teoria vibrațiilor și aplicațiilor ei în constr. mașinilor*, București, Edit. tehnică, 1958.
7. С. А. Цаплин, Вибрационные механизмы, Автотрансиздат, 1953.
8. Б. М. Малышев, *Измерение продолжительности удара*, Вестник Московского университета, 5, (1952).
9. Г. С. Батуев, А. А. Федосов, А. К. Ефремов, *Соударение массивных тел при упруго-пластических деформациях в зоне контакта.* Расчеты на прочность. Машиностроение, Сб. статей, вып. 10.
10. N. P. Vinh Toung, P. Sorin, *Sur l'extension de la théorie unidimensionnelle de Hertz à la déformation plastico-élastique au choc d'un métal par un mobile dur à bout sphérique.* Comptes Rendus, Acad. Sci., 19 (1962).
11. В. В. Багреев, *Упруго-пластический удар массивных тел.* Вопросы прикладной механики, Тр. Моск. инст. инж. ж.-д. трансп., 193 (1964).
12. Н. Н. Холмогоров, *Соударение двух тел, прикрепленных к неподвижным опорам упругими связями.* Труды Рост. инж. стр. инст., вып. 23 (1961).

13. Н. Н. Холмогоров, *О соударении двух несвободных тел при наличии сил вязкого трения*. Труды Рост. инж. стр. инст., 19 (1961).
14. В. А. Лазарян, Л. А. Манашкин, *Про амортизацию удару*. Прикладная механика, X, *4* (1964).
15. D. Mangeron, *Mecanica vibraţiilor*, în D. Mangeron, Z. Gabos, I. Stan, „Fundamentele mecanicii", Bucureşti, Edit. Academiei R.P.R., 1962.
16. D. Mangeron, *Neue graphische-analytische Methoden zum Studium der nichtlinearen Schwingungen*, Abh. DAW, Berlin, Kl. Math., Phys., Techn., *1*, *76—90* (1965).
17. D. Mangeron, R. Chaléat, *Approximations d'ordre supérieur dans l'étude des mouvements perturbés des oscillateurs*, Rev. roum. sci. techn. — Méc. appl., **10**, *4*, 791—825 (1965).
18. D. Mangeron, R. Chaléat, Gh. Silaş, *Période des petites oscillations en fonction de leur amplitude*, Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **XIII (XVII)**, *3—4* (1967).
19. D. Mangeron, R. Chaléat, *Higher Order Approximations in the study of the disturbed motion of oscillators and general theory of synchronization*, International Congress of Mathematicians, Moscow, 1966, Abstracts, *12*, Appl. Math. a. Math. Phys., p. 14

CONSIDERAȚII ASUPRA UNUI PROCEDEU NOU DE ÎNCERCARE LA FORFECARE PURĂ A BETONULUI [1])

de N. IOSIPESCU
I. N. C. E. R. C.

539.3

Literatura de specialitate arată că nici unul dintre procedeele actuale de încercare la forfecare a betonului nu corespunde unei soluții juste a acestei probleme. Cu ajutorul unor cercetări fotoelastice originale, autorul a stabilit soluția obținerii unei solicitări de forfecare pură într-o secțiune a unei epruvete, cu valori maxime și uniform distribuite ale tensiunilor tangențiale de pe acea secțiune.
Printr-o armare potrivită separată a celor două jumătăți ale epruvetei, situate de o parte și de alta a unei secțiuni, s-au putut evita ruperile nepotrivite ale ei la eforturi de întindere, constrîngînd-o la ruperea în secțiunea de forfecare pură și numai la acțiunea eforturilor tangențiale limită de rezistență la forfecare pură a betonului.

Se cunoaște din literatura tehnică de specialitate că toate încercările mecanice de rezistență ale betonului au un caracter pur convențional, datorită faptului că acest material — eterogen și anizotrop nu numai în microstructura, ci și în macrostructura lui — are proprietăți neobișnuit de diferite la rupere pentru diferitele feluri de solicitare, comparativ cu alte materiale de construcție mult mai omogene și mai izotrope, cum sînt de exemplu metalele. Raporturile disproporționate dintre diferitele valori ale rezistențelor de rupere ale betonului la compresiune ($\sigma_{rc} = R_c$), la întindere ($\sigma_{rt} = R_t$) și la forfecare ($\tau_r = R_f$), considerate pînă în prezent — pe baza procedeelor existente de încercare de pînă acum — în proporțiile de aproximativ $R_c : R_t : R_f = 10 : 1 : 2$ (valabile mai ales pentru mărcile inferioare de betoane), fac ca ruperile betonului să nu se supună unor legi simple. Slaba rezistență la fisurare a betonului supus la întindere a făcut ca numai sub forma de beton armat să poate fi folosit acest

[1]) Publicată în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **12**, *3*, 1967.

material în elemente de construcţii supuse la solicitări de întindere şi de încovoiere.

Această lipsă de precizie în stabilirea caracteristicilor mecanice ale betonului provine însă şi din cauza că procedeele existente de încercare la compresiune pe cuburi sînt cu totul relative, iar cele de încercare la forfecare, realizate prin ruperea unor epruvete din beton sub acţiunea unor fălci de tăiere sau prin alte procedee cunoscute care au fost considerate pînă în prezent drept încercări de „forfecare", nu sînt decît cu totul convenţionale. Această anomalie rezultă din toate tratatele şi lucrările de specialitate din domeniul teoriei betonului, cum sînt, de exemplu, acelea ale lui Stolearov [1], L'Hermite [2], Nicolau [3] etc., cum şi din lucrarea *Comentarii STAS asupra betonului şi betonului armat* [4] etc., în care se arată în mod categoric că „stabilirea directă a rezistenţei betonului la forfecare pură nu este posibilă".

În ceea ce priveşte încercările la forfecare pură ale betonului, toate procedeele folosite pînă în prezent nu corespund nici pe departe scopului urmărit, după cum arată autorii sus-citaţi, şi în special Stolearov [1], care descrie pe larg aproape toate procedeele existente. Acest fapt a fost dezvoltat şi în unele dintre lucrările publicate anterior de către autorul noului procedeu propus aici, şi anume în primul rînd în lucrarea publicată în colaborare cu I. Făcăoaru [5], cum şi în alte lucrări mai recente care vor fi citate mai departe, în care se examinează principial şi experimental unele dintre procedeele de forfecare existente şi aplicate pentru diferite materiale, printre care şi betonul. Nu vom reveni aici decît asupra aspectelor mai importante ale acestor chestiuni, tratate mai pe larg în acele lucrări, pentru a ajunge astfel la justificarea teoretică şi experimentală a noului procedeu de încercare la forfecare pură propus şi experimentat în cadrul lucrării de faţă.

Prin încercarea la forfecare pură trebuie să se înţeleagă, în mod principial, aceea la care ruperea epruvetei ajunge să se producă numai sub acţiunea unor eforturi tangenţiale pure (τ), dezvoltate în secţiunea de rupere, deci fără eforturi normale (σ) de întindere sau de compresiune, şi, pe cît posibil , cu o repartiţie uniformă a eforturilor tangenţiale pure (τ) pe toată suprafaţa acelei secţiuni, ceea ce nu este admisibil de presupus că se realizează pentru nici unul dintre procedeele existente. Astfel, unele încercări pe epruvete cilindrice supuse la torsiune, folosite anterior în acest scop (fig. 1), nu au dat rezultate, deoarece în acest caz ruperile betonului se produceau întotdeauna sub formă elicoidală, prin acţiunea eforturilor normale principale de întindere σ_1 din direcţii înclinate la 45° şi nu sub acţiunea eforturilor tangenţiale τ_{max} din secţiunea transversală.

Un alt procedeu de încercare la forfecare a betonului, preconizat de către Thullie şi mult folosit de către Mörsch [6], cu epruveta de forma unei grinzi cu tălpi paralele independente, armate şi legate între ele prin montanţi scurţi din beton simplu (fig. 2) care se rup la solicitarea de încovoiere a epruvetei, sub acţiunea lunecării longitudinale, nu dă, de asemenea, rezultate concludente. Aceasta din cauza perturbaţiilor produse de către acţiunea forţei concentrate de solicitare şi a reacţiilor reazemelor, care fac ca montanţii să nu fie solicitaţi la forfecare pură şi nici să nu aibă o repartiţie uniformă a eforturilor tangenţiale pe secţiunea de rupere, ceea ce s-a putut uşor constata printr-o cercetare fotoelastică

sumară a acestui tip de epruvetă, ale cărei izocromatice sînt cele din figura 3.

Procedeele de încercare la solicitarea produsă sub acțiunea muchiilor vii ale unor piese de tăiere, în secțiunea simplă sau dublă, dau naștere la concentrări puternice de tensiuni normale în dreptul muchiilor vii, după cum s-a arătat și în articolele anterioare [7] și [8]. În cazul unora dintre ele, cum este aceea din figura 4, nici nu se produc măcar tensiuni tangențiale (τ) în secțiunea respectivă, din motive de simetrie, studiul fotoelastic indicînd prin izocromaticele produse (fig. 5*a*) o stare analogă cu aceea a unei compresiuni concentrate bilaterale (fig. 5 *b*), cum și cu aceea a discului circular comprimat diametral. Pentru cazul din figura 6 ia naștere și o solicitare de încovoiere, după cum rezultă și din cercetările fotoelastice întreprinse anterior de către Seybold [9], cum și din cele ale autorului acestei lucrări, care au dat izocromaticele din figura 7.

Formele de epruvete cu unghiuri intrînde la capetele secțiunii sau ale secțiunilor de rupere, cum sînt cele din figurile 8 și 9 — ultima dintre acestea constituind procedeul lui Gvozdev (vezi [1]) — dau naștere de asemenea la concentrări puternice de tensiuni normale în dreptul acelor vîrfuri de unghiuri intrînde. Ele duc la repartiții foarte complexe și variate de tensiuni pe secțiunea de rupere, astfel că nu poate fi vorba nici aici de încercări de forfecare pură în sensul principial al cuvîntului și al noțiunii respective.

Acest lucru a rezultat în mod foarte precis din cercetarea fotoelastică a unei epruvete de formă asemănătoare celei din figura 10, constituind obiectul studiului publicat anterior [5], pe care sînt trasate izocromaticele obținute în fotografia din figura 11 și pentru care diagramele de repartiție ale componentelor σ_x, σ_y și τ_{xy} în lungul secțiunii de rupere, stabilite prin metoda diferenței tensiunilor tangențiale a lui Frocht [10], sînt cele din figura 12. Se constată influența preponderentă a eforturilor normale σ_x și σ_y, cu concentrările importante ale lor către capetele secțiunii, din dreptul unghiurilor intrînde, față de aceea a eforturilor tangențiale τ_{xy}, care joacă un rol secundar în producerea ruperii epruvetei; astfel că nici această epruvetă, ca și aceea de formă analogă a lui Gvozdev, nu a putut da rezultate exacte pentru o forfecare pură a betonului, deși ruperile la încercări se produceau în mod destul de apropiat de secțiunea de „așazisă forfecare".

După cum s-a stabilit în studiile anterioare publicate [7] și [8], asemenea încercări de forfecare pură se pot obține totuși prin solicitarea de încovoiere cu variația liniară a momentului încovoietor ($M = T.x$) (fig. 13) și deci cu o forță tăietoare constantă în lungul epruvetei ($T =$ = const), cum și cu punct de moment nul ($M = 0$) la mijlocul lungimii ei. În dreptul acelui punct de inflexiune O acționează deci numai forța tăietoare simplă (T), producînd astfel o stare de forfecare pură în acea secțiune, dată numai de către eforturile tangențiale corespunzătoare ($\tau_{xy} \neq 0$). Este de semnalat lipsa oricărui efort normal ($\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$), care nu se poate produce în secțiunea respectivă din cauza valorii nule a momentului încovoietor, cum și a lipsei oricărei alte solicitări transversale din dreptul acelei secțiuni.

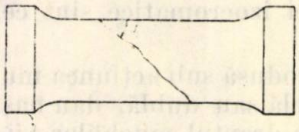


Fig. 1

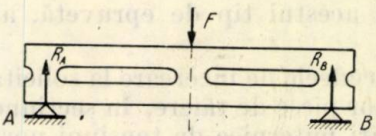


Fig. 2

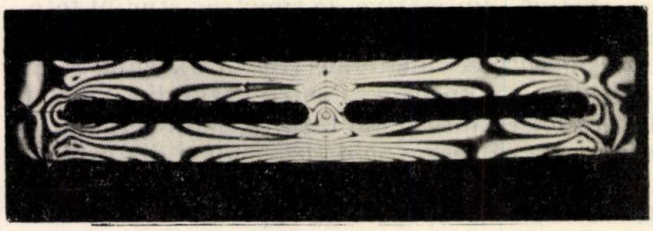


Fig. 3

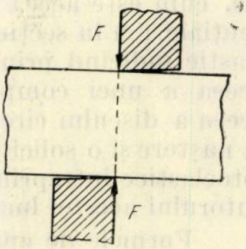


Fig. 4

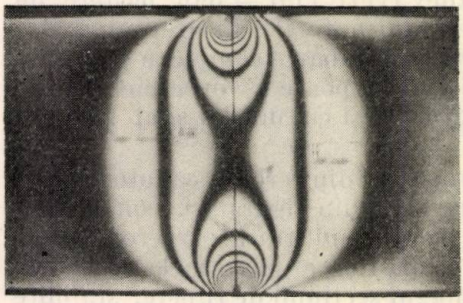


Fig. 5a

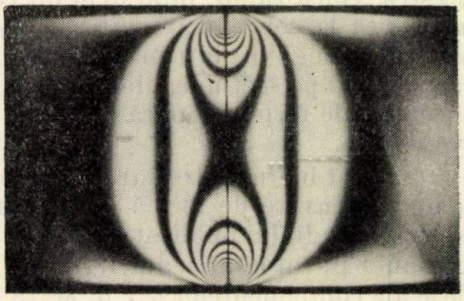


Fig. 5b

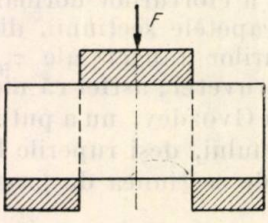


Fig. 6

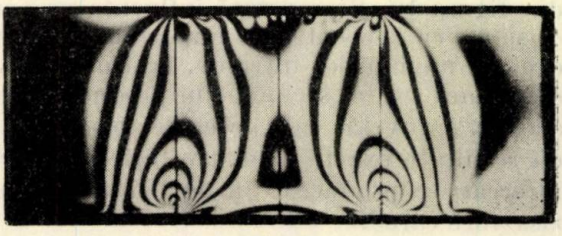


Fig. 7

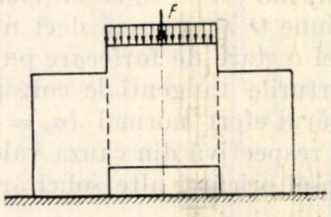


Fig. 8

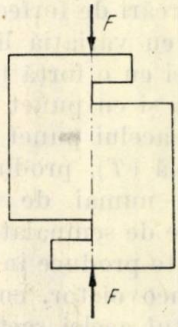


Fig. 9

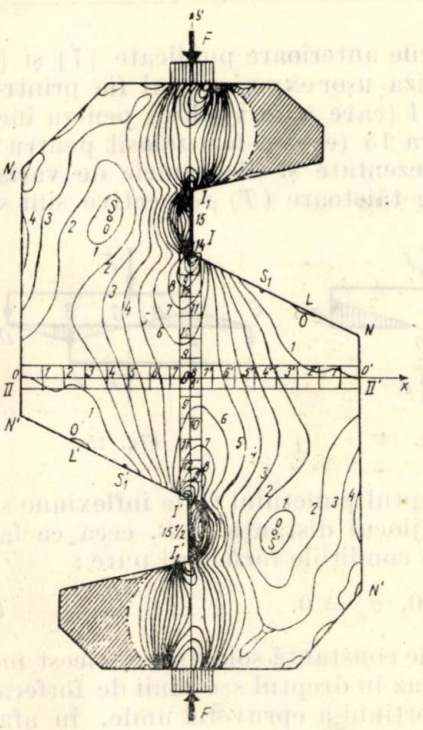


Fig. 10

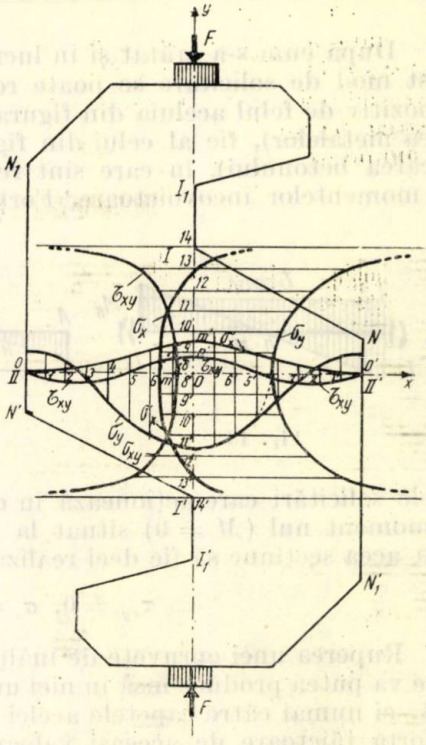


Fig. 12

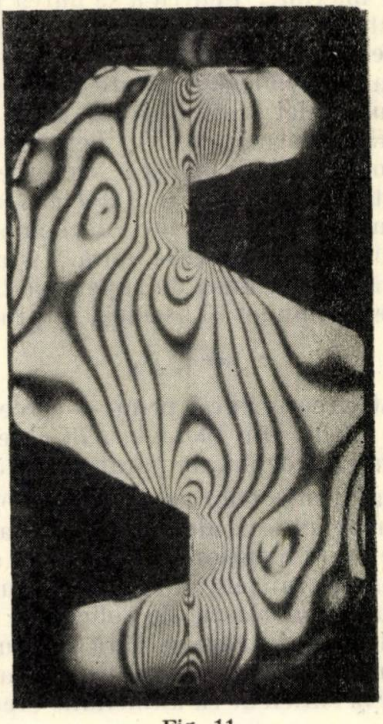


Fig. 11

După cum s-a arătat și în lucrările anterioare publicate [7] și [8], acest mod de solicitare se poate realiza ușor experimental fie printr-un dispozitiv de felul aceluia din figura 14 (care a fost folosit pentru încercarea metalelor), fie al celui din figura 15 (care a fost folosit pentru încercarea betonului), în care sînt reprezentate și diagramele de variație ale momentelor încovoietoare. Forțele tăietoare (T) respective sînt sin-

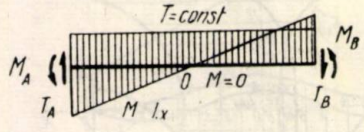


Fig. 13

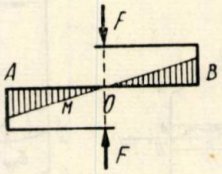


Fig. 14

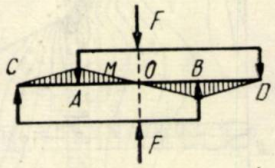


Fig. 15

gurele solicitări care acționează în dreptul punctului O de inflexiune sau de moment nul ($M = 0$) situat la mijlocul distanței AB, ceea ce face ca în acea secțiune să fie deci realizate condițiile forfecării pure :

$$\tau_{xy} \neq 0, \quad \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0. \tag{1}$$

Ruperea unei epruvete de înălțime constantă solicitate în acest mod nu se va putea produce însă în nici un caz în dreptul secțiunii de forfecare pură, ci numai către capetele acelei porțiuni a epruvetei unde, în afară de forța tăietoare de aceeași valoare, acționează în plus și momentele încovoietoare de valori maxime. Pentru a se putea produce ruperea epruvetei solicitate în acest mod în dreptul acelui punct de moment nul și numai la acțiunea forței tăietoare respective, s-a stabilit, pe baza considerațiilor din rezistența materialelor, că este necesar să se prevadă o slăbire a piesei în dreptul acelei secțiuni, ceea ce se poate realiza cu ajutorul a două crestături în formă de V ; pentru ca tensiunile tangențiale (τ_{xy}) să aibă valori maxime în acea secțiune, conform considerațiilor din teoria elasticității, este necesar ca acele crestături să fie alcătuite în mod simetric, de un unghi la fund la 90°, deci cu laturile înclinate la 45° (fig. 16) față de secțiunea de forfecare pură. În acest caz, izostaticele sînt înclinate la 45° față de secțiunea de rupere pe toată înălțimea acelei secțiuni, astfel că în fiecare punct al acesteia se produce condiția

$$\tau_{xy} = \tau_{\max}, \tag{2}$$

ceea ce a fost confirmat experimental printr-o cercetare fotoelastică calitativă efectuată pe un model din plexiglas, în care caz în secțiunea de forfecare pură s-a produs o izoclină de parametru 45°.

În sfîrșit, pe baza rezultatelor cercetărilor fotoelastice cantitative efectuate pe modele din fenol-formaldehidă și din araldit, conform celor expuse în lucrările anterioare menționate [7] și [8], s-a stabilit că, pentru ca repartiția acelor tensiuni tangențiale τ_{xy} să fie uniformă pe secțiunea de forfecare pură, în domeniul elastic de solicitare, deci în continuare și în cel plastic, mergînd pînă la rupere, fără nici un fel de maxime de valori sau de concentrări de tensiuni care să ducă la amorsarea unor ruperi premature, este necesar și suficient ca adîncimile crestăturilor să fie egale

cu un sfert din înălțimea totală a epruvetei ($a = H/4$) (fig. 17). În acest caz, înălțimea minimă dintre vîrfurile de unghi ale crestăturilor epruvetei este egală cu jumătate din înălțimea totală a secțiunii ($h = H/2$), în care caz se realizează în plus și condiția impusă, rezultată din prezența unei

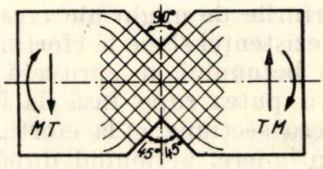


Fig. 16

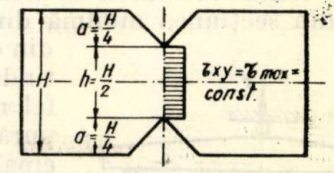


Fig. 17

izocromatice de număr de ordine maxim și de formă continuă între fundurile acelor crestături (fig. 18), ceea ce corespunde condiției

$$\tau_{xy} = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \text{const} \tag{3}$$

pe toată înălțimea secțiunii de forfecare pură, conform legii de bază a birefringenței accidentale. Astfel că, prin împărțirea forței tăietoare simple

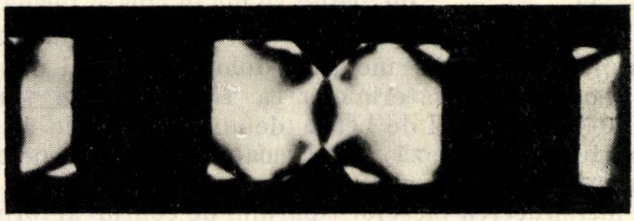


Fig. 18

din momentul ruperii, prin suprafața secțiunii nete minime a epruvetei, se obține valoarea nominală a lui τ_r de rupere și nu o medie oarecare, ca la alte procedee, valabile cel mult în domeniul elastic și nicidecum în cel plastic sau la stadiul de rupere.

Dispozitivul de solicitare folosit pentru cazul încercării epruvetelor din beton, în vederea realizării încovoierii cu moment încovoietor de variație liniară și cu un punct de moment nul situat la mijlocul lungimii epruvetei, este de felul schemei din figura 15, fiind realizat prin două piese de solicitare rezistente, confecționate din oțel de matrițe, de o înălțime redusă, dar de o lățime egală cu aceea a epruvetei. Aceste piese sînt așezate la încercare în poziții antisimetrice, fiind aplicate ca în figura 19 asupra epruvetei, introducîndu-se astfel cu totul între platourile presei de încercare. În acest caz, valoarea forței tăietoare de rupere T_r din dreptul secțiunii de forfecare pură din momentul ruperii, în funcție de forța F de presiune a presei, este

$$T_r = F_1 - F_2 = \frac{F \cdot a}{l} - \frac{F \cdot b}{l} = \frac{F \cdot (a - b)}{l}, \tag{4}$$

a cărei împărțire prin secțiunea netă de rupere a epruvetei dă valoarea nominală a rezistenței de forfecare pură a betonului și nu o medie oarecare, de o valabilitate dubioasă, așa cum se obține în toate celelalte procedee de încercare existente.

Cu toată solicitarea de forfecare pură dată de către forța tăietoare simplă din secțiunea minimă dintre vîrfurile de unghi ale crestăturilor, din cauza rezistenței slabe la eforturile de întindere ale betonului, o epruvetă de acest fel nu se va putea rupe însă la forfecarea pură din acea secțiune, ci la eforturile principale de întindere, acționînd după direcții înclinate la 45°. Pentru a constrînge materialul să se rupă totuși numai la eforturile de forfecare pură τ_{xy} din secțiunea minimă, trebuie luate unele precauții speciale, care în cazul betonului sînt posibile prin armarea separată a celor două jumătăți ale epruvetei într-un mod adecvat (fig. 20), făcînd ca betonul simplu să existe totuși în dreptul și în apropierea secțiunii de forfecare pură.

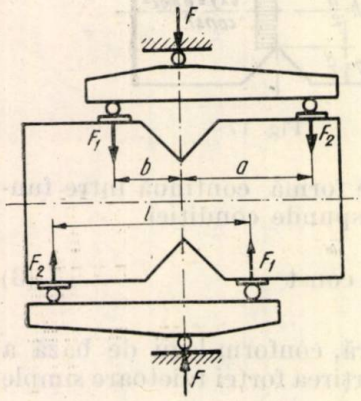


Fig. 19

Confecționarea și turnarea epruvetelor de beton se fac în tipare formate din piesele speciale de forma celor din figura 21, așezate în interiorul unor cutii metalice, folosite în mod obișnuit în laboratoarele de încercare a materialelor ca tipare pentru turnarea simultană a cîte 10 cuburi mici de beton de dimensiuni de $10 \times 10 \times 10$ cm. Această operație se realizează prin scoaterea tuturor pereților despărțitori din interior, atît a celor transversali, cît și a celui longitudinal, cum și prin introducerea pieselor tiparului de contur al formei epruvetei, rigidizarea tiparului în forma lui dreptunghiulară obținîndu-se cu ajutorul a două cuburi de beton de $10 \times 10 \times 10$ cm introduse în spațiul ultimelor două locuri de turnare rămase libere din cutia tiparului, după cum se vede în figură.

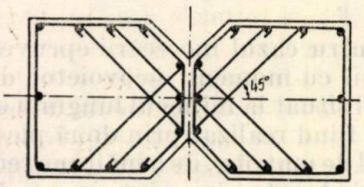


Fig. 20

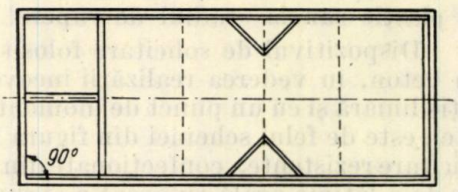


Fig. 21

Armarea epruvetelor se realizează cu cîte două frete formate din cîte 5 spire (sau etrieri), ca în figura 20, alcătuite din sîrmă groasă cu Ø 4 mm, executate și verificate cu ajutorul unui dispozitiv format dintr-o placă metalică (fig. 22) prevăzută cu fiare rotunde cu Ø 10 mm, fixate în poziții verticale în punctele de schimbare de direcție a spirelor, peste care se îndoaie sîrma cu Ø 4 mm care va alcătui freta, formîndu-se astfel

cele cinci spire necesare (sau etrierii respectivi). Freta se scoate apoi din acest dispozitiv, rărindu-se spirele la distanțe de 1—2—2—2—2—1 cm, la care se mențin cu ajutorul unor distanțiere metalice, prinzîndu-se apoi cu sîrmă subțire de fiarele de repartiție cu Ø 5 mm, de lungimi de cîte 10 cm, așezate în interiorul unghiurilor colțurilor de schimbare de direcție ale sîrmelor fretei, cum și în alte puncte intermediare, după cum se vede în figura 23. S-a constatat că alcătuirea fretelor din etrieri separați, legați de fiarele de repartiție, dă rezultate foarte bune, fiind mai simplu de executat.

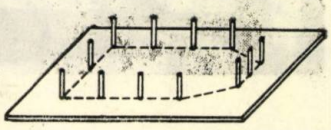


Fig. 22

Se montează totodată și barele înclinate la 45°, alcătuite din sîrmă de aceeași grosime, servind pentru împiedicarea ruperii epruvetelor la eforturile principale de întindere din acele direcții. Cele două fretе ale fiecărei epruvete, confecționate în modul indicat mai sus, rigidizate prin legarea sau sudarea spirelor și a fiarelor înclinate la 45° de fiarele de repartiție la încrucișările lor (vezi fig. 20), se introduc în cele două jumătăți ale cutiei de tipar. Se toarnă apoi betonul în formă și se vibrează pe o masă de vibrare, decofrîndu-se după 24 de ore și păstrîndu-se conform normelor oficiale pentru încercările pe cuburi (STAS 1295/62).

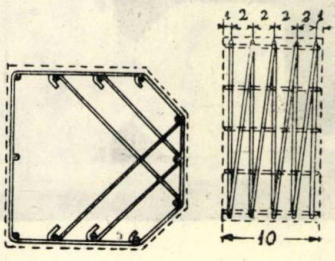
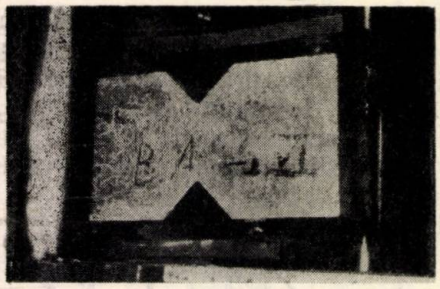


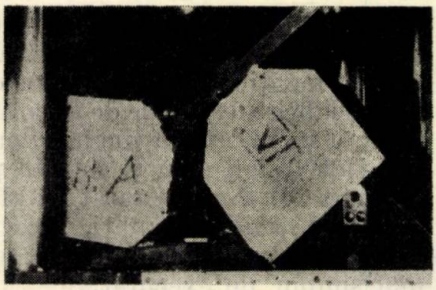
Fig. 23

După o serie de încercări preliminare, făcute la INCERC în 1960 pe epruvete fără armături și cu un alt tip de dispozitiv de solicitare, care a fost părăsit ulterior, în care caz ruperile s-au produs după direcții înclinate la 45°, la întindere, s-au făcut tot atunci diferite încercări preliminare reușite cu noul dispozitiv de solicitare, pe epruvete prevăzute cu armături. Primele încercări de experimentare a procedeului la INCERC au fost executate atunci numai cu caracter calitativ, pentru a se constata modul corect de producere a ruperii betonului în secțiunea de forfecare pură, fiind realizate cu ajutorul procedeului de încercare arătat și pe epruvete confecționate în modul descris, cu armături formate din 5 × Ø 4 mm, dar neprevăzute cu toate fiarele înclinate la 45°.

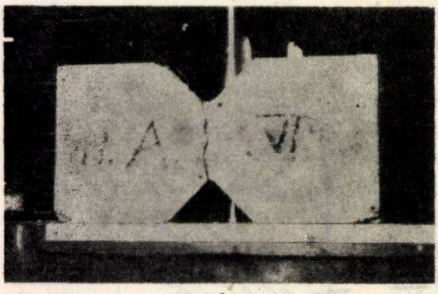
Fotografiile din figura 24 *a*, *b*, *c*, *d* și *e* arată diferitele etape ale încercării, și anume : a) epruveta cu piesele dispozitivului de solicitare așezate între platourile presei ; b) epruveta cu pozițiile celor două jumătăți rupte imediat după încercare ; c) și d) vederea de profil a formei rupturii după alăturarea celor două jumătăți, văzută de pe o față laterală și de pe cealaltă ; e) vedere frontală a suprafețelor secțiunii de rupere de pe cele două fețe ale rupturii, ale celor două jumătăți de epruvetă. Se constată de pe fotografiile din figura 24 *d* formarea unor fisuri la 45°, pornind din colțurile crestăturilor, produse din cauza lipsei fiarelor înclinate la 45°. La încercările ulterioare făcute la INCERC, prin aplicarea procedeului la o cercetare făcută asupra unor betoane ușoare cu agregate minerale, prevăzîndu-se și fiarele la 45° ale armăturilor, s-a evitat producerea acelor



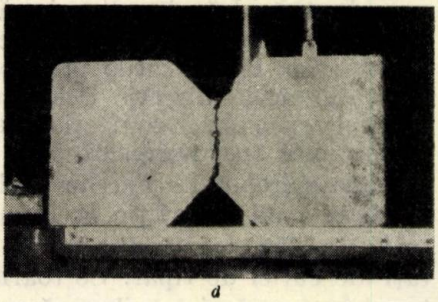
a



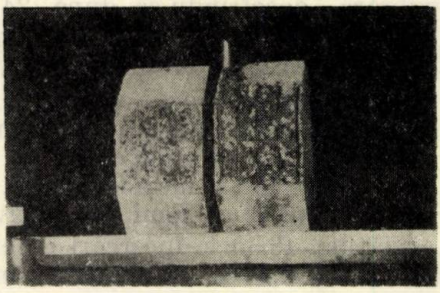
b



c



d



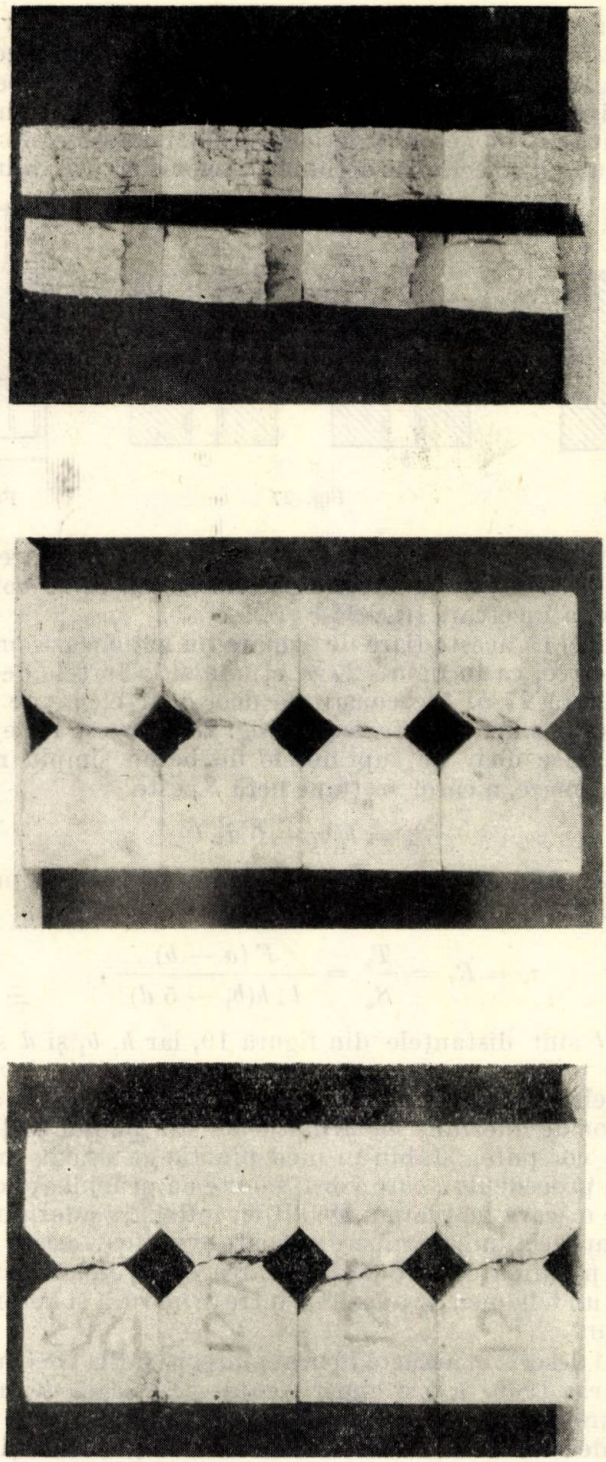
e

Fig. 24

fisuri, după cum se poate constata din fotografiile din figura 25 *a* și *b*, ruperile producîndu-se ca în figura 25 *c*.

Deși la început s-a considerat că ruperea betonului la forfecare se produce în trepte, se poate constata din aceste fotografii, în special din cele din figura 24 *c* și *d*, că acest lucru nu este just, constituind numai o primă apreciere eronată făcută de către autor sub influența principiului lui Mörsch [6]. În realitate, ruperea se produce în mod categoric la solicitarea de forfecare pură și profilul ruperii este doar neregulat, ceea ce era natural să se producă la un material eterogen și anizotrop cum este betonul, nu numai în microstructura, ci chiar în macrostructura lui, ruperea producîndu-se totuși numai la acțiunea eforturilor tangențiale din acea secțiune.

Acest fapt se constată tot atît de bine și în figura 24 *e*, a vederii frontale a suprafețelor de rupere, în care se observă ușor că ruperea se produce chiar în planul armăturilor verticale. Acest lucru era natural să se întîmple, deoarece, prin existența în apropiere de secțiunea minimă dintre vîrfurile crestăturilor a celor cinci fiare paralele avînd diametrul de 4 mm, deci o lățime totală de 20 mm, prezența acestora constituie o slăbire cu 20% a lățimii secțiunii betonului, deci a suprafeței secțiunii de forfecare pură, față de lățimea totală a epruvetei, care este de 100 mm.



a b c

Fig. 25

Aceste fiare de garanție, folosite în contra ruperii epruvetei în forme defectuoase, găsindu-se așezate în apropiere de planul unei secțiuni de forfecare pură (fig. 26), nu preiau eforturi de întindere de la beton, în felul armăturilor obișnuite, prin forțele de adeziune respective, ca în figura 27 *a*. Ele se găsesc situate în betonul acționat numai de către eforturi tangențiale, exact în lungul direcției de acțiune a acelor eforturi, ca în figura 27 *b*,

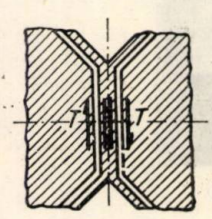


Fig. 26

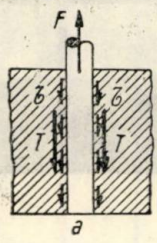
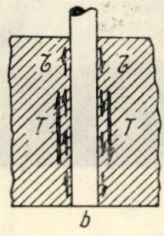


Fig. 27



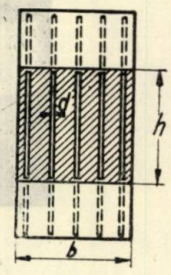


Fig. 28

în care caz eforturile tangențiale τ date de către forța tăietoare tind doar să îndepărteze și să dezlipească betonul de fier, ceea ce se constată că se produce efectiv la încercare (fig. 24 *e* și 25 *c*).

Rezultă deci că aceste fiare de armare nu acționează prin forțele de adeziune respective, ca în figura 27 *a*, ci numai la forțele de dezlipire de beton, ca în figura 27 *b*. Ele constituie deci doar elemente de slăbire a secțiunii betonului solicitat la forfecare (fig. 28), care se rupe la eforturile tangențiale produse doar pe suprafețele de beton simplu rămase între aceste fiare de armare, a căror secțiune netă S_n este

$$S_n = h(b_1 - 5\,d). \tag{5}$$

În final rezultă astfel că rezistența de rupere la forfecare pură, dată de către forța tăietoare maximă de rupere T_r, este

$$\tau_r = R_f = \frac{T_r}{S_n} = \frac{F\,(a - b)}{l\,.\,h(b_1 - 5\,d)}, \tag{6}$$

în care a, b și l sînt distanțele din figura 19, iar h, b_1 și d sînt cele din figura 28.

Eventualele mici influențe ale prezenței acelor fiare de armare, prin acțiunea forțelor de adeziune ale armăturilor din planul secțiunii de forfecare pură, se vor putea stabili în mod practic cu ocazia unor cercetări speciale asupra procedeului, care vor fi făcute cu prilejul aplicării metodei de încercare pe o scară mai largă. De altfel, influența adeziunii fiarelor de armare din planul secțiunii de rupere se poate evita foarte ușor prin ungerea acelor fiare cu parafină înainte de betonarea epruvetelor, astfel ca să nu se producă nici un fenomen de adeziune între armătură și beton în regiunea de forfecare pură.

Procedeul descris în această lucrare, înregistrat la OSI sub nr. 48 905 din 25 Octombrie 1960, a fost experimentat pe o scară destul de întinsă și se află în curs de aplicare pentru diferite cercetări, tipul de epruvetă și dispozitivul de solicitare propuse fiind cele din figurile 29 și 30. Încercă-

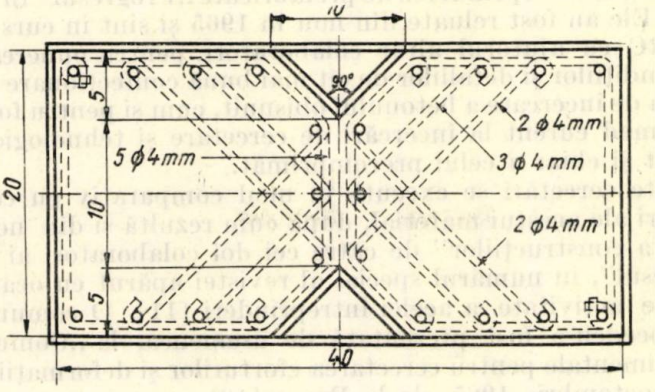

10
90°
5
5 ϕ4mm
2 ϕ4mm
3 ϕ4mm
2 ϕ4mm
20
10
5
40

Fig. 29

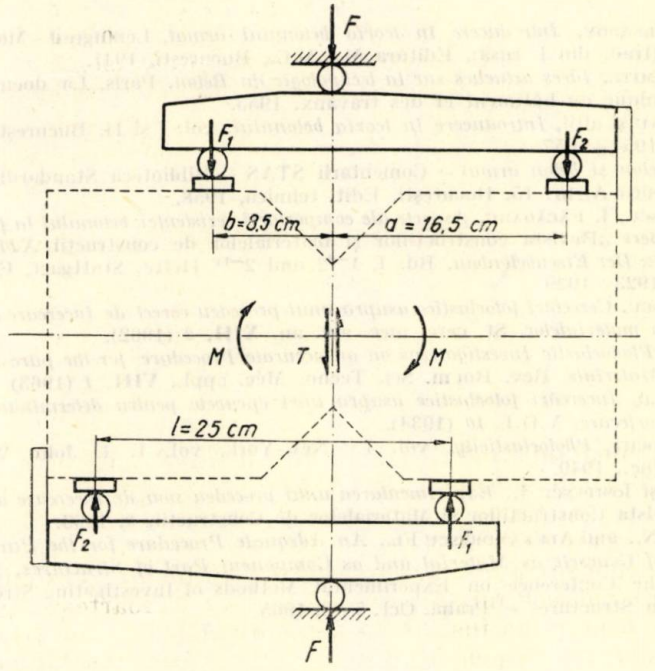

F
F1
F2
b=3,5 cm
a = 16,5 cm
M
T
M
l=25 cm
F2
F1
F

Fig. 30

rile de experimentare au fost executate la început la INCERC în 1960 și continuate apoi cu ajutorul unor noi colaboratori (ing. V. Ciufu și ing. I. Iosipescu), la Întreprinderea de prefabricate „Progresul" în 1963 cu bune rezultate. Ele au fost reluate din nou în 1965 și sînt în curs de executare la INCERC cu ajutorul altor colaboratori, pentru punerea la punct a tuturor condițiilor și detaliilor de cît mai bună confecționare a epruvetelor și a acelora de încercare a betonului obișnuit, cum și pentru folosirea procedeului în mod curent la încercări de cercetare și tehnologie a betonului prefabricat și chiar a celui precomprimat.

Aceste cercetări se execută în mod comparativ cu celelalte feluri de încercări ale acestui material, după cum rezultă și din nota publicată în „Revista construcțiilor" de către cei doi colaboratori ai autorului de la „Progresul", în numărul special al revistei apărut cu ocazia împlinirii a 10 ani de activitate a acelei întreprinderi [11]. O comunicare asupra acestui procedeu a fost prezentată de asemenea, la „Conferința de metode experimentale pentru cercetarea eforturilor și deformațiilor din structuri", din octombrie 1965, de la Praga [12].

Primit la redacție la 12 august 1965

BIBLIOGRAFIE

1. I. V. Stolearov, *Introducere în teoria betonului armat*, Leningrad—Moscova, E.S.L.C. (trad. din l. rusă), Editura M.C.M.C., București, 1941.
2. R. L'Hermite, *Idées actuelles sur la technologie du Béton*, Paris, La documentation technique du bâtiment et des travaux, 1955.
3. V. Nicolau și alții, *Introducere în teoria betonului*, vol. I și II, București, Edit. tehnică, 1954—1957.
4. * * * *Beton și beton armat* — Comentarii STAS — Biblioteca Standardizării, Seria tehnică A, nr. 15, București, Edit. tehnică, 1958.
5. N. Iosipescu, I. Făcăoaru, *Aspecte ale comportării rezistenței betonului la forfecare și întindere* „Revista construcțiilor și materialelor de construcții *XIII*, martie 1959.
6. E. Mörsch, *Der Eisenbetonbau*, Bd. I, 1-te und 2-te Hefte. Stuttgart, Ed. K. Witwer, 1923—1929.
7. N. Iosipescu, *Cercetări fotoelastice asupra unui procedeu corect de încercare la forfecare pură a materialelor*, St. cerc. mec. apl. an. **XIII**, *2* (1962).
8. — *Photoelastic Investigations on an accurate Procedure for the pure Shear Testing of Materials*, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. appl., **VIII**, *1* (1963).
9. B. Seybold, *Încercări fotoelastice asupra unei epruvete pentru determinarea rezistenței la forfecare*, V.D.I. *10* (1934).
10. M. M. Frocht, *Photoelasticity*, vol. I — New-York, vol. 1. I. John Wile and Sons, Inc., 1949.
11. Ciufu V. și Iosipescu I., *Experimentarea unui procedeu nou de încercare a betoanelor*, Revista Construcțiilor și Materialelor de Construcții, *9*, 1963.
12. Iosipescu N., and Alexandrescu Fl., *An Adequate Procedure for the Pure Shear Testing of Concrete as Material and as Component Part of Structures*, Proceedings of the Conference on Experimental Methods of Investigating Stress and Strain in Structures — Praha, Oct. 5—8, 1965.

ASUPRA METODEI RASKIN ŞI BAGRAMOV PENTRU DIMENSIONAREA GARNITURILOR DE PRĂJINI DE POMPARE LA OBOSEALĂ[1])

de D. BODNĂRESCU
Centrul de documentare al industriei chimice şi petroliere

620.17

Se reia teoria Raskin şi Bagramov, publicată în U.R.S.S. în 1955, printr-o generalizare pe *n*-trepte, ceea ce duce la un sistem de coeficienţi de siguranţă constanţi. Se trece apoi la o teorie generală corectată, pornindu-se de la schematizare liniară Smith-Fischer. Prin aceasta se valorifică criteriul Raskin şi Bagramov, care capătă aplicare la sondele în curs de inundare sau cu procent mare de apă sărată.

1. INTRODUCERE

În 1955 Raskin şi Bagramov, în urma unor studii şi experimentări de laborator, au publicat în revista „Nefteanoe hozeaistvo" nr. 9 o lucrare asupra combinării prăjinilor de pompare la oboseală, pornind de la o schematizare liniară atît a eforturilor unitare maxime din trepte cît şi a rezistenţelor admisibile pe o paralelă la bisectoarea axelor. Lucrarea ca atare a primit numeroase critici. Studiul nostru porneşte cu elaborarea unei generalizări a acestei teorii pentru *n*-trepte, ajungîndu-se la un sistem de combinare cu coeficienţi de siguranţă constanţi, ceea ce nu este just. Din această cauză s-a refăcut teoria, pornindu-se de la o schematizare clasică Smith-Fischer şi păstrîndu-se situarea eforturilor unitare maxime din trepte pe o paralelă la bisectoarea axelor, ceea ce duce la o combinaţie cu coeficienţi variabili în şir descrescător de jos în sus, avînd aplicare

[1]) Publicată în Rev. Roum. Sci. Techn. „Mecanique Appliquée", **11**, *6* (1966) (în limba rusă). Prezentată la Conferinţa de mecanică, Bucureşti, septembrie 1965.

pentru sondele în curs de inundare, cu un procent mare de apă sărată sau cu condiții variabile de producere.

În principiu, în metoda Raskin și Bagramov se pleacă de la coeficientul de siguranță la solicitări variabile, definit prin raportul

$$c_\nu = \frac{\sigma_{\nu L}}{\sigma_\nu} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_\nu}, \tag{1}$$

în care σ_{ν_L} este efortul unitar de amplitudine al ciclului-limită aproximativ egal cu σ_{-1}, așa cum a rezultat din încercările experimentale, iar σ_ν efortul unitar de amplitudine al ciclului efectiv din piesă. Ecuația curbei schematizate are forma

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_{-1} = \sigma_R . \tag{2}$$

Valorile $c_\nu = 1{,}5, \ldots, 2$ sînt acoperitoare pentru calculul de dimensionare al garniturii. Curbele construite cu datele experimentale executate de „Giproneftmaș", din care s-a obținut ecuația (2), n-au fost însă verificate și de alte experimentări citate în literatura de specialitate[2]).

În conformitate cu acest citat, diagrama schematizată a rezistențelor la oboseală se prezintă ca în figura 1.

Dacă coeficientul de siguranță la oboseală după Soderberg c este definit prin compararea ciclurilor asimetrice cu același grad de asimetrie, atunci

$$c = \frac{\sigma_{R_i}}{\sigma_{max_i}} = \frac{\sigma_{M_i}}{\sigma_{m_i}}. \tag{3}$$

2. DIAGRAMA SCHEMATIZATĂ A REZISTENȚELOR LA OBOSEALĂ (DUPĂ RASKIN ȘI BAGRAMOV)

Din relațiile (2) și (3) obținem

$$c \cdot \sigma_{max_i} = c \cdot \sigma_{m_i} + \sigma_{-1} \tag{4}$$

sau

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{max_i} - \sigma_{m_i}} . \tag{5}$$

în care (vezi tratatul citat al prof. Gr. Ioachim, nota 2)

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{max_i} &= \frac{1}{s_i}\left[(A+B)\sum_1^i l_i q_i + 2\Phi L\right], \\
\sigma_{min_i} &= \frac{1}{s_i}(A+B)\sum_1^i l_i q_i , \\
\sigma_{m_i} &= \frac{1}{s_i}\left[A\sum_1^i l_i q_i + \Phi L\right], \\
\sigma_{\nu_i} &= \frac{1}{s_i}\left[B\sum_1^i l_i q_i + \Phi L\right],
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

[2]) Citatul este reprodus după prof. ing. Ioachim Grigore, *Extracția țițeiului și gazelor*, București, Edit. tehnică, 1961, p. 284–287.

unde

$$\left.\begin{aligned} A &= b_0 + \frac{1}{2}\,[f(1 - b_0) + m_a \cdot m_d], \\ B &= \frac{1}{2}\,[f(1 + b_0) + m_a + m_d]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

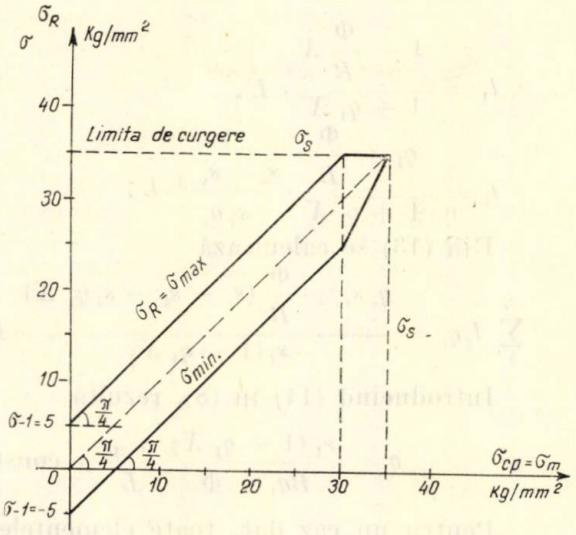


Fig. 1

În (7) b_0 este factorul de plutire după Arhimede, m_a și m_d accelerațiile la cursa ascendentă și respectiv la cursa descendentă,

γ — greutatea specifică a lichidelor de extras,

f — secțiunea brută a pistonului pompei de adîncime.

Din (5) și (6) rezultă expresiile

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{vi}} = \frac{s_i \cdot \sigma_{-1}}{B \sum_1^i l_i q_i + \Phi L}, \tag{8}$$

$$c = \frac{(s_i - s_{i-1})\,\sigma_{-1}}{B \,.\, l_i q_i} = \frac{s_i \sigma_{-1}}{B l_1 q_1 + \Phi L} \tag{9}$$

sau,

$$\frac{B l_i q_i}{s_i - s_{i-1}} = \frac{B l_1 q_1 + \Phi L}{s_1}, \tag{10}$$

din care se obține

$$l_i = \frac{B \,.l_1 q_1 + \Phi L}{B s_1 q_i}\,(s_i - s_{i-1}). \tag{11}$$

Notînd cu

$$X = \sum_{2}^{n} \frac{s_i - s_{i-1}}{s_1 q_i},$$

rezultă

$$l_1 + \sum_{2}^{n} l_i = \frac{B l_1 q_1 + \Phi L}{B}, \tag{12}$$

și deci

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ i = n \\ \uparrow \\ i = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{aligned} l_1 &= \frac{1 - \frac{\Phi}{B} X}{1 + q_1 X} \cdot L, \\ l_i &= \frac{q_1 + \frac{\Phi}{B}}{1 + q_1 X} \cdot \frac{s_i - s_{i-1}}{s_1 q_i} \cdot L. \end{aligned} \tag{13}$$

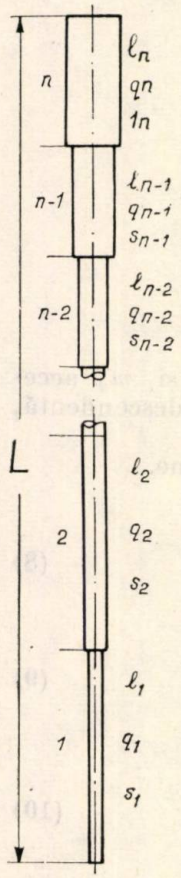


Fig. 2

Din (13) se calculează

$$\sum_{1}^{i} l_i q_i = \frac{q_i s_i + \frac{\Phi}{B}(s_i - s_1 - s_1 q_1 X)}{s_1 (1 + q_1 X)} \cdot L. \tag{14}$$

Introducînd (14) în (8), rezultă

$$c = \frac{s_1 (1 + q_1 X)}{B q_1 + \Phi} \cdot \frac{\sigma_{-1}}{L} = \text{const.} \tag{15}$$

Pentru un caz dat, toate elementele care intră în formulă fiind constante, implicit și c va lua o valoare constantă. Ca atare, ciclurile maxime se plasează pe o dreaptă paralelă cu bisectoarea axelor, situată deasupra acesteia și totodată dedesubtul paralelei-limită, definită prin relația (2), dacă este îndeplinită condiția de rezistență, respectiv c >1 (în cazul cînd condiția de rezistență nu este îndeplinită, atunci $c < 1$, iar dreapta respectivă se plasează deasupra dreptei-limită; implicit, dacă $c=1$, cele două trepte devin identice).

Sub această formă, teoria Raskin-Bagramov este contestată. Partea care nu este unanim admisă [3]) este chiar relația (2).

Dacă pornim de la o schematizare generală de tip Smith, atunci se vede cu ușurință că dreapta-limită pentru rezistențele la oboseală nu are panta 1, ci o valoare subunitară oarecare (în general) K_1. Această dreaptă $\sigma_R = f(\sigma_m)$ trece prin punctele $(\sigma_{-1}; 0)$ și punctul A $(0{,}9\ \sigma_s; 0{,}9\ \sigma_s)$, ultimul găsindu-se pe bisectoarea axelor de coordonate (vezi fig. 3).

Deci, teoria Raskin-Bagramov, pentru a căpăta o valabilitate deplină, trebuie să fie puțin modificată în

[3]) Numai în cazul particular al unor materiale la care rezistența admisibilă are panta 1; în general însă nu este așa.

modul următor : 1) se admite o schematizare clasică oarecare (Smith, Haigh, Virnovski-Oding etc.). În cazul de față vom prefera schematizarea Smith-Fischer, care este cea mai simplă și la care parametrii pentru construirea diagramei se reduc la determinarea în laborator a lui σ_{-1} și σ_s;

2) combinarea prăjinilor se face astfel încît valorile σ_{max} din fiecare treaptă să se plaseze pe o paralelă la bisectoarea axelor, adică pe o dreaptă de pantă egală cu unitatea.

Punctul 1 presupune folosirea relației (2), care, fiind abandonată, se înlocuiește cu relația

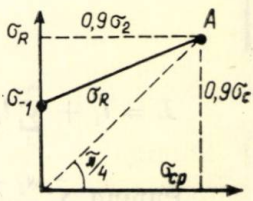


Fig. 3

$$\sigma_{R_i} = K_1 \sigma_{M_i} + \sigma_{-1}. \tag{16}$$

Punctul 2, partea originală a teoriei Raskin-Bagramov, constă în a plasa eforturile unitare maxime σ_{max_i} pe o paralelă la bisectoarea axelor, sub forma generală

$$\sigma_{max_i} = \sigma_{m_i} + \sigma'_{-1}, \tag{17}$$

în care σ'_{-1} reprezintă intersecția acestei drepte cu axa ordonatelor (deocamdată o valoare neprecizată).

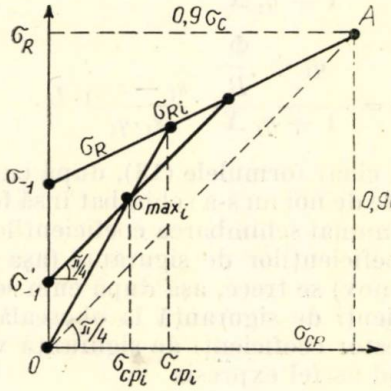


Fig. 4

Folosind relațiile (6) și (17), obținem sistemul

$$\begin{aligned} B \sum_1^i l_i q_i + \Phi L &= \sigma'_{-1} \cdot s_i, \\ B \sum_1^{i-1} l_i q_i + \Phi L &= \sigma'_{-1} \cdot s_{i-1}, \\ &\vdots \\ B l_1 q_1 + \Phi L &= \sigma'_{-1} \cdot s_1, \end{aligned} \tag{18}$$

din care deducem expresiile

$$\begin{cases} i = n \\ \uparrow \\ i = 2 \end{cases} \qquad l_i = \frac{\sigma_{-1}(s_i - s_{i-1})}{B q_i \cdot s_i}, \qquad l_1 = \frac{\sigma'_{-1} \cdot s_i - \Phi L}{B \cdot q_1}, \tag{19}$$

$$L = l_1 + \sum_2^n l_i = \frac{\sigma'_{-1} s_1 - \Phi L}{B \cdot q_1} + \sum_2^n \frac{s_i - s_{i-1}}{s_1 q_i} \cdot \frac{\sigma'_{-1} s_1}{B}. \tag{20}$$

Punînd $\sum_2^n \frac{s_i - s_{i-1}}{s_1 q_i} = X$, rezultă

$$\sigma'_{-1} \cdot s_i (1 + q_1 X) - \Phi L = B q_1 L, \tag{21}$$

din care deducem valoarea necunoscută σ'_{-1}:

$$\sigma'_{-1} = \frac{B q_1 + \Phi}{s_1 (1 + q_1 X)} \cdot L. \tag{22}$$

Substituind σ'_{-1} în (19), obţinem

$$\begin{cases} & l_1 = \dfrac{1 - \dfrac{\Phi}{B} X}{1 + q_1 X} \cdot L, \\ i = n & \\ \uparrow & \\ i = 2 & l_i = \dfrac{q_1 + \dfrac{\Phi}{B}}{1 + q_1 X} \cdot \dfrac{s_i - s_{i-1}}{s_1 \cdot q_i} \cdot L. \end{cases} \tag{23}$$

S-a obţinut astfel chiar formulele (13), după cum era şi de aşteptat. Prin consideraţiile făcute de noi nu s-a schimbat însă fondul teoriei Raskin-Bagramov. S-a produs numai schimbarea coeficienţilor de siguranţă. De la valoarea constantă a coeficienţilor de siguranţă (aşa cum au considerat-o iniţial Raskin şi Bagramov) se trece, aşa după cum se petrece în realitate, la un sistem de coeficienţi de siguranţă la oboseală variabili. Pentru a determina valoarea acestor coeficienţi de siguranţă vom pleca de la relaţiile (3) şi (17), rezultînd astfel expresia

$$c_i \cdot \sigma_{\max_i} = c_i K_1 \sigma_{m_i} + \sigma_{-1}, \tag{24}$$

din care obţinem

$$c_i = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{\max_i} - K_1 \sigma_{m_i}}. \tag{25}$$

Deoarece

$$\sigma_{\max_i} - K_1 \sigma_{m_i} = \frac{[(A + B - K_1 A) \sum_1^n l_i q_i + (2 - K_1) \Phi L]}{s_i}, \tag{26}$$

notînd

$$A + B - K_1 A = j_0 \qquad \text{şi} \qquad \frac{2 - K_1}{j_0} = j_1, \tag{27}$$

rezultă

$$\sigma_{\max_i} - K_1 \sigma_{m_i} = \frac{j_0}{s_i}\left[\sum_1^n l_i q_i + j_0 \Phi L\right]. \tag{28}$$

Din relaţiile (14) şi (28) deducem următoarea expresie

$$\sigma_{\max_i} - K_1 \sigma_{m_i} = \frac{j_0}{s_1(1 + q_1 X)}\left[q_1 + \frac{\Phi}{B} + \frac{s_1}{s_i}\Phi(1 + q_1 X)\left(j_1 - \frac{1}{B}\right)\right]. \tag{29}$$

Atunci, din (25) şi (29) vor rezulta

$$\begin{matrix} i = n \\ \uparrow \\ i = 2 \end{matrix} \qquad c_i = \frac{\sigma_{-1} \cdot s_i (1 + q_1 X)/j_0 L}{q_1 + \dfrac{\Phi}{B} - \Phi \dfrac{s_1}{s_i}(1 + q_1 X)\left(\dfrac{1}{B} - j_1\right)} \tag{30}$$

şi

$$c_1 = \frac{\sigma_{-1} s_1 (1 + q_1 X) / j_0 L}{q_1 + \Phi\left[j_1 (1 + q_1 X) - \dfrac{q_1 X}{B}\right]}. \tag{31}$$

Deoarece

$$j_1 - \frac{1}{B} = \frac{(B - A)(1 - K_1)}{j_0 B} > 0 \qquad (B - A > 0, \quad 1 - K_1 > 0),$$

şirul valorilor c_i este crescător de sus în jos, adică

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_n > 0.$$

Aceasta este condiţionată de o bună dimensionare a prăjinilor, care cere ca în jurul valorilor coeficienţilor de siguranţă să nu existe valori subunitare, adică

$$c_n \geqslant 1, \text{ respectiv } \sigma_{-1} > \sigma'_{-1}, \quad \sigma_R > \sigma_m.$$

După cum s-a menţionat la început, Raskin şi Bagramov considerau pentru coeficientul de siguranţă constant $c_i = 1{,}5, \ldots, 2$

Aceasta se transpune acum sub condiţia $c_n \geqslant 1{,}5 \ldots c_1 \cong 2$.

Deci prin modificarea adusă se ajunge la o soluţie cu coeficienţi de siguranţă variabili în şir descrescător de jos în sus, rezolvîndu-se astfel o problemă de dimensionare în special pentru sondele cu apă sărată la care procentul de apă este în continuă creştere, iar mediul de lucru ca atare este corosiv.

Pentru uşurinţa calculelor dăm valorile:

$$\begin{cases} j_0 = \left(1 - \dfrac{K_1}{2}\right)\left[b_0 + f + m_a + \dfrac{m_d - b_0(1 + f)}{1 - \dfrac{K_1}{2}} \cdot \dfrac{K_1}{2}\right], \\ j_1 = \dfrac{2}{2b_0 \dfrac{1 - K_1}{2 - K_1} + f + m_a - \dfrac{K_1}{2 - K_1}(f b_0 + m_d)}. \end{cases} \tag{32}$$

NOTAȚII

σ_{max} — efortul unitar maxim al ciclului obositor;
σ_{min} — efortul unitar minim al ciclului obositor;
σ_m — efortul unitar mediu al ciclului obositor;

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2};$$

σ_{-1} — efortul unitar la oboseală pentru cicluri simetrice;
σ_R — efortul unitar la oboseală pentru cicluri asimetrice;
σ_v — efortul unitar de amplitudine.

Numărul de trepte s-a luat nedefinit de la $1 \rightarrow n$, cu 1 fiind notată treapta cea mai de jos, iar cu n fiind notată treapta cea mai de sus. Pentru o treaptă oarecare cuprinsă între 1 și n s-a ales notația i.

Astfel:

l_i = lungimea treptei i;
s_i = aria secțiunii treptei i;
q_i = greutatea pe unitatea de lungime în treapta i.

Primită la redacție la 12 mai 1966.

PRINCIPALII PARAMETRI AI UZURII SUPRAFEȚELOR PLANE ÎN MIȘCARE ALTERNATIVĂ DE ALUNECARE. INSTALAȚIE DE MODELARE ȘI MĂSURĂ (I)[1]

de D. PAVELESCU
Centrul de mecanica solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.6 : 621

Lucrarea prezintă o instalație cu șase cupluri de frecare pentru studiul uzurii suprafețelor plane în mișcarea de du-te-vino, sistemul mecanic fiind completat cu circuite radiometrice și electrice pentru măsurarea vitezei de uzură, a forței de frecare, a temperaturii medii în diferite puncte și a rezistenței peliculei de lubrifiant. Într-un anumit regim se confirmă relația : $\Delta T = K Q^{1/2}$.

1. Modelarea proceselor de frecare din mașini s-a dovedit din ce în ce mai mult o metodă eficace atît pentru cercetările cu caracter fundamental, cît și pentru cele cu caracter aplicativ care privesc uzura. Literatura de specialitate, în special cea din ultimul deceniu, ne oferă o gamă variată de aparate și mașini destinate studiilor și încercărilor de frecare și uzură.

După părerea noastră, elementul caracteristic, principal, al acestor instalații îl constituie tipul cuplului de frecare. Acest element se dovedește a fi ales corect sau, dimpotrivă, principial greșit, funcție de măsura în care va răspunde în general la două condiții, pe care le socotim esențiale :

— modelarea și reproducerea unor procese de frecare identice celor din exploatare ;

— asigurarea unui grad ridicat de reproductibilitate a determinărilor.

Într-o lucrare de sinteză ne-am ocupat de diferitele tipuri de mașini ce se utilizează în studiile și încercările de frecare și uzură [1]. A rezultat

[1] Prezentată la sesiunea științifică organizată cu ocazia Centenarului Academiei, septembrie, 1966. Publicată în Rev. Roum. Sci. Tech-Mécanique Appliquée, **11**, 2, 1967.

că predomină frecarea de alunecare față de cea de rostogolire; este prezentă atît frecarea pe generatoare, cît și cea frontală; din punct de vedere cinematic, este reprezentată atît mișcarea de translație, cît și cea de dute-vino.

Instalațiile de modelare cu mișcare alternativă, în pofida variației condițiilor complexe de frecare (viteză, ungere etc.), încep să fie destul de răspîndite, fiind impuse tocmai de necesitatea modelării în condiții cît mai apropiate a proceselor din mașinile ale căror caracteristici funcționale se urmărește a fi continuu perfecționate. La fel ca în cazul mașinilor cu mișcare continuă, se remarcă utilizarea unor variate tipuri de cupluri de frecare: bilă între două suprafețe plane, cupluri de tip Timken sau Amsler, ac sau semisferă pe suprafață plană, două suprafețe plane sau două sau trei suprafețe cilindrice în frecare etc., evoluția uzurii fiind urmărită atît cu metode clasice, cît și cu cele radiometrice [1]. În acest sens menționăm: aparatul Bowden-Leben, utilizat la măsurarea frecării în prezența filmului-limită, cu viteze de alunecare reduse; aparatul Heath și Philips, utilizat pentru studii de uzură în atmosferă variată, la diferite temperaturi; aparatul Rowe, de asemenea pentru studii de frecare în vacuum și temperaturi înalte; aparatul lui Poleakov și Garkunov, cu glisieră mobilă; aparatul utilizat de L. Támás îndeosebi pentru studiul proprietăților de ungere a lubrifianților și aditivilor; aparatul utilizat de Wenderoth pentru studiul regimului mixt în prezența diferiților lubrifianți și aditivi etc. Mașinile de tip pendul (Martens, Gläser, Támás etc.) formează o altă categorie de aparate de încercat cu mișcare alternativă.

O parte dintre autori recurg la instalații care se apropie și mai mult de sistemul mecanic modelat, ca, de exemplu, instalația de mare gabarit realizată de T. V. Lavin și B. M. Astaskievici, instalație de încercare la uzură a ghidurilor de supape etc. Pentru ghidajele mașinilor-unelte menționăm cercetările din U.R.S.S. și din Anglia.

În țara noastră în cazul mișcării alternative sînt de amintit: monocilindrul experimental tip I.M.A., care modelează de fapt condițiile dintr-un motor monocilindric pentru studiul comportării la uzură și rodaj al diferitelor aliaje și lubrifianți, o instalație tip compresor frigorific, utilizată de autor pentru studii cerute de „Tehnofrig"-Cluj, instalațiile folosite la Institutul de petrol și gaze etc. La Institutul de energetică, la Institutul de cercetări pentru mecanizarea și electrificarea agriculturii, la fostul PETROCHIM-Ploiești sau la laboratoarele uzinelor constructoare de motoare („23 August", „Tractorul", „Steagul roșu", „Timpuri noi" etc.), încercările și studiile de uzură sînt făcute în cele mai apropiate condiții de exploatare. De altfel, bancurile experimentale de profil industrial sînt de asemenea utilizate în studiile de uzură din diferite țări în paralel cu modelele de laborator și pentru a completa și verifica rezultatele acestora.

2. Frecarea de alunecare între suprafețe în mișcare alternativă constituie un tip de frecare destul de des întîlnit în mașini (grupul piston-cilindru la motoare și compresoare, ghidajele la mașini-unelte etc.). Totodată, uzura în condițiile frecării de alunecare în mișcarea alternativă, dat fiind însăși această caracteristică cinematică, este deosebit de interesantă și din punctul de vedere al caracterului variației parametrilor uzurii în cursul unui ciclu și al caracterului statistic al rezultatelor obținute într-o anumită

perioadă. O atenție deosebită se acordă atît aprofundării unui aspect esențial, și anume cel al variației regimului de ungere de-a lungul cursei [2], [3], parametrul determinant al variației vitezei de uzură, cît și, apariției fenomenului de *stick-slip*, de asemenea insuficient studiat. Anumite concluzii exprimate în lucrările care au avut ca obiect ponderea erorilor în cazul utilizării metodelor radiometrice în cercetările de uzură își găsesc un cîmp larg de verificare în cazul tipului de frecare menționat.

În lucrarea de față se prezintă o instalație originală care să modeleze frecarea de alunecare a unor suprafețe plane, în condițiile unei mișcări alternative, realizată pentru a răspunde atît unor necesități de cercetare, cît și celor impuse de cerința de modelare a condițiilor de exploatare. Ea este destinată urmăririi evoluției principalilor parametri (viteza de uzură, forța de frecare (coeficient de frecare), temperatura în zona suprafeței de frecare, grosimea filmului de lubrifiant), în condiții variate de viteză relativă, sarcină, stare de suprafață, material (compoziție chimică, structură, duritate etc.), mediu lubrifiant și abraziv, temperatură exterioară etc. De asemenea s-a scontat efectuarea unor aprecieri de natură statistică asupra rezultatelor obținute prin urmărirea proceselor de frecare -uzură, simultan pe mai multe cupluri asemănătoare.

După cum rezultă din schema generală a instalației (fig. 1), ansamblul mecanic conține în principal șase cupluri de frecare, sistemele de aplicare a sarcinii, de acționare și de ungere. El este completat cu circuitele radiometrice și electrice pentru măsurarea principalilor parametri (A — viteza de uzură, B — forța de frecare, C — rezistența electrică a filmului de lubrifiant, D — temperatura la suprafața de frecare și cea a mediului).

Se observă că, pentru mărirea productivității și totodată din necesitatea urmăririi rezultatelor și sub aspectul lor statistic, s-a prevăzut o instalație cu șase cupluri de frecare. Pentru eliminarea regimului de vibrații tipic mașinilor asimetrice, s-a preferat o instalație ale cărei cupluri de frecare să fie plasate simetric față de arborele-motor, interfața de frecare fiind situată în același plan cu axul arborelui; mișcarea este transmisă prin două biele în tandem, cursa fiind de 73 mm. O gamă largă de viteze (3 — 400 de curse/minut) se realizează prin intermediul unei cutii de viteze cu șase trepte.

Cuplul de frecare. Îndeosebi pentru modelarea frecării ghidajelor de alunecare cu suprafețe plane (și de a putea culege informații și asupra altor tipuri de ghidaje cu geometrii derivînd din suprafețe plane) s-a ales fiecare cuplu de frecare format din două epruvete cu suprafețe plane : o epruvetă fixă, de formă paralelipipedică, și o epruvetă mobilă, de formă cilindrică (Ø = 10 mm). Pentru cuplul de frecare experimentat s-a realizat un coeficient de acoperire 0,1.

Sistemul de aplicare a sarcinii este de tipul cu resort tarat, realizat ca în figura 2, încărcarea aplicîndu-se asupra epruvetei mobile. Suprafața aparentă a epruvetei mici oferă numai anumite indicații asupra sarcinii specifice și asupra dimensionării sistemului de aplicare a sarcinii; suprafața reală de contact, parametru esențial pentru stabilirea sarcinii unitare efective, după cum se știe, depinde de mai mulți factori.

De remarcat că, după cum a fost conceput, sistemul de aplicare a sarcinii poate fi utilizat și în cazul unor determinări direct pe strung; astfel, după cum rezultă din figura 3, acest sistem și epruveta mobilă (Ø = 10 mm)

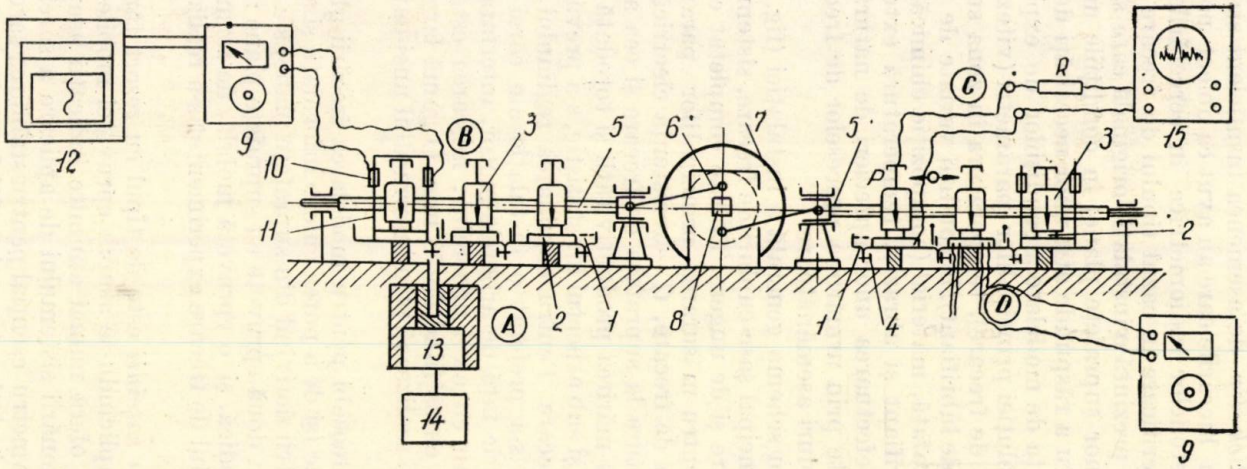


Fig. 1. — Schema instalației cu șase cupluri de frecare: *A* — sistemul radiometric de determinare a vitezei de uzură; *B* — sistemul pentru măsurarea forței de frecare și studiul fenomenului *stick-slip*; *C* — sistemul pentru determinarea rezistenței ohmice a filmului de lubrifiant; *D* — sistemul de măsurare a temperaturii;

1 — cuva de ulei, *2* — cuplu de frecare, *3* — sistem de încărcare, *4* — robinet de golire, *5* — piesa-suport a capetelor de încărcare, *6* — sistemul mecanic de antrenare; *7* — cutia de viteze, *8* — contorul lungimii de frecare; *9* — punte de măsură; *10* — marcă tensometrică; *11* — cadru metalic, *12* — înregistrator, *13* — traductor de radiații, *14* — numărător, *15* — osciloscop de c. c.

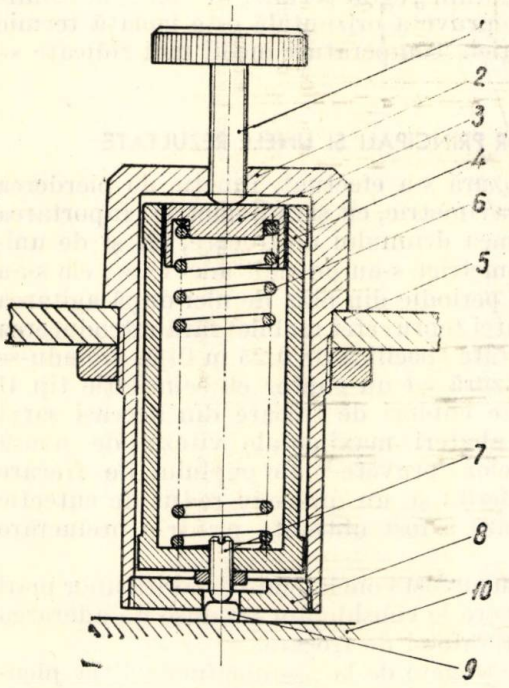
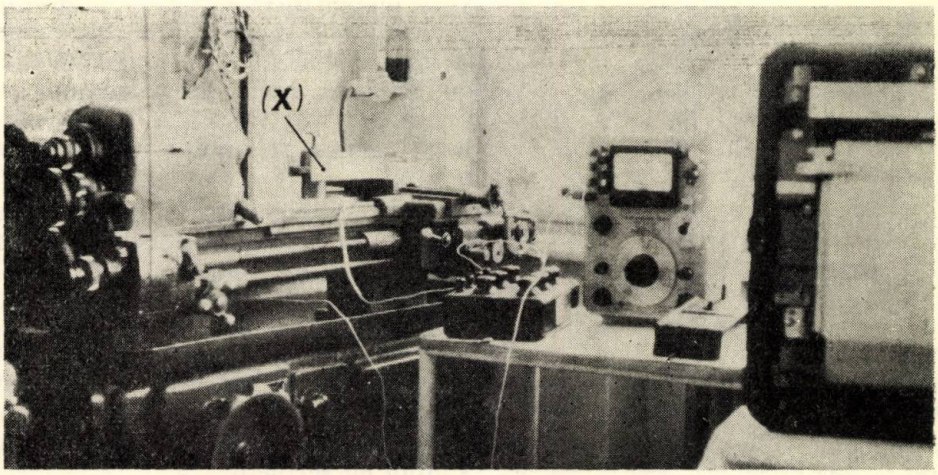


Fig. 2. — Schița sistemului de aplicare a sarcinii :

1 — șurub de presiune; *2* — corpul metalic, *3* — capac, *4* — cilindru, *5* — piesa-suport a capetelor de încărcare, *6* — resort tarat, *7* — știft de transmitere a sarcinii, *8* — piesă de fund, *9* — epruveta mobilă a cuplului de frecare, *10* — epruveta „fixă" a cuplului de frecare.

Fig. 3. — Sistemul de aplicare a sarcinii (x) utilizat pentru măsurarea rezistenței ohmice de contact în cazul unor determinări pe strung.



poate descrie mişcarea de du-te-vino pe ghidajul strungului, care constituie a doua suprafaţă a cuplului de frecare. În acest mod s-a studiat, de exemplu, variaţia rezistenţei de contact (metal — metal).

Ungerea se realizează atît prin sistemul semicufundat, cît şi prin picurare. Pentru asigurarea unui anumit regim termic, în afară de condiţia creată prin prezenţa uleiului, epruveta orizontală este izolată termic faţă de suportul metalic al instalaţiei. Temperaturi medii mai ridicate se pot obţine cu rezistenţe electrice.

3. MĂSURAREA PARAMETRILOR PRINCIPALI ŞI UNELE REZULTATE

a. Determinarea vitezei de uzură s-a efectuat, funcţie de pierderea de metal a epruvetei mobile, atît gravimetric, cît şi radiometric ; raportarea uzurii s-a făcut atît faţă de lungimea drumului de frecare, cît şi de unitatea de timp. Determinările radiometrice s-au dovedit adecvate ; ele s-au realizat asupra unor probe extrase periodic din baia de ulei după agitarea acestuia. Dată fiind compoziţia fontei (epruvetei mobile) fără introducerea unui alt trasor, s-a obţinut o activitate specifică de 0,25 m Ci/g, creîndu-se posibilitatea urmăririi vitezei de uzură cu un contor cu scintilaţie tip U de mare sensibilitate. Între diferite cupluri de frecare din aceeaşi şarjă s-au obţinut, în condiţii similare, abateri maxime ale vitezei de uzură de 12%. Menţionăm că fonta ambelor epruvete [1]) ale cuplului de frecare prezenta o structură perlitică cu ferită şi un procent redus de eutectic fosforos. Suprafaţa epruvetei de bază a fost obţinută printr-o prelucrare longitudinală cu cuţit lat.

Determinările gravimetrice nu au fost concludente datorită unor mari fluctuaţii ale vitezei de uzură pe care le considerăm produse de aderarea lubrifiantului la neregularităţile suprafeţei de frecare.

Prin schimbarea regimului de ungere de la „semicufundat" la picurare gradată, s-a obţinut o sporire accentuată a pierderii de metal a epruvetei mobile (faţă de 3,2 mg, la 200 km parcurşi sub sarcina de 28,5 kgf şi ulei 410, la 25°C temperatură medie iniţială), astfel încît regimul de uzură „distructivă" a apărut brusc, la atingerea regimului de „frecare uscată".

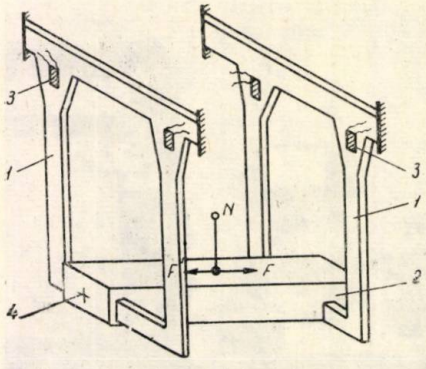


Fig. 4. — Schiţa sistemului traductor pentru măsurarea forţei de frecare şi pentru studiul fenomenului de *stick-slip* :
1 — cadrul metalic, *2* — epruveta „fixă" a cuplului de frecare, *3* — marcă tensometrică, *4* — punct de rigidizare.

b. Pentru măsurarea forţei de frecare s-a imaginat un sistem format din două cadre metalice, de anumită rigiditate, care susţin epruveta inferioară (fig. 4) ; pe ambele feţe ale montanţilor, într-o regiune cu moment de încovoiere de valoare ridicată, sînt plasate mărci tensometrice (100 Ω). Tararea s-a realizat cu un sistem simplu cu scripete.

Pentru început s-a măsurat forţa de frecare funcţie de sarcină şi la o anumită viteză medie, în prezenţa lubrifiantului în regim semicufundat.

[1]) Epruvetele au fost puse la dispoziţie de Fabrica de maşini-unelte şi agregate Bucureşti.

Cu același cuplu de frecare, utilizînd ca lubrifiant uleiul și la 15 ture/min s-au obținut [2]) următoarele rezultate :

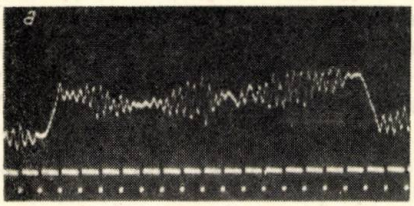
N_{kgf}	16	22	28,5
T_{max} kgf*)	1,80	2,20	3,06
f_{max}	0,110	0,100	0,107

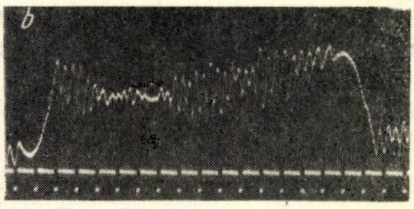
*) la capătul cursei

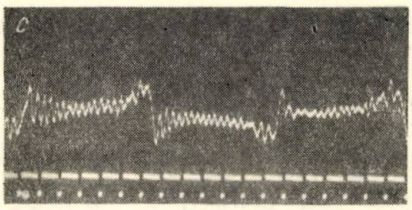
Se poate constata că valoarea maximă a coeficientului de frecare se menține destul de constantă funcție de sarcină și de regimul amintit de ungere.

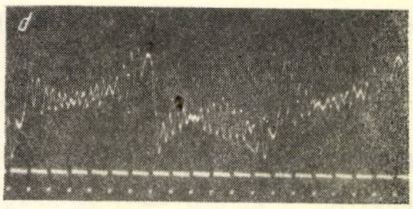
c. Cu oscilograful cu buclă s-a putut urmări de asemenea apariția și evoluția unor fenomene de „stick-slip", de care ne vom ocupa mai pe larg într-o altă lucrare.

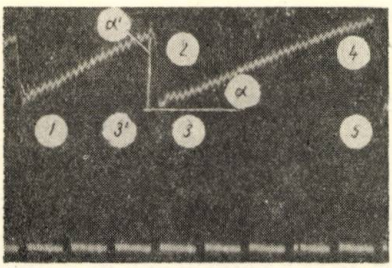
Din diagramele din figura 5 rezultă clar că frecarea alternativă de alunecare, în condițiile sistemului mecanic adoptat [3]) și a ungerii în regim „semicufundat" cu un ulei de vîscozitate redusă, conduce la apari-











e

Fig. 5. — Diagrame ale variației forței de frecare :

a — 38 t/min, 10 kgf; *b* — t/min, 20 kgf; *c* — 96 t/min, 10 kgf; *d* — 96 t/min, 20 kgf; *e* — 6 t/min, 10 kgf (pe această perioadă s-a considerat viteza relativă constantă).

ția unor fenomene de „stick-slip" de tip neregulat și la oscilații armonice de-a lungul cursei, influențînd astfel esențial variația forței de frecare.

---

[2]) N — sarcină ; T_{max} — forță de frecare ; f — coeficient de frecare.

[3]) Este necesară stabilirea unei rigidități optime a sistemului elastic. Pentru a pune în evidență fenomenul la viteze medii mai mari, s-a lucrat cu uleiul 405 de vîscozitate redusă.

Amplitudinea fenomenelor se dovedește a fi dependentă de viteza medie de alunecare (numărul de curse pe minut), de vîscozitate și de sarcină. Reducerea sarcinei accentuează micșorarea amplitudinii față de situația obținută prin creșterea vitezei sau a vîscozității, vîscozitatea și viteza avînd însă o influență mai mică decît sarcina. Sensibilitatea obținută permite și sesizarea eventualelor asimetrii în sistem.

Variația amplitudinii fenomenului de „stick-slip" (fig. 5 e), respectiv și a porțiunii de „slip", de-a lungul cursei își are următorul corespondent teoretic. Astfel, într-o primă aproximație, considerînd sistemul mecanic oscilant, liniar, iar forța de frecare „cinetică" din timpul alunecării „slip" de valoare constantă $\mu_c N$, și de asemenea viteza relativă constantă pe o porțiune a cursei, se poate considera ecuația de mișcare [3]:

$$m\ddot{x} - \mu_c N + Kx = 0 \tag{1}$$

unde N este sarcina, μ_c, μ_s coeficienții de frecare cinetică și statică, m masa epruvetei inferioare și a suporților ei, iar K rigiditatea sistemului elastic.

În figura 5 e., reprezentînd două perioade de „stick-slip" către finele cursei ($n = 6$ t/min; $N = 6$ kgf.), porțiunile 1—2 și 3—4 reprezintă momentele de lipire („stick"), în punctele 2 și 4 avînd loc frecarea statică cu μ_s iar porțiunile 2—3 și 4—5 constituie momente de alunecare („slip") cu μ_c.

Ținînd seama de faptul că, în momentul $t = 0$, corespunde deplasarea $x = \mu_s \frac{N}{k}$ (ordonata punctului 2) și de asemenea că $\dot{x} = v$ și $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (frecvența proprie circulară a sistemului), soluția ecuației este:

$$x = \frac{N}{k}(\mu_s - \mu_c)\cos\Omega t + \frac{v}{\omega}\sin\Omega t + \frac{N}{k}\mu_c. \tag{2}$$

Cazurilor $t = 0$ (pct. 2); $\dot{x} = 0$ și $\Omega t = \pi$ (pct. 3), le corespunde valorile deplasărilor: $x_0 = \mu_s \frac{N}{K}$ și $x_\pi = (2\mu_c - \mu_s)\frac{N}{k}$ iar „slip": $2 - 3 = x_0 - x_\pi = (\mu_s - \mu_c)\frac{2N}{K}$. (3)

De menționat că termenul $\frac{v}{\omega}\sin\Omega t$ poate fi neglijat deoarece chiar la mijlocul cursei viteza relativă de alunecare este mică față de viteza de „slip" ($\alpha \gg \alpha'$, vezi fig. 5 *e*).

În cazul mișcării alternative considerate, o dată cu variația vitezei relative, variază și μ_c (tot timpul $\mu_c < \mu_s$) și de asemenea amplitudinea deplasării. Înregistrarea arată că variază și panta perioadelor de „stick" și de asemenea viteza de alunecare „slip" [4]).

[4]) Dacă s-ar fi ținut seama de masele sistemului elastic și a resortului de aplicare a sarcinei, ar fi rezultat că sistemul mecanic are o infinitate de grade de libertate, necesitînd dezvoltarea în serie Fourier. De asemenea, legea de variație a forței perturbatoare (prin intermediul legii de variație a lui μ_c), amortizarea datorită forțelor de frecare interioară și raportul celor două viteze, conduc la ecuații neliniare dificil de rezolvat.

d. Utilizînd o metodă electrică de sensibilitate relativ ridicată ($10^{-4}\Omega$) — cu punte tensometrică și înregistrare cu potențiometru electronic, ca în figura 3 — s-a constatat că obținerea unor rezultate concludente privind variația rezistenței de contact (metal — metal) este limitată, în afară de sensibilitatea metodei, de un anumit regim de sarcină și de viteză. Astfel, numai la valori reduse ale sarcinii și vitezei ($N \sim 1$ kgf, $n = 6$ t/min) și, desigur, în regim de uzură normală, s-au putut sesiza anumite variații ale rezistenței electrice cu sarcina pe parcursul și la finele cursei.

Un alt aspect pe care-l socotim mai interesant este studierea variației filmului de ulei, a regimului de ungere la diferite valori ale vitezei medii, a sarcinii etc. prin intermediul variației rezistenței ohmice a lubrifiantului dintre cele două suprafețe în frecare în mișcare alternativă. A fost adoptată o metodă electrică asemănătoare celei folosite pentru alte cupluri de frecare, și îndeosebi de tip punctiform [5], [6], [7], utilizîndu-se un circuit mai simplu, cu rezistență suplimentară și amplificator de curent continuu. Astfel, pentru uleiul 410 (cuplul semicufundat), la temperatura inițială de 22°C, rugozitatea medie 26 μ, coeficientul de acoperire 0,1, $N = 20$ kgf și $n = 37{,}5$ t/min, a fost obținută prin intermediul variației de tensiune pe rezistența suplimentară (30 K Ω) o imagine care indică regimuri diferite de ungere de-a lungul cursei. Se remarcă o zonă centrală hidrodinamică, mărginită de zone de lubrificație mixtă sau limită, ca în figura 6.

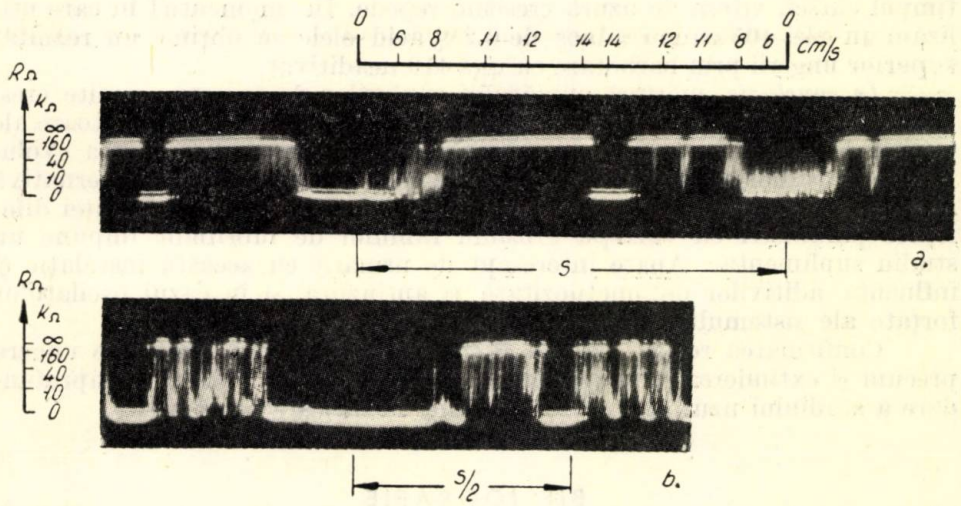


Fig. 6. — Variația regimului de ungere; ulei 510 c St; $V_{max} = 14{,}67$ cm/s; a — 20 kgf/cm²; rugozitatea medie 0,3μ; b — 1 kgf/cm² ($\sim 2{,}6\mu$).

e. Pentru măsurarea temperaturilor medii ale lubrifiantului (în cuvă) și pentru diferite puncte apropiate de suprafața de frecare (ale epruvetei fixe), s-au utilizat traductoare rezistive și un potențiometru electronic înregistrator. Traductorii rezistivi de construcție specială (15 Ω) au fost introduși în orificii (Ø 2 mm), în epruveta fixă, pînă la 0,3 mm de interfața de frecare. S-au măsurat diferențele de temperatură dintre uleiul din baie și diferitele puncte în lungul cursei. Spre exemplu, au rezultat următoarele variații ale temperaturii funcție de sarcină într-un punct la

capătul cursei, pentru cuplul fontă-fontă şi ulei 410, temperatura iniţială fiind 23°C :

N_{kgf}	10	20	30
$K\Delta T$	90	130	160

După cum s-a arătat mai sus, coeficientul de frecare se menţine aproape constant; în acest caz, căldura produsă Q este proporţional cu sarcina. Dacă se ia ca valoare de referinţă valoarea lui ΔT pentru 10 kgf, atunci se verifică satisfăcător relaţia

$$\Delta T = KQ^{1/2}.$$

Este interesant de arătat că acelaşi tip de relaţie este confirmat de J. Furey, utilizîndu-se însă un termocuplu natural pentru determinarea temperaturii de contact [8], un alt cuplu de frecare în regim de frecare uscată şi de asemenea un alt tip de mişcare [5]). Rezultă că această relaţie este valabilă şi în cazul regimurilor de ungere mixt şi limită. Adoptarea sistemului de ungere prin picurare oferă avantajul unei dirijări gradate a cantităţii de lubrifiant şi a atingerii treptate a regimului de frecare „uscată". Este evident că în acest mod, la aceleaşi valori de sarcină şi viteză medie, se obţin micşorarea peliculei de lubrifiant şi ruperea ei în timpul cursei, viteza de uzură crescînd repede. În momentul în care utilizăm un ulei 405 cu un adaos de 0,2% acid oleic se obţine un rezultat superior ungerii prin barbotare cu ulei 410 neaditivat.

În concluzie, mărirea numărului cuplurilor de frecare permite creşterea productivităţii de măsură fără a introduce fluctuaţii supărătoare ale vitezei de uzură. Instalaţia de măsură realizată permite studierea evoluţiei principalilor parametri în condiţiile frecării de alunecare alternativă şi de asemenea a fenomenului de *stick-slip*. Aprecierea concordanţei diferiţilor parametri cu variaţia grosimii filmului de lubrifiant impune un studiu suplimentar. Apare interesant de urmărit cu această instalaţie şi influenţa aditivilor de onctuozitate şi antiuzură şi în cazul oscilaţiilor forţate ale sistemului elastic.

Confirmarea relaţiei $\Delta T = K\,Q^{1/2}$ într-un anumit regim de ungere precum şi extinderea ei la regimurile mixt şi la limită permit o aprofundare a studiului uzurii suprafeţelor plane în mişcare alternativă.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Pavelescu, *Cu privire la aparatura experimentală destinată studiilor de frecare şi uzură*, St. cerc. mec. apl. *4*, 1133–1161 (1966).
2. N. Tipei, *Hidroaerodinamica lubrificaţiei*, Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1957, p. 90–104 şi p. 456–482.

[5]) Cuplu de frecare (nelubrificat) : bilă de constantan presată pe un cilindru de oţel în mişcare de rotaţie; sarcina între 60 şi 250 gf şi viteza de alunecare între 14 şi 224 cm/s; durata încercărilor cîteva minute; diametrul bilei $\approx$ 1,8 cm şi duritatea 86 R_B; rugozitatea 0,15 μ; diametrul cilindrului 4,5 cm; duritatea 21 R_C; rugozitatea 0,2 μ.

Primită la redacţie la 15 septembrie 1966.

3. E. P. Bowden and D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford at the Clarendon Press, P. I., 1964, p. 105—110 și p. 248.
4. E. Rabinowicz, *Stick-Slip Process Friction and Wear*, Elsevier, Publ. Comp., 1959, p. 157—158.
5. I. O. Macconochie and A. Cameron, *Measurement of Oil-Film Thichness in Gear Tooth*, Trans. of the ASME, D. Journ. Basic Eng., March (1960).
6. T. E. Tallan, *Lubricant Films in Rolling Contact of Rough Surfaces*, ASLE TRANS., **7**, *2*, 112 (1964).
7. B. I. Kroghelski, *Trenie i iznos*, Moskva, Mesghiz, 1962.
8. M. J. Furey, *Surface Temperatures in Sliding Contact*, ASLE TRANS., *7*, 133—146 (1963).

CONTRIBUȚII ASUPRA NOILOR METODE DE ÎNCERCARE A RULMENȚILOR[1)]

de N. G. POPINCEANU și M. D. GAFIȚEANU
Institutul politehnic Iași

621.82

În lucrare se prezintă baza teoretică și se completează metoda de încercare a rulmenților sub sarcină progresivă continuă. Se preconizează și se aplică metode noi de încercare a rulmenților, de exemplu, metoda de încercare a rulmenților cu sarcină progresivă limitată și repetată și metoda de încercare a rulmenților cu întreruperea încercărilor după deteriorarea unui număr limitat de rulmenți din lotul de încercat; se arată că noile metode se pot aplica pe mașinile clasice de încercat rulmenți; se arată de asemenea avantajele economice și tehnologice ale acestor metode în comparație cu metoda clasică de încercare a rulmenților sub sarcină constantă; se prezintă datele rezultate din încercări practice.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Durabilitatea și capacitatea dinamică a rulmenților depind de numeroși factori tehnologici, constructivi și de exploatare.

Mărirea capacității dinamice a rulmenților și deci implicit a durabilității lor trebuie să preocupe în primul rînd pe constructorul de rulmenți; această mărire, ca rezultat al creșterii nivelului calitativ al producției de rulmenți, poate fi pusă în evidență numai prin încercări, așa cum se procedează în general în construcția de mașini.

Relațiile clasice de calcul al rulmenților, relații care fac legătura între capacitatea dinamică de bază a unui lot de rulmenți, durabilitatea de bază și sarcină [10], au fost deduse în urma efectuării unui mare număr de încercări pe loturi de rulmenți, pe mașini de încercat rulmenți în anumite condiții de încercare și sub sarcină constantă și continuă.

[1)] Comunicată la Conferința de mecanică, 27—30 septembrie 1965.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 24 NR. 2 P. 381—399 BUCUREȘTI 1967

Încercările rulmenților efectuate prin metoda clasică, sub sarcină constantă, prezintă unele inconveniente importante, cum ar fi :

— durata mare de timp necesară pentru realizarea încercărilor ; astfel, pentru încercarea unui lot de 20—30 de rulmenți sînt necesare aproximativ 4 000—5 000 de ore-mașină, cu un consum apreciabil de energie ;

— dispersia mare a rezultatelor încercărilor, dispersie constatată chiar în condiții identice de încercare și care se datorește influenței neuniforme a factorilor tehnologici și constructivi amintiți mai sus. Din acest motiv este de remarcat că interpretarea rezultatelor încercărilor cu o precizie suficientă presupune un număr mare de rulmenți încercați.

Din cele arătate reiese că încercările clasice nu pot urmări în mod eficient controlul fabricației rulmenților în scopul îmbunătățirii calității lor, cu consecințele respective asupra comportării în exploatare.

Apare deci necesitatea utilizării unor metode mai eficace și mai rapide, care să poată stabili și urmări criterii de îmbunătățire a calității rulmenților în funcție de factorii menționați.

Un caz similar îl constituie și domeniul încercărilor de rezistență la oboseală a metalelor. Numeroși cercetători au indicat astfel unele posibilități de îmbunătățire a metodelor clasice de încercare în sensul accelerării lor. Se pot cita astfel încercările la care se modifică amplitudinea ciclului de solicitare după un program anumit, creștere progresivă continuă sau în trepte etc. [2], [6], [8], [9], [13] ; se remarcă de asemenea unele referiri [18] asupra unei metode de încercare la care încercarea este întreruptă după deteriorarea unui anumit număr de epruvete.

În literatura de specialitate se constată în prezent unele tendințe de a preconiza și de a aplica și la încercarea rulmenților o metodă cu sarcină progresivă [3], [4], [7], [15].

În prezenta lucrare

a) se arată baza teoretică și se întregește metoda de încercare a rulmenților cu sarcină progresivă continuă ;

b) se preconizează și se aplică la încercarea rulmenților :

— metoda de încercare cu sarcină progresivă limitată și repetată ;

— metoda de încercare cu întreruperea încercării după distrugerea unui anumit număr de rulmenți ;

c) se compară metodele de încercare de mai sus atît între ele, cît și cu metoda clasică de încercare cu sarcină constantă, evidențiindu-se avantajele utilizării lor.

2. METODA DE ÎNCERCARE CU SARCINĂ PROGRESIVĂ CONTINUĂ

2.1. *Sarcina echivalentă.* La încercarea rulmenților sub sarcină progresivă continuă se admit următoarele ipoteze [1], [17], [11] :

a. Se consideră că fiecărui moment din durata de funcționare a unui rulment îi corespunde o anumită stare de deteriorare.

b. Se admite că există o echivalență între o sarcină P_A, care acționează N_A rotații asupra unui rulment, și o sarcină P_B, care ar acționa N_B rotații asupra aceluiași rulment, dacă din punct de vedere fizic ar avea ca rezultat o aceeași stare de deteriorare. În acest caz, dacă L_B este durabilitatea rulmentului în rotații sub sarcină P_B, rulmentul care a funcționat

N_A rotații sub sarcină P_A ar putea suporta în continuare $L_B - N_B$ rotații sub sarcina P_B, ca și cînd ar fi suportat mai înainte, în loc de N_A rotații sub sarcina P_A, N_B rotații sub sarcina P_B.

c. Starea de deteriorare a unui rulment se pune în legătură cu expresia:

$$A = \sum_1^j \frac{N_j}{L_j} \tag{1}$$

dacă rulmentul a funcționat N_j rotații sub sarcinile P_j și dacă L_j reprezintă durabilitățile rulmentului, în rotații, respectiv sub sarcinile P_j.

d. Pentru un rulment dat, capacitatea dinamică se consideră o constantă. Încercările rulmenților și în special dispersia rezultatelor acestor încercări arată că rulmenții unui lot nu sînt identici, capacitatea dinamică fiind astfel diferită de la un rulment la altul. Relația de legătură dintre durabilitate, sarcină și capacitate dinamică pentru un rulment i din lotul de încercat este (vezi [10], [11])

$$L_{ij} = \left(\frac{C_i}{P_{ij}}\right)^p, \tag{2}$$

în care C_i este capacitatea dinamică a unui rulment i din lotul de n rulmenți care se încearcă, spre deosebire de capacitatea dinamică de bază, notată cu C, care se referă la lotul de rulmenți, L_{ij} este durabilitatea rulmentului i sub sarcina P_{ij}, adică numărul de rotații efectuate de rulment fără ca pe suprafețele de rostogolire să apară semne de deteriorare.

Exponentul p din relația (2) are valoarea:

— sarcină constantă — contact punctual $p = 3$;
— contact liniar $p = 3 - 4$; obișnuit se admite $p = 3{,}33$ [2]);
— sarcină progresivă continuă [15];
— contact punctual $p_k = 3{,}83$;
— contact liniar $p_k = 4{,}5$.

Diferența constatată între valorile exponenților p și p_k, corespunzătoare pentru sarcină constantă și respectiv pentru sarcină progresivă continuă, se datorește faptului că, în cazul sarcinii progresive continue, microvolumul de material în care apar eforturile de contact determinante în deteriorare este situat la o distanță din ce în ce mai mare de suprafață pe măsura creșterii sarcinii.

Pe baza ipotezelor de mai sus, pentru rulmentul i din lotul încercat se poate pune problema determinării unei sarcini P_{0i} echivalente ca efect cu aplicarea consecutivă a unor sarcini P_{ij} care ar acționa respectiv cîte N_{ij} rotații, dacă

$$A = \sum_1^j \frac{N_{ij}}{L_{ij}} = 1; \quad \sum_1^j N_{ij} = L_{0i} \tag{3}$$

și dacă acele sarcini P_{ij} care acționează asupra rulmentului cîte N_{ij} rotații ar duce la apariția primelor semne de distrugere, ca și acțiunea sarcinii echivalente P_{0i} după L_{0i} rotații, L_{0i} fiind astfel durabilitatea rulmentului sub sarcina constantă P_{0i}.

---

[2]) D. Senigalliesi [15] pentru încercările efectuate sub sarcină constantă, găsește valorile: contact punctual $p = 3{,}43$; contact liniar $p = 4$.

Notînd

$$a_{ij} = \frac{N_i}{L_{0i}}, \tag{4}$$

din relațiile (3) rezultă

$$\frac{1}{L_{0i}} = \sum_{1}^{j} \frac{a_{ij}}{L_{ij}}. \tag{5}$$

Se poate scrie (în ipoteza (d), de mai sus) de asemenea $C_i = C_{0i}$ și deci

$$L_{0i} = \left(\frac{C_{0i}}{P_{0i}}\right)^{p_k} = \left(\frac{C_i}{P_{0i}}\right)^{p_k}. \tag{6}$$

Din relațiile (2), (5) și (6) rezultă

$$P_{0i} = \left(\sum_{1}^{j} P_{ij}^{p_k} a_{ij}\right)^{1/p_k} = \left[\frac{\sum_{1}^{j} (P_{ij}^{p_k} N_{ij})}{L_{0i}}\right]^{1/p_k} \tag{7}$$

și

$$P_{0i} = \left[\frac{\int_{0}^{L_{0i}} P_i^{p_k}(N_i)\,\mathrm{d}N_i}{L_{0i}}\right]^{1/p_k}. \tag{8}$$

Dacă se pune condiția ca sarcina variabilă $P_i\,(N_i)$ să crească liniar cu numărul de rotații efectuate, adică

$$P_i(N_i) = \alpha N_i, \tag{9}$$

prin înlocuire în relația (8) rezultă sarcina P_{0i} echivalentă sarcinii progresive continue $P_i(N_i)$ pentru rulmentul i:

$$P_{0i} = \frac{\alpha L_{0i}}{(p_k + 1)^{1/p_k}}. \tag{10}$$

2.2. *Durabilitatea rulmenților încercați sub o sarcină progresivă continuă.* Pentru fiecare rulment încercat sub sarcină constantă se poate scrie relația

$$C_i = P_i \cdot L_i^{1/p}, \tag{11}$$

care pentru același rulment încercat sub sarcină progresivă continuă devine

$$C_{0i} = P_{0i} \cdot L_{0i}^{1/p_k} \tag{12}$$

Însă $C_i = C_{0i}$ și deci

$$P_i L_i^{1/p} = P_{0i} L_{0i}^{1/p_k}. \tag{13}$$

Deoarece la încercarea sub sarcină constantă și continuă toți rulmenții lotului sînt supuși aceleiași sarcini constante $P_i = P = \text{const}$, din relațiile (10) și (13) rezultă

$$L_i = \left(\frac{\alpha}{p}\right)^p \frac{1}{(p_k+1)^{p/p_k}} \cdot L_{0i}^{\frac{p(p_k+1)}{p_k}}. \tag{14}$$

Relația (14) exprimă legătura dintre durabilitatea L_i a unui rulment încercat sub sarcina constantă P și durabilitatea L_{0i} a aceluiași rulment, încercat sub sarcină progresivă continuă.

2.3. *Dispersia rezultatelor încercărilor.* Dispersia rezultatelor încercărilor unui lot de rulmenți este în legătură cu gradul de uniformitate al producției și, fără îndoială, asociată cu mărimea capacității dinamice de bază, un indice de calitate.

În cazul rulmenților, pentru aprecierea dispersiei se pot recomanda următorii parametri de dispersie :

a. *Exponentul de dispersie.* Cercetările efectuate [8] au arătat că distribuția durabilităților rulmenților unui lot încercat sub sarcină constantă este determinată cu o precizie suficient de bună de legea

$$\log(1/S_i) = A \cdot L_i^e, \tag{15}$$

în care S_i este probabilitatea ca $S_i \cdot n$ din rulmenții n ai lotului încercat să suporte sub sarcină constantă numărul de rotații L_i fără ca pe suprafețele de rostogolire să se manifeste semne de distrugere prin oboseală, e exponent de dispersie caracterizînd dispersia rezultatelor încercărilor, A constantă, obișnuit

$$A = \frac{\log(1/0{,}9)}{L_{0,9}^e}, \tag{16}$$

$L_{0,9}$ durabilitatea corespunzătoare probabilităților de siguranță în funcționare $S = 0{,}9$.

Pentru încercările sub sarcină progresivă, din relațiile (14) și (15) se deduce

$$\log(1/S_i) = B \cdot L_{0i}^{\frac{ep(p_k+1)}{p_k}} = B \cdot L_{0i}^{e_0}, \tag{17}$$

în care, în afara notațiilor cunoscute,

$$B = A \cdot \frac{1}{(p_k+1)^{p/p_k}} \left(\frac{\alpha}{P}\right)^p, \tag{18}$$

e_0 exponent de dispersie pentru încercările sub sarcină progresivă continuă :

$$e_0 = ep(p_k+1)/p_k. \tag{19}$$

Exponentul de dispersie în cazul încercărilor sub sarcină constantă fiind mai mic ($e < e_0$) decît exponentul de dispersie la încercări cu sarcină progresivă, rezultă că dispersia rezultatelor încercărilor este mai mare la încercările cu sarcină constantă decît la cele cu sarcină progresivă continuă.

b. Raportul dintre durabilitatea maximă corespunzătoare probabilității de siguranță în funcționare $S = 1/n$ și durabilitatea corespunzătoare probabilității de siguranță $S = 0{,}9$, n fiind numărul de rulmenți din lot. Pentru încercarea cu sarcină constantă, acest raport este dat de expresia

$$D = \frac{L_{1/n}}{L_{0,9}}; \tag{20}$$

în mod analog la încercarea cu sarcină progresivă :

$$D_0 = \frac{L_{01/n}}{L_{00,9}}. \tag{21}$$

În relațiile (20) și (21), $L_{0,9}$ reprezintă, la încercarea sub sarcină constantă, durabilitatea corespunzătoare probabilității de siguranță în funcționare $S = 0{,}9$. $L_{00,9}$ are aceeași semnificație ca mai sus și se referă la încercarea sub sarcină progresivă continuă ; $L_{1/n}$ și $L_{01/n}$ reprezintă în mod analog durabilitățile maxime corespunzătoare unei probabilități de siguranță în funcționare $S = 1/n$.

Din relațiile (14), (20) și (21) rezultă

$$D_0 = \frac{L_{01/n}}{L_{00,9}} = \left(\frac{L_{1/n}}{L_{0,9}}\right)^{\frac{p_k}{p(p_k+1)}} = D^{\frac{p_k}{p(p_k+1)}} \tag{22}$$

deci și

$$D_0 < D.$$

c. Raportul dintre durabilitatea medie a lotului și durabilitatea corespunzătoare probabilității de siguranță în funcționare $S = 0{,}9$. Pentru încercarea sub sarcină constantă, acest raport are valoarea

$$m = \frac{L_{\text{med}}}{L_{0,9}}, \tag{23}$$

în care

$$L_{\text{med}} = \frac{\sum_1^n L_i}{n} \tag{24}$$

și, respectiv, pentru încercarea sub sarcină progresivă

$$m_0 = \frac{L_{0\,\text{med}}}{L_{00,9}}, \tag{25}$$

în care

$$L_{0\,\text{med}} = \frac{\sum_1^n L_{0i}}{n}. \tag{26}$$

Întocmai ca mai sus se poate scrie de asemenea și relația

$$m_0 = m^{p_k/p(p_k+1)} \tag{27}$$

și deci

$$m_0 < m.$$

Din relațiile (19), (22) și (27) rezultă că dispersia rezultatelor încercărilor sub sarcină progresivă continuă este mai mică decît la încercarea cu sarcină constantă, valorile mici pentru e, e_0 și mari pentru D, D_0 și m, m_0 indicînd o neuniformitate mare în rezultate.

În figura 1 este arătată, după unele cercetări [12], [14], evoluția în timp a parametrilor e, D și m la încercări cu sarcină constantă ca urmare a îmbunătățirii calității rulmenților.

2.4. *Determinarea coeficientului α de creștere a sarcinii progresive continue.* Întrucît sarcina care apasă asupra rulmenților încercați crește progresiv cu numărul de rotații efectuate, se poate ivi cazul în care această sarcină să atingă valori atît de mari, încît să provoace deformații cu caracter permanent pe suprafețele de contact. Aceste deformații influențează în mod defavorabil asupra durabilității rulmenților și deci asupra concluziilor încercărilor.

Pe baza acestor considerente se poate admite

$$P_{i\,\max} = \frac{C_0}{c}, \tag{28}$$

în care $P_{i\,\max} = \alpha L_{0i}$ este sarcina maximă pentru rulmentul i corespunzătoare momentului distrugerii lui, C_0 capacitatea statică iar c coeficient de siguranță. Se pot astfel discuta următoarele cazuri:

a. Sarcina de încărcare maximă $P_{i\,\max}$ să nu fie depășită la nici unul dintre rulmenții lotului

$$P_{i\,\max} \geqslant \alpha_a L_{01/n}. \tag{29}$$

Din relația (22) însă

$$L_{01/n} = L_{00,9}\, D^{\frac{p_k}{p(p_k+1)}}. \tag{30}$$

În același timp

$$C = P_{00,9} L_{00,9}^{1/p_k}, \tag{31}$$

în care C este capacitatea dinamică de bază a lotului de rulmenți corespunzătoare probabilității de siguranță în funcționare $S = 0{,}9$, iar $P_{00,9}$ este sarcina echivalentă sarcinii progresive continue la durabilitatea $L_{00,9}$.

Din relația (10) se poate scrie expresia

$$C = \frac{\alpha_a L_{00,9}^{(p_k+1)/p_k}}{(p_k+1)^{1/p_k}} \tag{32}$$

iar din relațiile (20), (29) și (30) vom avea

$$C = \frac{\alpha_a L_{01/n}^{(p_k+1)/p_k}}{(p_k+1)^{1/p_k} D^{1/p}} = \frac{\alpha_a \left(\frac{P_{0\,\max}}{\alpha}\right)^{(p_k+1)/p_k}}{(p_k+1)^{1/p_k} \cdot D^{1/p}}, \tag{33}$$

$$\alpha_a = \frac{P_{0\,\max}^{(p_k+1)}}{C^{p_k}(p_k+1)\, D^{p_k/p}} = \frac{C_0^{(p_k+1)}}{C^{p_k} c^{(p_k+1)} (p_k+1) D^{p_k/p}}. \tag{34}$$

b. Sarcina de încărcare $P_{i\max}$ să nu fie depășită la nici unul dintre rulmenții cu durabilitatea mai mică sau cel mult egală cu durabilitatea medie a lotului încercat sub sarcină progresivă :

$$P_{i\max} \geqslant \alpha_b \cdot L_{0\,\mathrm{med}}. \tag{35}$$

Din relațiile (23) (25) și (27) rezultă în acest caz

$$L_{0\,\mathrm{med}} = L_{00,9} \cdot m^{\frac{p_k}{p(p_k+1)}} \tag{36}$$

și în mod analog ca la punctul *a* :

$$\alpha_b = \frac{C_0^{(p_k+1)}}{C^{p_k} \cdot c^{(p_k+1)}(p_k+1) \cdot m^{p_k/p}}. \tag{37}$$

c. Sarcina de încărcare $P_{i\max}$ să nu fie depășită la nici unul dintre rulmenții cu durabilitatea mai mică sau cel mult egală cu durabilitatea $L_{00,9}$ a lotului încercat, durabilitate hotărîtoare în determinarea capacității dinamice de bază C a lotului

$$P_{i\max} \geqslant \alpha_c L_{00,9}. \tag{38}$$

În mod analog, din aceleași relații ca mai sus rezultă

$$\alpha_c = \frac{C_0^{(p_k+1)}}{C^{p_k} c^{(p_k+1)}(p_k+1)}. \tag{39}$$

Coeficienții α de creștere a sarcinii progresive, determinați pentru cazurile de mai sus, stau deci reciproc în raportul

$$\alpha_a : \alpha_b : \alpha_c = 1/D^{p_k/p} : 1/m^{p_k/p} : 1. \tag{40}$$

Cele relatate la punctele *b* și *c* de mai sus pot fi aplicate la încercări rapide la care deteriorarea unui număr limitat al rulmenților din lotul ce se încearcă este suficientă pentru determinarea capacității dinamice de bază.

2.5. *Durata de timp necesară pentru efectuarea încercărilor.* Pentru încercările sub sarcină constantă, din relațiile (15) și (16) rezultă

$$L_i = \frac{L_{0,9}}{(\log 1/0,9)^{1/e}} \cdot (\log 1/S_i)^{1/e}. \tag{41}$$

Durata totală a încercărilor va fi deci

$$\sum_1^n L_i = \frac{L_{0,9}}{(\log 1/0,9)^{1/e}} \sum_1^n (\log 1/S_i)^{1/e}. \tag{42}$$

Pentru încercările sub sarcină progresivă continuă, în mod analog din relațiile (17) și (18) rezultă

$$\sum_1^n L_{0i} = \frac{L_{0,9}^{\frac{p_k}{p(p_k+1)}}}{(\log 1/0,9)^{\frac{p_k}{ep(p_k+1)}}} (p_k+1)^{-\frac{1}{(p_k+1)}} \left(\frac{P}{\alpha}\right)^{\frac{p_k}{p_k+1}} \sum_1^n \left[\log \frac{1}{S_i}\right]^{\frac{p_k}{ep(p_k+1)}}. \tag{43}$$

Înlocuind în relațiile (42) și (43) pe $L_{0,9} = (C/P)^p$ și pe α din relațiile (34), (37) și (39), obținem respectiv pentru cele trei variante de calcul ale coeficientului α

$$\frac{\sum_1^n L_{0i}}{\sum_1^n L_i} = R_{a,b,c} = \frac{(p_k+1)\,c^{p_k}\,\beta^{\frac{p_k^2}{p(p_k+1)}}}{(\log 1/0{,}9)^{\frac{p_k-p_k p-p}{ep(p_k+1)}}} \cdot \frac{C^{\frac{p_k(p_k-p+1)-p}{p_k+1}}\,P^p}{C_0^{p_k}} \cdot \frac{\sum_1^n [\log 1/S_i]^{\frac{p_k}{ep(p_k+1)}}}{\sum_1^n [\log 1/S_i]^{1/e}}, \tag{44}$$

în care β are, respectiv, valorile D, m și 1.

Raportul duratelor de încercare pentru cele trei cazuri este

$$R_a : R_b : R_c = D^{\frac{p_k^2}{p(p_k+1)}} : m^{\frac{p_k^2}{p(p_k+1)}} : 1. \tag{45}$$

Deoarece la încercarea sub sarcină constantă sînt încercați pe o mașină concomitent patru rulmenți, iar la încercarea sub sarcină progresivă continuă numai unul singur, raportul R' pentru o mașină se va lua obișnuit de patru ori mai mare:

$$R'_{a,b,c} = 4\,R_{a,b,c}. \tag{46}$$

Din considerarea relațiilor (44) și (45) rezultă

— încercarea sub sarcină progresivă continuă este cu atît mai avantajoasă, cu cît sarcina sub care se fac încercările la sarcină constantă este mai mică (fig. 2);

— încercarea cu sarcină progresivă continuă este mai avantajoasă pentru cazul cînd durata totală este mult mai mică decît în cazul (a).

Cu valorile pentru p și p_k determinate de D. Senigalliesi și cu $e = 1{,}5$, $c = 1$ (fig. 1), relația (44) capătă forma

— contact punctual: $p = 3{,}43$, $p_k = 3{,}83$:

$$R_{a,b,c} \simeq 1{,}62\ \beta^{0{,}885}\,\frac{C^{0{,}4}\,P^{3{,}43}}{C_0^{3{,}83}}; \tag{47}$$

— contact liniar: $p = 4$, $p_k = 4{,}5$:

$$R_{a,b,c} \simeq 1{,}77\ \beta^{0{,}92}\,\frac{C^{0{,}55}\,P^4}{C_0^{4{,}5}}. \tag{48}$$

În figura 2, pentru exemplificare sînt arătate valorile rapoartelor $R_{a,b,c}$ și $R'_{a,b,c}$, calculate pentru rulmenții radiali cu bile 6308 în funcție de P/C_0 dacă

$$C = 3200;\ D = 10;\ e = 1{,}5;\ p = 3{,}33,$$
$$C_0 = 2200;\ m = 2{,}5;\ c = 1;\ p_k = 3{,}83.$$

Diagrame asemănătoare pot fi trasate pentru toate tipurile și dimensiunile de rulmenți.

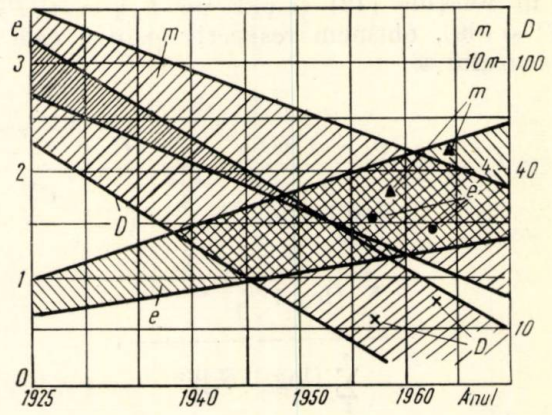


Fig. 1. — Evoluția orientativă a parametrilor de dispersie a rezultatelor încercărilor rulmenților sub sarcină constantă [12], [14].
● — încercări efectuate pe rulmenți radiali cu bile 6308.

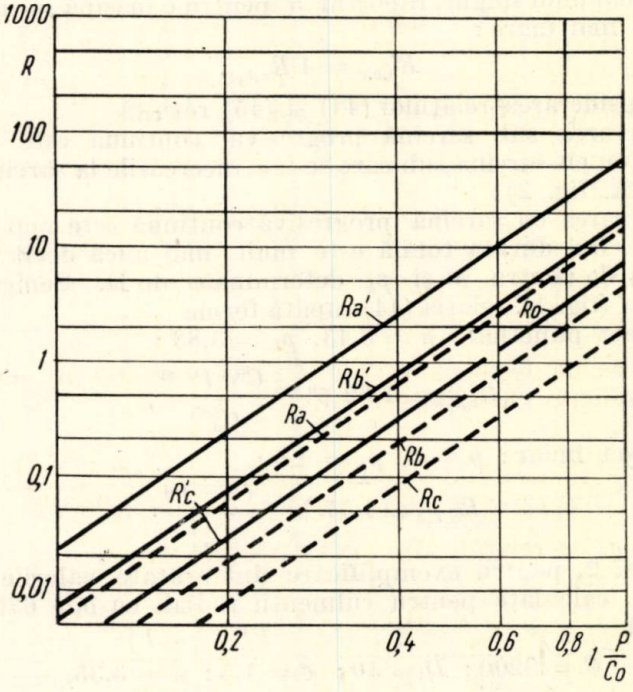


Fig. 2. — Raportul dintre durata încercărilor sub sarcină progresivă continuă și durata încercărilor sub sarcină constantă pentru rulmenți 6308.

3. METODA DE ÎNCERCARE CU SARCINĂ PROGRESIVĂ, LIMITATĂ ȘI REPETATĂ

3.1. *Sarcina echivalentă.* Particularitățile constructive ale mașinilor folosite în mod obișnuit impun în cazul unor încercări economice încercarea concomitentă a patru rulmenți. Astfel de încercări nu permit creșterea continuă și nelimitată a sarcinii, deoarece :

— rulmenții nu se deteriorează toți deodată, așa încît pentru unii rulmenți încercați sarcina nu va crește începînd de la zero, ci de la o anumită valoare corespunzătoare deteriorării rulmenților înlocuiți.

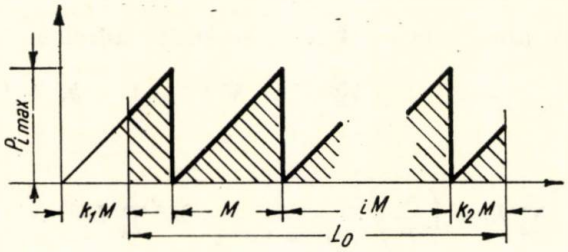


Fig. 3. — Diagrame de variație a sarcinii la metoda de încercare cu sarcină progresivă, limitată și repetată.

Se propune pentru evitarea inconvenientului de mai sus încercarea rulmenților pe mașini de încercare obișnuite cu programarea variației sarcinii de încercare pe baza unei diagrame în dinți de ferăstrău (fig. 3).

Cu notațiile din figura 3, M reprezintă, în rotații, durata unui ciclu de încercare :

$$M = \frac{P_{i\,max}}{\alpha} \text{ și } P_{i\,max} = \frac{C_0}{c}, \tag{49}$$

durabilitatea efectivă a rulmentului în rotații fiind

$$L_{0i} = M(i + 1 - k_1 + k_2). \tag{50}$$

Ținînd seama de cele arătate în § 2.1., cu relația (8) se poate calcula sarcina echivalentă cu expresia

$$P_{0i} = \frac{\alpha}{(p_k + 1)^{1/p_k}} L_{0i} \frac{[i + 1 - k_1^{(p_k+1)} + k_2^{(p_k+1)}]}{[i + 1 - k_1 + k_2]^{(p_k+1)/p_k}}. \tag{51}$$

În mod analog, cu relațiile (10) și (13) rezultă

$$L_i = \left(\frac{\alpha}{P}\right)^p \cdot \frac{L_{0i}^{\frac{p(p_k+1)}{p_k}} [i + 1 - k_1^{(p_k+1)} + k_2^{(p_k+1)}]^{p/p_k}}{(p_k + 1)^{p/p_k} [i + 1 - k_1 + k_2]^{p(p_k+1)/p_k}} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{P}\right)^p \frac{M^{p(p_k+1)/p_k}}{(p_k + 1)^{p/p_k}} [i + 1 - k_1^{p_k+1} + k_2^{p_k+1}]^{p/p_k}. \tag{52}$$

Capacitatea dinamică de bază a unui lot încercat după această metodă se poate calcula cu relația cunoscută

$$C = P_{00,9} L_{00,9}^{1/p_k}, \tag{53}$$

în care $P_{00,9}$ este sarcina echivalentă corespunzătoare durabilității $L_{00,9}$ (relația (51)).

3.2. *Durata încercărilor.* Din relația (52) de transformare a durabilităților se poate deduce expresia

$$\sum_1^n L_i = \left(\frac{\alpha}{P}\right)^p \frac{1}{(p_k+1)^{p/p_k}} M^{p(p_k+1)/p_k} \sum_1^n [i+1-k_1^{p_k+1}+k_2^{p_k+1}]^{p/p_k}. \tag{54}$$

Cu oarecare aproximație (fig. 4) se poate admite

$$\sum_1^n [i+1-k_1^{p_k+1}+k_2^{p_k+1}] \simeq \sum_1^n [i+1-k_1+k_2] \tag{55}$$

și deci

$$\sum_1^n L_i = \left(\frac{\alpha}{P}\right)^p \cdot \frac{1}{(p_k+1)^{p/p_k}} \cdot M^p \sum_1^n L_{0i}^{p/p_k}. \tag{56}$$

În aceste condiții, raportul dintre durata totală a încercărilor cu sarcină progresivă, limitată și întreruptă și durata totală a încercărilor sub sarcină constantă este

$$\frac{\sum_1^n L_{0i}}{\sum_1^n L_i} = R_0 = \frac{p_k+1}{[\log 1/0{,}9]^{\frac{p_k-p}{p\cdot e}}} \cdot \frac{C^{p_k-p} P^p}{P_{0\max}^{p_k}} \cdot \frac{\sum_1^n [\log 1/S_i]^{p_k/pe}}{\sum_1^n [\log 1/S_i]^{1/e}} =$$

$$= \frac{p_k+1}{[\log 1/0{,}9]^{\frac{p_k-p}{pe}}} \cdot \frac{C^{p_k-p} \cdot P^p c^{p_k}}{C_0^{p_k}} \cdot \frac{\sum_1^n [\log 1/S_i]^{p_k/pe}}{\sum_1^n [\log 1/S_i]^{1/e}}, \tag{57}$$

Înlocuind p și p_k cu valorile cunoscute și din figura 6 pentru $n = 25$, se obțin următoarele valori pentru R_0:

— contact punctual

$$R_0 = \frac{5{,}80 \cdot P^{3{,}43} \cdot C^{0{,}4}\, c^{3{,}83}}{C_0^{3{,}83}}; \tag{58}$$

— contact liniar

$$R_0 = \frac{6{,}72 \cdot P^4\, C^{1/2}\, c^{4{,}5}}{C_0^{4{,}5}}. \tag{59}$$

După cum se poate observa din relația (56), durata înce rcărilo nu depinde de valoarea coeficientului α. Într-adevăr

$$\sum_1^n L_{0i} = \left(\frac{P}{\alpha}\right)^{p_k} (p_k+1) \frac{1}{M^{p_k}} \sum_1^n L_i^{p_k/p} \tag{60}$$

și, în continuare,

$$\sum_1^n L_{0i} = \left(\frac{P}{P_{0\max}}\right)^{p_k} \cdot (p_k + 1) \sum_1^n L_i^{p_k/p} . \qquad (61)$$

În figura 2 este arătată variația raportului R_0 în funcție de P/C_0 pentru $c = 1$ la rulmenții 6 308.

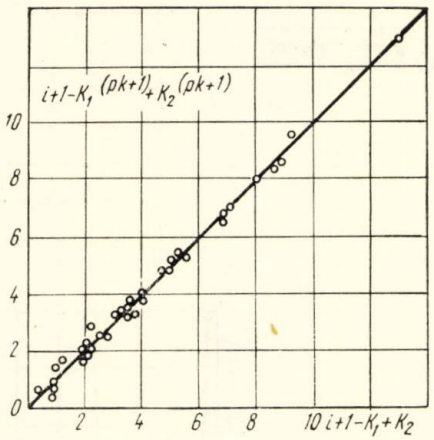


Fig. 4. — Dependența dintre expresiile $(i + 1 - K_1^{p_k+1} + K_2^{p_k+1})$ și $(i + 1 - K_1 + K_2)$ pentru un lot de rulmenți încercați tip 6308.

În figura 5 este dată valoarea expresiei $\sum_1^{25} (\log 1/S_i)^t$ pentru diferite valori ale exponentului t.

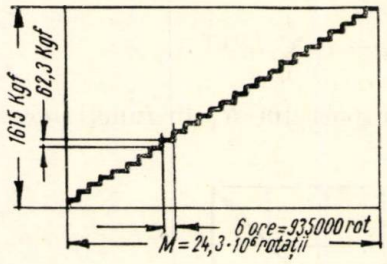
3.3. *Încercări experimentale.* Cu ajutorul metodei de încercare cu sarcină progresivă continuă, limitată și repetată, au fost încercați un număr de 36 de rulmenți radiali cu bile 6308. Încercările s-au efectuat pe o mașină de construcție obișnuită tip TKB-42p cu ungere cu ulei. Variația sarcinii de încercare de la 0 la 1 615 kgf, $P_{i\max} = \frac{C_0}{c} = \frac{2200}{1{,}3}$, s-a realizat în 26 de trepte de cîte 6 ore de funcționare la turația de 2 600 rot/min (fig. 6). Limitarea sarcinii maxime $P_{i\max}$ la 1 615 kgf a fost determinată de particularitățile constructive ale mașinii de încercat, coeficientul de creștere a sarcinii avînd în aceste condiții valoarea

$$\alpha = \frac{P_{i\max}}{M} = \frac{1615 \cdot 10^6}{26 \cdot 6 \cdot 60 \cdot 2600} = 66{,}5 \text{ kgf}/10^6 \text{ rot.}$$

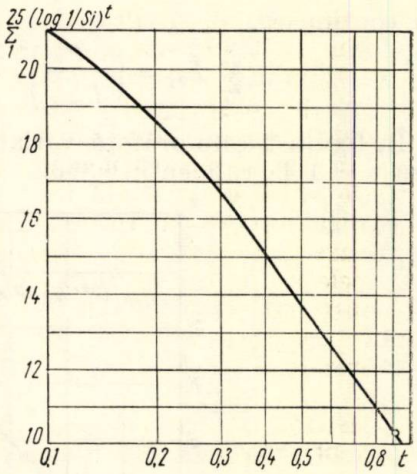
Durata unui ciclu de încercare a fost deci $M = 26{,}6 \cdot 2600/10^6 = 24{,}3$ milioane de rotații.

Pentru comparație, în aceleași condiții de încercare, însă la sarcină constantă de 875 kgf, au fost încercate două loturi de rulmenți de același tip, în total 48 de rulmenți.

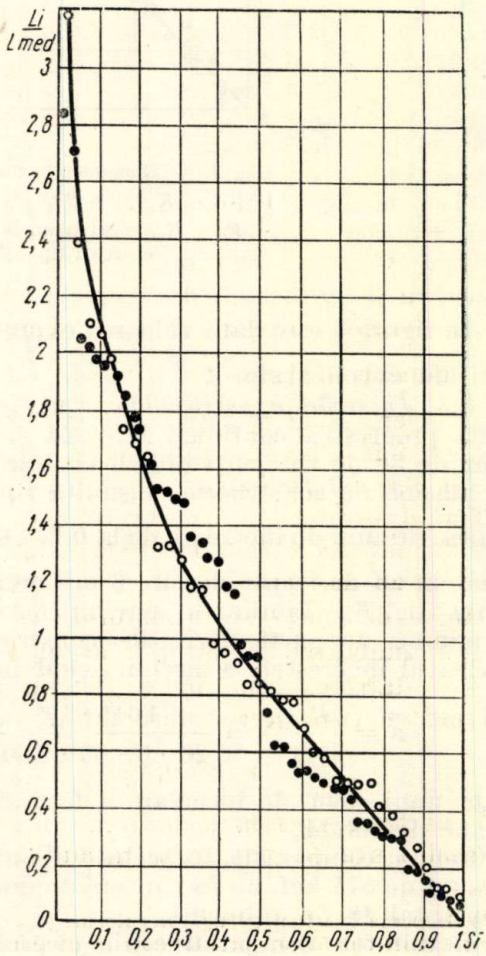
Rezultatele comparative ale încercărilor sînt arătate în figura 6.



5



6



7

Fig. 5. — Valoarea expresiei $\sum_{1}^{25} (\log 1/S_i)^t$, calculată pentru diferite valori ale exponentului t.

Fig. 6. — Diagrama de variație a sarcinii în trepte de cîte 6 ore, în medie $\alpha = 66{,}5$ Kgf/10^6 rot.

Fig. 7. — Rezultatele comparative ale încercărilor efectuate pe rulmenți radiali cu bile 308:
○ — sarcină progresivă limitată și repetată;
● — sarcină constantă;
— — distribuție teoretică pentru $e = 1{,}3$

Din încercări au rezultat următoarele :

— coincidența cea mai bună între rezultatele încercărilor cu sarcină progresivă, limitată și întreruptă și încercările cu sarcină constantă, pe baza relației (52) și (53), se realizează pentru un exponent $p_k = 4$ (fig. 7). De remarcat este faptul că în cazul încercărilor efectuate se obține pentru p_k o valoare apropiată de cea recomandată de D. Senigalliesi pentru rulmenții cu bile ;

— cauzele deteriorării rulmenților sînt în general aceleași în comparație cu încercarea la sarcină constantă, procentajul cel mai mare de deteriorări constatîndu-se la calea de rulare a inelului interior.

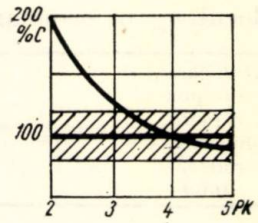


Fig. 8. — Capacitatea dinamică de bază în % la încercarea cu sarcină progresivă limitată și repetată față de încercarea cu sarcină constantă în funcție de exponentul p_k.

4. METODA DE ÎNTRERUPERE A ÎNCERCĂRII DUPĂ DETERIORAREA UNUI NUMĂR LIMITAT DE RULMENȚI DIN LOTUL DE ÎNCERCAT

Durata totală de timp necesară pentru încercarea unui lot de rulmenți este determinată în cea mai mare parte de rulmenții cu durabilitate maximă. Încercările efectuate arată, de exemplu, că pentru încercarea a 25 de rulmenți sub sarcină constantă, pe mașini de încercare obișnuite, sînt necesare circa 15 000 de ore, respectiv 3 750 de ore-mașină ; în aceste condiții se constată că numai 5 rulmenți (20 % din totalul rulmenților), cu durabilitățile cele mai mari din lotul considerat, au durat 6 000 de ore, respectiv 1 500 de ore-mașină, adică 40 % din durata totală de încercare.

Pentru determinarea durabilității și capacității dinamice de bază a unui lot de n rulmenți este semnificativă deteriorarea primilor $\frac{n}{10} + 1$ rulmenți *). Cunoașterea durabilității acestor $\frac{n}{10} + 1$ rulmenți permite aprecierea durabilității pînă la care 0,9 n din rulmenții lotului funcționează fără ca pe suprafețele de contact să apară semne de deteriorare și deci determinarea capacității dinamice de bază.

Ținînd seama de cele expuse mai sus, pentru limitarea duratei încercărilor se preconizează o metodă cu întreruperea încercării în condițiile care se expun mai jos.

Modul de lucru este următorul :

— se stabilește numărul n al rulmenților lotului de încercat ;

— se stabilește numărul de rulmenți a căror deteriorare este semnificativă pentru cunoașterea durabilității de bază a lotului :

$$n_{cr} = 0{,}1\, n + (1 \ldots 2) \text{ *)} ; \qquad (62)$$

— se trece apoi la încercarea rulmenților, care se poate executa pe o mașină sau pe mai multe mașini de încercat ;

*) Se poate eventual adăuga un rulment ($n_{cr} = 0{,}1\, n + 2$) pentru mărirea preciziei în aprecierea curbei durabilitate-probabilitate în porțiunea critică.

— după fiecare înlocuire a unui rulment încercat se face o ordonare a durabilităților rulmenților înlocuiți în ordine crescătoare;

— pentru fiecare ordonare se stabilesc primii rulmenți care au durabilitatea mai mică sau egală cu durabilitatea rulmentului care ocupă locul n_{cr} în ordonarea respectivă:

Ordonarea corespunzătoare înlocuirii rulmentului	Durabilitățile ordonate						
	1	2	3 ...	$n_{cr}-1$	n_{cr}	$n_{cr}+1$	... n
1	L_{11}						
2	L_{12}	L_{22}					
3	L_{13}	L_{23}	L_{33}				
⋮	⋮	⋮	⋮				
$n_{cr}-1$	$L_{1n_{cr}-1}$	$L_{2n_{cr}-1}$	$L_{3n_{cr}-1}\cdots$	$L_{n_{cr}-1\,n_{cr}-1}$			
n_{cr}	$L_{1n_{cr}}$	$L_{2n_{cr}}$	$L_{3n_{cr}}\cdots$	$L_{n_{cr}-1\,n_{cr}}\cdots$	$L_{n_{cr}\,n_{cr}}$		
$n_{cr}+1$	$L_{1n_{cr}+1}$	$L_{2n_{cr}+1}$	$L_{3n_{cr}+1}\cdots$	$L_{n_{cr}-1\,n_{cr}+1}\cdots$	$L_{n_{cr}\,n_{cr}+1}\cdots$	$L_{n_{cr}+1}$	$n_{cr}+1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
n	$L_{1n_{cr}}$	L_{2n}	$L_{3n}\cdots$	$L_{n_{cr}-1\,n}\cdots$	$L_{n_{cr}\,n}\cdots$	$L_{n_{cr}+1\,n}\cdots$	L_{nn}

De la o ordonare la alta, durabilitățile măsurate pot avea diferite locuri în șirul ordonat. Astfel, după deteriorarea și înlocuirea primilor n_{cr} rulmenți deteriorați cu ordonările respective se pot ivi următoarele cazuri:

— rulmentul $n_{cr}+1$ are tendința de a funcționa mai mult decît rulmentul care ocupă locul n_{cr} în ordonarea anterioară. Rulmentul este înlocuit, fără a fi deteriorat, de îndată ce atinge durabilitatea rulmentului care ocupă locul n_{cr} în ordonarea precedentă;

— rulmentul $n_{cr}+1$ se deteriorează la o durabilitate mai mică decît a rulmentului care ocupă locul n_{cr} în ordonarea anterioară. Rulmentul este înlocuit imediat după deteriorare. De fiecare dată după înlocuirea unui rulment, se face, după cum am arătat, ordonarea rulmenților încercați, pentru stabilirea corectă a durabilității care în ordine crescătoare ocupă în șir locul n_{cr} în ordonarea precedentă. Rulmentul $n_{cr}+1$ se deteriorează la o durabilitate mai mică decît a rulmentului care ocupă locul n_{cr} în ordonarea anterioară. Rulmentul este înlocuit imediat după deteriorare.

Ultima ordonare se face după înlocuirea ultimului rulment din lot. Din această ordonare se pot determina cele mai mici n_{cr} durabilități ale rulmenților lotului în ordine crescătoare. Aceste durabilități se trec în diagrama probabilitate-durabilitate, permițînd astfel determinarea durabilității corespunzătoare probabilității de siguranță în funcționare $S = 0{,}9$, $L_{0,9}$ (fig. 9). Capacitatea dinamică de bază se determină cu relația cunoscută:

$$C = PL_{0,9}{}^{1/p}.$$

Avantajele metodei sînt incontestabile și sînt cu atît mai mari, cu cît numărul rulmenților încercați concomitent este mai mare (mai multe mașini de încercat).

În figura 10 sînt arătate în procente în medie față de încercarea clasică la sarcină constantă, duratele de timp necesare pentru încercarea unui lot de 30 de rulmenți, pentru $n_{cr} = 5$ și o dispersie determinată de $e = 1{,}1$ (pe fiecare mașină de încercat se încearcă concomitent patru rulmenți).

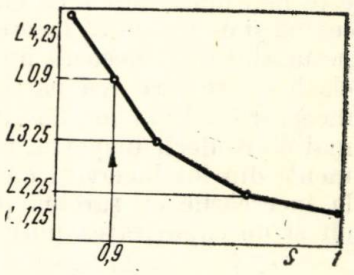


Fig. 9. — Determinarea durabilității $L_{0.9}$ pentru $n = 25$, $n_{cr} = 4$.

După cum se poate vedea, se ajunge la o economie de timp de 40 pînă la 80%, de unde rezultă și o economie apreciabilă de energie.

Economia de timp este cu atît mai mare, cu cît n_{cr} se adoptă mai mic în limitele recomandate. S-a constatat astfel că, dacă încercarea unui lot de 48 de rulmenți 6308 a durat pe o mașină 7 130 de ore, încercarea aceluiași lot în condițiile de mai sus și cu $n_{cr} = 6$ ar fi durat numai 3204 ore, de unde o economie de timp de 66,5% cu consecințele respective; dacă s-ar fi considerat, de exemplu, $n_{cr} = 10$, economia de timp ar fi fost de numai 54,5%.

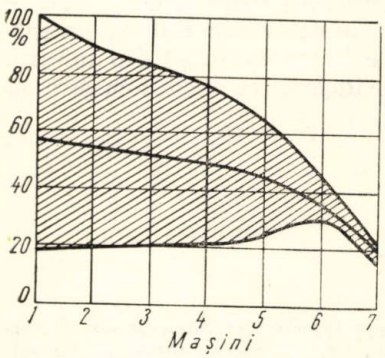


Fig. 10. — Durata medie de timp în procente la încercarea întreruptă cu sarcină constantă față de încercarea clasică cu sarcină constantă; $n = 30$, $n_{cr} = 5$, $e = 1{,}1$

Aceeași metodă de încercare se poate aplica și încercărilor cu sarcină progresivă continuă sau încercărilor cu sarcină progresivă limitată și întreruptă, durata încercărilor micșorîndu-se corespunzător.

Metoda prezintă de asemenea avantaje în legătură cu faptul că se poate controla mai repede calitatea producției de rulmenți, oferind astfel posibilitatea de a acționa prompt asupra factorilor tehnologici care influențează capacitatea dinamică de bază.

5. CONCLUZII

Comparînd diversele metode de încercare a rulmenților expuse în această lucrare, rezultă următoarele:

a. Încercările clasice de rulmenți la sarcină constantă și continuă necesită durată mare de timp și un consum apreciabil de energie; ele nu satisfac eficient procesul tehnologic, în sensul că nu se poate acționa prompt asupra factorilor tehnologici care influențează capacitatea dinamică de bază pentru îmbunătățirea calității producției.

b. Încercările rulmenților cu sarcină progresivă continuă prezintă avantaje în ceea ce privește timpul de încercare (consumul de energie) numai în anumite condiții, așa cum reiese și din figura 2; durata de timp a acestor încercări față de durata de timp a încercărilor clasice este cu atît mai mică cu cît sarcina sub care se execută încercările clasice este mai mică, adică cu cît raportul $R_{a,b,c}$ este mai mic. Trebuie ținut seama și de faptul că încercările cu sarcină progresivă continuă se execută pe mașini care încearcă un singur rulment și nu se pot efectua pe mașini clasice care încearcă patru rulmenți concomitent. Dispersia rezultatelor încercărilor unui lot de rulmenți cu sarcină constantă și continuă este mai mare decît dispersia rezultatelor încercărilor aceluiași număr de rulmenți din lot încercați cu sarcină progresivă continuă. Sarcina maximă la încercările cu sarcină progresivă este limitată atît de raportul C_0/c, cît și de capacitatea portantă a organelor mașinii de încercat.

c. Încercările rulmenților cu sarcină progresivă limitată și repetată prezintă avantaje incontestabile în ceea ce privește durata de timp (consumul de energie) atît față de încercările cu energie progresivă continuă, cît și față de încercările clasice cu sarcină constantă, în anumite condiții, așa cum reiese din figura 2. Trebuie ținut seama și de faptul că prin această metodă se pot utiliza mașinile clasice de încercat rulmenți, mașini care încearcă în mod curent patru rulmenți concomitent.

d. Avantaje economice și tehnologice prezintă metoda de încercare cu întreruperea încercării după determinarea unui număr limitat de rulmenți din lotul de încercat, așa cum reiese din cele expuse în § 4 din lucrare. Economia de timp poate fi de 20—80 % față de încercarea clasică cu sarcină constantă.

Primită la redacție la 24 martie 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. F. Rastenaire, *Étude critique de la notion de dommage appliquée à une classe étendue d'essais de fatigue*, Colloquium on fatigue, Stockholm, 1955, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1956.
2. F. Rastenaire, R. Cazaud, M. Weisz, *Essais de fatigue statistiques suivant la méthode de charge progressive*, Colloquium on fatigue, Stockholm, 1955, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1956.
3. B. Biro, *Time of the endurance tests and developments in fatigue testing machines*, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, XXXV—XXXVI, 339 — 346 (1961).
4. B. Biro, N. Parducz, *Streuung der Lebensdauer von Walzlagern bei konstanter und stetig steigender Belastung*, Maschinenbautechnik, *6*, 321—324 (1965).
5. Eschmann, Hasbargen, Weigand, *Die Walzlagerpraxis*, München, R. Verlag, Oldenbourg, 1953.
6. A. Ferro, U. Rossetti, *Contribution à l'étude de la fatigue des matériaux avec essais à charge progressive*, Colloquium on fatigue, Stockholm, 1955, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1956.
7. L. Giulietti, Kigellager, *Lebensdauer bei gleichbleibender Belastung und bei zunehmender Belastung in Verhältnis zur Steigerung der Tourenzahl*, **IV**, *9* (1962).
8. J. Hajdu, M. Bernath, T. Herlescu, *O mașină pentru încercarea la oboseală sub sarcină progresivă*, St. cerc. șt. tehn. Timișoara, *3—4*, 267—275 (1960).

9. L. Lecati, *Sul criterio di prova ad azione progressiva*, La metallurgia Italiana, *5*, 179—184 (1959).
10. G. Lundberg, A. Palmgren, *Dynamic Capacity of Roller Bearings*. Acta Polytechnica, Mechanical Engineering Series, vol. 2, *4* (1947).
11. Palmgren A., *Grundlagen der Walzlagertechnik*. Stuttgart, Frank'sche Verlagshandlung, 1954.
12. N. G. Popinceanu ș. a., *Betrachtungen über die dynamische Tragfähigkeit der Walzlager*, Bulet. Inst. politehnic din Iași, **V**, (**II**), *3—4* (1959).
13. M. Prot, *Essais de fatigue sous charge progressive*, Rev. G-rale de Mécanique, **19**, *1—4* (1953).
14. L. Rect, *Life dispersion of antifriction bearings*, Iron and Steel Engineering, *38*, *11*, 113—119 (1961).
15. D. Senigalliesi, *Die Lebensdauer der Walzlager unter zunehmender Belastung*, **IV**, *9* (1962).
16. S. V. Serensen ș.a., *Procinosti pri nestalionnîh rejimah nagruzki*, Kiev, Izd. Akad. Nəuk SSSR, 1961.
17. W. Weibull, *Basic aspects of fatigue*, Colloquium on fatigue, Stockholm, 1955, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1956.
18. W. Weibull, *Ustalostnîe ispîtania i analiz ih rezultatov*, Moskva, Mașinostroenie, 1964.

SISTEMATIZAREA GENERALĂ ŞI CALCULUL UNITAR AL MECANISMELOR FUNDAMENTALE PLANE, PENTALATERE ŞI PATRULATERE [1])

de R. C. BOGDAN şi T. V. HUNCHER
Centrul de mecanica solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

531.1

Lucrarea se bazează pe metoda folosirii seriilor armonice complexe în studiul mecanismelor plane. Stabilindu-se anumite considerente de ordin general în rezolvarea cinematică a grupelor structurale binare (grupe assurice) se face apoi o sistematizare generală a mecanismelor obținute prin asocierea diadelor la două elemente conducătoare (de rotație, de translație sau combinat).
Se prezintă de asemenea soluțiile obținute în studiul general al diadelor în condițiile specifice ale clasei mecanismelor cu cinci sau cu patru elemente, caz în care capătă anumite forme simplificate; metoda folosită permite a se ajunge la un calcul unitar pentru diferitele tipuri de mecanisme pentalatere, precum și pentru mecanismele patrulatere ca un caz particular al primelor. În lucrare se tratează și o aplicație numerică în cazul unui mecanism cu cinci elemente.
Lucrarea evidențiază faptul că aplicarea metodei seriilor armonice complexe în studiul mecanismelor cu cinci elemente facilitează studiul acestei clase de mecanisme, prea puțin cercetată pînă în prezent datorită dificultăților pe care le prezintă în acest caz metodele clasice.

Dezvoltarea continuă a industriei moderne, și în special a industriei constructoare de mașini, determină abordarea unor studii din ce în ce mai adîncite în domeniul teoriei mecanismelor. Noi clase și tipuri de mecanisme sînt cercetate prin elaborarea de teorii generale, adaptabile atît mecanismelor simple, cît și celor complexe.

Metoda seriilor armonice complexe [5]—[7], elaborată pentru cazul mișcării generale a grupelor structurale binare, dă posibilitatea cercetării ample a analizei și sintezei mecanismelor cu cinci elemente; considerăm că aceste sisteme structurale sînt mecanisme de bază în construcția de

[1]) Prezentată la a 9-a Conferință de mecanisme, Purdue University Lafayette, Indiana, SUA, 10 — 12 octombrie 1966, publicată în Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, Paper No. 66 — Mech — 11.

mașini și încă puțin cercetate, datorită dificultăților pe care le prezintă.

Soluțiile obținute prin cercetarea generală a grupelor structurale binare, în condițiile concrete ale clasei mecanismelor cu cinci sau cu patru elemente, vor căpăta forme simplificate, cu ajutorul cărora vom cerceta proprietățile parametrilor cinematici ai acestora.

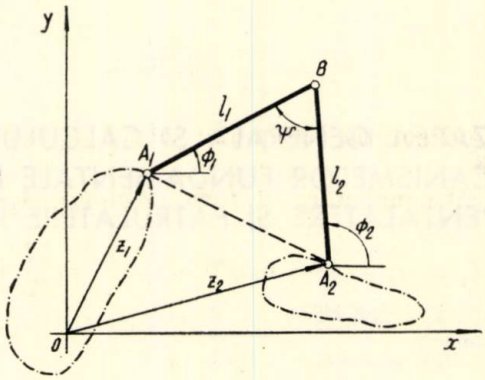


Fig. 1

Se poate stabili de asemenea și corelația dintre sinteza și analiza mecanismelor pe baza studiului general prin serii armonice complexe.

Astfel, în rezolvarea cinematică a diadei de aspectul I, se consideră că cele două cuple potențiale A_1 și A_2 pot constitui legăturile cu alte elemente în vederea formării unui mecanism (fig. 1).

Traiectoriile oarecare în cazul unei mișcări generale descrise de punctele A_1 și A_2 pot fi definite prin vectorii de poziție complecși z_1 și z_2, care se presupun cunoscuți sub forma dezvoltării lor în serii Fourier complexe

$$z_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} e^{ik\varphi}, \tag{1}$$

$$z_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} e^{ik\varphi}, \tag{2}$$

unde φ este parametrul lagrangean al mecanismului.

Considerînd cunoscute dimensiunile l_1 și l_2 pentru determinarea unghiurilor Φ_1, Φ_2 și ψ, folosim dezvoltările

$$e^{i\Phi_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)} e^{ik\varphi}, \tag{3}$$

$$e^{i\Phi_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(2)} e^{ik\varphi}, \tag{4}$$

$$e^{i\psi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k e^{ik\varphi}, \tag{5}$$

unde $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$ şi B_k sînt coeficienţii seriilor respective [4] — [7], între ei existînd relaţiile de legătură (6)

$$B_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{k+m}^{(2)} \overline{A}_k^{(1)},$$

$$A_m^{(1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{k+m}^{(2)} \overline{B}_k, \tag{6}$$

$$A_m^{(2)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{k+m}^{(1)} B_{-k},$$

una dintre ele dînd soluţia sistemului infinit de ecuaţii dat de fiecare din celelalte două.

Considerînd în continuare vectorul complex A_1A_2

$$A_1A_2 = z_2 - z_1 = l_1 \, e^{i\Phi_1} - l_2 \, e^{i\Phi_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k \, e^{ik\varphi}, \tag{7}$$

cu

$$\beta_k = \alpha_k^{(2)} - \alpha_k^{(1)},$$

obţinem vectorii V_1 şi V_2, ai căror coeficienţi C_k exprimă legătura dintre β_k şi A_k:

$$V_1 = A_1A_2 \cdot e^{-i\Phi_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k^{(1)} \, e^{ik\varphi}, \tag{8}$$

$$V_2 = A_1A_2 \cdot e^{-i\Phi_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k^{(2)} \, e^{ik\varphi}, \tag{9}$$

cu

$$C_m^{(1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m} \overline{A}_k^{(1)}; \quad \beta_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(1)} A_{-k}^{(1)},$$

sau

$$C_m^{(2)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m} \overline{A}_k^{(2)}; \quad \beta_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(2)} A_{-k}^{(2)}. \tag{10}$$

Produsul vectorului complex V_1 prin conjugatul său complex $\overline{V}_1$ ne dă:

$$V_1\overline{V}_1 = |A_1A_2|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k \, e^{ik\varphi} \tag{11}$$

şi

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m} \overline{\beta}_k = \gamma_m,$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(1)} C_k^{(1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(2)} C_k^{(2)} = \gamma_m, \tag{12}$$

iar raportul vectorilor complecși V_1 și V_2 ne dă legătura cu coeficienții C_m și β_k:

$$C_m^{(1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(2)} B_{-k},$$

$$C_m^{(2)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(1)} \overline{B}_k. \tag{13}$$

Din expresia

$$|A_1A_2|^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \psi$$

obținem

$$\cos \psi = \frac{l_1^2 + l_2^2 - \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ik\varphi}}{2 l_1 l_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_k e^{ik\varphi}, \tag{14}$$

unde $\Delta_k = \overline{\Delta}_{-k}$ sînt coeficienții dezvoltării în serie Fourier a funcției trigonometrice cos ψ reale.

Coeficienții Δ_k pot fi determinați în funcție de γ_k și parametrii geometrici ai diadelor prin expresiile

$$\Delta_k = -\frac{\gamma_k}{2 l_1 l_2},$$

$$\Delta_0 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - \gamma_0}{2 l_1 l_2}. \tag{15}$$

Considerînd și dezvoltarea funcției trigonometrice sin ψ de forma

$$\sin \psi = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k e^{ik\varphi}, \tag{16}$$

în care

$$D_k = \overline{D}_{-k},$$

obținem

$$D_k = \frac{B_k - \overline{B}_{-k}}{2\,i}, \tag{17}$$

ceea ce duce la determinarea coeficienților D_k, cu condiția cunoașterii coeficienților B_k.

Considerînd cunoscute legile de mișcare ale punctelor de legătură A_1 și A_2, prin determinarea succesivă a coeficienților α_k, β_k, γ_k și Δ_k se pot afla coeficienții B_k și D_k și în final C_k și A_k, ceea ce reprezintă rezolvarea cinematicii acestei grupe structurale assurice.

Pentru diada de aspect II apare caracteristic faptul că unghiul de transmitere ψ este constant (fig. 2), variind în schimb lungimea $l_1 = A_1B$ pe care o putem considera:

$$l_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k e^{ik\varphi}, \tag{18}$$

în care $L_k = \overline{L}_{-k}$ sînt coeficienţii ce trebuie determinaţi împreună cu coeficienţii $A_k^{(1)}$ şi $A_k^{(2)}$.

Considerînd de asemenea cunoscute legile mişcării generale ale cuplelor potenţiale A_1 şi A_2, avem determinaţi vectorii de poziţie complecşi z_1 şi z_2:

$$z_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} e^{ik\varphi}, \tag{19}$$

$$z_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} e^{ik\varphi}. \tag{20}$$

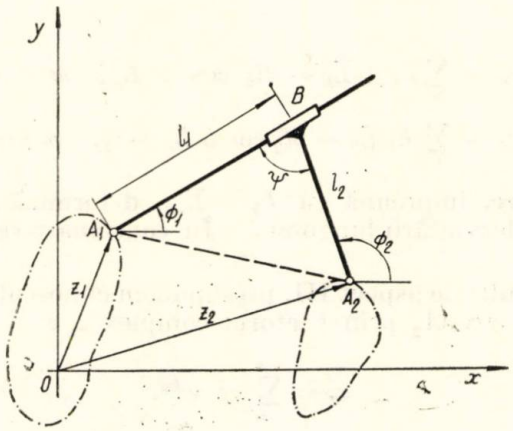


Fig. 2

Conducînd calculul după modelul diadei de aspect I, vom obţine şi aici relaţii asemănătoare:

$$A_1A_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{ik\varphi}, \tag{21}$$

şi

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1A_2 e^{-i\Phi_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k^{(1)} e^{ik\varphi}, \\ V_2 &= A_1A_2 e^{-i\Phi_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k^{(2)} e^{ik\varphi}, \end{aligned} \tag{22}$$

cu relaţiile de legătură

$$\begin{aligned} C_m^{(1)} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m} \overline{A}_k^{(1)}, \\ \beta_m &= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(1)} A_{-k}^{(1)} \end{aligned} \tag{23}$$

şi

$$C_k^{(2)} = e^{-i\psi} \cdot C_k^{(1)}.$$

În cazul produselor

$$V_1\overline{V}_1 = |A_1A_2|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ik\varphi}, \tag{24}$$

din triunghiul A_1BA_2, rezultă

$$|A_1A_2|^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \psi, \tag{25}$$

respectiv

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{im\varphi} = \sum_m \left(\sum_k L_{k+m} \overline{L}_k \right) e^{im\varphi} + l_2^2 - 2 l_2 \cos \psi \left(\sum_m L_m e^{im\varphi} \right).$$

Expresiile

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \sum_k L_{k+m} \overline{L}_k - 2l_2 \cos \psi \; L_m, \quad m \neq 0, \\ \gamma_0 &= \sum_k L_k \overline{L}_k - 2l_2 \cos \psi \, L_0 + l_2^2, \quad m = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

sînt ecuațiile care, împreună cu $L_k = \overline{L}_{-k}$, determină necunoscutele L_k, deci coeficienții dezvoltării lungimii l_1. În continuare se obțin coeficienții $C_k^{(1)}$, $A_k^{(1)}$ și $A_k^{(2)}$.

În cazul diadei de aspect III, presupunem cunoscută mișcarea cuplei de rotație exterioare A_2 prin vectorul complex z_2:

$$z_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} e^{ik\varphi}, \tag{27}$$

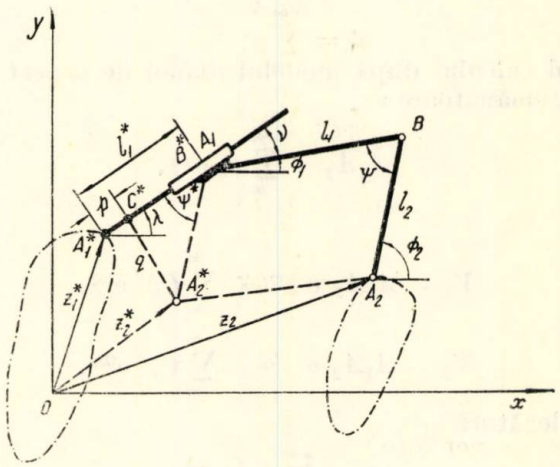


Fig. 3

precum și suportul de-a lungul căreia se produce translația (fig. 3).

Pentru mișcarea suportului de translație se consideră cunoscut un vector de poziție complex z_1^* al unui punct A_1^* de pe suport, precum și unghiul λ al suportului cu sensul pozitiv al axei ox; de asemenea este

cunoscut unghiul ν al cuplei de translaţie :

$$z_1^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)*} e^{ik\varphi}, \tag{28}$$

$$e^{i\lambda} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_k e^{ik\varphi}. \tag{29}$$

Cum

$$\Phi_1 = \lambda - \nu,$$

avem

$$A_k^{(1)} = e^{-i\nu} \cdot \lambda_k. \tag{30}$$

De asemenea vectorul complex OA_1^*

$$z_2^* = z_2 - l_1 e^{i\Phi_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)*} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{31}$$

respectiv

$$\alpha_k^{(2)*} = \alpha_k^{(2)} - l_1 A_k^{(1)}. \tag{32}$$

În acest mod, studiul diadei A_1BA_2 se reduce la studiul ansamblului $A_1^* B^* (A_1) A_2^*$, care este o diadă de aspectul II, avînd cunoscute mişcările punctelor exterioare A_1^* şi A_2^* prin vectorii de poziţie complecşi z_1^* şi z_2^*, precum şi direcţia elementului-suport, căci $\Phi_1^* = \lambda$, respectiv $A_k^{(1)*} = \lambda_k$.

Pentru diada de aspect IV presupunem cunoscute mişcările suporturilor celor două cuple de translaţie A_1 şi A_2 cu vectorii de poziţie complecşi z_1^* şi z_2^* ai punctelor A_1^* şi A_2^*, precum şi unghiurile λ_1 şi λ_2 pe care le fac suporturile cu sensul pozitiv al axei ox (fig. 4), în care caz

$$z_1^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)*} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{33}$$

$$z_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)*} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{34}$$

$$e^{i\lambda_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{35}$$

$$e^{i\lambda_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{36}$$

iar

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \lambda_1 - \nu_1, \\ \Phi_2 &= \lambda_2 + \nu_2. \end{aligned} \tag{37}$$

De asemenea, pentru lungimile l_1^* şi l_2^* vom avea următoarele dezvoltări :

$$l_1^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{38}$$

$$l_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{39}$$

în care trebuie să determinăm coeficienții $L_k^{(1)}$ și $L_k^{(2)}$ împreună cu coeficienții B_k, proveniți din

$$e^{i\psi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k \cdot e^{ik\varphi}. \tag{40}$$

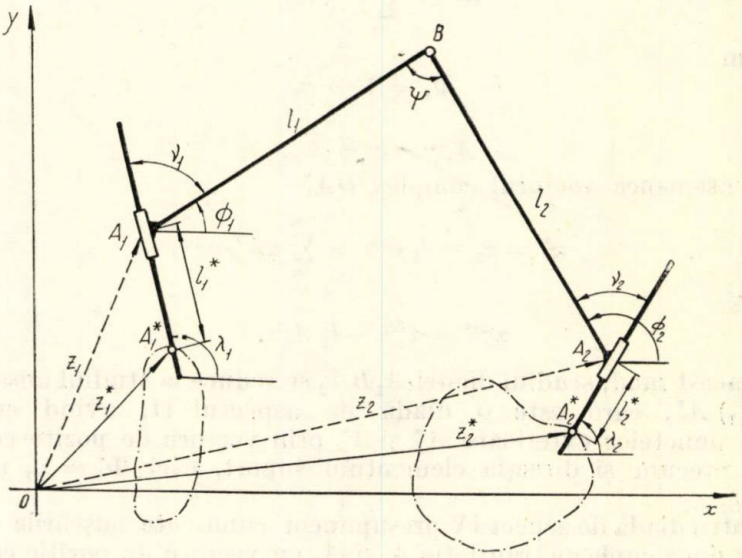


Fig. 4

Considerînd vectorii de poziție variabili ai punctelor A_1 și A_2, aceștia vor avea expresiile

$$z_1 = z_1^* + l_1^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{41}$$

$$z_2 = z_2^* + l_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{42}$$

Studiul diadei de aspect IV se poate reduce însă la cel al diadei de aspect I, A_1BA_2 obținînd diferite relații de legătură :

$$\alpha_k^{(1)} = \alpha_k^{(1)*} + L_k^{(1)}, \tag{43}$$

$$\alpha_k^{(2)} = \alpha_k^{(2)*} + L_k^{(2)}, \tag{44}$$

și

$$\beta_k = l_1 \cdot e^{-i\nu_1} \cdot \lambda_k^{(1)} - l_2 \cdot e^{i\nu_2} \cdot \lambda_k^{(2)}, \tag{45}$$

în care coeficienții $L_k^{(2)}$ și $L_k^{(1)}$ sînt legați prin relațiile

$$\begin{aligned} L_k^{(2)} - L_k^{(1)} &= \alpha_k^{(1)*} + l_1 \cdot e^{-i\nu_1} \cdot \lambda_k^{(1)} - (\alpha_k^{(2)*} + l_2 \cdot e^{i\nu_2} \cdot \lambda_k^{(2)}) = \\ &= \alpha_k^{(1)*} - \alpha_k^{(2)*} + \beta_k, \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} L_k^{(2)} &= \overline{L}_{-k}^{(2)}, \\ L_k^{(1)} &= \overline{L}_{-k}^{(1)}. \end{aligned} \tag{47}$$

În studiul diadei de aspect V vom considera cunoscut vectorul de poziţie complex al punctului A_1 (fig. 5) :

$$z_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{48}$$

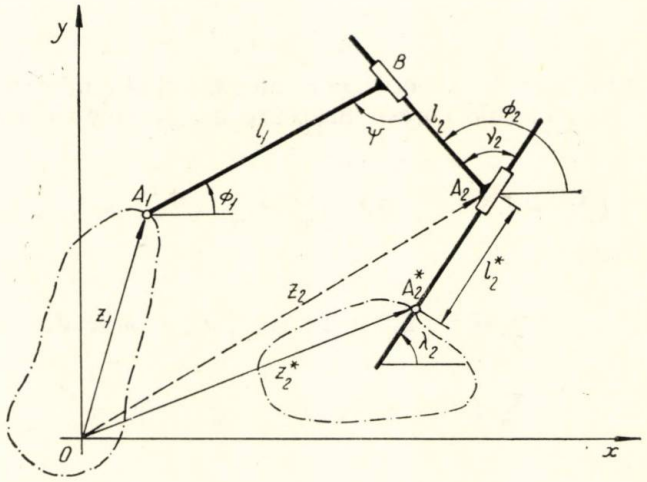


Fig. 5

Se mai consideră de asemenea cunoscute mişcarea suportului cuplei A_2, deci vectorul de poziţie complex z_2^* al punctului A_2^*, precum şi unghiul λ_2 al suportului cu sensul pozitiv al axei ox :

$$Z_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)*} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{49}$$

$$e^{i\lambda_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{50}$$

Unghiul de transmitere ψ este fix, deci

$$B_0 = e^{i\psi} \; ; \quad B_k = 0, \quad k \neq 0. \tag{51}$$

Pentru unghiul Φ_1 vom avea dezvoltarea cunoscută

$$e^{i\Phi_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{52}$$

Variabile mai sînt şi lungimile l_2 şi l_2^* , pentru care vom avea

$$l_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{53}$$

$$l_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(2)*} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{54}$$

Considerînd acum vectorul complex variabil z_2 al punctului A_2, acesta va avea expresia

$$z_2 = z_2^* + l_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{55}$$

unde

$$\alpha_k^{(2)} = \alpha_k^{(2)*} + L_k^{(2)*} \tag{56}$$

şi astfel studiul diadei de aspect V se reduce la cel al diadei de aspect II.

Considerînd relaţiile corespunzătoare dintre coeficienţii

$$\beta_k = l_1 \lambda_k^{(2)} \cdot e^{i(\nu_2 - \psi)} - L_k^{(2)}, \tag{57}$$

$$L_k^{(2)*} + L_k^{(2)} = l_1 \cdot \lambda_k^{(2)} \cdot e^{i(\nu_2' - \psi)} - \alpha_k^{(2)*} + \alpha_k^{(1)}, \tag{58}$$

vom avea relaţiile

$$\gamma_m = \sum_k L_{k+m}^{(2)} L_k^{(2)} - 2l_1 \cos\psi L_m^{(2)}, \quad m \neq 0, \tag{59}$$

$$\gamma_0 = \sum_k L_k^{(2)} L_k^{(2)} - 2l_1 \cos\psi L_0^{(2)} + l_1^2, \quad m = 0, \tag{60}$$

unde

$$\begin{aligned} L_k^{(2)} &= \overline{L}_{-k}^{(2)}, \\ L_k^{(2)*} &= \overline{L}_{-k}^{(2)*}. \end{aligned} \tag{61}$$

Se observă deci că metodologia de tratare prin serii armonice complexe a celor cinci diade este asemănătoare, iar o dată cu determinarea coeficienţilor $A_k^{(1)}$ şi $A_k^{(2)}$ diadele sînt complet rezolvate şi se poate trece la calculul cinematic al oricărui punct legat de unul dintre elementele l_1 sau l_2.

Întrucît desfăşurarea calculelor în cazul mecanismelor complexe are un caracter mai laborios, este necesar să se ţină seama de condiţiile de îmbunătăţire a rapidităţii convergenţei seriilor Fourier complexe, care conduc la simplificări apreciabile [5] — [7].

Mecanismele pentalatere obţinîndu-se prin legarea uneia dintre cele cinci diade la două manivele, cercetarea lor prin metoda seriilor armonice complexe se simplifică mult, deoarece traiectoriile punctelor A_1 şi A_2 (respectiv A_1^* şi A_2^*) sînt ori circulare, ori liniare, ceea ce scoate în evidenţă că vectorii de poziţie complecşi au dezvoltări limitate.

În alcătuirea variantelor structurale ale mecanismelor cu cinci elemente s-a pornit de la cele patru baze distincte (fig. 6) la care s-au adăugat pe rînd, la fiecare, cele şase lanţuri cinematice din două elemente, care se pot forma prin legarea lor cu cuple de rotaţie şi translaţie, obţinîndu-se diadele din figura 7.

În alcătuirea mecanismelor, dată fiind simetria diagramelor cinematice ce se obţin, nu s-au considerat drept cazuri distincte cele de tipul *a* faţă de *b* (fig. 8).

Deoarece mecanismele cu cinci elemente au două grade de mobilitate, apare necesitatea acţionării a două manivele. La mecanismele pentalatere

care au baza RR pentru antrenarea manivelelor, se poate folosi un tren de roți dințate montat pe elementul O_1O_2 (fig. 9).

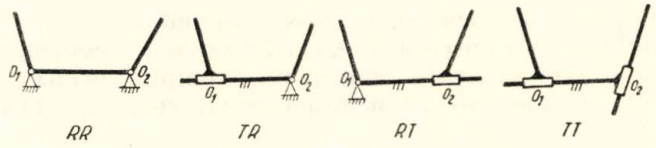


Fig. 6

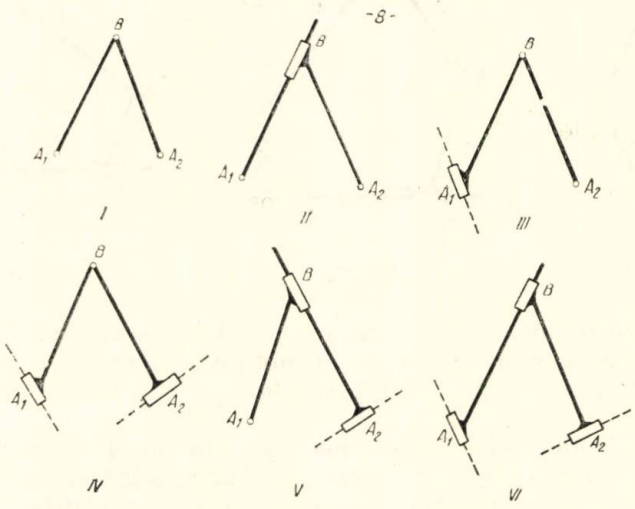


Fig. 7

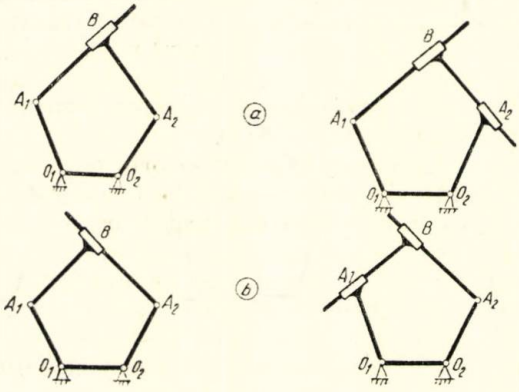


Fig. 8

În felul acesta se asigură dezmodromia mecanismului, avînd $\bar{\omega}_2 = f(\bar{\omega}_5)$; raportul de transmitere $\eta = \frac{\omega_5}{\omega_2}$ poate avea valori subunitare sau supraunitare, negative sau pozitive [5] — [7], [14].

În cazul mecanismelor formate cu baza RT sau TR se urmărește realizarea unei legături funcționale între viteza $\overline{v}_2$ a pietrei de culisă și viteza unghiulară $\overline{\omega}_5$ a manivelei (fig. 10), ceea ce se poate concretiza, de exemplu, printr-un mecanism bielă-manivelă.

Utilizînd baza TT, se cere pentru asigurarea dezmodromiei o legătură între $\overline{v}_2$ și $\overline{v}_5$, care se poate realiza, de exemplu, printr-o combinație de roți dințate cu mecanisme bielă-manivelă, vezi (fig. 11).

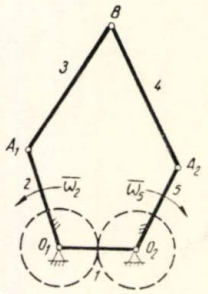


Fig. 9

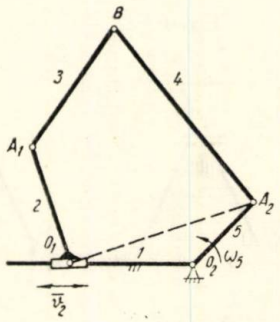


Fig. 10

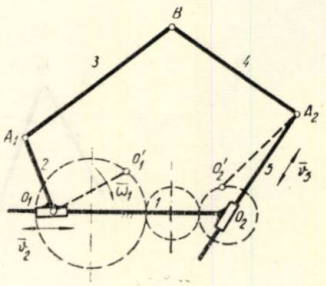
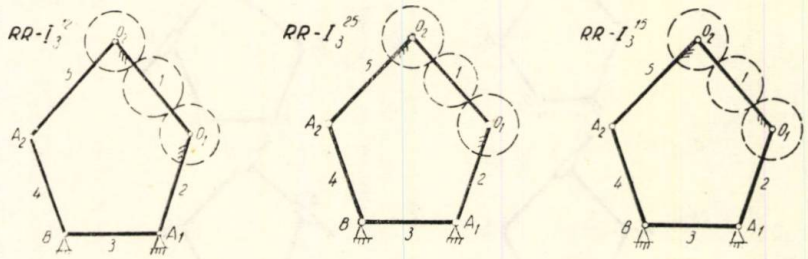


Fig. 11

Prin construirea mecanismelor cu cinci elemente, în funcție de alegerea elementelor motoare, se pot obține și tipuri derivate; astfel, de exemplu, din tipul $RR - I_3^{25}$ (fig. 12 (a, b, c)) se pot deduce $RR - I_3^{12}$ și $RR - I_3^{15}$.

În cazul cînd prin rotirea mecanismului unul dintre elementele 2 sau 5 devine bază, deci fix, se consideră tipuri echivalente derivate.

S-a căutat a se menține aceeași poziție a motorului de antrenare față de elemente; în cazul în care manivelele nu sînt adiacente bazei, mișcarea se transmite prin diverse alte legături auxiliare, avîndu-se însă în vedere a se păstra legătura funcțională ce caracterizează tipul respectiv.



a) *b)* *c)*

Fig. 12

La mecanismele pentalatere cu baza TT s-a considerat și posibilitatea folosirii lanțului cinematic format din două elemente și trei cuple de translație (grupa VI). Se obține însă un mecanism de familia IV, cu gradul de mobilitate $M = 3$. La celelalte baze, grupa VI nu dă variante distincte, ele întîlnindu-se ca tipuri fundamentale în alte situații.

În baza tabelei I, unde sînt prezentate tipurile distincte de mecanisme cu cinci elemente obţinute conform modului arătat mai sus, rezultă:

Baza	*Mecanisme posibile*	*Mecanisme distincte*
RR	40+32[2])	17
TR	40	6
RT	40	9
TT	40	13
Total	192	45

Diferenţa dintre numărul mecanismelor posibile şi cele distincte se datoreşte faptului că la schimbarea elementului fix prin rotirea pentagonului se obţin tipuri de mecanisme echivalente.

În cazul cînd la mecanismul pentalater se consideră elementul $1 - O_1O_2$ egal cu zero, în articulaţia O rezultă o cuplă cinematică dublă şi se obţine o nouă clasă derivată $ORR - ORT - OTR - OTT$. În tabela II sînt arătate tipurile distincte, alcătuite pe aceleaşi principii. Se observă că mecanismele din baza ORT nu sînt distincte faţă de cele din baza OTR. De asemenea, nu pot apărea tipuri de mecanisme derivate obţinute prin rotirea figurii iniţiale, întrucît ajungem la mecanisme patrulatere, articulaţia dublă din O anulîndu-se. Cazul mecanismelor patrulatere este arătat în tabela III; s-au considerat mecanismele formate cu ajutorul grupei VI aparţinînd familiei IV şi avînd deci gradul de mobilitate mai mare cu o unitate.

În schemele cinematice aparţinînd tabelelor I, II şi III, mecanismele s-au desenat cu laturile egale pentru simplificare; în alcătuirea practică însă trebuie să se ţină seama şi de anumite restricţii constructive de mobilitate [5] — [7], de anumite relaţii şi rapoarte ce sînt necesare între elementele mecanismelor.

Studiul mecanismelor cu cinci elemente cu ajutorul seriilor armonice complexe şi al celor cu patru elemente ca un caz particular al primelor conduce la determinarea vectorilor de poziţie complecşi ai oricăror puncte legate de elementele grupei ca funcţii explicite de parametrul lagrangean ales. Prin derivări simple se obţin sub aceeaşi formă vitezele şi acceleraţiile. Pe baza concepţiei generale a studiului se poate folosi metoda seriilor armonice complexe şi în cercetarea mecanismelor cu un număr de elemente mai mare ca 5, formulele practice de calcul putînd fi transpuse în diagrame [1], [2], [6], [7]. Obţinerea parametrilor mecanismelor sub forma unor dezvoltări în serii armonice complexe facilitează studiul dinamicii mecanismelor atît în problemele de analiză, cît şi de sinteză, sinteza studiindu-se într-un mod asemănător analizei, ceea ce dă metodei un caracter unitar pentru ambele probleme [5], [15]. Calculele pot fi adaptate pentru programare la calculatoare electronice.

Studiile făcute asupra mecanismelor pentalatere de tipul $RR - I_1^{25}$ au fost completate cu metoda mecano-electronică de cercetare experimentală a mecanismelor, care evidenţiază sub aspect cantitativ şi calitativ variaţia parametrilor mecanismelor, prin observare şi înregistrare

[2]) Mecanisme derivate în baza *RR*.

Tabela I. 1

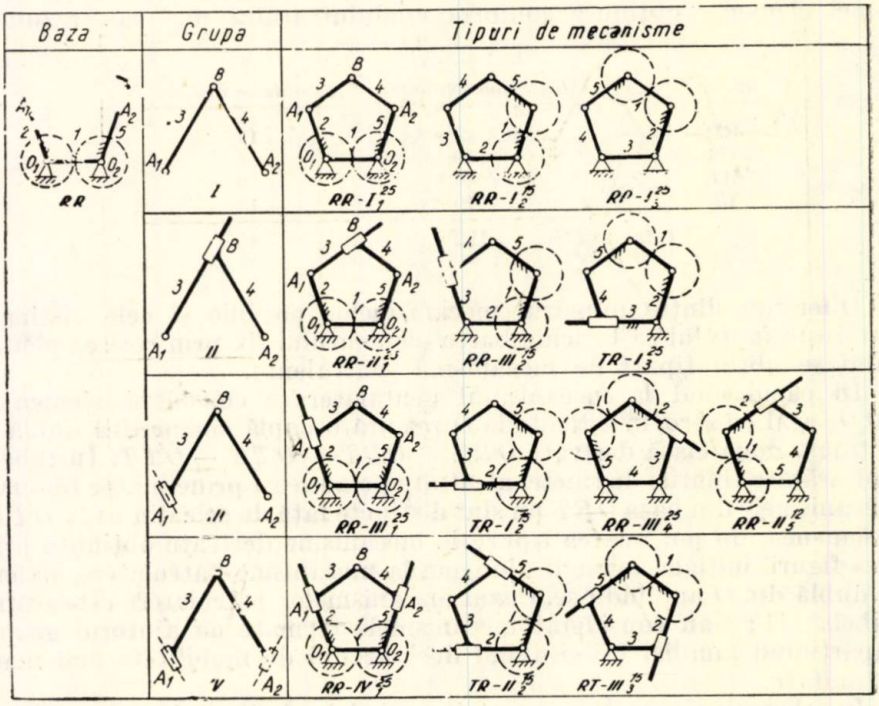


Tabela I. 2

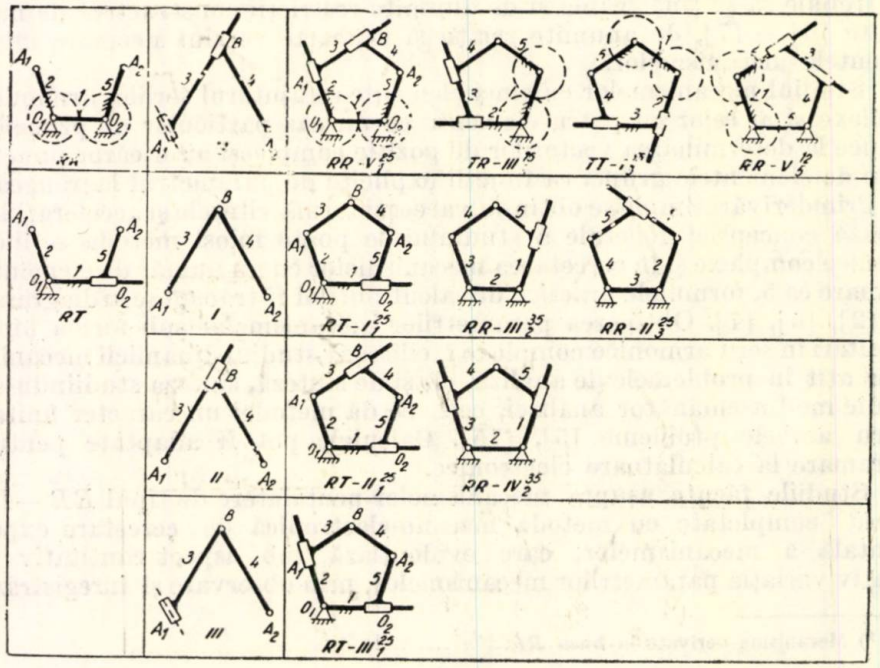


Tabela I. 3

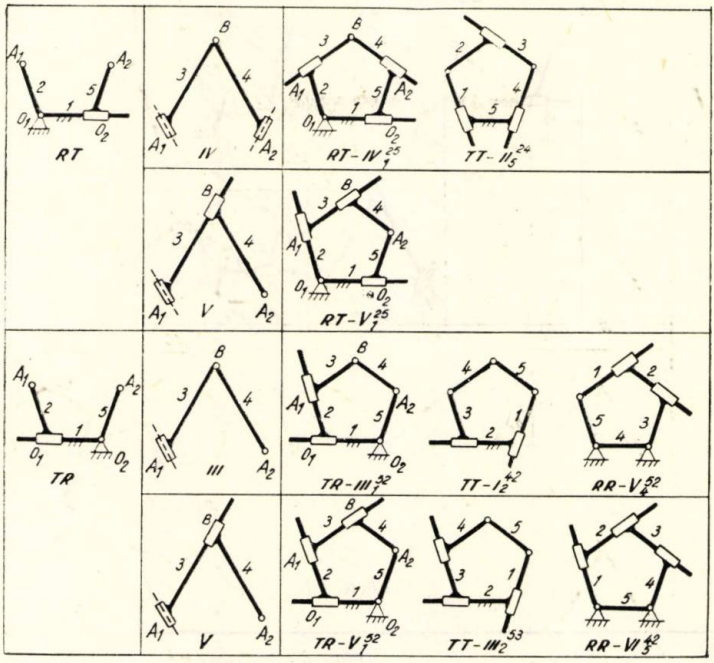


Tabela I. 4

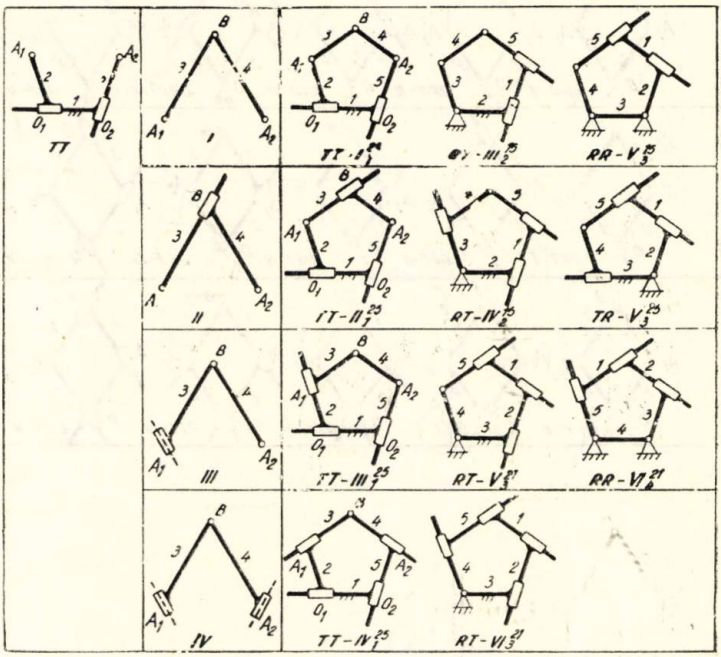


Tabela I. 5

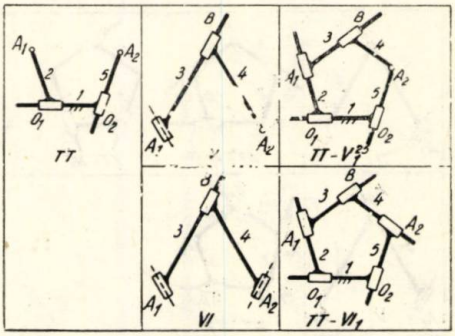


Tabela II

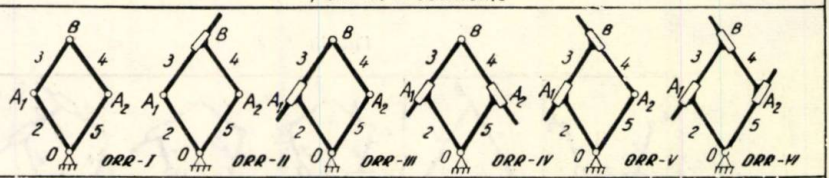
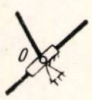
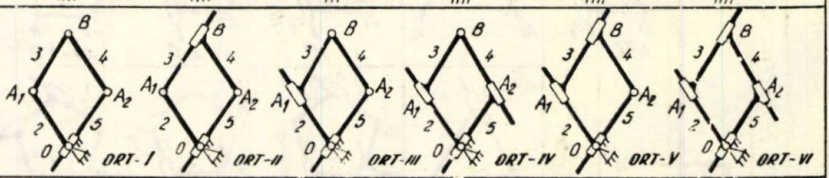
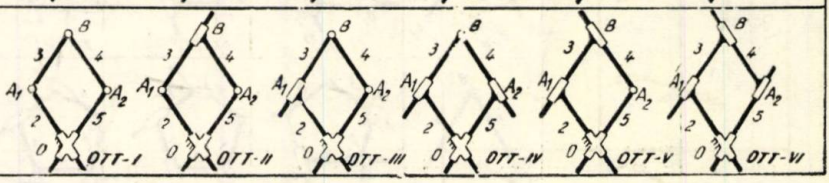
Baza	Tipuri de mecanisme
ORR	 ORR-I ORR-II ORR-III ORR-IV ORR-V ORR-VI
 ORT = OTR	 ORT-I ORT-II ORT-III ORT-IV ORT-V ORT-VI
OTT	 OTT-I OTT-II OTT-III OTT-IV OTT-V OTT-VI

Tabela III. 1

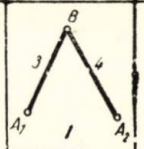
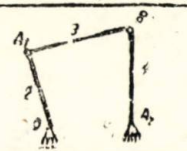
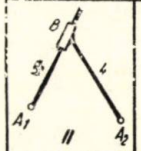
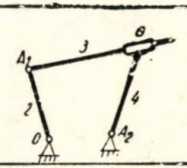
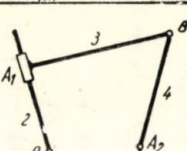
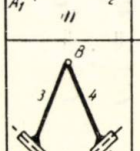
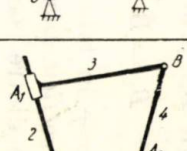
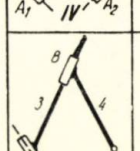
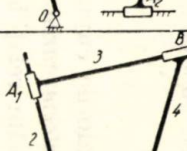
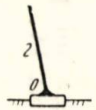
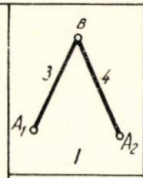
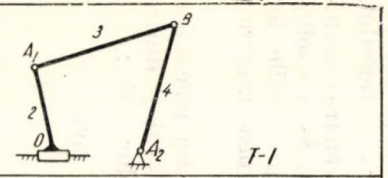
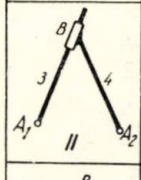
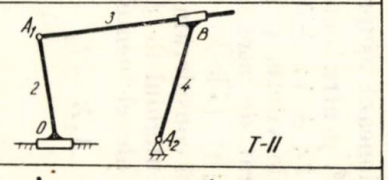
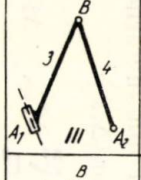
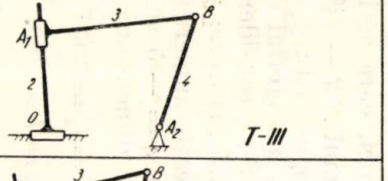
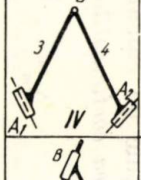
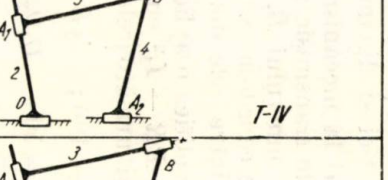
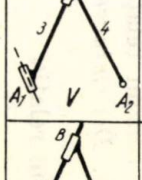
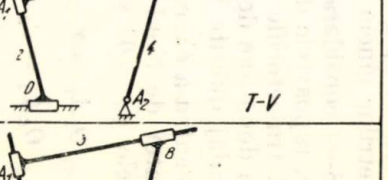
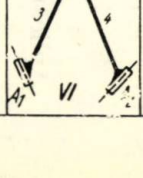
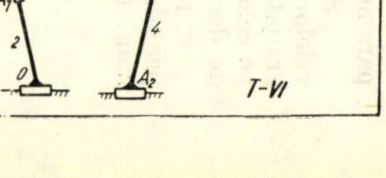
Baza	Grupa	Tipuri de mecanisme
R	 I	 R-I
	 II	 R-II
	III	 R-III
	 IV	 R-IV
	 V	 R-V

Tabela III.2

 T	 I	 T-I
	 II	 T-II
	 III	 T-III
	 IV	 T-IV
	 V	 T-V
	 VI	 T-VI

MUSZAKI FOISKOLA

directă pe ecranul unui oscilograf. Diagramele oscilografiate dau o imagine concretă și completă a mișcării unui mecanism, inclusiv influența tuturor parametrilor cinematici și dinamici, care acționează asupra sistemului.

S-au considerat la mecanismul $RR - I_1^{25}$, pentru antrenarea manivelelor, rapoartele de transmisie $\eta = \pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 5$. S-au oscilografiat traiectoriile punctului B, hodograful de viteze, și proiecțiile lor pe cele două axe de coordonate. S-au considerat de asemenea unghiuri de decalaj diferite între cele două manivele [6], [7].

Pentru a exemplifica o aplicație numerică considerăm un mecanism pentalater de tipul $RR - I_1^2$ cu $\eta = -5$ și unghiul de decalaj dintre manivele $\varphi_0 = 0°$ și următoarele dimensiuni ale elementelor sale:

$$O_1A_1 = r_1 = 100; \quad A_1B = l_1 = 500; \quad A_2B = l_2 = 400,$$

$$O_2A_2 = r_2 = 50; \quad O_1O_2 = h = 300.$$

Utilizăm relațiile de calcul din lucrările [4], [7].

1. *Determinarea coeficienților* Δ_k.

Aplicăm relația $$\Delta_m^{(2n)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{k+m}^{(2n-2)} \cdot \overline{\Delta}_k^{(2)}.$$

Considerînd că se obține o aproximație suficientă mergînd pînă la coeficientul de rangul 8, obținem valorile indicate în tabela IV.

2. *Determinarea coeficienților* D_k *și* B_k

Se utilizează relațiile:

$$D_k = \overline{D}_{-k} = \mp \left[\frac{1}{2}\Delta_k^{(2)} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\Delta_k^{(4)} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}\Delta_k^{(6)} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}\Delta_k^{(8)} + \ldots\right],$$

$$D_0 = \pm 1 \mp \left[\frac{1}{2}\Delta_0^{(2)} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\Delta_0^{(4)} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}\Delta_0^{(6)} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}\Delta_0^{(8)} + \ldots\right]$$

și se obțin valorile din tabela V.

Pentru coeficienții B_k, prin relația

$$B_k = \overline{B}_{-k} = \Delta_k + \mathrm{i}D_k$$

obținem valorile cuprinse în tabela V.

3. *Determinarea coeficienților* C_k.

Utilizăm relațiile dintre coeficienții și lungimile diadei

$$C_k^{(1)} = C_{-k}^{(1)} = -l_2B_k,$$

$$C_0^{(1)} = l_1 - l_2B_0$$

și

$$C_k^{(2)} = C_{-k}^{(2)} = l_1\overline{B}_{-k},$$

$$C_0^{(2)} = l_1\overline{B}_0 - l_2$$

și căpătăm valorile din tabela VI.

Tabela IV

$\Delta_m^{(2n)}$

$2m$ \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(1)	0,76875	0,07500	0	0	−0,03750	0,01250	—	—	—	—
(2)	0,60535	0,11437	0,00562	−0,00563	−0,05578	0,01359	− 0,00188	0	0,00141	−0,00094
(4)	0,39932	0,16647	0,01761	−0,01881	−0,06585	0,00414	0,00480	0,00152	0,00447	−0,00232
(6)	0,28770	0,14950	0,02694	−0,01861	−0,06235	−0,00821	—	—	—	—
(8)	0,21560	0,12976	0,02989	−0,02414	−0,05546	−0,01632	—	—	—	—

Tabela V

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_k	0,62102	−0,09239	−0,00785	− 0,00726	0,04208	−0,00617	−0,00154	−0,00019	−0,00127	0,00076	0,00008
F_k	0,76875+ +0,62102 i	0,07500− −0,0923 i	−0,00785 i	−0,00726i	−0,03750+ 0,04218 i	0,01250− 0,00617 i	−0,00154i	−0,00019i	−0,00127i	0,00076 i	0,00008 i

Tabela VI

$C_k^{(j)}$

k \ j	1	2
0	192,50000 − 248,40800 i	−15,62500 − 310,51000 i
1	−30,00000 + 36,95600 i	37,50000 + 46,19500 i
2	3,14000 i	3,92500 i
3	2,90400 i	3,63000 i
4	15,00000 − 16,87200 i	−18,75000 − 21,09000 i
5	−5,00000 + 2,46800 i	6,25000 + 3,08500 i

Tabela VII

$A_m^{(j)}$

m \ j	1	2
0	0,60555 + 0,78092 i	−0,00694 + 0,97615 i
1	−0,10833 − 0,13605 i	0,13542 − 0,17140 i
2	0,00555 + 0,00467 i	−0,00694 − 0,00729 i
3	−0,00972 − 0,02242 i	−0,03241 + 0,02948 i
4	−0,01018 − 0,01797 i	−0,07755 − 0,01904 i
5	−0,11250 − 0,13254 i	0,01562 − 0,16568 i
−1	0,10278 + 0,13913 i	0,12153 + 0,17392 i
−2	0,03796 + 0,04047 i	0,03588 + 0,05283 i
−3	0,01265 + 0,00381 i	0,01389 − 0,03357 i
−4	0,05422 + 0,05751 i	−0,05787 + 0,05911 i
−5	0,00944 i	0,01315 i

4. *Determinarea coeficienţilor* A_m.

Se folosesc relaţiile $\overline{A}_m = \frac{1}{h} \sum_{p=0}^{n} (\xi_1 - \xi_2 C_{-(\eta-1)})^p \cdot C_{-(m+p)}$,

$$\eta = -5$$

$$\xi_1 = \frac{r_1}{h} = \frac{1}{3}; \quad \xi_2 = \frac{r_2}{h} = \frac{1}{6}$$

rezultatele obţinute fiind cuprinse în tabela VII.

5. *Rezultatele algebrice.*

Prin aducerea la forme algebrice a rezultatelor anterioare se capătă următoarele valori, considerînd unghiul $\varphi = 10°$:

$$\Phi_1 = 33°20'; \quad \Phi_2 = 66°20'; \quad \psi = 28°,$$

iar pentru coordonatele punctului $B(x, y)$:

$$x = 513{,}80; \quad y = 329{,}50.$$

Primită la redacţie la 30 septembrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, E. Bugaevski, L. Calmaciuc, *Studiu asupra determinării pe cale experimentală a deplasărilor în mecanismele plane*, St. cerc. mec. apl., **VIII**, *3* (1957).
2. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, L. Calmaciuc, Gr. Antonescu, *Studiul vitezelor în mecanismele plane pe baze mecano-electronice*, St. cerc. mec. apl., **XIII**, *4* (1962).
3. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, *Contribuţii la cinematica diadei Cebîşev*, St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959).
4. R. C. Bogdan, *Consideraţii analitice asupra grupelor cinematice cu două elemente*, St. cerc. mec. apl. **XV**, *1* (1964).
5. — *Studiul general, prin serii armonice complexe, asupra mecanismelor cu cinci elemente articulate*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *2* (1964).
6. — *Mecanisme cu cinci elemente articulate. I. Rapoarte de transmitere pozitive*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *5* (1964).
7. — *Mecanisme cu cinci elemente articulate*, II, *Rapoarte de transmitere negative*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *6* (1964).
8. K. Hain, *Die Koppelkurven der Raderkurbelgetriebe mit Gelenkfünfeck als Grundgetriebe*, Vortrag zum Kolloquium 1961 der DVI/AWS-Fachgruppe Getriebetechnik in Bad Kissingen. Bericht von H. Rankers, Das Industrieblatt, **62**, *2* (1962).
9. K. Hain, *Angewandte Getriebelehre*, Düsseldorf, VDI-Verlag, 1961.
10. N. I. Manolescu, *Sistematizarea şi clasificarea mecanismelor motor plane articulate cu două grade de mobilitate „total"* ($M_3 = 2$) şi *„parţial"* ($M_3^p = 2$), St. cerc. mec. apl., **XX**, *6* (1965).
11. Meyer Zur Capellen W., *Zur Theorie der Bahnkurven-Rastgetriebe*, Konstruktion, *10* (1963).

12. Chr. Pelecudi, R. C. Bogdan, L. Calmaciuc, *Contribuţii la cinematica mecanismului cu patru elemente*, St. cerc. mec. apl., **XI**, *2* (1960); *Mehanika*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, *3* (1961).
13. E. P. Pollitt, *Five-bar linkages with two drive cranks*, Machine Design, **34**, *2* (1962).
14. S. E. Rose, *Five-bar loop synthesis*, Machine Design, **33**, *21* (1961).
15. D. C. Tao, A. S. Hall, *Analysis of simetrical five-bar linkages*, Product Engineering, *23* (1952).
16. — *Die Erzeugung von Bewegung mit mehreren Rasten mit Hilfe des fünfgelenkigen zweikurbel Getriebes*, Das Industrieblatt, Februarie, 1962.

FOLOSIREA ACCELERAȚIILOR COMPUSE SUPERIOARE ÎN STUDIUL MULTIPOLILOR ȘI MECANISMELOR PLANE[1])

de CHR. PELECUDI
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

531.1

Introducerea accelerațiilor compuse reduce determinarea accelerațiilor de diverse ordine pe aceleași scheme de calcul ca ale vitezelor. Prin acestea se separă accelerațiile primare, cunoscute direct din accelerațiile inferioare, de accelerațiile secundare care se determină prin studiul accelerațiilor de ordinul n. Cele două sisteme de accelerații au drept imagini în planul accelerațiilor două conture, fiecare cu laturile paralele sau perpendiculare pe laturile schemei fizice a lanțului cinematic. Lucrarea cuprinde exemplificarea metodei unitare a accelerațiilor compuse de diverse ordine pe multipoli cinematici și mecanisme fundamentale.

★

Accelerațiile compuse [1] — [3], [6] — [8] s-au introdus pentru îmbunătățirea proprietăților distribuțiilor de accelerații. Acestea se obțin prin repartizarea accelerațiilor relative de rotație normale (speța I sau, împreună cu o parte din accelerațiile relative de rotație tangențiale, speța II) la accelerațiile diverselor puncte ale unui solid în mișcare plană, cu ajutorul unui centru K, arbitrar ales :

$$\tilde{a}_A^{(n)} = \bar{a}_A^{(n)} + A_n(\omega)\,\overline{KA} = \bar{a}_A^{(n)} + B_n(\omega)\,\overline{KA}\,i. \tag{1}$$

Mai general însă se poate considera că accelerațiile simple provin din diferențele dintre două sisteme de accelerații compuse, secundare, și de accelerații primare, cunoscute :

$$\bar{a}_A^{(n)} = \bar{a}_A^{\prime\prime(n)} - \bar{a}_A^{\prime(n)}, \tag{2}$$

fiecare în parte respectînd regulile simple de compunere ale vitezelor, adică

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \tag{3}$$

$$\bar{v}_{C_2} = \bar{v}_{C_1} + \bar{v}_{C_{21}}. \tag{4}$$

[1]) Publicată în Rev. Roum. Sci. Techn.-MÉC. APPL., **12**, 2 (1967) (în limba engleză).

Pentru satisfacerea ecuației vectoriale care leagă între ele accelerațiile superioare a două puncte diferite A și B din același corp,

$$\bar{a}_B'^{(n)} = \bar{a}_A^{(n)} + \bar{a}_{BA}^{(n)n} + \bar{a}_{BA}^{(n)t}, \tag{5}$$

și urmărind ca accelerațiile primare să fie cunoscute prin accelerațiile inferioare, se alege

$$\bar{a}_{BA}'^{(n)} = -\bar{a}_{BA}^{(n)n} = A_n(\omega)\,\overline{AB} = k\,(\overline{a'b'}) \tag{6}$$

și rezultă

$$\bar{a}_{BA}''^{(n)} = \bar{a}_{BA}^{(n)t} = B_n(\omega)\,\overline{ABi} = k\,(\overline{a''b''}). \tag{7}$$

Dacă J, K și H sînt centrele instantanee ale accelerațiilor simple, ale accelerațiilor primare precum și ale accelerațiilor secundare, vom avea :

$$\bar{a}_J^{(n)} = 0,\ \bar{a}_K'^{(n)} = 0,\ \bar{a}_H''^{(n)} = 0, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_A^{(n)} &= -A_n(\omega)\,\overline{JA} + B_n(\omega)\,\overline{JAi},\\ \bar{a}_A'^{(n)} &= A_n(\omega)\,\overline{KA},\\ \bar{a}_A''^{(n)} &= B_n(\omega)\,\overline{HAi}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Pentru $A \equiv K$ avem

$$\bar{a}_K^{(n)} = \bar{a}_K''^{(n)} = B_n(\omega)\,\overline{AKi}. \tag{10}$$

Pentru $A \equiv H$ avem

$$\bar{a}_H^{(n)} = -\bar{a}_H'^{(n)} = -A_n(\omega)\,\overline{KH}. \tag{11}$$

Pentru $A \equiv J$ avem

$$\bar{a}_J^{(n)} = \bar{a}_J''^{(n)} - \bar{a}_J'^{(n)} = B_n(\omega)\,\overline{HJi} - A_n(\omega)\,\overline{KJ} = 0. \tag{12}$$

Dacă pentru distribuția de accelerații simple centrul J este bine determinat, sistemele de accelerații primare și secundare depind de alegerea arbitrară a punctelor K și H, care însă sînt legate între ele prin vectorul accelerației reduse :

$$\overline{HK} = \frac{\bar{a}_H^{(n)}}{A_n(\omega)} = \frac{\bar{a}_K^{(n)}}{B_n(\omega)\,i}. \tag{13}$$

Accelerațiile punctelor K și H (fig. 1) sînt perpendiculare ca și vectorii de poziție $\overline{JK}$ și $\overline{JH}$ și în același raport :

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{B_n(\omega)}{A_n(\omega)} = \frac{\bar{a}_K^{(n)}}{i\,\bar{a}_H^{(n)}} = \frac{\overline{JK}}{i\cdot\overline{JH}}. \tag{14}$$

Triunghiul centrelor J, K, H este dreptunghic în J, în H formează unghiul μ (fig. 1), iar $\bar{a}_{HJ}^{(n)t} + \bar{a}_{KJ}^{(n)n} = 0$.

Atunci cînd două din aceste centre corespund cu necesitate, sînt confundate și cu al treilea.

Pentru diverse centre K și H, dreptele HK sînt paralele, iar sistemele de accelerații primare sau secundare corespunzătoare diferă între ele prin același vector:

$$\begin{aligned} \overline{T} &= \overline{a}_{2A}^{\prime(n)} - \overline{a}_{1A}^{\prime(n)} = \overline{a}_{2A}^{\prime\prime(n)} - \overline{a}_{1A}^{\prime\prime(n)}, \\ \overline{T} &= -A_n(\omega)\,\overline{K_1K_2} = -B_n(\omega)\,\overline{H_1H_2}i. \end{aligned} \tag{15}$$

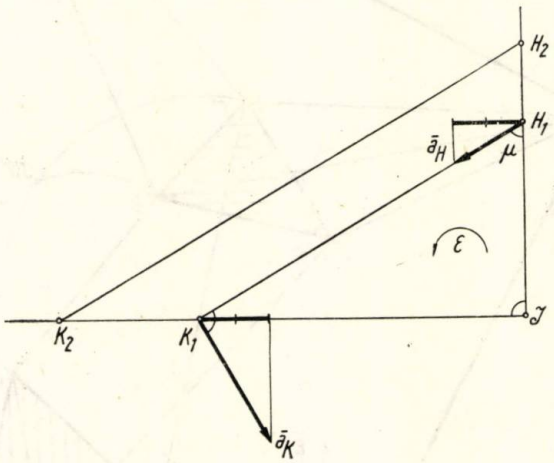


Fig. 1

Într-o mișcare de rototranslație plană cu $B_n(\omega) = 0$, accelerațiile secundare superioare ale tuturor punctelor sînt egale între ele (H_∞):

$$\overline{a}_A^{\prime\prime(n)} = \overline{a}_B^{\prime\prime(n)} = \ldots = \overline{a}_K^{\prime\prime(n)} = \overline{a}_K^{(n)}, \tag{16}$$

iar dacă $A_n(\omega) = 0$, accelerațiile primare superioare ale tuturor punctelor sînt egale între ele (K_∞):

$$\overline{a}_A^{\prime(n)} = \overline{a}_B^{\prime(n)} = \ldots = \overline{a}_H^{\prime(n)} = -\overline{a}_H^{(n)}. \tag{17}$$

Pe baza reprezentărilor grafice ale accelerațiilor primare și secundare de rotație relativă în planul accelerațiilor (fig. 2), figura accelerațiilor primare-cunoscute $k'a'b'c'$, în care și $p = k'$ este polul poligonului de accelerații, iar a', b', c' sînt respectiv extremitățile accelerațiilor $\overline{a}_A^{\prime(n)}$, $\overline{a}_B^{\prime(n)}$ și $\overline{a}_C^{\prime(n)}$ construite, concurente în p, este asemenea cu figura solidului rigid $KABC$. Cele două figuri au laturile paralele, îndreptate în același sens, și raportul de asemănare $z' = \dfrac{A_n(\omega)}{k_n}$. Prin adăugarea accelerațiilor simple cu originile în a', b', c' și extremitățile în a'', b'', c'', se obțin accelerațiile secundare-compuse, care au originile în polul $p = h''$ și extremitățile în a'', b'', c''. Figura accelerațiilor secundare $h''a''b''c''$ este asemenea cu figura solidului $HABC$, avînd laturile perpendiculare, iar raportul de asemănare $z'' = \dfrac{B_n(\omega)\,i}{k_n}$. Deoarece $\overline{a}_K^{\prime(n)} = 0$, avem $p \equiv k'$,

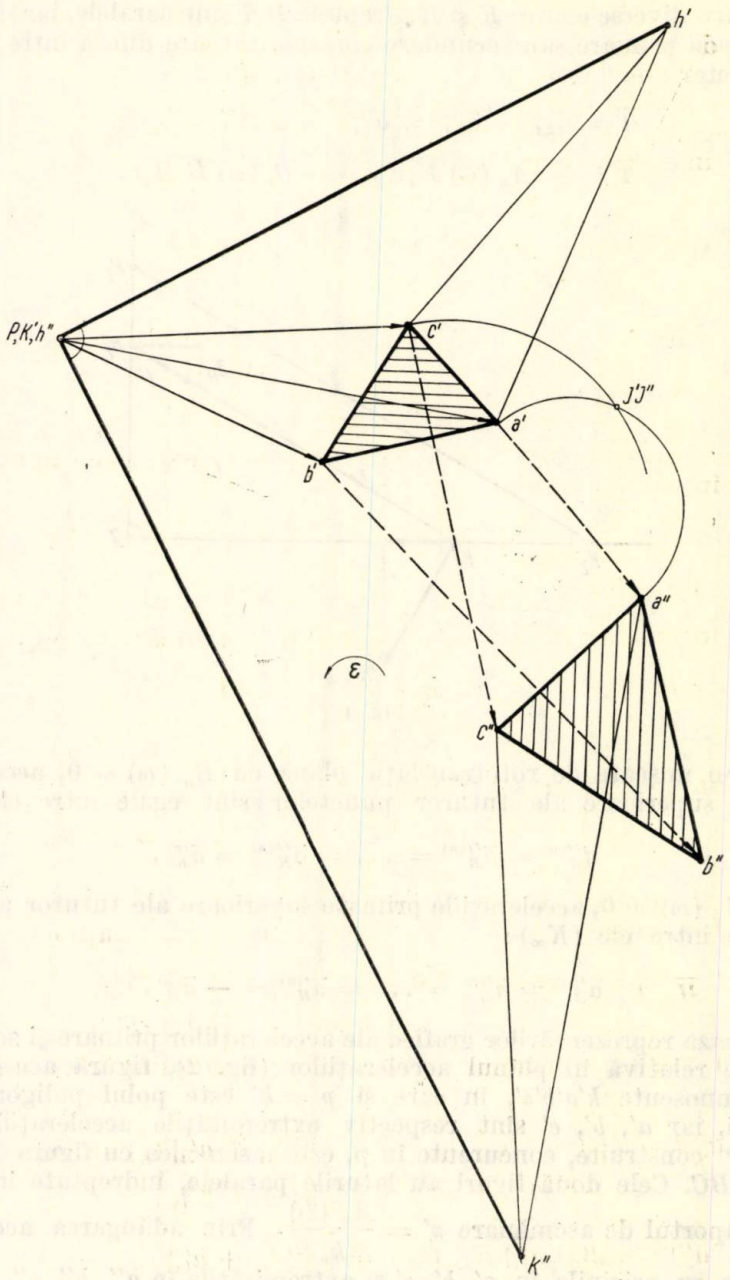


Fig. 2

iar întrucît $\overline{a}_H^{\prime\prime(n)} = 0$, avem $p \equiv h''$. Construind punctele h' și k'' prin utilizarea proprietăților de asemănare se obține $\overline{a}_H^{(n)} = k_n\,(\overline{h'h''})$ și $\overline{a}_K^{(n)} = k_n\,(\overline{k'k''})$ ca vectori perpendiculari cu raportul $\overline{a}_K^{(n)}/\overline{a}_H^{(n)} = z''/z' = i\,\mathrm{tg}\,\mu$.

Deoarece $\bar{a}_{j}^{(n)} = k_n(\overline{j'j''}) = 0$, punctele j' și j'' se găsesc pe baza aceleiași proprietăți de asemănare la intersecția cercurilor avînd ca diametre accelerațiile simple, de exemplu $a'a''$ și $c'c''$ sau $b'b''$ sau din $h'h''$ și $k'k''$.

Pentru satisfacerea ecuației vectoriale care leagă între ele accelerațiile superioare a două puncte C_1 și C_2 din corpuri diferite, dar confundate în același punct geometric C:

$$\bar{a}_{C_2}^{(n)} = \bar{a}_{C_1}^{(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{r(n)} \tag{18}$$

și utilizînd accelerațiile primare și secundare, rezultă

$$\bar{a}_{C_{21}}^{\prime\prime(n)} - \bar{a}_{C_{21}}^{\prime(n)} = \bar{a}_{C_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{r(n)}, \tag{19}$$

cu

$$\bar{a}_{C_{21}}^{\prime(n)} = A_n(\omega_{21})\,\overline{K_{21}\,C_{21}} = k_n(\overline{c_1'c_2''}), \tag{20}$$

$$\bar{a}_{C_{21}}^{\prime\prime(n)} = B_n(\omega_{21})\,\overline{H_{21}\,C_{21}}\,i = k_n(\overline{c_1''c_2''}). \tag{21}$$

Datorită relațiilor de forma (4), centrele instantanee în mișcările relative reciproce sînt unice

$$K_{21} \equiv K_{12} \quad H_{21} \equiv H_{12}, \tag{22}$$

impunîndu-se ca să avem

$$A_n(\omega_{21}) + A_n(\omega_{12}) = 0\,;\; B_n(\omega_{21}) + B_n(\omega_{12}) = 0\,. \tag{23}$$

Dacă în relația (19) se fac anumite particularizări, se obține:

$$\begin{aligned} &C \equiv K \quad \bar{a}_{K_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{K_{21}}^{r(n)} = \bar{a}_{K_{21}}^{\prime\prime(n)} = B_n(\omega_{21})\,\overline{H_{21}\,K_{21}}\,i\,,\\ &C = H \quad \bar{a}_{H_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{H_{21}}^{r(n)} = -\,\bar{a}_{H_{21}}^{\prime(n)} = -\,A_n(\omega_{21})\,\overline{K_{21}\,H_{21}}\,, \end{aligned} \tag{24}$$

din care prin dezvoltări se găsește

$$\begin{aligned} A_n(\omega_{21}) &= A_n(\omega_2) - A_n(\omega_1)\,,\\ B_n(\omega_{21}) &= B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1)\,, \end{aligned} \tag{25}$$

cu verificarea totodată a relațiilor (22) și (23).

Centrele instantanee relative H și K sînt legate prin relațiile

$$\overline{H_{21}\,K_{21}} = \overline{H_{12}\,K_{12}} = \frac{\bar{a}_{H_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{H_{21}}^{r(n)}}{A_n(\omega_{21})} = \frac{\bar{a}_{K_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{K_{21}}^{r(n)}}{B_n(\omega_{21})\,i}\,. \tag{26}$$

Accelerațiilor relative, primare și secundare, le corespund în acest caz expresiile

$$\begin{aligned} \bar{a}_{C_{21}}^{\prime(n)} &= A_n(\omega_{21})\,\overline{K_{21}\,C_{21}} = -\,[\bar{a}_{C_{21}K_{21}}^{c(n)n} + \bar{a}_{C_{21}K_{21}}^{r(n)n}] =\\ &= -\,[\bar{a}_{H_{21}}^{a(n)} + \bar{a}_{H_{21}}^{r(n)} + \bar{a}_{C_{21}H_{21}}^{c(n)n} + \bar{a}_{C_{21}H_{21}}^{r(n)n}], \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{C_{21}}^{\prime\prime(n)} &= B_n(\omega_{21})\,\overline{H_{21}\,C_{21}}\,i = [\bar{a}_{C_{21}H_{21}}^{c(n)t} + \bar{a}_{C_{21}H_{21}}^{r(n)t}] =\\ &= [\bar{a}_{K_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{K_{21}}^{r(n)} + \bar{a}_{C_{21}K_{21}}^{c(n)t} + \bar{a}_{C_{21}K_{21}}^{r(n)t}]. \end{aligned} \tag{28}$$

Dacă se urmărește ca vectorul $\overline{H_{21}K_{21}}$ să fie determinat anterior calculului accelerațiilor de ordinul n, trebuie ca, în conformitate cu (26), H_{21} să corespundă cu unul dintre centrele instantanee ale accelerațiilor simple inferioare, adică $\bar{a}_{H_{21}}^{r(n)}$ să fie cunoscută [3]. Este comod ca să cores-

pundă cu centrul instantaneu al vitezelor, deoarece în lanțurile cinematice, centrele vitezelor sînt ușor de localizat.

Deoarece pentru $C_{21} \equiv J_{21}$ (centrul accelerațiilor de ordinul n) avem

$$\bar{a}^{c(n)}_{J_{21}} = - A_n(\omega_{21})\,\overline{K_{21}J_{21}} + B_n(\omega_{21})\,\overline{H_{21}J_{21}}\,i \tag{29}$$

și respectiv

$$\bar{a}^{c(n)}_{J^*_{12}} = - A_n(\omega_{12})\,\overline{K_{12}J^*_{12}} + B_n(\omega_{12})\,\overline{H_{12}J^*_{12}}\,i,$$

triunghiul format cu punctele J_{21}, K_{21} și H_2 și reciprocul său $J^*_{12} \neq J_{21}$, $K_{12} = K_{21}$, $H_{12} = H_{21}$ nu sînt dreptunghice în J (fig. 16). Dacă însă centrul accelerațiilor este permanent $J^*_{12} = J_{21} = P$ se repetă proprietatea de perpendicularitate de la mișcarea absolută a unui corp, în ambele cazuri avînd $\bar{a}^{c(n)}_{P_{21}} + \bar{a}^{r(n)}_{P_{21}} = 0$.

Centrele instantanee ale mișcărilor relative pentru trei corpuri, atît ale accelerațiilor primare K_{12}, K_{23}, K_{31}, cît și ale accelerațiilor secundare H_{12}, H_{23}, H_{31}, sînt separat coliniare și respectă relațiile

$$\begin{aligned} A_n(\omega_{23})\,\overline{K_{21}K_{23}} &= A_n(\omega_{13})\,\overline{K_{21}K_{13}}, \\ B_n(\omega_{23})\,\overline{H_{21}H_{23}} &= B_n(\omega_{13})\,\overline{H_{21}H_{13}}, \end{aligned} \tag{30}$$

deduse din situația că

$$\begin{aligned} \bar{a}'_{C_{21}} + \bar{a}'_{C_{32}} + \bar{a}'_{C_{13}} &= 0, \\ \bar{a}''_{C_{21}} + \bar{a}''_{C_{32}} + \bar{a}''_{C_{13}} &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Față de relațiile dintre centrele instantanee ale vitezelor

$$\omega_{23}\,\overline{I_{21}I_{23}} = \omega_{13}\,\overline{I_{21}I_{13}}, \tag{32}$$

se remarcă faptul că numai două din centrele K sau H pot fi alese în coincidență cu centrele I, al treilea nemaicorespunzînd.

Mai general pentru un lanț cinematic simplu închis vom avea:

$$\begin{aligned} &\omega_1\,\overline{I_{n1}I_{12}} + \omega_2\,\overline{I_{12}I_{23}} + \omega_3\,\overline{I_{23}I_{34}} + \ldots \omega_n\,\overline{I_{n-1,\,n}I_{n,\,1}} = 0, \\ &A_m(\omega_1)\,\overline{K_{n1}K_{12}} + A_m(\omega_2)\,\overline{K_{12}K_{23}} + \ldots A_m(\omega_n)\,\overline{K_{n-1,\,n}K_{n,\,1}} = 0, \\ &B_m(\omega_1)\,\overline{H_{n1}H_{12}} + B_m(\omega_2)\,\overline{H_{12}H_{23}} + \ldots B_m(\omega_n)\,\overline{H_{n-1,\,n}H_{n,\,1}} = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

relații care determină poziția ultimului centru dacă celelalte sînt date. Se verifică astfel din nou faptul că $I_{n1} \neq K_{n1} \neq H_{n1}$.

Dacă se urmărește ca toate centrele relative să se corespundă, atunci la o parcurgere a lanțului cinematic simplu închis cu revenire la elementul inițial se obțin două centre absolute K_1 și K_1^* sau H_1 și H_1^*, corespunzînd la două sisteme de accelerații compuse, diferind prin vectorul $\bar{T}$ (1 —3).

Într-adevăr, deoarece într-un lanț cinematic simplu închis, cu cuple de rotație P_{ij}, avem

$$\overline{T} = A_1 \overline{P_{s1} P_{12}} + A_2 \overline{P_{12} P_{23}} + \ldots A_s \overline{P_{s-1,s} P_{s,1}} = \\ = [B_1 \overline{P_{s1} P_{12}} + B_2 \overline{P_{12} P_{23}} + \ldots B_s \overline{P_{s-1,s} P_{s,1}}]\, i, \tag{34}$$

se obțin următoarele situații :

— dacă centrele K corespund la $(s-1)$ centre P, atunci poziția ultimului (care poate fi oricare) se determină din relația

$$\overline{T} = - A_{12} \overline{P_{12} K_{12}} = - A_{23} \overline{P_{23} K_{23}} = \ldots ; \tag{35}$$

... dacă toate centrele K corespund cu cele s centre P, la o parcurgere a lanțului se obțin în primul corp (care poate fi oricare), două centre absolute, care determină două sisteme de accelerații compuse, diferind între ele prin vectorul

$$\overline{T} = - A_1 \overline{K_1 K_1^1} = - A_2 \overline{K_2 K_2'} = \ldots ; \tag{36}$$

— asemănător pentru centrul H avem

$$\overline{T} = - B_{12} \overline{P_{12} H_{12}}\, i = - B_{23} \overline{P_{23} H_{23}}\, i = \ldots \tag{37}$$

sau

$$\overline{T} = - B_1 \overline{H_1 H_1'}\, i = - B_2 \overline{H_2 H_2'}\, i = \ldots \tag{38}$$

Cum însă este mai simplu să se considere toate centrele relative K și H confundate cu centrele P, trebuie să se țină seama pentru orice contur deformabil al unui lanț complex de vectorul compensator $\overline{T}$ corespunzător, același pentru accelerațiile primare și pentru cele secundare în toate elementele lanțului cinematic.

Presupunînd centrele J, K, H confundate cu polul permanent P, se pot face următoarele particularizări importante :

— la elemente legate printr-o cuplă de rotație în P avem

$$\overline{a}_{C_{21}}^{\prime(n)} = A_n\,(\omega_{21})\, \overline{PC} = k_n\, (\overline{c_1' c_2'}) \tag{39}$$

și

$$\overline{a}_{C_{21}}^{\prime\prime(n)} = B_n\,(\omega_{21})\, \overline{PC}\, i = k_n\, (\overline{c_1'' c_2''})\,; \tag{40}$$

— la elemente legate printr-o cuplă de translație în P_∞ avem

$$\overline{a}_{C_{21}}^{\prime(n)} = \overline{a}_{D_{21}}^{\prime(n)} = \ldots \overline{a}_{21}^{\prime(n)} = \overline{a}_{12}^{c(n)n}, \tag{41}$$

unde accelerația complementară normală de ordinul n este

$$\overline{a}_{12}^{c(n)n} = i \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{I}_m\, [D_n^{(k)}\,(\omega)]\, \overline{a}_{12}^{r(k)}, \tag{42}$$

în care I indică partea imaginară. De asemenea pentru

$$\overline{a}_{C_{21}}^{\prime\prime(n)} = \overline{a}_{D_{21}}^{\prime\prime(n)} = \ldots = \overline{a}_{21}^{\prime\prime(n)} = \overline{a}_{21}^{c(n)t} + \overline{a}_{21}^{r(n)t}, \tag{43}$$

suma acceleraţiei complementare tangenţiale cu acceleraţia relativă de ordinul n, care în cazul cuplei de translaţie este numai tangenţială, are expresia

$$\bar{a}_{21}^{c(n)t} + \bar{a}_{21}^{r(n)t} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{R}\,[D_n^{(k)}(\omega)]\,\bar{a}_{21}^{r(k)}, \tag{44}$$

în care R indică partea reală.

În studiul lanţurilor cinematice cu cuple inferioare deschise apare însă un contur al acceleraţiilor primare relative, marcat prin litere mici cu indicele „prim", ale cărui laturi sînt paralele cu cele corespunzătoare lanţului marcat prin litere mari precum şi un contur al acceleraţiilor secundare, marcat prin litere mici cu indicele „secund", care are laturile perpendiculare pe cele ale lanţului cinematic. Deci cele două conture sînt perpendiculare între ele, iar dacă acceleraţiile primare se pot construi direct pentru orice contur al lanţului cinematic, acceleraţiile secundare pot fi construite urmărind schemele de calcul ale vitezelor pentru diverşi multipoli cinematici sau diferite mecanisme. În lanţurile cinematice închise, conturele acceleraţiilor primare şi secundare rămîn deschise prin acelaşi vector $\overline{T}$ [3], [8].

Pentru toate acceleraţiile de orice ordin, construcţiile grafice şi analitice sînt la fel, diferind între ele numai prin valorile coeficienţilor A_n, B_n şi D_n.

Aplicaţii pe multipoli cinematici. Pentru diada (fig. 3 *a*), care are numai cuple de rotaţie A, B, C, planul acceleraţiilor compuse se reprezintă pe baza ecuaţiilor vectoriale

$$\overline{v}_C = \underline{\overline{v}_A} + \overline{v}_{CA} = \underline{\overline{v}_B} + \overline{v}_{CB}. \tag{45}$$

Se execută (fig. 3 *b*) conturul acceleraţiilor primare cu $\omega_1^2\,\overline{AC} = k_a\,(\overline{a'c'})$ şi $\omega_2^2\,\overline{CB} = k_a\,(\overline{a'b'})$, iar în punctele a' şi b' se ataşează acceleraţiile punctelor A şi B, astfel că $\bar{a}_A = k_a\,(\overline{a'a''})$ şi $\bar{a}_B = k_a\,(\overline{b'b''})$. Apoi din a'' şi b'' se construieşte un contur cu laturile perpendiculare pe ale lanţului cinematic, găsindu-se punctul c'' şi deci acceleraţia punctului C prin $\bar{a}_c = k_a\,(\overline{e'c''})$. Acceleraţiile unghiulare se găsesc din

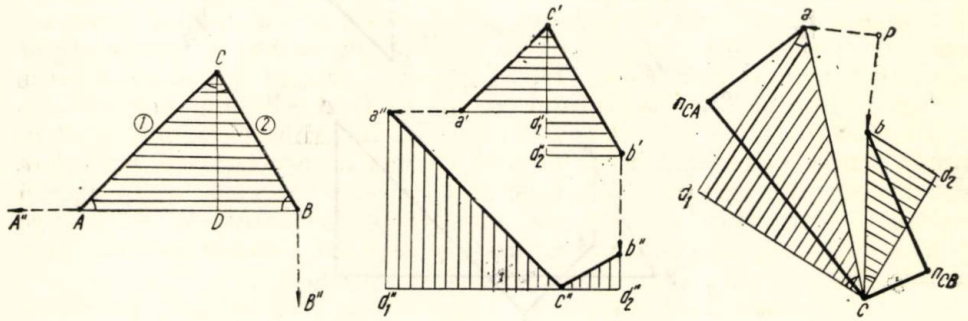
$$\varepsilon_1 = k_\varepsilon \frac{(\overline{a''c''})}{(\overline{AC})\,i}\,;\quad \varepsilon_2 = k_\varepsilon \frac{(\overline{c''b''})}{(\overline{CB})\,i}\,. \tag{46}$$

Faţă de planul obişnuit al acceleraţiilor simple (fig. 3 *c*), construcţia necesită acelaşi număr de laturi cu aceleaşi direcţii şi mărimi, marcînd, desigur, aceeaşi precizie.

În schimb, la aflarea acceleraţiilor unor puncte suplimentare, ca de pildă D_1 şi D_2, construcţiile bazate pe metoda asemănării sînt mai simple şi mai precise. În planul acceleraţiilor compuse se construiesc pentru fiecare punct două triunghiuri cu laturile paralele şi totodată perpendiculare pe laturile triunghiului fizic din planul elementului. Sînt necesare astfel patru laturi suplimentare, pe cînd în planul acceleraţiilor simple se construieşte un singur triunghi, deci trei laturi, dar cu utilizarea unghiurilor egale sau a laturilor proporţionale care sînt surse de erori mari şi cu mărirea timpului de calcul.

Mai mult, în cazul considerat pentru punctele particulare D_1 și D_2, numărul laturilor suplimentare în construcția accelerațiilor este același pentru ambele sisteme.

Totodată nu mai trebuie cercetată rotația celor trei puncte în același sens, deoarece prin construcția laturilor paralele sau perpendiculare se elimină necesitatea care există în planul accelerațiilor simple de a se alege situația reală din cele două situații posibile, simetrice față de dreapta cunoscută pe care se pot construi triunghiurile.



a) b) c)

Fig. 3

Se remarcă de asemenea simplitatea și simetria în notații, precum și faptul că accelerațiile primare formează un contur în același sens cu acela al lanțului cinematic.

La diada cu cupla de translație la interior (fig. 4 *a*), ecuațiile de calcul sînt

$$\overline{v}_{A_2} = \underline{\overline{v}_{A_1}} + \underline{\overline{v}_{A_{21}}} = \underline{\overline{v}_{B_2}} + \underline{\overline{v}_{A_2B_2}}. \tag{47}$$

Conturul accelerațiilor primare (fig. 4 *b*) cuprinde $\overline{a}^{C}_{A_{12}} = k_a\,(\overline{a'_1\,a'_2})$ și $\omega^2\,\overline{AB} = k_a\,(\overline{a'_2\,b'_2})$. Din a'_1 și b'_2 se duc accelerațiile punctelor A și B, obținîndu-se punctele a''_1 și b''_2. Din a''_1 se duce paralela la dreapta translației relative, iar din b''_2 perpendiculara pe raza AB, găsindu-se punctul a''_2 și astfel $\overline{a}_{A_2} = k_a\,(\overline{a'_1\,a''_2})$. Se mențin aceleași observații față de planul accelerațiilor simple (fig. 4 *c*).

La diada cu cupla de translație la exterior (fig. 5 *a*), ecuațiile vectoriale sînt

$$\overline{v}_{C_1} = \underline{\overline{v}_{A_1}} + \underline{\overline{v}_{C_1A_1}} = \overline{v}_{C_2} = \underline{\overline{v}_{C_0}} + \overline{v}_{C_{20}}. \tag{48}$$

Pentru conturul accelerațiilor primare avem $\omega^2\,\overline{AC} = k_a\,(\overline{a'_1\,c'_1})$, cu $c'_1 \equiv c'_2$ și $\overline{a}^{c}_{C_{20}} = k_a\,(\overline{c'_2\,c'_0})$, după care se introduc accelerațiile punctelor A_1 și C_0 $\overline{a}_{A_1} = k_a\,(\overline{a'_1\,a''_1})$ și $\overline{a}_{C_0} = k_a\,(\overline{c'_0\,c''_0})$. Conturul accelerațiilor secundare se construiește ducînd din a''_1 și c''_0 perpendicularele pe $\overline{a'_1\,c'_2}$ și pe $\overline{c'_2\,c'_0}$ și se găsește la intersecție punctul c''_1 sau c''_2 cu $\overline{a}_{C_1} = \overline{a}_{C_2} = k_a\,(\overline{c'_1\,c''_1})$. Planul accelerațiilor simple este redat în figura 5 *c*.

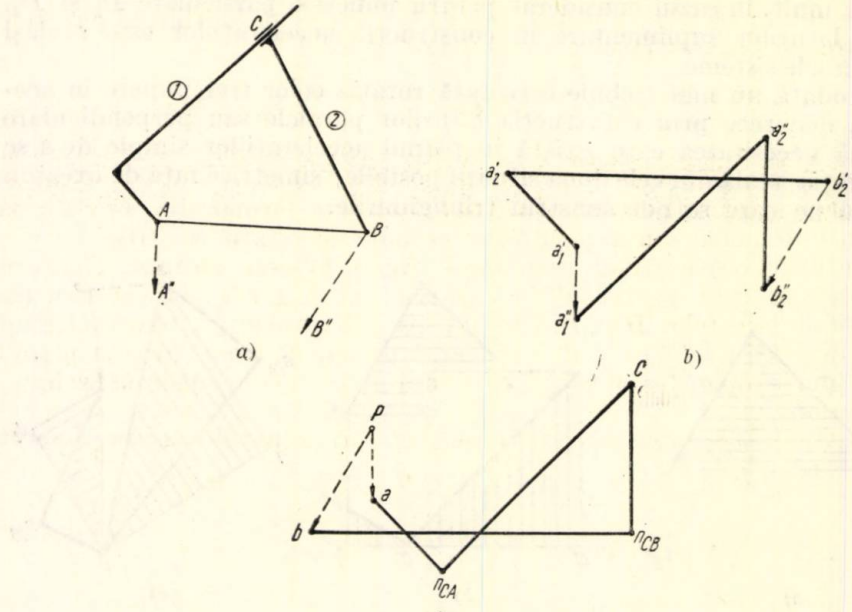

C
①
②
A
B
A''
B''
a)
a_2'
a_2''
b_2'
a_1'
a_1''
b_2''
b)
C
P
a
b
n_{CB}
n_{CA}
c)

Fig. 4

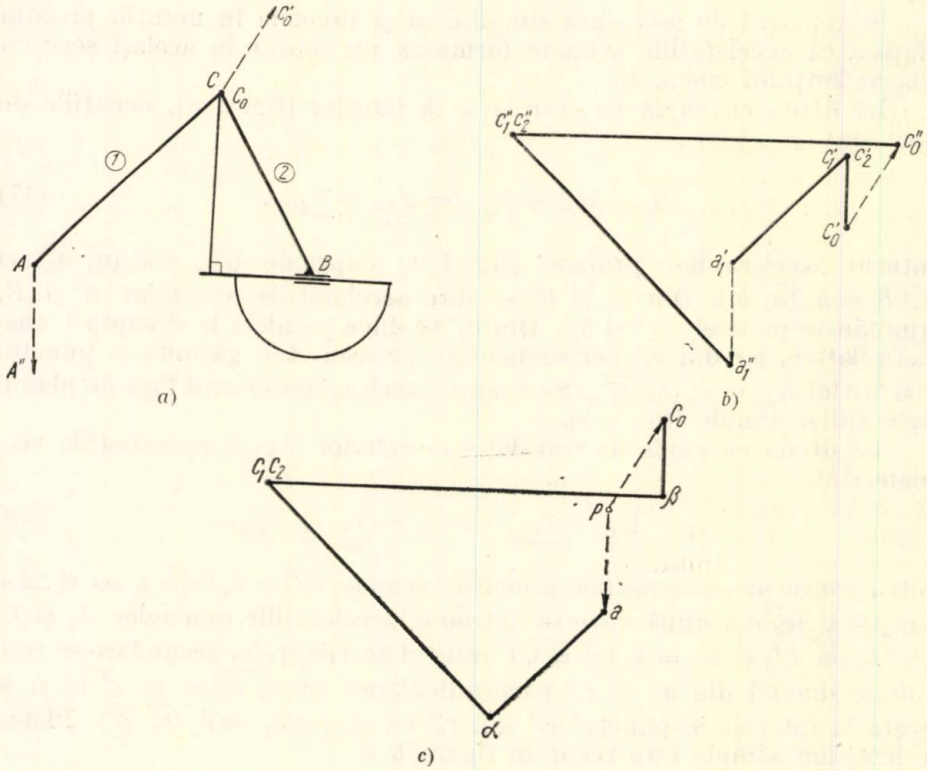

C_0'
C
C_0
①
②
A
B
A''
a)
$C_1''C_2''$
C_0''
C_1'
C_2'
C_0'
a_1'
a_1''
b)
C_0
C_1C_2
P
β
a
α
c)

Fig. 5

Calculul triadei cu cuple de rotație (fig. 6 *a*) se face utilizînd punctele particulare pe baza ecuațiilor vectoriale :

$$\begin{aligned} \overline{v}_{R_4} &= \underline{\overline{v}_{A_1}} + \underline{\overline{v}_{F_1A_1} + \overline{v}_{R_4F_4}} = \underline{\overline{v}_{C_3}} + \underline{\overline{v}_{D_3C_3} + \overline{v}_{R_4D_4}}, \\ \overline{v}_{E_4} &= \underline{\overline{v}_{R_4}} + \underline{\overline{v}_{E_4R_4}} = \overline{v}_{E_2} = \underline{\overline{v}_{B_2}} + \underline{\overline{v}_{E_2B_2}}. \end{aligned} \tag{49}$$

iar conturul accelerațiilor primare (fig. 6 *b*) este format din $a'f'r'd'c'$ și $b'e'r'$, obținut numai din accelerațiile normale de rotație relative.

Conturul accelerațiilor secundare (fig. 6 *b*) este obținut, conform ecuațiilor, mai întîi pentru $a''r''c''$ și apoi pentru $r''e''b''$. Construcția accelerațiilor punctelor D și F este avantajată în acest sistem, obținînd două triunghiuri $e'f'd'$ și $e''f''d''$ cu același număr de laturi ca și în planul accelerațiilor simple (fig. 6 *c*), în care însă apar inconvenientele semnalate anterior.

La triada cu cuple de translație (fig. 7 *a*), ecuațiile vectoriale sînt

$$\begin{aligned} \overline{v}_{R_4} &= \underline{\overline{v}_{A_1}} + \underline{\overline{v}_{F_1A_1} + \overline{v}_{R_4F_4}} = \underline{\overline{v}_{C_3}} + \underline{\overline{v}_{R_3C_3} + \overline{v}_{R_{43}}}, \\ \overline{v}_{E_4} &= \underline{\overline{v}_{R_4}} + \underline{\overline{v}_{E_4R_4}} = \overline{v}_{E_2} = \underline{\overline{v}_{E_0}} + \underline{\overline{v}_{E_{20}}}. \end{aligned} \tag{50}$$

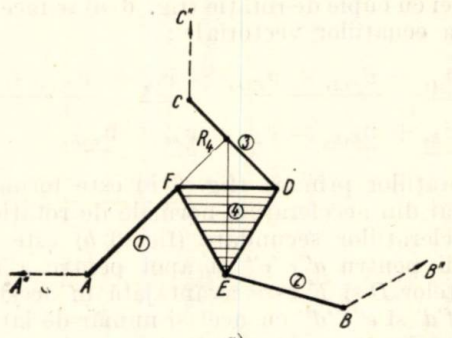
În același fel, conturul accelerațiilor primare (fig. 7 *b*) este format din a'_1, $f'_{1,4}$, r'_4, r'_3, c'_3 și r'_4, $e'_{4,2}$, e'_0, construit atît pe baza accelerațiilor normale relative de rotație $\omega_1^2 \overline{AF} = k_a (\overline{a'_1 f'_1})$, cît și pe baza accelerațiilor complementare $\overline{a}^c_{R_{43}} = k_a (\overline{r'_4 r'_3})$. Restul calculelor pentru accelerațiile secundare se face urmărind ecuațiile vectoriale, obținînd conturele $a''_1 r''_4 c''_3$ și $r''_4 e''_{4,2} e''_0$. În figura 7 *c* se arată planul accelerațiilor simple.

La tetradă (fig. 8 *a*), din cauza conturului deformabil $ABCD$, atît conturul accelerațiilor primare, cît și cel al accelerațiilor secundare rămîn deschise prin vectorul $\overline{T} = k_a (\overline{d'd'_*}) = k_a (\overline{d'' d''_*})$. Pentru aplicarea metodei poligoanelor auxiliare (poziții false), proiecțiile accelerațiilor compuse ale punctelor A, B, C, D se obțin direct, ducînd perpendicularele din e'' și f'' pe EB, EA și FC, FD, iar ecuațiile de calcul sînt :

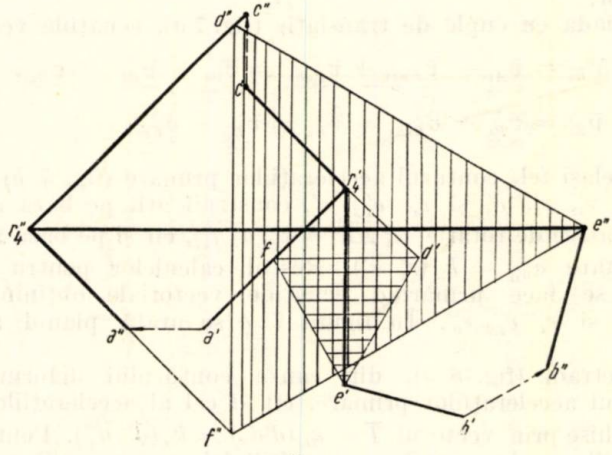
$$\begin{aligned} \underline{\overline{v}_B} &= \underline{\overline{v}_A} + \underline{\overline{v}_{BA}}\,;\ \underline{\overline{v}_D} = \underline{\overline{v}_C} + \underline{\overline{v}_{DC}}, \\ \underline{\overline{v}_C} &= \underline{\overline{v}_B} + \underline{\overline{v}_{CB}}\,;\ \underline{\overline{v}_A} = \underline{\overline{v}_D} + \underline{\overline{v}_{AD}}. \end{aligned} \tag{51}$$

Se execută un singur poligon auxiliar pentru accelerațiile compuse, dreapta punctelor finale avînd direcția cunoscută din studiul vitezelor (fig. 8 *b*). Față de planul accelerațiilor simple (fig. 8 *c*), construcția accelerațiilor compuse (fig. 8 *b*) prezintă în plus avantajul că sînt repetate în construcțiile ajutătoare numai accelerațiile secundare, accelerațiile primare fiind reprezentate o singură dată. La această metodă, reducerea laturilor și a posibilităților de erori este astfel mai evidentă. Sînt obținute direct și poligoanele accelerațiilor pentru punctele A, B, E și C, D, F din elementele 1 și 3.

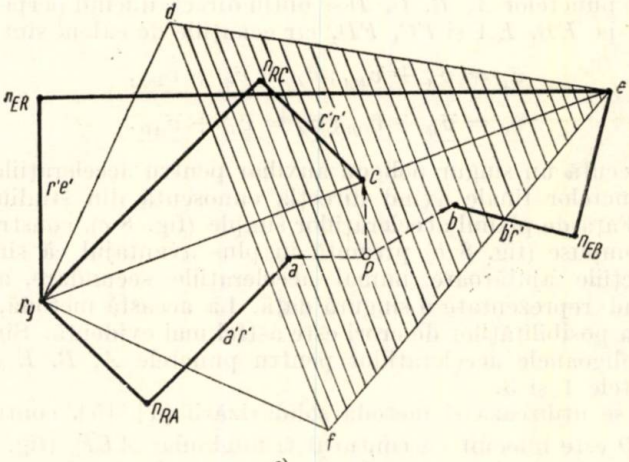
Dacă se utilizează și metoda solidarizării [4], [5], conturul patrulater $ABCD$ este înlocuit cu conturul triunghiular $AB\overline{F}_3$ (fig. 8 *d*). Contururile accelerațiilor primare și secundare rămîn deschise prin același


C''
C
R4
3
F
D
4
1
A''
A
E
2
B''
B

a)


d''
c''
c
r'4
r''4
e''
f
d'
d''
e'
b''
f''
b'

b)


d
nRC
e
nER
c'r'
r'e'
c
b
b'r'
nEB
a
p
r'y
a'r'
nRA
f

c)

Fig. 6

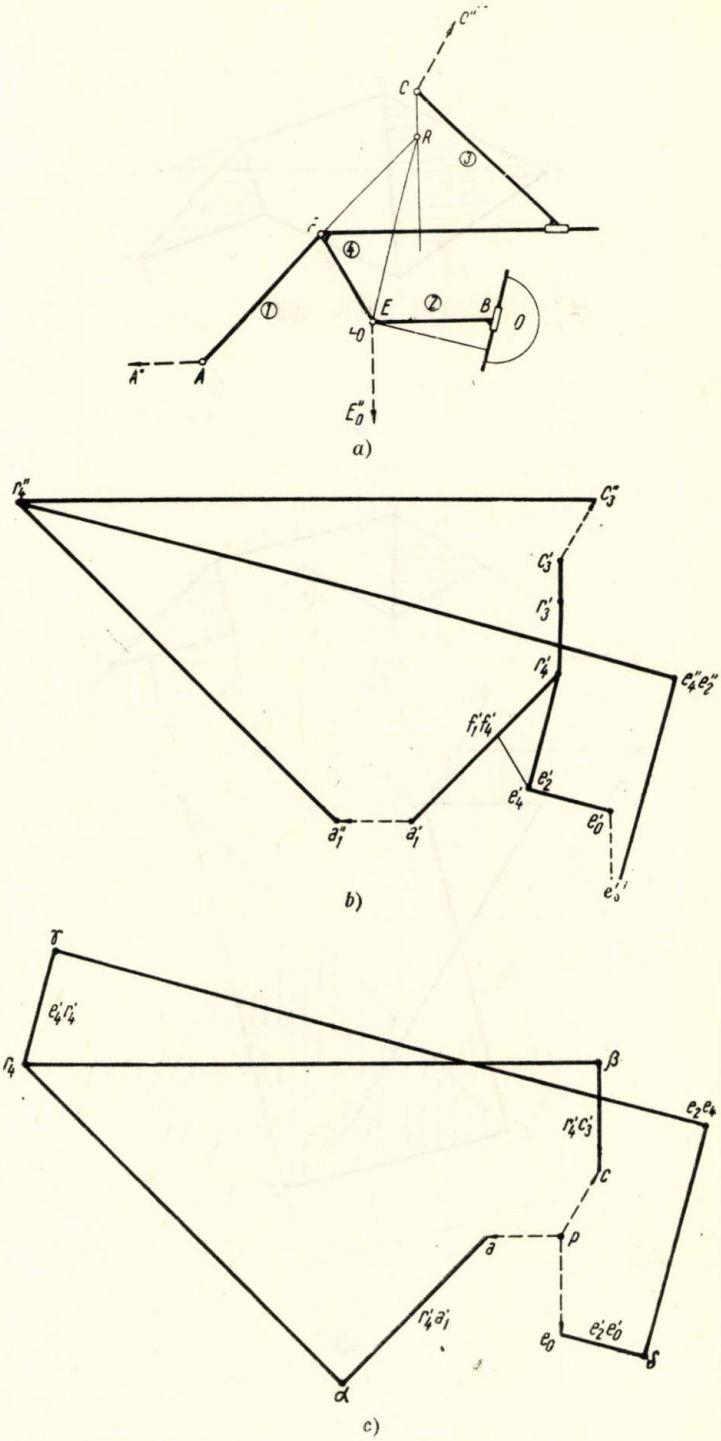
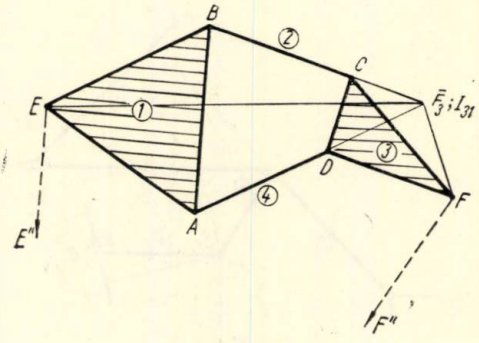
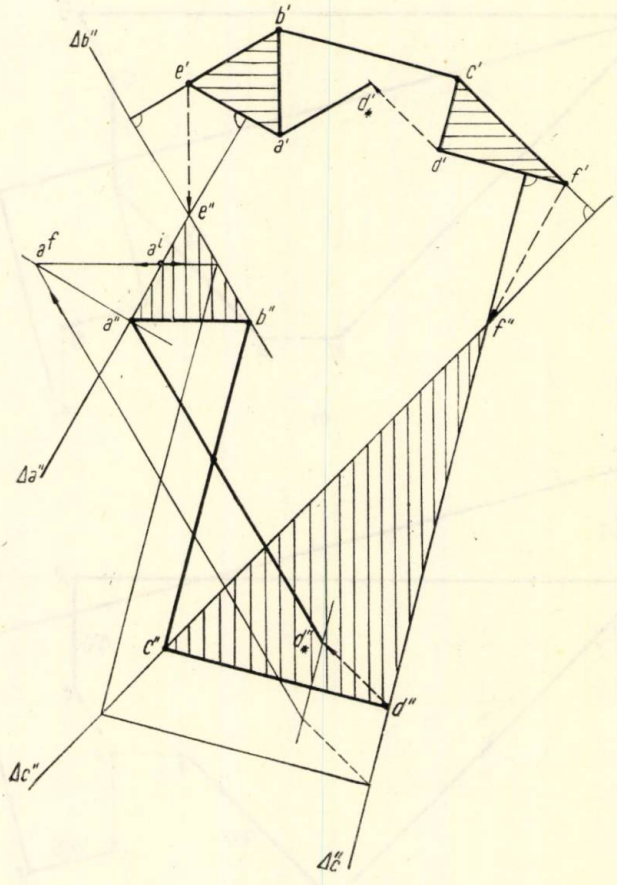

C''
C
R
③
F
④
①
E
②
B
O
A''
A
E''0
a)
r''4
c''3
c'3
r'3
r'4
e''4e''2
f'1f'4
e'2
e'4
e'0
a''1
a'1
e''0
b)
γ
e'4r'4
r4
β
e2e4
r'4c'3
c
p
a
r'4a'1
e0
e'2e'0
δ
α
c)

Fig. 7

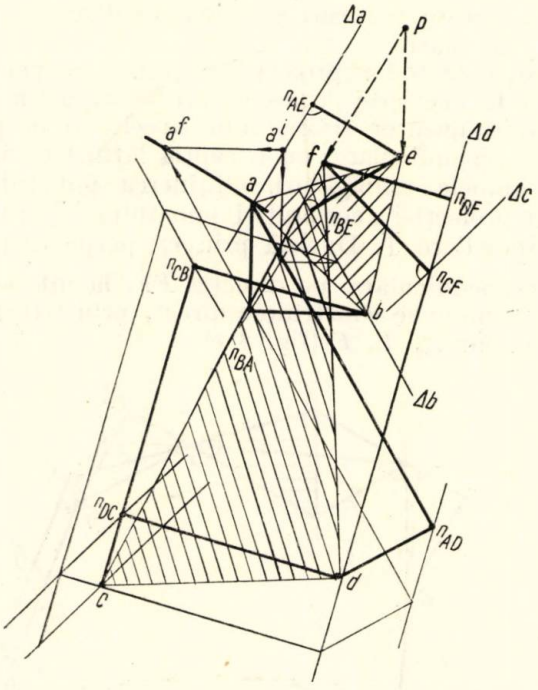


a)

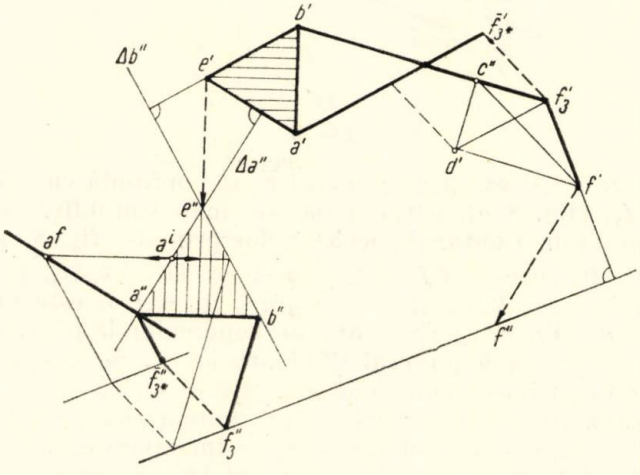


b)

Fig. 8


Δa
p
n_{AE}
a^f
a^i
f
e
Δd
a
n_{BF}
Δc
n_{BE}
n_{CB}
n_{CF}
b
n_{BA}
Δb
n_{DC}
n_{AD}
c
d

c)

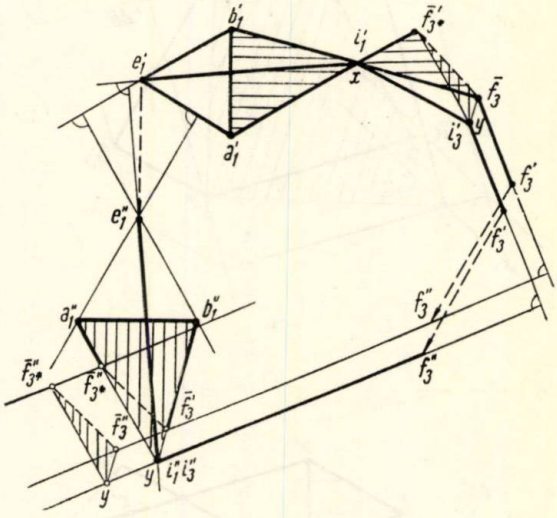

b'
$f_3'^*$
Δb''
e'
c''
f_3'
a'
Δa''
d'
f'
e''
a^f
a^i
a''
b''
$f_3''^*$
f''
f_3''

d)

Fig. 8

vector $\overline{T} = k_a(\overline{f_3' f_{3*}'}) = k_a(\overline{f_3'' f_{3*}''})$, iar construcţiile metodei poziţiilor false sînt reduse. Aceste reduceri sînt mai evidente la conturele deformabile de clase mai mari.

Întrebuinţarea metodei proiecţiilor (fig. 8 *e*) pentru acceleraţiile compuse necesită la acceleraţiile secundare construcţia triunghiului auxiliar $\overline{f}_3''\ \overline{f}_{3*}''\ y$ corespunzător triunghiului acceleraţiilor primare $\overline{f}_3'\ \overline{f}_{3*}'\ x$, care au laturile perpendiculare, cu excepţia laturii de închidere $\overline{T}$, care este aceeaşi în ambele triunghiuri. Obţinerea punctului y dă posibilitatea deplasării proiecţiei acceleraţiei punctului $\overline{F}_3$ care să ţină seama de vectorul de închidere $\overline{T}$. Ducînd prin e_1'' perpendiculara pe direcţia EF, iar prin y perpendiculara pe direcţia $F\overline{F}$, la intersecţia acestora se găseşte punctul de unde se construiesc direct, prin laturi perpendiculare, acceleraţiile punctelor A, B, F (fig. 8 *e*).



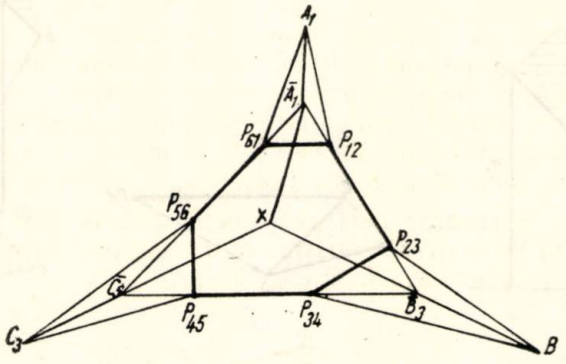
e)

Fig. 8

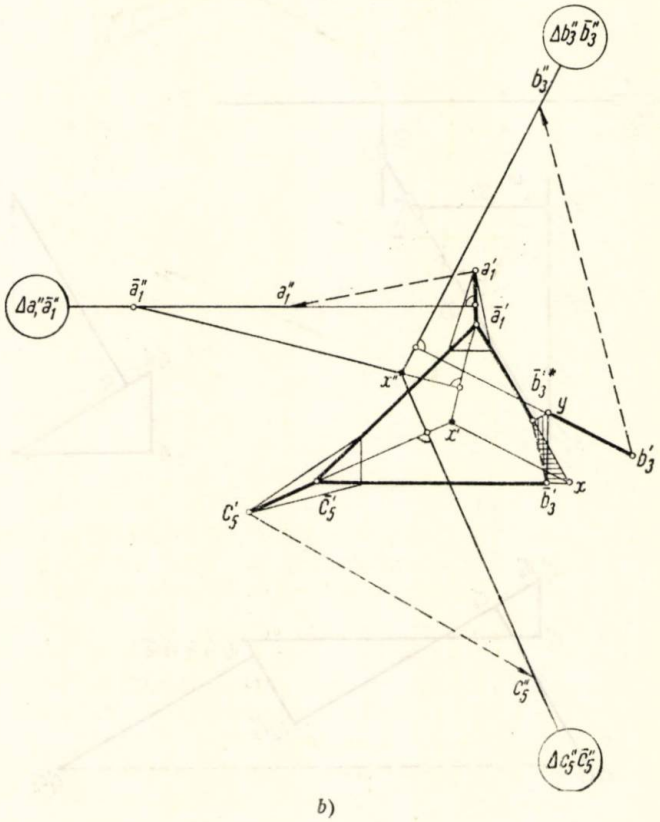
Întrucît la acest exemplu punctul $\overline{F}_3$ se confundă cu centrul instantaneu $I_{31} = I_{13}$ (fig. 8 *a*), construcţia se mai simplifică, eliminîndu-se conturul deformabil. Conturul acceleraţiilor primare (fig. 8 *e*) este format din $e_1'\ i_1'\ i_3'\ f_3'$, în care $\omega_1^2\,\overline{EI} = k_a(\overline{e_1'\ i_1'})$; $\omega_3^2\ \overline{IF} = k_a(\overline{i_3', f_3'})$, şi cu acceleraţia relativă $\overline{a}_{I_{13}} = k_a(i_1'\ i_3') = -\ \omega_{13}\ \overline{u}\ i$, în care $\overline{u}$ este viteza de mutare a centrului. Din e_1'' şi f_3'' se duc perpendicularele pentru acceleraţiile secundare care determină punctul i_1'' identic cu i_3''. Se observă identitatea construcţiilor în ultimele două metode. (fig. 8 *e*).

La hexada (fig. 9 *a*) cu trei cuple potenţiale, pe baza metodelor acceleraţiilor compuse şi solidarizării, se întrebuinţează în locul conturului deformabil $P_{12}\,P_{23}\,\ldots\,P_{61}$ conturul triunghiular $\overline{A}_1$, $\overline{B}_3$, $\overline{C}_5$ [8]. Conturul acceleraţiilor primare şi cel al acceleraţiilor secundare (fig. 9 *b*) rămîn deschise prin vectorul $\overline{T} = k_a(\overline{b_3' b_{3*}'}) = k_a(\overline{b_3'' b_{3*}''})$. Pentru aplicarea metodei proiecţiilor se construieşte triunghiul auxiliar $\overline{b}_3''\ \overline{b}_{3*}''\ y$ pentru acceleraţiile secundare, corespunzător triunghiului acceleraţiilor primare

$\overline{b}_3'\ b_{3\star}'\ x$, care au cîte două laturi perpendiculare. Proiecțiile accelerațiilor compuse ale punctelor $\overline{A}_1$, $\overline{B}_3$, $\overline{C}_5$ egale cu ale punctelor $A_1\ B_3\ C_5$, ceea ce constituie un alt avantaj al accelerațiilor compuse, se obțin ducînd



a)



b)

Fig. 9

din a_1'', b_3'', c_5'' perpendicularele pe direcțiile $A_1\overline{A}_1$, $B_3\overline{B}_3$, $C_5\overline{C}_5$. Două dintre acestea, de exemplu proiecțiile accelerațiilor secundare ale punctelor $\overline{B}_3$ și $\overline{C}_5$, conduc la accelerația secundară a punctului X, aflat la

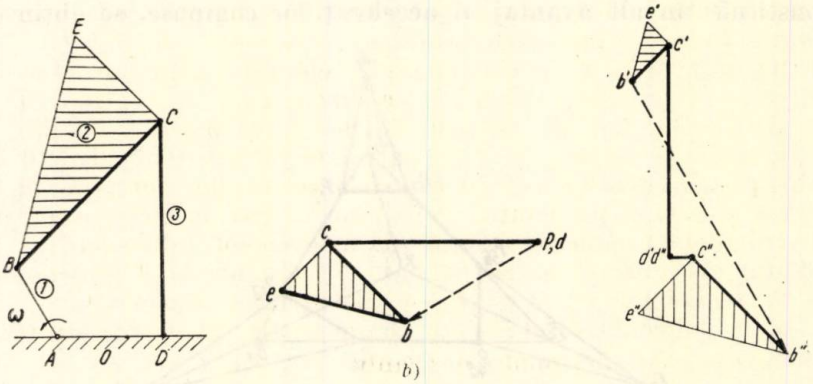

E
C
2
3
B
1
ω
A
O
D
a)
c
p, d
e
b
b)
e'
c'
b'
d' d''
c''
e''
b''
c)

Fig. 10

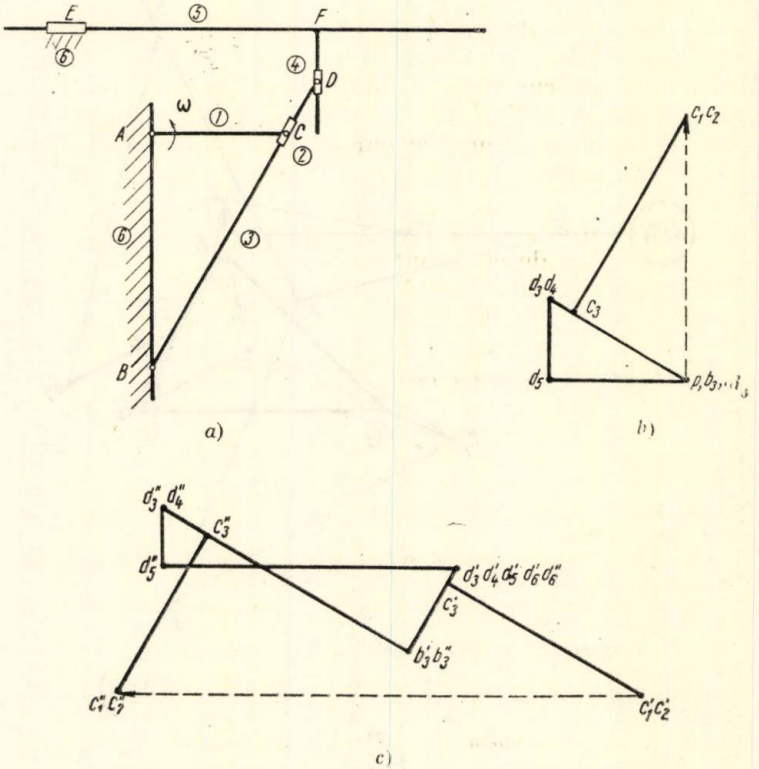

E
5
F
6
4
D
ω
1
A
C
2
6
3
B
a)
c1 c2
d3 d4
c3
d5
p, b3, d3
b)
d3'' d4''
c3''
d5''
d3' d4' d5' d6' d6''
c3'
b3' b3''
c1'' c7''
c1' c2'
c)

Fig. 11

intersecția suporturilor respective $\Delta B_3\overline{B}_3 X$ și $\Delta C_5\overline{C}_5 X$ (fig. 9 *a*). Această accelerație, proiectată pe direcția $\Delta X\overline{A}_1$, va permite împreună cu proiecția cunoscută a accelerației punctului $\overline{A}_1$ aflarea acestei accelerații secundare. În poligonul accelerațiilor din dreptele $\Delta b_3''\ \overline{b}_3''$ și $\Delta c_5''\ \overline{c}_5''$ se găsește la intersecția x'' extremitatea accelerației secundare a punctului X. Ducînd prin x'' perpendiculara pe direcția $\Delta X\overline{A}_1$, obținem la intersecția cu dreapta $\Delta a_1''\ \overline{a}_1''$ punctul $\overline{a}_1''$, astfel că $\overline{a}_{\overline{A}_1} = k_a(\overline{a}_1'\ \overline{a}_1'')$.

Aplicații pe mecanisme. La patrulaterul articulat (fig. 10 *a*) s-a construit planul vitezelor (fig. 10 *b*) și al accelerațiilor compuse (fig. 10 *c*), cu aflarea vitezei și accelerației punctului E legat de bielă, urmărind rezolvarea diadei cu cuple de rotație. La mecanismul rabotezei (fig. 11 *a*), format din mecanismul inițial cu baza 0 și manivela 1 prin adăugarea succesivă a diadelor 2 + 3 și 4 + 5, poligonul vitezelor (fig. 11 *b*) corespunde cu poligonul accelerațiilor compuse (fig. 11 *c*). La acestea, pornind de la acceleraţia butonului de manivelă C_1 sau C_2 cu $\overline{a}_{C_1} = k_a(\overline{c_1'\ c_1''})$, se construiește conturul accelerațiilor primare, trecînd de la c_2' la c_3' prin acceleraţia Coriolis $\overline{a}^c_{23} = k_a(\overline{c_2'\ c_3'})$ și apoi la b_3' și d_3' prin accelerațiile normale de rotație $\overline{a}^n_{C_3B_3} = k_a(\overline{c_3'\ b_3'})$ și $\overline{a}^n_{C_3D_3} = k_a(\overline{c_3'\ d_3'})$. În punctul b_3' se găsește și b_3'' deoarece $\overline{a}_{B_3} = 0$, iar în d_3' se găsește d_4' deoarece $\overline{a}_{D_3} = \overline{a}_{D_4}$; de asemenea se găsește d_5' deoarece $\overline{a}^c_{D_{45}} = 0$ și d_0' pentru că $\overline{a}^c_{D_{50}} = 0$, precum și d_0'' deoarece $\overline{a}_{D_0} = 0$. Conturul accelerației secundare se construiește urmărind conturul vitezelor, adică din b_3'' se duce perpendiculara pe balansierul 3, iar din c_2'' paralela la balansierul 3, obținînd c_3''. Prin asemănare se obține $d_3'' \equiv d_4''$, după care perpendiculara la direcția translației saniei portcuțit și paralela, la aceeași direcție din d_5' definesc punctul d_5'', astfel că acceleraţia saniei este redată prin $\overline{a}_{D_5} = k_a(d_5'\ d_5'')$.

Se subliniază din nou că după obținerea conturului accelerațiilor primare, care este ușor de construit pentru orice contur al lanțului cinematic, conturul accelerațiilor secundare se obține prin paralelism cu conturul vitezelor.

Primită la redacție la 30 august 1966

BIBLIOGRAFIE

1. CHR. PELECUDI, *Metoda accelerațiilor compuse în lanțurile cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., **20**, *2* (1965).
2. — *Metoda accelerațiilor compuse superioare în lanțurile cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., **20**, *3* (1965).
3. — *Punctele caracteristice ale accelerațiilor compuse superioare*, St. cerc. mec. apl., **20**, *4* (1965).
4. — *Metoda solidarizării pentru lanțurile cinematice închise*, I, St. cerc. mec. apl., **20**, *5* (1965).
5. — *Metoda solidarizării pentru lanțurile cinematice închise*, II, St. cerc. mec. apl., **20**, *6* (1965).
6. — *Analogia acceleraţie-viteză în lanțurile cinematice plane*, Bul. Inst. polit. Iași, **XI (XV)**, *1—2* (1965).
7. — *Studiul sistemelor plane de corpuri cu legături prin metoda accelerațiilor compuse*, St. cerc. mec. apl., **21**, *1* (1966).

STABILIREA PE CALE RADIOMETRICĂ A CONDIȚIILOR DE UTILIZARE OPTIMĂ A SURSELOR RADIOACTIVE ÎN GAMADEFECTOSCOPIE

de M. GR. NĂSTASE
Centrul de mecanica solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

În prezenta lucrare sînt arătate consideraţiile teoretice şi rezultatele experimentale privind determinarea coeficienţilor de absorbţie şi, respectiv, a timpilor de expunere, în corelare cu variaţia celorlalţi parametri, pentru cazul surselor radioactive utilizate curent în practică (Co^{60}, Cs^{137}, şi Ir^{192}) şi a pieselor din oţel şi din aluminiu.
Aceste rezultate au fost obţinute pe cale radiometrică, spre deosebire de alte lucrări similare din străinătate [11], [12] prezentate în cadrul Adunărilor generale ale Institutului internaţional de sudură (I.I.S.) şi devenite documente ale acestui for ştiinţific internaţional, lucrări în care determinările experimentale respective au fost făcute pe cale senzitometrică.

În prezent, atît în ţara noastră, cît şi în alte ţări, metodele cu cea mai largă răspîndire pentru controlul nedistructiv al materialelor, produselor şi construcţiilor industriale sînt cele cu radiaţii penetrante (raze X şi raze gama). Importanţa acestor metode este determinată de însăşi necesitatea din ce în ce mai accentuată, pentru asigurarea unei calităţi corespunzătoare a produselor.

Dată fiind multitudinea de parametri ce intervin la fixarea condiţiilor de expunere în practica controlului cu radiaţii penetrante, trebuie să se dispună de criterii cît mai juste, stabilite în urma unor corectări sistematice, care să conducă la o alegere optimă a acestor parametri.

În prezenta lucrare sînt arătate consideraţiile teoretice şi rezultatele experimentale privind determinarea coeficienţilor de absorbţie şi, respectiv, a timpilor de expunere — în corelare cu variaţia celorlalţi parametri — pentru cazul surselor radioactive utilizate curent în practică (Co^{60}, Cs^{137} şi Ir^{192}) şi a pieselor din oţel şi din aluminiu.

Aceste rezultate au fost obţinute pe cale radiometrică, spre deo-

sebire de alte lucrări similare din străinătate [11], [12], prezentate în cadrul adunărilor generale ale Institutului internațional de sudură (I.I.S.) și devenite documente ale acestui for științific internațional, lucrări în care determinările experimentale respective au fost făcute pe cale senzitometrică.

1. CONSIDERAȚII TEORETICE

În studiile efectuate pe cale senzitometrică s-a plecat de la relația de legătură dintre densitatea optică (înnegrirea) a filmelor și timpul de expunere :

$$t = A \frac{F^2}{I} \cdot D^{\alpha} \cdot 2^{-x/x_0}, \tag{1}$$

în care

t este timpul de expunere, în ore,

D — densitatea optică a filmelor,

F — distanța sursă-film, în m,

I — activitatea sursei, în C (Curie),

x — grosimea piesei, în mm,

x_0 = 0,693/μ — grosimea de semiabsorbție, în mm (μ — coeficientul de absorbție),

A și α — coeficienți ale căror valori sînt caracteristice ale filmului și ale radiațiilor utilizate.

Făcîndu-se expuneri experimentale cu diferite surse radioactive, diferite filme cu sau fără ecrane intensificatoare din plumb și la diferite grosimi de oțel, s-au putut determina, fie pe cale grafică, fie prin metoda celor mai mici pătrate, valorile lui A, x_0 și α, astfel ca din relația (1) să se poată calcula valorile lui t în funcție de valorile necesare în diferitele cazuri întîlnite în practică pentru D, F, I și x.

Este de observat că pentru x_0 s-au determinat valori medii, deoarece, după cum se știe, la fasciculele largi de radiații penetrante, μ și implicit x_0 variază cu grosimea piesei.

În prezentul studiu, efectuat pe cale radiometrică, s-a plecat de la legea absorbției radiațiilor, aplicată în cazul fasciculelor înguste :

$$I_i = I_0 \cdot e^{-\mu_i x} \tag{2}$$

și în cazul fasciculelor largi :

$$I_l = I_0 \cdot B \cdot e^{-\mu_i x}, \tag{3}$$

unde

I_0 este intensitatea fasciculului de raze la suprafața piesei,

I_i, I_l — intensitatea fasciculului după ce a trecut prin piesă și ajunge la detector (film) pentru fascicul îngust și fascicul larg,

μ_i — coeficient liniar de absorbție, în cm^{-1}, pentru fasciculele înguste,

x — grosimea piesei, în cm,

B — factor de corecție, introdus din cauza radiațiilor difuzate care ajung la film în acest caz și care depinde de energia radiațiilor primare, de natura și grosimea materialului absorbant și de condițiile geometrice de expunere.

Diferitele metode arătate în literatura de specialitate pentru determinarea factorului B prin calcul — metoda momentelor, metoda difuzărilor succesive, metoda Monte-Carlo [5] — sînt dificil de aplicat și limitate la anumite cazuri și condiții particulare. Cea mai simplă și mai eficace metodă este cea a determinării lui B pe cale experimentală, fie cu ajutorul relației (3) în care se introduc valorile experimentale ale lui I_0, I_l, μ_i și x, fie cu ajutorul relației

$$B = \frac{I_l}{I_i}, \tag{4}$$

care rezultă din (2) și (3) și în care I_l și I_i sînt valorile intensităților radiațiilor, măsurate experimental, pentru fascicul larg și pentru fascicul îngust (se va lucra însă cu același I_0).

În anumite condiții de determinare, precizate și cunoscute (energia radiației, natura materialului absorbant și condițiile geometrice de expunere), factorul de corecție B depinde numai de grosimea materialului și în acest caz se poate pune sub forma unei funcții exponențiale :

$$B = f(x) = e^{-\mu_B \cdot x}. \tag{5}$$

În consecință, relația (3) devine

$$I_l = I_0 \cdot e^{-\mu_B x} e^{-\mu_i x} = I_0 e^{-(\mu_i + \mu_B)x} = I_0 \cdot e^{-\mu_l x}, \tag{6}$$

în care μ_l este coeficientul liniar de absorbție pentru fasciculul larg și, așa cum au arătat și experiențele, $\mu_l = \mu_i + \mu_B < \mu_i$, deoarece μ_B are valori negative, dat fiind că el se referă nu la radiațiile difuzate pierdute în atmosferă, ci la cele care se adaugă radiațiilor primare pe detector și care fac ca

$$I_l > I_i.$$

Rezultă deci că în cazul fasciculelor largi, caz real întîlnit în practică, valorile coeficientului liniar de absorbție μ_l depind de energia radiației, de natura și grosimea materialului absorbant și de condițiile geometrice de expunere.

2. REZULTATE EXPERIMENTALE

Determinările experimentale s-au făcut pentru fasciculul îngust, folosind aranjamentul din figura 1 și măsurînd pe I_0 și I_i, pentru sursele radioactive de Co^{60}, Cs^{137} și Ir^{192} și pentru diferite grosimi de oțel și aluminiu.

Pentru fasciculele largi s-a folosit aranjamentul experimental din figura 2, măsurătorile făcîndu-se pentru aceleași surse și materiale.

În practică se pot întîlni două cazuri distincte de iradiere a pieselor supuse controlului defectoscopic şi anume :

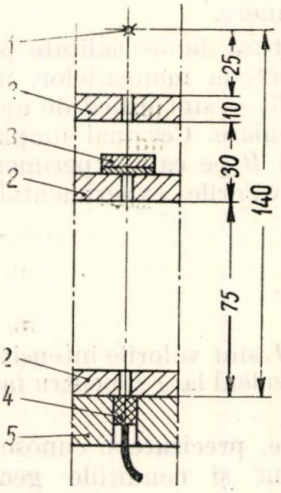


Fig. 1. — Aranjamentul experimental pentru măsurarea coeficienţilor de absorbţie la fascicule înguste :
1 — sursa radioactivă; 2 — colimator; 3 — materialul absorbant; 4 — contor cu scintilaţie; 5 — protecţia contorului din Pb.

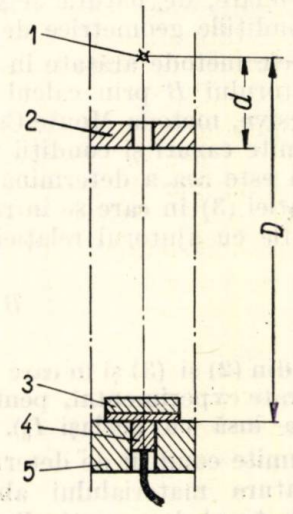


Fig. 2. — Aranjamentul experimental pentru măsurarea coeficienţilor de absorbţie la fascicule largi.

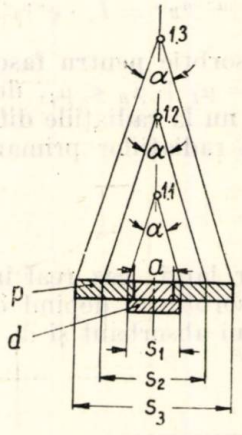


Fig. 3. — Expuneri la unghi solid constant şi suprafaţa de iradiere variabilă :
d — detector (film); p — piesă.

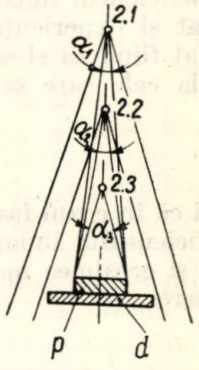


Fig. 4. — Expuneri la unghi solid variabil şi suprafaţa de iradiere constantă.

— iradierea piesei pe o suprafaţă mai mare decît cea a detectorului (filmului) şi implicit a porţiunii din piesă care trebuie controlată, caz în care iradierea se face sub un unghi solid constant (cel prevăzut con-

structiv la aparatul respectiv), în timp ce suprafața de iradiere a piesei poate varia în funcție de distanța sursă-film (fig. 3);

— iradierea unei piese a cărei suprafață este mai mică decît cea a detectorului (filmului), în care caz suprafața de iradiere a piesei este constantă, variind în schimb unghiul solid de iradiere în funcție de distanța sursă-film (fig. 4).

Determinările experimentale s-au făcut deci pentru aceste două cazuri, și anume pentru cîte trei poziții, utilizîndu-se pentru măsurarea intensității radiațiilor un scintilator cu cristal de NaI cu diametrul de 35 mm.

Distanțele de iradiere și implicit mărimea suprafețelor iradiate au fost impuse de puterea de rezoluție a scintilatorului la activitatea respectivă a surselor radioactive.

În figura 5 sînt date valorile coeficienților liniari de absorbție în funcție de grosimea materialului pentru fasciculul îngust, valori obținute cu ajutorul relației (2) și utilizînd rezultatele măsurătorilor obținute pentru I_0 și I_i în aranjamentul experimental arătat în figura 1. Se observă că la Cs^{137} și Co^{60} coeficienții liniari de absorbție μ_i nu variază cu grosimea materialului absorbant, în timp ce la Ir^{192}, care emite radiații policromatice, aceștia variază, și anume valoarea lor scade cu creșterea grosimii materialului absorbant. Această variație s-a demonstrat teoretic și experimental pentru razele X într-o lucrare anterioară [10].

Explicația constă în faptul că componentele spectrului policromatic care au lungimi de undă mai mari (energii mai mici) se absorb mai intens în primele straturi de material, radiațiile rămase — pe măsura parcurgerii materialului — devenind din ce în ce mai dure și descreșterea coeficientului de absorbție μ_i în funcție de grosimea materialului din ce în ce mai lentă.

Din această figură se mai constată — un fapt cunoscut de altfel — că acești coeficienți de absorbție cresc cînd energia radiațiilor scade și cînd numărul atomic al materialului absorbant crește.

În figurile 6—11, pentru a se putea face observații comparative, pe lîngă valorile coeficienților de absorbție μ_i corespunzători fasciculului îngust sînt date și curbele care arată, pentru cele trei surse radioactive și în funcție de grosimea materialului absorbant (oțel și aluminiu), valorile coeficienților de absorbție μ_l pentru fascicule largi în cele două cazuri de iradiere a pieselor menționate anterior (vezi fig. 3 și 4).

Determinarea valorilor lui μ_l s-a făcut cu ajutorul relației (6), folosindu-se rezultatele măsurătorilor experimentale obținute pentru I_0 și I_l.

Curbele din figurile 12 și 13 arată valorile factorului de corecție B și, respec-

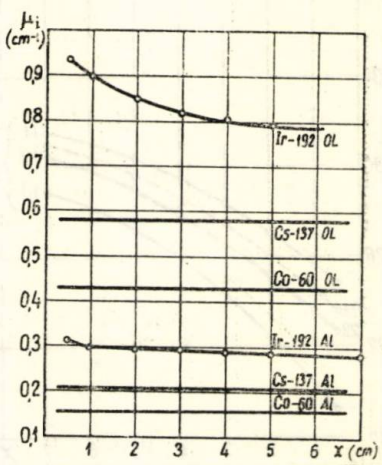


Fig. 5. — Coeficienții de absorbție pentru fascicul îngust.

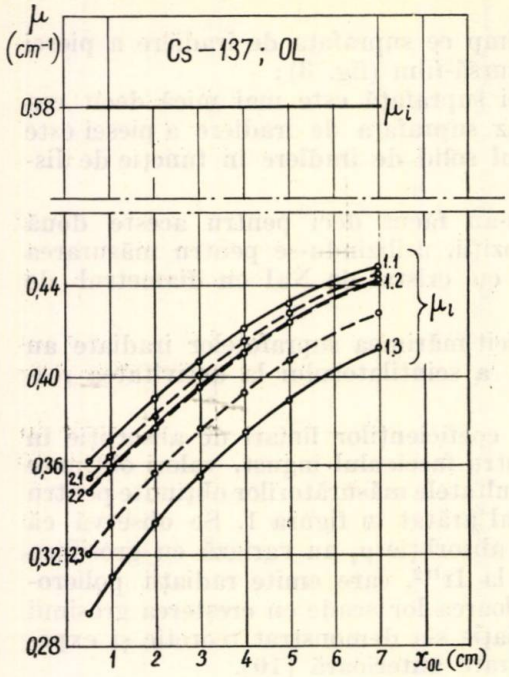


Fig. 6. — Coeficienții de absorbție pentru Cs — 137 și oțel.

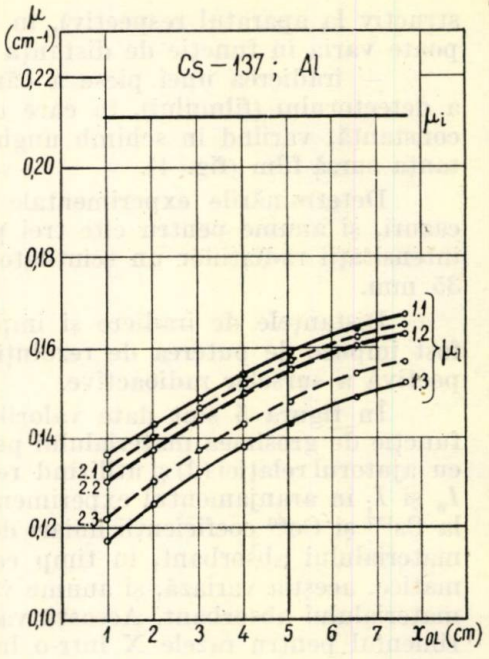


Fig. 7. — Coeficienții de absorbție pentru Cs — 137 și aluminiu.

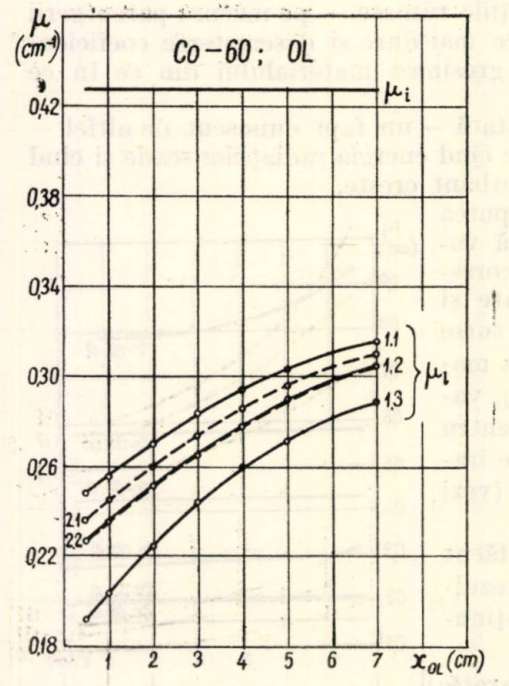


Fig. 8. — Coeficienții de absorbție pentru Co — 60 și oțel.

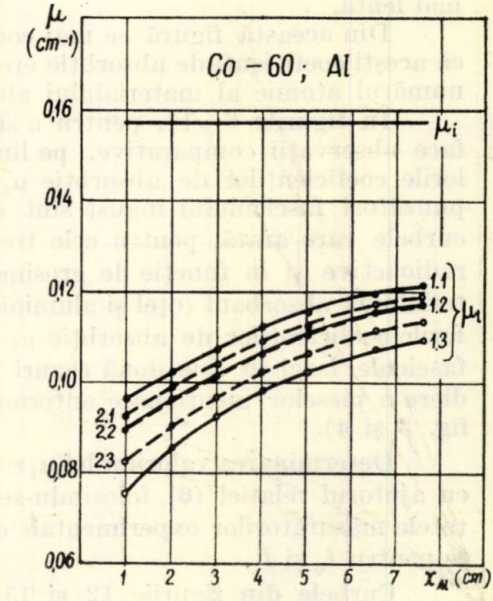


Fig. 9. — Coeficienții de absorbție pentru Co — 60 și aluminiu.

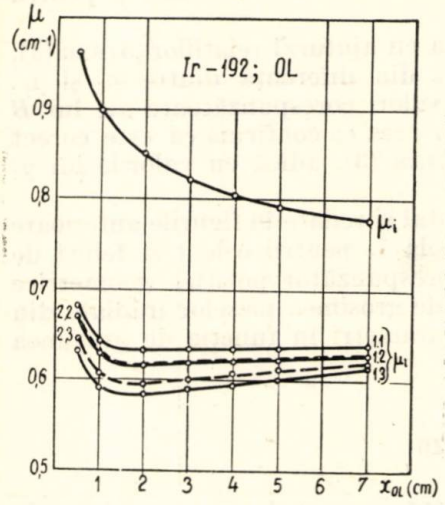


Fig. 10. — Coeficienții de absorbție pentru Ir — 192 și oțel.

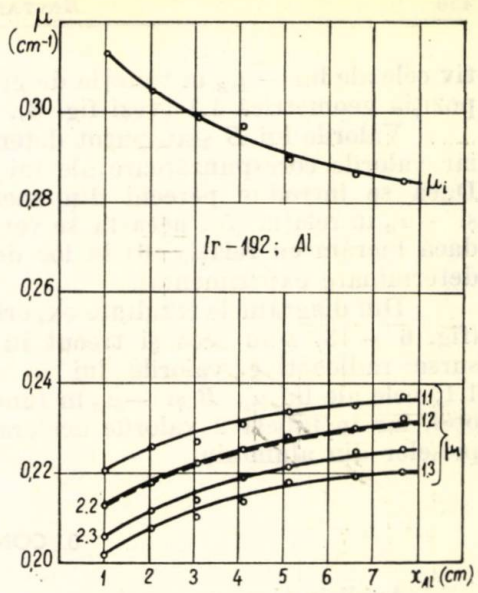


Fig. 11. — Coeficienții de absorbție pentru Ir — 192 și aluminiu.

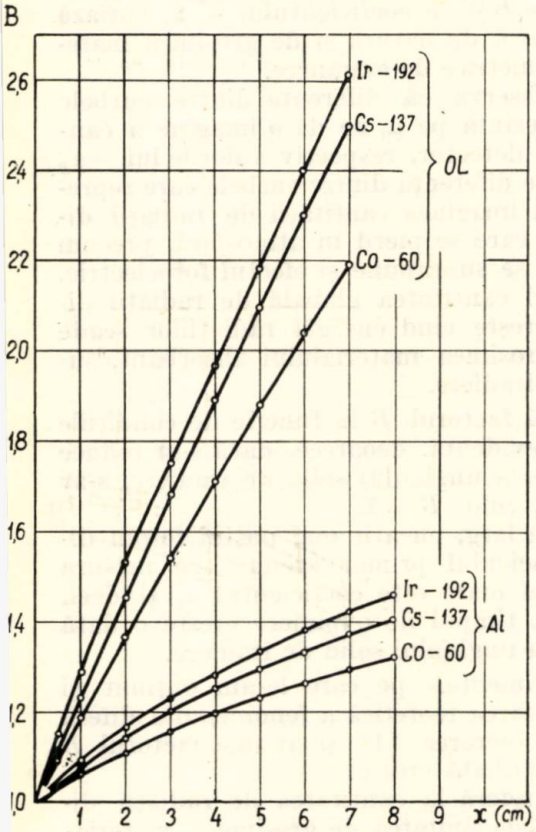


Fig. 12. — Factorul de corecție B pentru fasciculele largi.

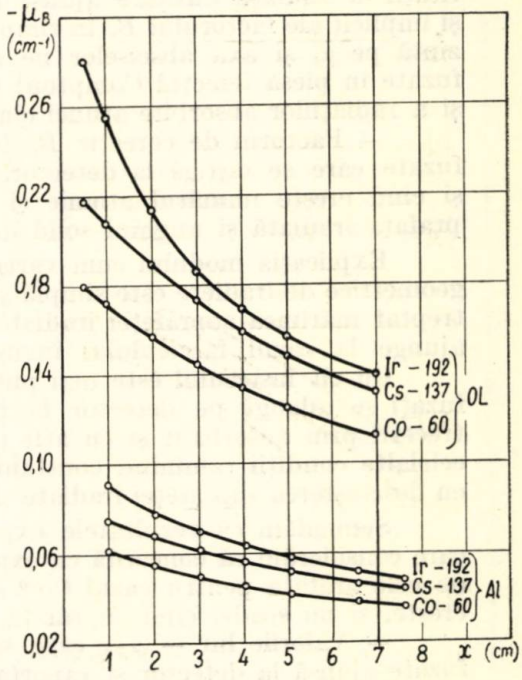


Fig. 13. — Coeficienții $-\mu_B$ corespunzători radiațiilor difuzate la fasciculele largi.

tiv cele ale lui $-\mu_B$ în funcţie de grosimea materialului iradiat şi pentru poziţia geometrică 1.1 (vezi fig. 3).

Valorile lui B s-au putut determina cu ajutorul relaţiilor (3) sau (4), iar valorile corespunzătoare ale lui $-\mu_B$ din diferenţa dintre μ_i şi μ_l. Dacă se introduc perechi din aceste valori corespunzătoare ale lui B şi $-\mu_B$ în relaţia (5), aceasta se verifică, ceea ce confirmă că este corect dacă lucrăm cu relaţia (6) în loc de relaţia (3), adică cu valorile lui μ_l determinate experimental.

Din diagramele rezultate experimental şi redate în figurile anterioare (fig. 6 — 13) s-au scos şi trecut în tabela 1, pentru cele trei feluri de surse radioactive, valorile lui μ_i şi corespunzător poziţiei geometrice 1.1, cele ale lui μ_l, B şi $-\mu_B$ în funcţie de grosimea pieselor iradiate din oţel, iar în tabela 2 valorile aceloraşi parametri în funcţie de grosimea pieselor din aluminiu.

3. CONCLUZII

Analizînd aceste rezultate experimentale, se pot trage următoarele concluzii :

— La fasciculele largi, valorile coeficienţilor de absorbţie μ_l şi implicit cele ale factorului de corecţie B şi ale coeficientului $-\mu_B$ variază în funcţie de energia sursei radioactive, de natura şi de grosimea materialului absorbant şi de condiţiile geometrice de expunere.

Din figurile 6—11 se poate observa că diferenţa dintre curbele care reprezintă pe μ_i şi cele care reprezintă pe μ_l ne dă o imagine a cantităţii de radiaţii difuzate ajunse la detector, respectiv valorile lui $-\mu_B$ şi implicit ale factorului B, în timp ce diferenţa dintre curbele care reprezintă pe μ_l şi axa absciselor ne dă imaginea cantităţii de radiaţii difuzate în piesă (efectul Compton) şi care se pierd în atmosferă, precum şi a radiaţiilor absorbite atunci cînd se suprapune şi efectul fotoelectric.

— Factorul de corecţie B, deci cantitatea globală de radiaţii difuzate care se cîştigă la detector, creşte cînd energia radiaţiilor scade şi cînd creşte numărul atomic şi grosimea materialului absorbant, suprafaţa iradiată şi unghiul solid de iradiere.

Explicaţia modului cum variază factorul B în funcţie de condiţiile geometrice de iradiere este simplă şi evidentă, deoarece, dacă s-ar reduce treptat mărimea suprafeţei iradiate şi a unghiului solid de iradiere, s-ar ajunge la cazul fasciculului îngust, cînd $B = 1$.

Cu cît fasciculul este mai puţin larg, cu atît mai puţini fotoni difuzaţi se adaugă pe detector la fasciculul primar atenuat pe măsura trecerii prin absorbant şi cu atît mai mare este coeficientul μ_l şi deci, celelalte condiţii rămînînd constante, timpul de expunere creşte o dată cu descreşterea suprafeţei iradiate şi a unghiului solid de iradiere.

Semnalăm că rezultatele experimentale pe care le-am obţinut şi care considerăm că concordă cu explicarea teoretică a fenomenului diferă de cele arătate pentru cazul Co^{60} în lucrarea [4], şi anume factorul B creşte, şi nu scade, cînd suprafaţa iradiată creşte.

— Valorile lui $-\mu_B$, care se referă la cantitatea de radiaţii difuzate ajunsă la detector şi raportată la unitatea de grosime a materia-

lului iradiat, variază în același mod ca și factorul B, cu deosebirea că în funcție de grosimea materialului acestea scad, de unde rezultă că, pe măsură ce grosimea materialului crește, o cantitate unitară tot mai mică de radiații difuzate ajung la detector.

După cum se poate observa din figura 13, această scădere devine mai pronunțată pe măsură ce energia radiațiilor descrește și numărul atomic al materialului este mai mare; de asemenea, scăderea este mai mare în primele straturi de material, devenind din ce în ce mai lentă o dată cu creșterea grosimii materialului.

— Valorile coeficientului de absorbție μ_l la fasciculele largi cresc cînd scade energia radiațiilor, suprafața iradiată și unghiul solid de iradiere și cînd crește numărul atomic și grosimea materialului absorbant.

Se observă o singură excepție de la această constatare (vezi fig. 10), și anume în cazul Ir^{192} și piese din oțel, cînd la început μ_l scade cu creșterea grosimii materialului, deoarece în acest caz intervine într-o mică măsură și efectul fotoelectric în primele straturi de material, rămînînd ca mai departe să se manifeste numai fenomenul de difuzie, ca și în celelalte cazuri.

Atenuarea radiațiilor în material la fasciculele largi se produce mai lent decît la fasciculul îngust. Deosebirea dintre atenuarea la fasciculele largi și cea de la fasciculele înguste devine însă din ce în ce mai mică pe măsură ce scade energia radiațiilor și mai ales cînd efectul fotoelectric intervine cu pondere tot mai mare, precum și pe măsură ce crește densitatea materialului (numărul atomic).

În final este necesar să analizăm rezultatele obținute și din punctul de vedere al valorificării lor în practică.

La o anumită piesă ce trebuie controlată și la care natura materialului și grosimea se cunosc, alegerea sursei radioactive și a filmului este determinată în principal, după cum se știe, de considerații de eficacitate, rentabilitate și sensibilitate.

Rămîne problema alegerii coeficientului de absorbție, problemă care a constituit principalul obiectiv al prezentului studiu.

După cum s-a menționat și anterior, în practica controlului cu radiații se utilizează fascicule largi și, ca atare, este necesar să cunoaștem valorile coeficienților de absorbție pentru aceste fascicule (μ_l).

Spre deosebire de metoda senzitometrică, la care timpii de expunere se obțin cu ajutorul relației (1), la metoda radiometrică, dacă se cunosc coeficienții μ_l și timpul de expunere (t_1) pentru anumite valori ale înnegririi filmului, energiei și activității radiațiilor, grosimii materialului (x_1) și distanței sursă-film (F_1) — timp determinat fie din curba de înnegrire a filmului ridicată experimental, fie în urma unor expuneri efectuate practic anterior —, determinarea timpului de expunere (t_2) pentru a obține aceeași înnegrire a filmului la altă energie și activitate a radiațiilor, la altă grosime de material (x_2) și la altă distanță sursă-film (F_2) se poate face cu ajutorul relației

$$t_2 = t_1 \frac{F_2^2}{F_1^2} \cdot \frac{I_1}{I_2} e^{\mu_{l_2} x_2 - \mu_{l_1} x_1}. \qquad (7)$$

Această relație derivă din

$$E_1 = \frac{I_1 \cdot t_1}{F_1^2} \cdot e^{-\mu_{l_1} x_1}, \tag{8}$$

$$E_2 = \frac{I_2 \cdot t_2}{F_2^2} \cdot e^{-\mu_{l_2} x_2}, \tag{9}$$

în care

E_1 și E_2 sînt dozele de radiații ajunse la film,

$\frac{I_1 t_1}{F_1^2}$ și $\frac{I_2 t_2}{F_2^2}$ — dozele de radiații la suprafața piesei, I_1 și I_2 fiind activitatea surselor radioactive, t_1 și t_2 timpii de expunere respectivi, F_1 și F_2 distanțele sursă-film,

μ_{l_1} și μ_{l_2} — coeficienții de absorbție la fasciculele largi și ale căror valori, după cum s-a văzut, sînt impuse de energia radiațiilor, de natura și grosimea materialului controlat și de condițiile geometrice de iradiere,

x_1 și x_2 — grosimea materialului ($x_2 > x_1$).

Pentru a avea aceeași înnegrire a filmului în ambele cazuri, rezultă că $E_1 = E_2$ și deci relațiile (8) și (9) conduc la relația (7).

După ce se cunosc energia radiațiilor folosite, natura și grosimea materialului din care este confecționată piesa ce se controlează, dintre parametrii care influențează valoarea lui μ_l mai rămîne cel al condițiilor geometrice de expunere (de care la determinările pe cale senzitometrică din lucrările arătate anterior nu s-a ținut seama).

Aceste condiții geometrice — mărimea suprafeței iradiate sau, mai bine zis, raportul dintre suprafața iradiată și cea a detectorului (filmului) și mărimea unghiului solid de iradiere — putînd varia în limite foarte largi, considerăm că n-ar fi just și nici util dacă am transmite producției doar această constatare.

Este necesar deci a se face o analiză selectivă a rezultatelor obținute, pentru a se ajunge la fructificarea lor în practică.

Din acest punct de vedere, cunoscînd că aparatele cu surse gama utilizate pentru controlul pieselor prin radiații au, constructiv, unghiul solid de iradiere constant, din multitudinea de poziții geometrice de expunere poziția care trebuie urmărită a se realiza în practică este aceea ca suprafața iradiată să fie sensibil egală cu cea a filmului (vezi fig. 3, poziția 1.1).

În practica controlului cu radiații trebuie urmărit pe cît posibil obținerea acestei poziții, deoarece, din calculele pe care le-am efectuat, cîștigul obținut în scurtarea timpului de expunere prin mărirea suprafeței iradiate este mult mai mic decît pierderea, respectiv mărirea timpului de expunere, datorită creșterii distanței sursă-film aferentă obținerii plusului de suprafață iradiată.

Acestea sînt motivele pentru care, ca urmare a rezultatelor cercetărilor întreprinse, s-au extras și trecut în tabelele 1 și 2 valorile coeficienților μ_l corespunzători poziției de iradiere 1.1 (fig. 3).

Cunoscînd acești coeficienți pentru cele trei feluri de surse radioactive și pentru diferite grosimi de oțel și aluminiu, precum și relația (7),

se pot stabili corect şi expeditiv timpii de expunere pentru controlul pieselor din aceste materiale.

Dacă totuşi, în anumite condiţii de şantier şi de uzină, nu se poate respecta dezideratul ca suprafaţa iradiată să fie sensibil egală cu cea a filmului şi distanţa sursă-film trebuie să fie mai mare, ceea ce implicit conduce la un timp de expunere mai mare şi la o suprafaţă a materialului iradiat mai mare decît a filmului, valorile efective ale coeficienţilor μ_i vor fi mai mici decît cele recomandate în tabelele 1 şi 2 şi, în consecinţă,

Tabela 1

Sursa \ x_{OL} cm		0,5	1	2	3	4	5	6	7
Co^{60} [1]	μ_i	0,428							
Cs^{137}	μ_i	0,580							
Ir^{192}	μ_i	0,964	0,900	0,848	0,822	0,806	0,794	0,786	0,779
Co^{60}	μ_l	0,248	0,256	0,271	0,284	0,295	0,303	0,311	0,316
Cs^{137}	μ_l	0,362	0,372	0,391	0,407	0,421	0,432	0,442	0,448
Ir^{192}	μ_l	0,684	0,645	0,635	0,636	0,637	0,638	0,639	0,640
Co^{60}	B	1,094	1,187	1,368	1,540	1,709	1,878	2,040	2,205
Cs^{137}	B	1,116	1,231	1,458	1,680	1,889	2,096	2,302	2,500
Ir^{192}	B	1,150	1,290	1,531	1,750	1,966	2,181	2,400	2,627
Co^{60}	$-\mu_B$	0,180	0,172	0,157	0,144	0,133	0,125	0,118	0,112
Cs^{137}	$-\mu_B$	0,218	0,208	0,189	0,173	0,159	0,148	0,138	0,132
Ir^{192}	$-\mu_B$	0,280	0,255	0,213	0,186	0,169	0,156	0,147	0,139

Tabela 2

Sursa \ x_{AL} cm		1	2	3	4	5	6	7	8
Co^{60}	μ_i	0,157							
Cs^{137}	μ_i	0,211							
Ir^{192}	μ_i	0,313	0,304	0,299	0,295	0,292	0,289	0,286	0,284
Co^{60}	μ_l	0,096	0,102	0,107	0,111	0,115	0,118	0,120	0,121
Cs^{137}	μ_l	0,136	0,143	0,149	0,154	0,159	0,163	0,166	0,168
Ir^{192}	μ_l	0,222	0,226	0,229	0,232	0,234	0,235	0,236	0,237
Co^{60}	B	1,063	1,105	1,162	1,200	1,233	1,265	1,296	1,323
Cs^{137}	B	1,078	1,145	1,202	1,253	1,295	1,333	1,370	1,405
Ir^{192}	B	1,095	1,168	1,232	1,285	1,334	1,383	1,422	1,460
Co^{60}	$-\mu_B$	0,061	0,055	0,050	0,046	0,042	0,039	0,037	0,036
Cs^{137}	$-\mu_B$	0,075	0,068	0,062	0,057	0,052	0,048	0,045	0,043
Ir^{192}	$-\mu_B$	0,091	0,078	0,070	0,063	0,058	0,054	0,050	0,047

va trece o cantitate mai mare de radiaţii pe film şi se va obţine o înnegrire ceva mai mare, ceea ce practic nu deranjează.

[1] Deşi Co^{60} emite pe două lungimi de unde (două energii diferite, dar apropiate ca valoare şi proporţie în fascicul), practic se poate considera ca fiind o sursă monocromatică.

Pe baza acestor recomandări considerăm deci că rezultatele obținute se pot valorifica în practica controlului defectoscopic nedistructiv, pentru stabilirea unor condiții de utilizare optimă a surselor radioactive în gamagrafie.

Primit la redacție la 30 iunie 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. S. V. Rumeanțiev, *Primenenie radioaktivnîh izotopov i defektoscopii*, Moskva, Atomizdat, 1960.
2. R. Eger, *Dozimetria i zascita ot izlucienii*, Moskva, Gosatomizat, 1961.
3. S. Raiskii, N. F. Smirnov, *Fizicieskie osnovi metoda radioaktivnîh indikatorov*, Moskva, 1956.
4. G. Freyer, E. Becker, *Über den Einfluss von schmalen und breiten Strahlenbündeln bei Absorptionsmessungen mit Gammastrahlen*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule, Magdeburg, 1964, 2.
5. U. Fano, L. V. Spencer, M. I. Berger, *Handbuch der Phys.*, Berlin—Göttingen, 1959.
6. A. Blondel, *Le contrôle non-destructif par gammagraphie*, Paris, Ed. Techniques des industries de la fonderie, 1959.
7. L. Colombier, *Le contrôle de la fabrication et ae la qualité en métallurgie*, Paris, Ed. de la Revue de métallurgie, 1964.
8. G. W. Grodstein, *X-ray Attenuation Coefficients, from 10 keV to 100 MeV*, Washington, U. S. Government Printing Office, 1957.
9. M. Gr. Năstase, *Asupra parametrilor optimi în defectoscopia cu raze X și gamma*, St. cerc. mec. apl., **13**, *2* (1962).
10. M. Gr. Năstase, M. Vidan, *Variația coeficienților de absorbție la razele X în funcție de grosimea materialului absorbant*, St. cerc. mec. apl., **15**, *3* (1964).
11. H. de Leiris, E. Antoni, *Recherche par voie sensitométrique des conditions d'emploi optimum des sources radioactives en gammagraphie de l'acier*, Sondage et Techniques Connexes, *3/4* (1957).
12. J. Kalbfleisch, A. Nouvet, *Etude sensitométrique des emulsions, employées en gammagraphie de l'acier*, IIS—Doc. V, 185 1961.

VECTORI CVASILIBERI ŞI POLIGOANE FUNICULARE SPAŢIALE

de T. G. REDLOV
Institutul politehnic Braşov

531.2

Introducînd noţiunea de „vector cvasiliber" şi demonstrînd „teorema poligoanelor conjugate", autorul indică o metodă de urmat în scopul descoperirii unor sisteme spaţiale formate din mai mult de cinci forţe (vectori alunecători) funicular dependente între ele.

Numeroase procedee grafice utilizate în mecanica teoretică şi aplicată se bazează pe binecunoscutele proprietăţi ale poligoanelor funiculare ataşate unui sistem plan de vectori alunecători. Este de asemenea cunoscut că încercările de a extinde aceleaşi procedee de calcul grafic la sistemele spaţiale s-au lovit de dificultăţi mari pentru două motive principale:

— construcţia unor poligoane funiculare spaţiale pentru un număr care depăşeşte cinci vectori alunecători este în general imposibilă; cu alte cuvinte, între elementele unui sistem spaţial de vectori alunecători nu există o dependenţă funiculară decît în anumite cazuri particulare;

— chiar dacă numărul vectorilor alunecători ai unui sistem spaţial este mai mic sau cel mult egal cu cinci, trasarea unor poligoane funiculare implică utilizarea metodelor proprii geometriei descriptive, ceea ce conduce la unele complicaţii de ordin practic.

Pentru evitarea în bună măsură a dificultăţilor semnalate mai sus, *N. Irimiciuc* [1], [2] a înlocuit coordonatele vectoriale obişnuite ale unui vector alunecător prin „coordonate vectoriale cilindrice", ceea ce a permis rezolvarea problemelor spaţiale ale algebrei vectorilor alunecători prin procedeele cunoscute de la cazul plan.

Există însă unele probleme de mecanică aplicată, cum ar fi, de exemplu, stabilirea liniei de echilibru a unui fir perfect flexibil, acţionat de un număr oarecare de forţe în spaţiu, care conduc la necesitatea construirii unor poligoane funiculare spaţiale.

În cele ce urmează se va arăta că descoperirea unor sisteme spaţiale formate din mai mult de cinci vectori alunecători, între care există

o dependenţă funiculară, este posibilă prin definirea şi utilizarea unui nou tip de vectori, şi anume : se numeşte *vector cvasiliber* mărimea orientată caracterizată prin modul, direcţie şi sens, al cărei punct de aplicaţie poate fi ales în mod arbitrar pe o suprafaţă dată.

Prin „punctul de aplicaţie" sau „originea" unui vector cvasiliber se înţelege punctul în care se poate efectua operaţia de echivalenţă constînd în descompunerea vectorului după regula paralelogramului. Poziţia originii unui vector cvasiliber depinde, aşadar, de doi parametri.

Prin introducerea vectorilor cvasiliberi se completează gama tipurilor de mărimi orientate, clasificate din punctul de vedere al gradelor de libertate pe care îl posedă punctele lor de aplicaţie, după cum urmează :

Tipul vectorial	Numărul parametrilor de care depinde poziţia punctului de aplicaţie
Legat	0
Alunecător *)	1
Cvasiliber	2
Liber	3

În anumite împrejurări se poate da vectorilor cvasiliberi o interpretare mecanică. Dacă, de exemplu, se consideră un fir inextensibil suspendat în două puncte fixe şi încărcat cu o greutate $\overline{P}$, făcînd să acţioneze asupra firului o forţă suplimentară oarecare, punctul de aplicaţie al greutăţii $\overline{P}$ va descrie o curbă situată pe o sferă ; aşadar, făcînd abstracţie de durata deplasării firului, greutatea P poate fi considerată un vector cvasiliber.

Un alt exemplu îl constituie sfera nedeformabilă, menţinută în echilibru pe suprafaţa unui con circular drept, avînd axa verticală, prin intermediul unui fir inextensibil, ca în figura 1 : greutatea G a sferei este un vector glisant pe verticala ce trece prin centrul imobil al acesteia ; cunoscînd însă că centrul sferei poate ocupa orice poziţie pe un cerc orizontal, rezultă că, neluînd în considerare timpul necesar deplasării sferei, greutatea acesteia este un vector cvasiliber, al cărui punct de aplicaţie poate fi ales în mod arbitrar pe suprafaţa laterală a unui cilindru circular drept, cu axa verticală.

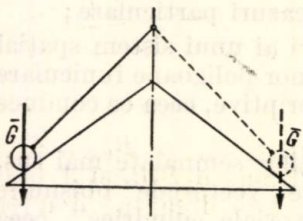


Fig. 1

Fie $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ suprafeţele pe care sînt situate punctele de aplicaţie ale vectorilor cvasiliberi $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ (fig. 2 *a*). Construirea unui poligon funicular al acestui sistem de vectori se efectuează urmînd acelaşi procedeu ca şi în cazul vectorilor alunecători : se trasează *poligonul vectorial* $C_0C_1C_2 \ldots C_n$, unde $\overline{C_0C_1} = \overline{P}_1$, $\overline{C_1C_2} = \overline{P}_2, \ldots, \overline{C_{n-1}C_n} = P_n$

*) Mai general, vectorul caracterizat prin modul, direcţie şi sens, avînd punctul de aplicaţie situat pe o curbă dată.

(vectorii $\overline{P}_k$ fiind dispuși în acest poligon într-o ordine anumită), apoi razele polare OC_0, OC_1, ..., OC_n, concurente în polul 0, ales arbitrar (fig. 2 *b*); pe una dintre suprafețele date, de exemplu Σ_2, se alege în mod arbitrar punctul de aplicație B_2 al vectorului $\overline{P}_2$, prin care se duc laturile de poligon funicular B_2B_1 și B_2B_3, paralele respectiv cu razele polare OC_1 și OC_2, punctele B_1 și B_3, situate pe Σ_1 și Σ_3, fiind originile vectorilor $\overline{P}_1$ și $\overline{P}_3$; construcția grafică se continuă după aceeași regulă, obținîndu-se poligonul funicular $A_1B_1B_2 \ldots B_nA_2$.

Se observă că, dacă punctele B_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) pot fi găsite pe suprafețele respective, soluția problemei depinde de *cinci* parametri: coordonatele polului 0 și poziția punctului B_1, de la care s-a început construirea poligonului funicular.

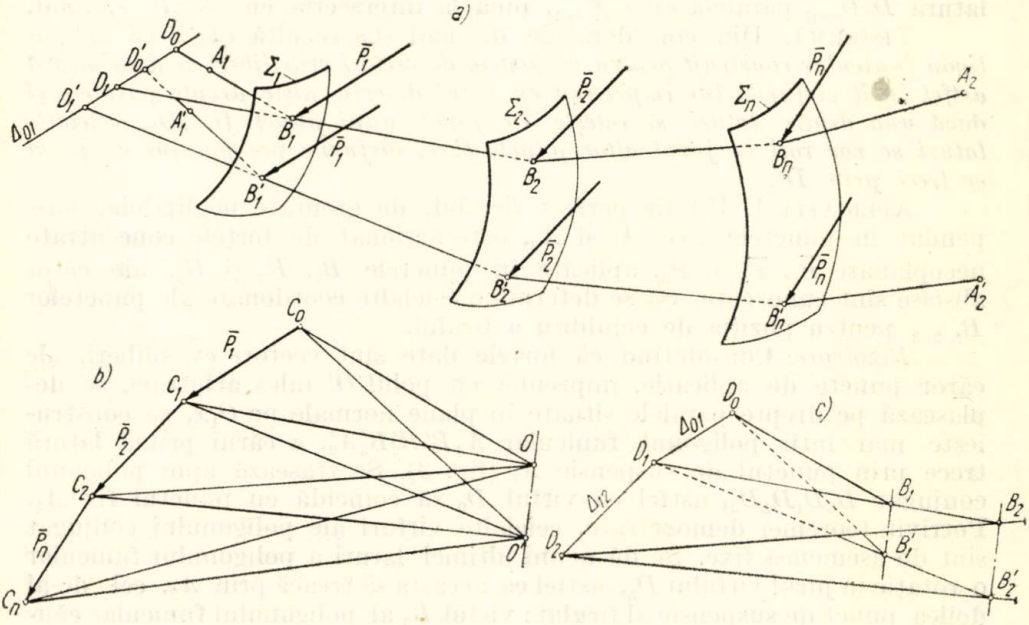


Fig. 2

Să considerăm acum două poligoane funiculare, $A_1 \ldots B_k \ldots A_2$ și $A_1' \ldots B_k' \ldots A_2'$, corespunzătoare polilor O și O'. Planele $A_1B_1B_2$ și $A_1'B_1'B_2'$ sînt paralele cu planele OC_0C_1, respectiv $O'C_0C_1$, deci dreapta de intersecție Δ_{01} a primelor două plane are direcția vectorului $\overline{P}_1$. Laturile de poligon funicular A_1B_1 și B_1B_2, pe de o parte, $A_1'B_1'$ și $B_1'B_2'$, pe de altă parte, interceptează pe dreapta Δ_{01} segmentul D_0D_1, respectiv $D_0'D_1'$ (fig. 2 *a*). Făcînd ca D_0' să coincidă cu D_0 și D_1' cu D_1, punctele C_0, C_1, O', O, pe de o parte, și D_0, D_1, B_1', B_1, pe de altă parte, formează două tetraedre, avînd cinci perechi de muchii paralele; rezultă că în acest caz particular dreptele OO' și B_1B_1' sînt paralele. Reciproc, dacă B_1B_1' este paralel cu OO', punctele D_0' și D_1' coincid cu D_0, respectiv cu D_1, așa încît laturile de poligon funicular D_0B_1' și $B_1'B_2'$ se obțin din D_0B_1 și B_1B_2 prin rotirea ultimelor în jurul punctelor D_0, respectiv D_1 (fig. 2 *c*). Analog,

planele $B_1B_2B_3$ și $B_1'B_2'B_3'$ se intersectează după dreapta Δ_{12}, paralelă cu $\overline{P}_2$; făcînd să coincidă segmentele interceptate pe Δ_{12} de laturile B_1B_2 și B_2B_3, pe de o parte, și de $B_1'B_2'$ și $B_2'B_3'$, pe de altă parte, se va obține tetraedrul *) $D_1D_2B_2'B_2$, avînd latura B_2B_2' paralelă cu OO' ș.a.m.d.

Liniile frînte $D_0D_1, \ldots D_n$ și $C_0C_1 \ldots C_n$ au laturile corespondente paralele, motiv pentru care cea dintîi poate fi considerată drept un *poligon conjugat* al poligonului vectorial.

Este de observat că, în cazul unui anumit poligon funicular al unui sistem de vectori cvasiliberi, putem construi o infinitate de poligoane conjugate, alegînd, de exemplu, diferite puncte D_k pe latura B_kB_{k+1}. Construcția poligonului conjugat trecînd prin punctul D_k se execută în modul următor: se trasează latura D_kD_{k+1}, paralelă cu C_kC_{k+1}, pînă la intersecția cu latura de poligon funicular $B_{k+1}B_{k+2}$ și, în sens invers, latura D_kD_{k-1}, paralelă cu C_kC_{k-1}, pînă la intersecția cu $B_{k-1}B_k$ ș.a.m.d.

TEOREMĂ. Din considerațiile de mai sus rezultă că, *dacă un poligon funicular construit pentru un sistem de vectori cvasiliberi se deformează astfel încît vîrfurile lui împreună cu polul descriu niște drepte paralele și dacă una dintre laturi se rotește în jurul unui punct fix D_k, celelalte laturi se vor roti în jurul altor puncte fixe, vîrfurile poligonului conjugat ce trece prin D_k.*

APLICAȚIA 1. Un fir perfect flexibil, de greutate neglijabilă, suspendat în punctele fixe A_1 și A_2, este acționat de forțele concentrate necoplanare $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ și P_3, aplicate în punctele B_1, B_2 și B_3, ale căror abscise sînt cunoscute. Să se determine celelalte coordonate ale punctelor $B_{1,2,3}$ pentru poziția de echilibru a firului.

Rezolvare. Considerînd că forțele date sînt vectori cvasiliberi, ale căror puncte de aplicație, împreună cu polul O' (ales arbitrar), se deplasează pe drepte paralele situate în plane normale pe O_1x, se construiește mai întîi poligonul funicular $A_1B_1'B_2'B_3'A_2'$, a cărui primă latură trece prin punctul de suspensie A_1 (fig. 3). Se trasează apoi poligonul conjugat $D_0D_1D_2D_3$, astfel ca vîrful D_0 să coincidă cu punctul fix A_1. Potrivit teoremei demonstrate, celelalte vîrfuri ale poligonului conjugat sînt de asemenea fixe. Se dă acum ultimei laturi a poligonului funicular o rotație în jurul vîrfului D_3, astfel ca aceasta să treacă prin A_2, cel de-al doilea punct de suspensie al firului; vîrful B_3 al poligonului funicular căutat se găsește pe această latură. Ducînd prin C_3 raza polară paralelă cu D_3A_2, se găsește polul definitiv O. În sfîrșit, se completează razele polare și laturile de poligon funicular, verificînd că ultimele laturi se intersectează cu corespondentele lor din primul poligon funicular în punctele fixe A_1, D_1 și D_2.

Din examinarea figurii 3 rezultă cu ușurință că deplasările $B_1'B_1$, $B_2'B_2$, $B_3'B_3$ și $O'O$ sînt paralele, așa încît teorema referitoare la poligoanele conjugate este aplicabilă.

După cum s-a arătat în considerațiile teoretice, un sistem de vectori cvasiliberi admite în general o infinitate de poligoane funiculare, care depind de cinci parametri. În problema de față, obligativitatea poligonului funicular de a trece prin două puncte date este echivalentă cu patru

*) Dacă O' se găsește în planul OC_1C_2, tetraedrul $D_1D_2B_2'B_2$ degenerează într-un patrulater plan, avînd latura D_1D_2 nedeterminată; luînd în acest plan D_1D_2 paralel cu C_1C_2, rezultă că B_2B_2' și OO' au aceeași direcție.

condiții restrictive, soluția depinzînd, așadar, de un singur parametru: abscisa polului O. Problema ar fi admis o soluție unică dacă s-ar fi impus poligonului funicular o a cincea condiție, de exemplu respectarea unei anumite lungimi a firului, a unei valori date a efortului maxim etc.

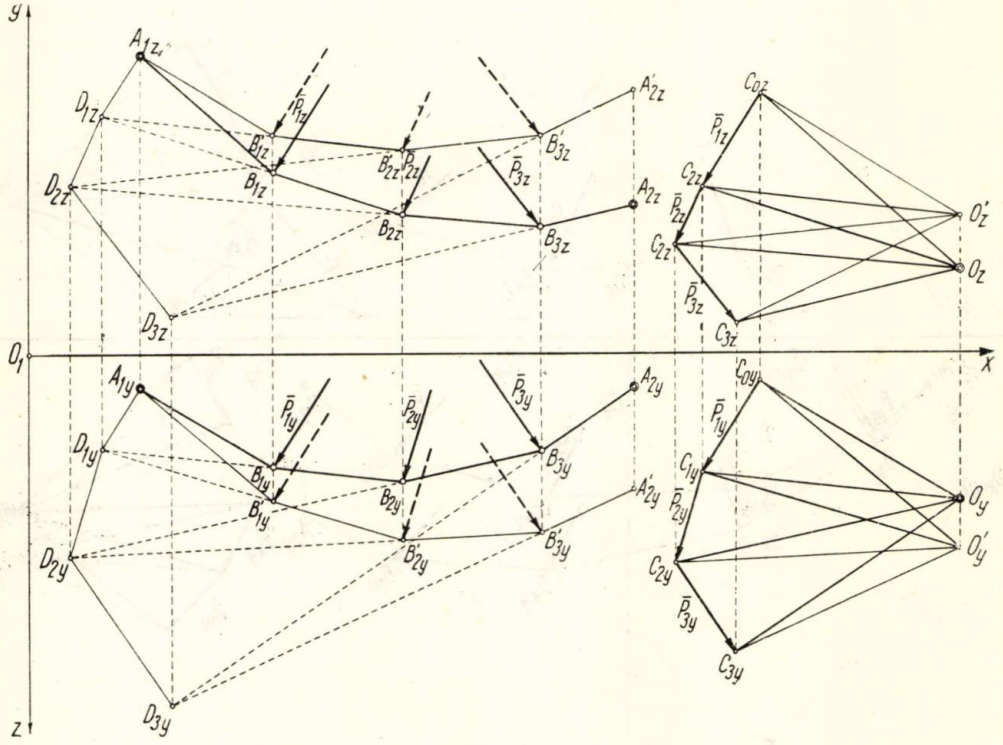


Fig. 3

APLICAȚIA 2. Să se traseze poligonul funicular al vectorilor cvasiliberi P_k, situați în planele Σ_k, normale pe un plan dat Π, astfel ca laturile extreme să treacă prin punctele A_1, respectiv A_2, iar una dintre laturi să intersecteze dreapta Δ, perpendiculară pe planul Π.

Rezolvare. Alegînd în planul Π axele rectangulare O_1xy, proiecțiile $\overline{P}_{kz}$ ale vectorilor cvasiliberi $\overline{P}_k$ pe acest plan formează un sistem de vectori alunecători (fig. 4). Se trasează în planul O_1xy poligonul funicular ce trece prin punctele date A_{1z}, Δ_z și A_{2z}, unde Δ_z reprezintă proiecția dreptei Δ pe planul Π. Acestui poligon, avînd vîrfurile B_{kz} bine determinate, îi corespunde polul fix O_z, proiecția pe planul O_1xy a polului căutat O. Punctele de aplicație B_k ale vectorilor cvasiliberi $\overline{P}_k$ sînt situate, așadar, pe niște drepte normale în B_{kz} pe planul Π. Se trasează acum în planul O_1xz poligonul funicular $A_{1y} \dots B'_{ky} \dots$, corespunzător polului O'_y, ales arbitrar pe linia de ordine ce trece prin O_z; pentru ca ultima latură a acestui poligon să treacă prin A_{2y}, se dau punctelor B_k și polului O deplasări paralele cu axa O_1z, se trasează proiecția $A_{1y} \dots D_{ky} \dots$ a poligonului conjugat ce trece prin A_1 și se determină proiecția O_y a polului căutat, urmînd procedeul indicat în aplicația precedentă.

Se observă că problema admite o soluție unică, întrucît poligonul funicular trebuie să îndeplinească cinci condiții independente între ele.

În cazul particular cînd toate planele Σ_k sînt perpendiculare pe axa O_1x, proiecțiile $\overline{P}_{ky}$ și $\overline{P}_{kz}$ ale vectorilor evasiliberi $\overline{P}_k$ devin vectori

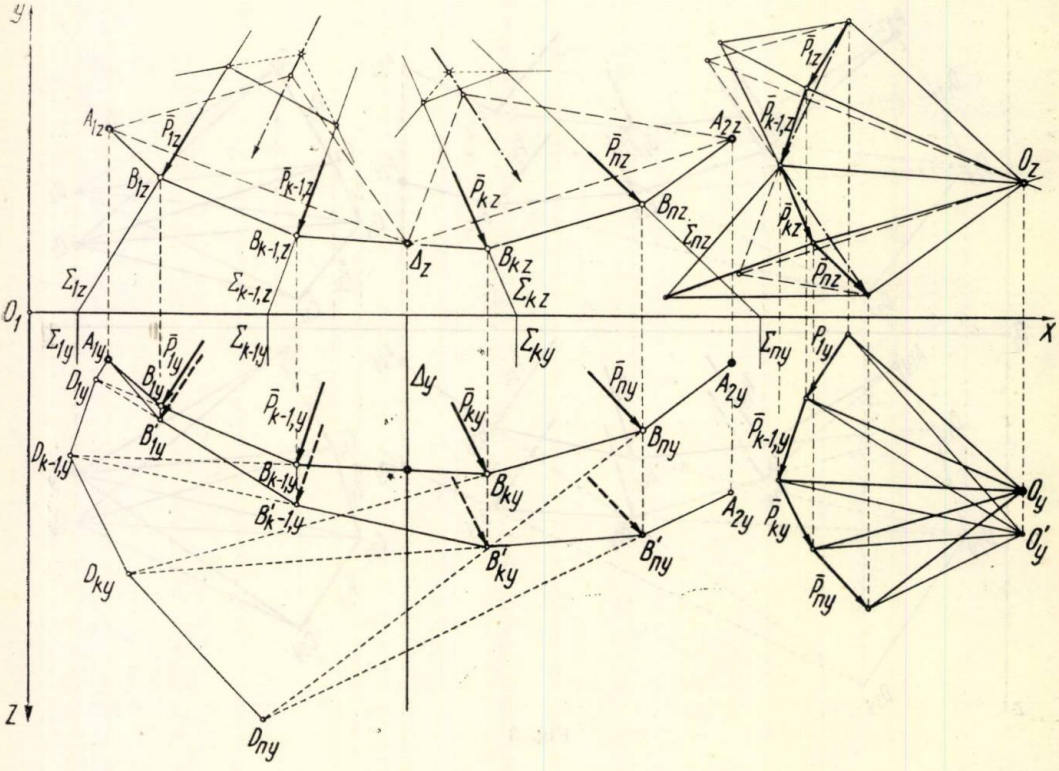


Fig. 4

alunecători, iar poligonul conjugat are toate laturile situate într-un plan paralel cu Σ_k, proiecțiile lor fiind coliniare; se regăsește astfel un caz particular al teoremei referitoare la poligoanele funiculare plane potrivit căreia două poligoane construite cu doi poli diferiți își intersectează laturile corespondente în puncte situate pe o dreaptă paralelă cu linia polilor.

Primită la redacție la 25 iulie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Irimiciuc N., *Metoda coordonatelor vectoriale cilindrice în prezentarea grafică a algebrei vectoriale spațiale*, Bul. Inst. politehnic Iași, s. n., **III(VII)**, *3—4*, p.195—199 (1957).
2. Drăgan C., Irimiciuc N., Mangeron D., *Noi metode grafice-analitice interesînd teoria mecanismelor și a mașinilor*, St. cerc. mat. Cluj, **XII**, *2*, p. 228—243 (1961).

CENTENARUL ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

SESIUNEA GENERALĂ ŞTIINŢIFICĂ DIN 21—24 SEPTEMBRIE 1966. COMUNICĂRILE DIN DOMENIUL MECANICII APLICATE

În cadrul manifestărilor prilejuite de sărbătorirea Centenarului Academiei Republicii Socialiste România a avut loc între 21 şi 24 septembrie 1966 o sesiune generală ştiinţifică.

Lucrările sesiunii au fost deschise de acad. prof. Miron Nicolescu, preşedintele Academiei, vice-preşedinţii Academiei: acad. Ş. Ţiţeica, acad. R. Răduleţ, acad. Şt. Milcu şi acad. Ath. Joja, care au prezentat referate cu privire la realizările şi perspectivele în ştiinţele matematice, fizice, chimice, geologice şi geografice, în ştiinţele tehnice, în ştiinţele biologice şi în ştiinţele sociale.

Lucrările sesiunii au continuat apoi prin şedinţele de referate şi comunicări ştiinţifice pe secţii.

Şedinţa *Secţiei de ştiinţe tehnice* a fost deschisă de către acad. E. Carafoli, preşedintele secţiei, care a prezentat referatul „Dezvoltarea ştiinţelor tehnice în România". Subliniind manifestările mai importante ale vieţii ştiinţifice din a doua jumătate a secolului trecut, ca înfiinţarea *Societăţii politehnice* şi a *Şcolii de poduri şi şosele*, vorbitorul s-a oprit asupra realizărilor lui Gh. Duca, Ilie Radu şi M. Romniceanu care au adus contribuţii valoroase la dezvoltarea transporturilor feroviare şi a lucrărilor de construcţii din România, desfăşurînd în acelaşi timp şi o activitate didactică rodnică. În continuare a fost reliefată una din figurile cele mai predominante din acea perioadă, Anghel Saligny, care a avut o prodigioasă activitate ştiinţifică şi tehnică timp de peste 40 de ani şi de numele căruia sînt legate numeroase lucrări publice avînd o deosebită însemnătate economică. Figură de prestigiu internaţional, Anghel Saligny a reprezentat ţara la mai multe congrese internaţionale, fiind şi preşedintele Academiei Române.

Trecînd la alte domenii de activitate, vorbitorul a evidenţiat apoi realizările pionierilor aviaţiei româneşti şi mondiale Traian Vuia, Aurel Vlaicu, Henri Coandă şi alţii, ca şi activitatea valoroasă în domeniul construcţiilor şi lucrările privind teoria sonicităţii ale lui George Constantinescu.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 24 Nr. 2 P. 461–471 BUCUREŞTI 1967

În continuare au fost amintite contribuțiile deosebite aduse de profesorii Gh. Filipescu și D. Ghermani în probleme de rezistența materialelor și de hidrodinamică.

Referindu-se apoi la domeniul electrotehnicii, acad. E. Carafoli a citat numele unor profesori ca Augustin Maior (Universitatea din Cluj), N. Vasilescu Karpen și Const. Budeanu (Politehnica din București), acad. I. S. Gheorghiu, I. Constantinescu și T. Tănăsescu, a căror activitate științifică se remarcă prin rezultatele valoroase obținute. Au fost menționate de asemenea activitatea didactică a unor profesori ca A. Ioachimescu, I. Ionescu și C. Mikloși, realizările privind laboratoarele și instalațiile de aerodinamică de la Institutul politehnic din București, precum și cele de rezistență și încercarea metalelor și de hidraulică de la Institutul politehnic Timișoara.

În continuare, vorbitorul s-a ocupat de noua organizare sistematică a cercetării științifice din țara noastră (după 1944), subliniind cu această ocazie rezultatele principale obținute în diferitele domenii ale științelor tehnice, rolul acestor științe în general, ca și contribuțiile aduse în rezolvarea problemelor economiei naționale, precum și la îmbogățirea patrimoniului științific mondial.

Acad. E. Carafoli a arătat apoi că rapida trecere în revistă a rezultatelor obținute în ramura științelor tehnice oferă o imagine elocventă a stadiului actual al cercetării românești și în special a saltului efectuat în acest domeniu, la noi în țară, în ultimele două decenii. Asigurarea condițiilor sociale și materiale, a îndrumării muncii de cercetare în scopul rezolvării sarcinilor ridicate de transformarea radicală a economiei naționale, precum și a orientării colectivelor de cercetători au făcut ca știința să fie cuprinsă organic în procesul general al transformărilor revoluționare din țara noastră.

Dezvoltarea impetuoasă pe care a luat-o cercetarea în științele tehnice și rezultatele remarcabile obținute au condus, conform precizării vorbitorului, la crearea unor adevărate școli științifice românești, contribuție importantă la introducerea progresului tehnic în economia noastră națională și la afirmarea pe arena internațională a științei românești.

Azi, în țara noastră, a spus în continuare acad. E. Carafoli, există o vastă rețea de institute și centre de cercetare, cu o bază materială în plin progres, dispunînd de cadre bine pregătite, în măsură să rezolve cele mai complexe probleme ale progresului tehnic. Numărul unităților de cercetare din țara noastră este astăzi într-o continuă creștere potrivit cerințelor și necesităților economiei noastre socialiste, fapt consemnat și de către vorbitor, care s-a ocupat în continuare de perspectivele diferitelor ramuri ale științelor tehnice, menționînd atît noile unități de cercetare care vor fi create, cît și problemele ce vor fi atacate ca și dezvoltarea pe care o vor cunoaște cercetările respective.

Referindu-se la programul unitar de cercetare științifică, elaborat de Consiliul Național al Cercetării Științifice, pentru perioada 1966—1970, acad. E. Carafoli a subliniat că acesta constituie un nou pas important în propășirea științei și tehnicii din țara noastră, avînd în vedere îndeplinirea obiectivelor fundamentale privind industrializarea țării, dezvoltarea

cu precădere a industriei grele, cu pivotul ei industria constructoare de mașini, ca și promovarea progresului tehnic în toate domeniile activității de producție.

Programul prevede dezvoltarea pe un front cît mai larg a cercetărilor în domeniile științelor tehnice, aceasta, deoarece așa cum arată tov. Nicolae Ceaușescu, „... în țările avansate din punct de vedere economic și cultural, principala direcție de orientare a eforturilor statului și oamenilor de știință o constituie științele de care depinde progresul în sfera producției materiale a societății, mersul înainte al economiei și culturii" [1]).

În continuare vorbitorul a scos în evidență caracterul desfășurării acestei ample activități creatoare, orientarea activității în direcția cercetărilor fundamentale cît și a celor aplicative, îmbinarea cercetării fundamentale cu cea aplicativă reprezentînd o trăsătură principală a procesului gîndirii științifice.

Justa corelare a celor două aspecte, a precizat vorbitorul, reprezintă tocmai cheia succesului oricărei cercetări științifice, factorul determinant al valorii sale. Mai departe acad. E. Carafoli a subliniat faptul că, în prezent, cu toate succesele obținute în ultimii douăzeci de ani în cadrul științelor tehnice, capacitățile și posibilitățile institutelor de cercetare existente nu pot face față tuturor problemelor generate de construirea socialismului în țara noastră în sensul rezolvării cît mai rapide a acestora. Această situație, a precizat vorbitorul, se datorește în parte dezvoltării foarte rapide a industriei și economiei noastre naționale, cauză obiectivă și fapt deosebit de pozitiv. Totodată capacitatea redusă a unora dintre institute în ceea ce privește cadrele și baza materială, împiedică uneori abordarea sub aspecte multiple a diferitelor teme de cercetare, astfel sînt necesare investiții mai mari. În acest scop, acad. E. Carafoli propune să se găsească o modalitate de asigurare a acestor fonduri din buget pe baza unui procentaj raportat eventual la cuantumul investițiilor sau al producției globale. Pe această cale, a continuat vorbitorul, rolul și obiectivele fixate de Consiliul Național al Cercetării Științifice vor fi perfect asigurate.

Printre alte propuneri de viitor, cu privire la pregătirea cadrelor a fost și înființarea unei facultăți speciale în cadrul Institutului politehnic din București, ce s-ar putea denumi „Facultatea pentru problemele de bază ale tehnicii". În cadrul acestei facultăți se va putea asigura, pe baza unor programe analitice corespunzătoare, pregătirea studenților în vederea activității viitoare de cercetare în diferite domenii ca : mecanică aplicată, energetică, electronică, automatică etc.

Alte propuneri s-au referit la schimbarea denumirii Institutului Politehnic în Universitatea Tehnică, acordîndu-se astfel acestei instituții prestigiul necesar, așa cum s-a întîmplat și în alte țări. O asemenea schimbare ar permite să se ilustreze dezvoltarea actuală și de perspectivă a învățămîntului nostru tehnic superior și tendința sa de promovare și reflectare a științelor tehnice din toate ramurile economiei noastre naționale.

---

[1]) N. Ceaușescu, *Expunere la Sesiunea Marii Adunări Naționale cu privire la îmbunătățirea organizării și îndrumării activității de cercetare științifică*, Scînteia nr. 6838 din 21 decembrie 1965.

În încheiere, acad. E. Carafoli a precizat că atacarea unei tematici de cercetare cît mai multilaterală, adîncirea aspectelor fundamentale și lărgirea aspectelor aplicative ale cercetării în științele tehnice reprezintă ținta eforturilor în viitorul apropiat pentru mărirea cît mai rapidă a eficienței muncii de cercetare și a apropierii de necesitățile economiei și culturii naționale pe drumul construcției socialiste în țara noastră.

După conferința deosebit de interesantă rostită de acad. E. Carafoli, care a oferit o imagine pregnantă a dezvoltării științelor tehnice în România și a perspectivelor în acest domeniu, a urmat prezentarea comunicărilor de specialitate.

Au fost comunicate 50 de lucrări din diferite domenii ale științelor tehnice ca : mecanica fluidelor, energetică, electrotehnică, automatică, electronică, mine, metalurgie, solide deformabile, teoria mecanismelor, organe de mașini, rezistența materialelor, uzură, sudură, seismicitate, calculul fundațiilor, vibrații, betoane etc. Au fost astfel prezenți, cu lucrări tratînd probleme actuale și moderne, îmbinînd aspectele fundamentale cu cele aplicative, cercetători și specialiști din toate institutele de cercetări ale Academiei : Institutul de mecanica fluidelor, Institutul de energetică, Centrul de mecanica solidelor, Centrul de cercetări tehnice Timișoara, precum și din unele institute de cercetări departamentale, din ministere și din institute de învățămînt superior.

Comunicările prezentate au constituit contribuții valoroase în domeniile respective și totodată un omagiu adus de autori acestei luminoase manifestări.

Prezența cercetătorilor, specialiștilor și a membrilor corpului didactic din principalele unități de cercetare, de producție și de învățămînt din întreaga țară atestă o dată mai mult că împlinirea unui secol de viață academică românească a reprezentat sărbătoarea întregii științe și culturi românești.

Această sărbătorire a avut loc în etapa în care în țara noastră se desfășoară în toate domeniile o activitate plină de un avînt neîntîlnit, îndreptat în sensul Directivelor Congresului al IX-lea al P.C.R. spre îndeplinirea năzuințelor cele mai îndrăznețe ale poporului nostru pe calea desăvîrșirii construirii socialismului în România, stat cu o puternică economie națională, o știință avansată și o cultură strălucitoare.

★

În cele ce urmează vom trece în revistă în mod succint numai comunicările din sfera *mecanicii aplicate*, celelalte lucrări făcînd desigur obiectul unor dări de seamă în publicațiile de specialitate.

Astfel, în domeniul *mecanicii fluidelor* au putut fi audiate comunicări de hidrodinamică, aerodinamică, lubrificație etc.

Acad. prof. D. Dumitrescu, M. Cazacu și M. Oprică (Institutul de mecanica fluidelor), în comunicarea „Studiul condițiilor la limită în hidrodinamica fluidelor vîscoase pentru unele cazuri de integrare numerică a ecuațiilor Navier-Stokes", cercetează modul în care intervin condițiile la limită în problema integrării numerice a ecuațiilor Navier-Stokes, punînd în evidență punctele speciale de speța întîi și a doua, ce apar în vecinătatea frontierelor solide formate din segmente de dreaptă. Autorii arată punerea condițiilor la limită în punctele speciale de speța întîi,

dînd peretelui solid o semnificație hidrodinamică în cazul curgerii fluidelor vîscoase. În continuare sînt prezentate cîteva metode de tratare a punctelor speciale de speța a doua, indicîndu-se totodată și soluțiile obținute cu ajutorul mașinilor de calcul. De asemenea, se indică și modul de obținere a soluției numerice pentru domeniile multiplu conexe.

Continuînd cercetările sale în domeniul fluidelor nenewtoniene, prof. N. Tipei, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România, se ocupă de data aceasta, în colaborare cu Olga Biță (Institutul de mecanica fluidelor), de caracterizarea proprietăților de forfecare a fluidelor nenewtoniene. Pornind de la rezultatele obținute privind teoria generală a mișcării mediilor nenewtoniene, se urmărește stabilirea și rezolvarea ecuațiilor de mișcare, cu posibilități de aplicare în viscozimetrie. Noțiunea de viscozitate dinamică în sens newtonian este extinsă prin introducerea unor noi parametri, reprezentînd coeficienți de viscozitate de ordin superior, iar determinarea experimentală a acestora este posibilă folosind o aparatură simplă în cazuri tipice de mișcare (cilindri coaxiali, suprafețe plane înclinate etc.). Tratarea analitică în vederea obținerii coeficienților caracteristici este o problemă dificilă, pentru care se dă în lucrare metoda generală de rezolvare cu aplicații în situații particulare și un procedeu de aproximații succesive care permite folosirea metodelor de calcul numeric. Se prezintă, de asemenea, ca aplicație, determinarea coeficienților de frecare pentru două medii nenewtoniene, ale căror curbe au fost ridicate experimental.

V. N. Constantinescu și Fl. Dimofte (Institutul de mecanica fluidelor), în comunicarea „Asupra influenței unor cîmpuri magnetice și electrice în lubrificația cu gaze" studiază problema lubrificației cu gaze în ipoteza că mediul lubrifiant posedă o conductibilitate electrică, iar mișcarea este influențată de cîmpuri electromagnetice exterioare. Autorii scriu ecuațiile generale ale lubrificației magnetogazodinamice și examinează diferite condiții electromagnetice exterioare (cîmpuri magnetice transversale sau cîmpuri magnetice tangențiale combinate cu cîmpuri electrice transversale). Pentru fiecare caz deduc ecuația diferențială a presiunilor și examinează posibilitățile de obținere a soluției, ca și existența unor soluții simple în anumite situații limită. În final se reliefează posibilitățile acestui nou tip de lubrificație, ca mărirea capacității portante, diminuarea frecărilor sau micșorarea debitelor de lubrifiant. Rezultatele sînt aplicate la cîteva tipuri de lagăre lubrificate cu gaze.

Șt. N. Săvulescu (Institutul de mecanica fluidelor) prezintă rezultatele obținute cu firul cald asupra variațiilor bruște de viteză („spikes") și în alte scurgeri tranziționale decît stratul limită pe placa plană. Lucrînd în condiții speciale (viteze mici, perturbații ale curentului exterior) autorul a obținut aceste variații bruște în stratul limită cu gradient de presiune, în scurgerea la intrare într-un canal și în dîrele unor corpuri simetrice și nesimetrice. Interpretarea fizică precum și analiza teoretică conduc la concluzia că mecanismul instabilității secundare a unui profil inflexional variabil în timp, generat de transportul și de deformația nucleului de vîrtej, nu este unic pentru explicația acestor variații bruște.

D. Pantazopol (Institutul de mecanica fluidelor) în comunicarea sa intitulată „Scurgerea supersonică plană a doi curenți gazoși separați printr-o pînză de jet" studiază mișcarea supersonică plană compusă din

doi curenți de gaze perfecte care se scurg în lungul unui perete semiinfinit, de o parte și de alta a acestuia. Scurgerea este deviată cu ajutorul unui jet subțire (jet-flap) care țîșnește din punctul în care peretele solid se întrerupe, sub un unghi oarecare față de acesta. Metoda de calcul propusă este dezvoltată pe baza unei formule dată de acad. E. Carafoli într-o lucrare anterioară, cu ajutorul căreia se pot calcula coeficienții de presiune în funcție de deviația curentului, atît în cazul expansiunii continue cît și în acel al compresiunii prin șoc. Autorul obține ecuațiile jetului separator cu ajutorul cărora pot fi calculați toți parametrii aerodinamici ai scurgerii. Exemple numerice de calcul sînt date prin tabele și diagrame.

T. Hacker (Institutul de mecanica fluidelor) în comunicarea făcută se ocupă de restabilirea rapidă a incidenței avionului în cazul mișcărilor de bază nestaționare. În cazul zborului orizontal uniform, oscilația de mare frecvență a incidenței indusă de o perturbație se amortizează într-un interval de timp scurt, în mișcarea fugoidă perturbația continuînd lent cu incidența aproximativ constantă.

Autorul demonstrează cu ajutorul unor funcții Liapunov, convenabil alese, că restabilirea rapidă a incidenței are loc și în cazul mișcărilor de bază nestaționare (viteză și altitudine de zbor variabile). În aceste cazuri prin restabilirea incidenței se înțelege racordarea legii ei de variație la cea corespunzătoare programului de zbor dat.

Prof. I. Anton, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România, și O. Popa (Centrul de cercetări tehnice Timișoara) în comunicarea „Determinarea sensibilității la cavitație a rețelelor simple și multiple" enunță o metodă originală de determinare a sensibilității la cavitație a unei rețele multiple sau simple de profile hidrodinamice de formă oarecare. Metoda se întemeiază pe reprezentarea cîmpului de viteze cu ajutorul formulei integrale Cauchy pentru funcții olomorfe și periodice. Se stabilește apoi ecuația integrală cu nucleu continuu a derivatei funcției de viteze în lungul conturului profilelor dispuse în rețea. Soluția problemei se obține prin rezolvarea unor sisteme de ecuații de tip Fredholm de speța a doua. Autorii demonstrează de asemenea existența și unicitatea acestor soluții.

În comunicarea „Unele aspecte ale curbei sarcină-debit a electropompelor centrifuge submersibile în vederea optimizării funcționării lor" prof. Gr. Ioachim, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România, și prof. N. Pîrvulescu (Institutul de petrol, gaze și geologie) după ce arată necesitatea stabilirii unor formule pentru curbele caracteristice ale pompelor centrifuge submersibile în vederea optimizării funcționării lor trec la stabilirea curbei sarcină-debit. Pornind de la conica determinată prin condiții inițiale, acceptînd anumite ipoteze simplificatoare și folosind variabile adimensionabile, autorii ajung la ecuația unei hiperbole în care intră un parametru care caracterizează pompa. Comparînd curba ipotetică menționată cu curba obținută prin măsurare la standul de probă se constată diferențe neglijabile, ceea ce verifică ipotezele acceptate.

S. Sisak (Centrul de cercetări tehnice Timișoara) prezintă comunicarea „Considerații asupra coeficientului de depresiune maximă la profile hidrodinamice în rețea și singular". Plecînd de la expresia diferenței maxime de presiune pe cele două fețe ale unui profil hidrodinamic deduce relația coeficientului de depresiune maximă folosind parametrii medii ai

curentului. În relația obținută apare explicit influența principalilor factori de calcul ai rețelei și a geometriei profilului asupra valorii coeficientului de depresiune maximă. Relația stabilește dependența dintre coeficientul de depresiune maximă și portanța unitară a profilului, respectiv unghiul de incidență. Prin introducerea presiunii critice de formare a bulelor de cavitație se separă coeficientul de cavitație al profilului de cel al curentului. Cu ajutorul acestor doi coeficienți devine posibilă trasarea liniei de separație a zonelor cu și fără cavitație pe extradosul profilelor. Prin trecerea la limită se determină legătura dintre coeficienții caracteristici ai profilului în rețea și ai aceluiași profil izolat. Valorile calculate cu metoda prezentată se compară cu primele rezultate experimentale obținute în tunel hidrodinamic.

In domeniul *mecanicii solidelor* s-au prezentat lucrări privind mecanica construcțiilor, solide deformabile, teoria mecanismelor, uzura și rezistența materialelor.

În comunicarea „Analiza interacțiunii teren-structură prin intermediul echivalentului dinamic" acad. Ștefan Bălan, M. Ifrim și C. Pacoste analizează comportarea structurilor supuse acțiunii seismice ținînd seama de influența deformabilității terenului de fundație. Este pusă în evidență, calitativ și cantitativ, modificarea răspunsului dinamic în funcție de proprietățile elastice care caracterizează interacțiunea dintre teren și structură. În vederea unei abordări practice a acestei probleme, studiul s-a efectuat prin intermediul sistemului monomasic-echivalent. În acest sens s-au utilizat criteriile de echivalență care guvernează trecerea de la modelul matematic cu n grade de libertate la sistemul monomasic, sisteme considerate conservative. Pentru proiectarea antiseismică a structurilor se propun trei variante de calcul bazate atît pe corectarea perioadei fundamentale de vibrație și a spectrului seismic cît și pe cercetarea coeficienților de echivalență. Lucrarea este însoțită de grafice care pun în evidență variația principalelor mărimi care precizează influența deformabilității terenului asupra răspunsului dinamic al structurii.

În comunicarea „Influența caracteristicilor de rigiditate ale structurii și ale terenului de fundare asupra comportării construcțiilor solicitate seismic" H. Sandi, G. Șerbănescu și A. Bugheanu (INCERC) prezintă considerații teoretice asupra deformării dinamice a clădirilor cu multe nivele punînd în evidență contribuția relativă a diferitelor tipuri de deformare ale structurii sau ale terenului de fundație la deplasările de ansamblu ale construcției. Considerentele teoretice sînt completate cu rezultatele obținute pe cale experimentală în cadrul INCERC-lui pentru un număr de clădiri înalte de diferite tipuri constructive. Concluziile la care s-a ajuns se referă la importanța relativă a diferitelor tipuri de deformare în ceea ce privește caracteristicile dinamice și deplasările structurii solicitate seismic, la importanța vibrațiilor de torsiune și la efectul discontinuităților locale.

Prof. Cr. Mateescu, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România, în comunicarea sa „Concepții noi relative la stabilirea siguranței construcțiilor" studiază două aspecte noi și anume:

1. Coeficientul de siguranță al unui element de rezistență dintr-o construcție sau al unei structuri se înfățișează ca o funcție de suprasarcină,

peste sarcina normată, și de parametri geometrici și mecanici corespunzători cazului de încărcare.

Astfel funcția corespunzătoare suprasarcinii relative, se reprezintă la mai toate tipurile de elemente de rezistență printr-o ramură de curbă de tip hiperbolic. Se constată că pe cînd unele elemente de rezistență (sau structuri) sînt puțin sensibile la suprasarcini, altele sînt foarte sensibile, putînd să-și piardă chiar stabilitatea oricît de mult material s-ar întrebuința în construcție. Această sensibilitate la suprasarcini se constată în special la unele tipuri de elemente și structuri la care nu se aplică legea suprapunerii efectelor și în anumite cazuri de încărcări.

2. Pentru a se atenua efectele unei eventuale catastrofe, se propune ca, pentru lucrările de mare importanță, proiectul să fie completat cu studiul măsurilor constructive și al regulilor de exploatare care să conducă la complexul de măsuri ce trebuie luate în zona teritorială de influență, în vederea micșorării pagubelor. Printr-un calcul economic se va stabili în mai multe variante costul măsurilor de luat în comparație cu mărimea pagubelor evitate.

Prof. V. Nicolau (CSCAS) și colectivul său de lucru au prezentat contribuțiile aduse la dezvoltarea teoriei și a calculului betonului armat și precomprimat de specialiștii români. Îmbunătățirea metodelor de calcul al elementelor de beton armat și de beton precomprimat a implicat efectuarea unor cercetări privind comportarea acestor elemente în diferite stadii de lucru.

În comunicare sînt precizate principalele studii teoretice și experimentale efectuate în acest scop. De asemenea, se trec în revistă cercetările asupra comportării la fisurare și la deformație a grinzilor încovoiate de beton armat, precum și condițiile de ancorare a armăturilor pe reazeme. Au mai fost arătate rezultatele experimentărilor pentru precizarea cantitativă a pierderilor de tensiune în armăturile pretensionate și a lungimii de ancorare la transfer pentru toroane. Pentru verificarea atît la rezistență, cît și la fisurare, a elementelor de beton precomprimat, au fost elaborate pe baza analizei atente a condițiilor de lucru, relații simple de calcul diferențiate în funcție de modul de execuție, de tipul de armătură utilizată, precum și de condițiile de solicitare și de mediu. Principalele rezultate au fost concretizate în prescripții și recomandări pentru calculul elementelor de beton armat și beton precomprimat.

În comunicarea „Torsiunea barelor drepte din beton armat" prof. C. Avram, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România, conf. dr. ing. I. Filimon, ing. A. Mihăescu, ing. I. Deutsch (Institutul politehnic Timișoara) și ing. R. Crișan, ing. L. Seleș, ing. G. Șulea, ing. I. Opriș (INCERC Timișoara) prezintă unele aspecte teoretice și experimentale privind ruperea elementelor prismatice drepte de beton armat prevăzute cu bare longitudinale de oțel-beton și etrieri solicitate la torsiune pură. Pe baza considerațiilor teoretice și a rezultatelor încercărilor grinzilor experimentale a fost stabilită o relație de calcul pentru valoarea momentului de torsiune la rupere, ținînd seama de procentul de armare și de marca betonului. Comunicarea cuprinde unele rezultate ale cercetărilor efectuate în colaborare de către catedra de beton armat și clădiri a Institutului politehnic Timișoara și secția INCERC Timișoara în problema torsiunii barelor drepte din beton armat.

Sandu Răutu și Valeriu Bănuț (Centrul de mecanica solidelor) în comunicarea „Calculul structurilor static nedeterminate cu ajutorul calculatoarelor electronice" prezintă metodele de calcul al structurilor static nedeterminate, utilizate în cadrul Centrului de mecanica solidelor al Academiei Republicii Socialiste România. Pornind de la metodele clasice de calcul al structurilor, autorii reușesc să dea algoritmele de calcul cele mai indirecte, în vederea utilizării optime a calculatoarelor electronice, aducînd totodată și unele exemple de calcul.

R. Prișcu (Ministerul Energiei Electrice), în continuarea studiilor sale privind calculul barajelor în arc, a prezentat o lucrare în care se ocupă de eforturile și deformațiile ce apar în arcele componente ale unui baraj arcuit, adoptînd pentru calcul schema cea mai generală : arce cu grosimea variabilă, solicitate de temperaturi variabile liniar de la cheie spre nașteri. Aplicînd teoria lucrului mecanic de deformație elastică, autorul determină necunoscutele static nedeterminate, eforturile și deplasările radiale corespunzătoare. Calculînd arcele componente a două mari baraje din țara noastră reliefează rezervele lor de rezistență, care prin metodele de calcul existente nu rezultau, precum și rolul deosebit al diferențelor de temperatură amonte-aval asupra stării de efort.

În domeniul *solidelor deformabile* D. Drăghicescu, în comunicarea „Integrarea asimptotică a ecuațiilor teoriei elasticității tridimensionale în cazul plăcilor plane solicitate dinamic" reduce problema tridimensională a plăcilor plane la un șir recurent de probleme bidimensionale prin rezolvarea tensiunilor și deplasărilor în serii de puteri după parametrul mic. Puterile termenilor inițiali ai acestor dezvoltări se aleg în mod diferit pentru fiecare componentă în parte pornind de la necesitatea de a putea integra sistemele obținute în raport cu variabila după normala la placă, avînd în vedere satisfacerea condițiilor la limită pe suprafețele superioară și inferioară ale plăcii. Se ține seama și de necesitatea de a rămîne, în sistemele astfel integrate, principalele componente sub formă diferențială, pentru a se putea satisface condițiile la limită pe marginile plăcii. Autorul dă apoi calculul aplicativ al frecvențelor proprii ale plăcii plane dreptunghiulare și ale stării de tensiune și de deplasare în cazul oscilațiilor libere și forțate ale aceleiași plăci.

M. Mișicu (Centrul de mecanica fluidelor), în comunicarea sa „Bazele teoretice, metode și aplicații ale mecanicii solidelor structurale deformabile", plecînd de la rezultatele ce le-a obținut anterior, privind mecanica mediului structural, analizează o serie de cazuri de solicitare a elementelor cu stare bidimensională de tensiune în prezența efectelor de concentrare ale tensiunilor și a apariției distorsiunilor datorate rotațiilor și încovoierilor locale. Pentru aceasta stabilește ecuațiile constitutive neliniare ale mediilor continue cu cupluri de tensiune și construiește sistemul asociat de invarianți cinematici. Obține relații care indică mărimea tensiunilor și cuplelor de tensiune în cazul lunecării unui strat elastic bidimensional. Interpretarea rezultatelor indică efectul de contur dat de cuplele de tensiune și care uniformizează tensiunile interne.

V. Safta și Al. Bernath (Centrul de cercetări tehnice Timișoara) prezintă un nou criteriu de determinare a comportării tenaco-fragile a metalelor cu luarea în considerare a următorilor parametri : vitezele de deformare, starea de tensiune și temperatura. La baza metodei propuse

se află teoria tensiunilor stabilite pentru cazul general al stării triaxiale și neomogene, de către Neuber pentru stadiul deformațiilor elastice și de Ujik pentru stadiul deformațiilor elastoplastice. Metoda preconizată prezintă avantajul de a pune la dispoziția proiectantului date utilizabile în munca de proiectare.

În comunicarea „Influența factorilor geometrici ai concentratorilor de descărcare asupra factorului de formă" L. Boleanțu și M. Fischer (Institutul politehnic Timișoara) analizează influența factorilor geometrici, ai concentratorilor de bază și de descărcare asupra rezistenței la rupere, în cazul unor epruvete din OL 38, OLC 35, OLC 41 și MoC 11 precum și asupra stărilor de tensiune la baza concentratorilor multipli la epruvete de araldit B, examinate în lumină polarizată, solicitate la întinderea monoaxială sub limita de elasticitate. Concluziile la care s-a ajuns arată că efectul global al concentratorilor multipli se manifestă atît prin suprapunerea efectului pozitiv al stării triaxiale de tensiune, cît și prin efectul negativ al vîrfului de tensiune de la baza crestăturii. Pentru practică autorii recomandă utilizarea corespunzătoare a concentratorilor de descărcare, prevăzuți pentru piesele de rezistență construite din oțelurile studiate sau din altele, similare lor.

În domeniul *teoriei mecanismelor* Radu C. Bogdan, Tudor-Vasile Huncher și D. Larionescu (Centrul de mecanica solidelor) au prezentat comunicarea „Bazele de calcul, prin analiza armonică complexă a mecanismelor cu cuple de translație". Pornind de la metodologia de cercetare a lanțurilor cinematice prin analiza armonică complexă, elaborată anterior pentru mecanismele fundamentale pentalatere, care conțin numai cuple de rotație (diada de aspect 1), autorii au expus elementele caracteristice în cazul grupelor structurale de aspectul II, III, IV și V, ce conțin și cuple de translație și care pot genera categorii distincte de mecanisme cu cinci elemente. Pe baza sistematizării generale a mecanismelor fundamentale pentalatere și a celor patrulatere, ca un caz particular al primelor, s-a desprins clasa de mecanisme de tipul RR—II, formată prin legarea unei grupe de aspectul II la două elemente de rotație. Rezolvarea cinematică a acestor tipuri de mecanisme s-a făcut pe baza analizei armonice complexe, iar în final s-a considerat și o aplicație numerică concretă. Comunicarea făcută conținea și o serie de oscilograme privind deplasările și hodografele de viteze (respectiv proiecțiile pe cele două axe de coordonate) pentru puncte ale unui mecanism modelat la instalația mecano-electronică tip IMA.

D. Pavelescu (Centrul de mecanica solidelor) în comunicarea sa „Principalii parametri ai uzurii suprafețelor plane în mișcare alternativă de alunecare. Instalație de modelare și măsură (I)" a prezentat instalația ce a realizat-o pentru studierea principalilor parametri ai uzurii suprafețelor plane în mișcare alternativă. Instalația comportă șase cupluri de frecare, sistemul mecanic fiind completat cu circuite radiometrice și electrice pentru măsurarea vitezei de uzură, a forței de frecare, a temperaturii și a rezistenței chimice a peliculei de lubrifiant. De asemenea a prezentat și unele rezultate referitoare la regimul de ungere mixtă și la limită, precum și la influența vitezei medii, a sarcinii și a acidului oleic ca aditiv asupra fenomenului de „stick-slip".

Centenarul Academiei Republicii Socialiste România a oferit după cum am văzut și ocazia unui bilanț al activităților respective. Astfel lucrările prezentate la această manifestare, atît cele aparținînd diferitelor domenii ale mecanicii aplicate, cît și comunicările din toate celelalte ramuri ale științei, prin conținutul și nivelul lor, prin actualitatea problemelor tratate, au exprimat pregnant sensul evolutiv al rezultatelor cercetării noastre științifice, rezultate ce se înscriu cu succes alături de rezultatele obținute în țările cu o tradiție mai veche. Acestea atestă o dată mai mult dezvoltarea deosebită pe care a cunoscut-o știința în România în ultimele două decenii, punînd în evidență capacitatea creatoare a poporului nostru ale cărui tradiții au fost verificate astfel în mod decisiv. În același timp rezultatele obținute reprezintă și chezășia unor realizări viitoare care vor răspunde din ce în ce mai mult cerințelor în plină creștere ale dezvoltării continue a industriei, economiei și culturii.

Cercetătorii din domeniul mecanicii aplicate, alături de toți oamenii muncii din țara noastră, se vor strădui pentru a „... obține succese tot mai mari, înălțînd prin munca lor tot mai sus edificiul luminos al patriei noastre — Republica Socialistă România". [2]

[2]) Nicolae Ceaușescu, *Cuvîntare la plenara C.C. al P.C.R. din 21—23 decembrie 1966*, București, Edit. politică, 1966, p. 47.

RECENZII

Încercarea construcțiilor, sub redacția acad. Ștefan Bălan și dr. ing. Mircea Arcan, Edit. tehnică, București, 1965, 471 p.

Pe baza experienței acumulate în decursul activității lor practice și de cercetare, un colectiv de specialiști, sub conducerea acad. Ștefan Bălan și dr. ing. Mircea Arcan, a publicat un tratat cu titlul *Încercarea construcțiilor*. După cum rezultă și din titlu, cartea pune la dispoziția specialiștilor un material bogat privind metodologia de studiu a rezistenței construcțiilor pe baza determinării experimentale a unor parametri caracteristici, obținuți prin încercările efectuate pe structuri.

Lucrarea, prima de acest gen în literatura noastră tehnică și una din puținele lucrări apărute în lume în acest domeniu, răspunde necesității de a se dezvolta activitatea de încercare a construcțiilor; datorită creșterii considerabile a volumului și amplorii lucrărilor executate, soluțiilor noi și îndrăznețe privind structurile, materialelor noi puse în operă, apare foarte curent problema verificării prin încercări a rezistenței diferitelor elemente componente sau a construcției în ansamblul său. Cartea sintetizează experiența unui grup de specialiști care au elaborat lucrarea, experiență acumulată în principal în cadrul Institutului de cercetări în construcții (INCERC) în ceea ce privește încercarea construcțiilor civile și industriale, iar în ce privește încercarea podurilor în cadrul Institutului de cercetări în transporturi. În legătură cu acest caracter de sinteză se pot face cîteva sublinieri:

— faptul că marea majoritate a materialului prezentat constituie metodologie și rezultate practice obținute în principal prin activitatea de cercetare a autorilor;

— numărul surprinzător de mare, al lucrărilor românești, printre care unele de valoare deosebită, puse în evidență și sintetizate în lucrare;

— caracterul fundamental al lucrării, bazat pe concepții științifice originale;

— caracterul practic al tuturor capitolelor abordate, care conduce la posibilitatea ca orice inginer să fie în situația ca, folosind mijloace existente în țară, să poată executa sau organiza încercări curente pe elemente și construcții.

Trecîndu-se la detalii, se vor face în cele ce urmează scurte referiri la cîteva capitole considerate caracteristice pentru concepțiile originale pe care se bazează cartea.

În capitolul privind proprietățile mecanice ale materialelor utilizate în construcții se fundamentează caracterul stocastic al acestor proprietăți și se examinează într-un mod nou problema corelării modului de determinare a proprietăților mecanice ale materialelor cu programul de realizare a încercării pentru ansamblul structurii. Importanța acestei corelări, a cărei tehnică este bine stabilită în lucrare, rezultă din faptul că, la încercarea unui element sau a unei structuri oarecare, eforturile unitare în diferite puncte cresc cu viteze diferite, întrucît, în același interval de timp, unele eforturi unitare ajung la rezistența de rupere, iar altele

rămîn mult mai mici; această situație prezintă consecințe importante pentru problemele privind stabilirea proprietăților mecanice ale materialelor atunci cînd este cazul unor materiale sensibile la viteza de încărcare sau de deformație (betonul, materialele plastice etc.).

În capitolul privind încercarea construcțiilor din beton armat și beton precomprimat, ca și în celelalte capitole privind construcțiile metalice, din lemn sau zidărie, sînt luate în considerație criteriile care definesc stările limită ce pot apărea pe măsura creșterii încărcării construcției. Aceste criterii permit o analiză științifică a rezultatelor experimentale obținute și o apreciere riguroasă a calităților reale ale construcției.

O dezvoltare corespunzătoare a stadiului actual modern al tehnicii de încercări este constituită de metodele dinamice, prezentate într-un capitol special; utilizarea acestor metode permite atît înțelegerea schemei reale după care lucrează construcția, cît și depistarea defectelor de execuție pe baza determinării unor caracteristici dinamice ale construcției respective.

Merită de asemenea a fi scos în evidență capitolul privind proiectarea și organizarea încercărilor, care cuprinde un material de bază deosebit de important, deoarece prin indicațiile date se poate asigura obținerea de rezultate concludente, precum și realizarea încercărilor în condiții economice și fără o întrerupere îndelungată a procesului tehnologic de execuție pe șantier.

O mențiune specială trebuie acordată sistematizării și concepțiilor privind prelucrarea și interpretarea rezultatelor, care reprezintă în orice lucrare bazată pe măsurători și determinări experimentale finalitatea încercărilor. Ca efect al acestor operații, rezultatele obținute (parametrii și coeficienții stabiliți) pot fi considerate ca fiind caracteristice construcției studiate și devin astfel utile proiectării și producției. Mai mult chiar, o cercetare sistematică, bazată pe numeroase încercări în condiții de exploatare diferite, poate conduce la concluzii cu caracter mai general asupra unui anumit tip de structură.

O latură importantă a lucrării este prezentarea amănunțită a unor exemple de încercări deosebit de utile pentru înțelegerea metodologiei descrise; astfel merită a fi citate încercarea cupolei de la circul de Stat din București, a structurii Sălii palatului, a unei serii de poduri din țară, precum și încercările nedistructive privind controlul calității betonului în construcție, determinarea poziției armăturilor, defectoscopia construcțiilor metalice etc.

Sînt de asemenea de subliniat cîteva aspecte cu caracter general:

— buna echilibrare a capitolelor și legătura corespunzătoare dintre ele, cu trimiteri de la un capitol la altul, fără repetări și fără domenii neglijate, subliniază caracterul unitar al cărții analizate;

— stilul omogen, îngrijit face ca lucrarea să fie accesibilă cititorului cu pregătire inginerească, fără dificultățile gratuite care însoțesc uneori lucrările de specialitate;

— bibliografia bogată, în cea mai mare parte accesibilă în diverse biblioteci, ușurează cititorului aprofundarea capitolelor de care are nevoie.

Ca o lipsă a cărții, care însă nu diminuează valoarea lucrării, s-ar putea aminti neclaritatea unor fotografii, fie din cauza calității slabe a fotografiei, fie din cauza tehnicii zincografice. Este o lipsă care poate fi ușor eliminată cu concursul editurii la o a doua ediție.

Lucrarea poate constitui un ghid prețios pentru toți cei care prin preocupările lor zilnice sau ocazionale au contingență cu domeniul rezistenței construcțiilor: inginerii din proiectare și execuție, cercetătorii din institutele de învățămînt superior și de cercetări, inginerii din laboratoare, precum și studenții din facultățile de construcții în legătură cu adîncirea materiei studiate la rezistența materialelor și mecanica construcțiilor. Inginerilor, de alte specialități (mecanici, energeticieni, silvici etc.), dar care au preocupări legate de rezistența structurilor, cartea le poate fi de asemenea de un real folos.

Un cuvînt de laudă se cuvine a adresa Editurii tehnice, atît pentru faptul că a programat publicarea unei astfel de cărți, cît și pentru grija deosebită a colectivului redacțional în vederea realizării unui nivel tehnic superior de editare.

Șt. Nădășan

M. A. BIOT, *Mechanics of incremental deformations* (Mecanica variațiilor de deformație), New York-Londra-Sydney, J. Wiley & Sons, Inc., 1965, *XVIII* + 504 p.

Problema solicitării inițiale a corpurilor elastice și a deformațiilor mari ale acestor corpuri a căpătat o importanță din ce în ce mai mare în ultimul timp. Aceste probleme ne îndepărtează de obicei de metodele obișnuite de calcul și necesită o analiză tensorială mai rafinată.

Cartea lui M. A. Biot este bazată pe un număr de șapte articole, publicate de autor între 1934 și 1940. În afara unui studiu sistematic al problemei și al extinderilor la viscoelasticitate, lucrarea cuprinde dezvoltări noi și aplicații prezentate aici pentru prima dată. Lucrarea este caracterizată de folosirea conceptului cartezian și a unor metode matematice elementare, care nu necesită calcul tensorial sau tehnici de calcul mai specializate. Prin introducerea explicită a cîmpului rotației locale se poate separa problema fizică de cea geometrică, rezultatele obținute fiind valabile atît pentru corpurile elastice, cît și pentru cele anelastice, folosind coordonate rectangulare sau curbilinii.

Lucrarea are un caracter profund original, îndepărtîndu-se destul de mult de metodele tradiționale de calcul; ea prezintă într-o formă unificată probleme diverse, ca elasticitatea cauciucului, influența gravitației asupra propagării undelor într-un fluid sau probleme tectonice în geodinamică. Se stabilesc ecuații cu caracter general, rezultatele obținute putînd fi aplicate la medii anizotrope, vîscoelastice sau plastice. De asemenea este interesant de menționat că nu se fac restricții cu privire la natura proceselor care au generat tensiunile inițiale.

Teoria neliniară este introdusă prin extinderea conceptului de „variație de deformație" [1]) într-un mediu cu tensiuni inițiale. Concepția fundamentală a autorului constă în faptul că o mică regiune a mediului este considerată ca supusă la o „deformație pură" urmată de o „rotație". Ordinea în care se fac aceste două transformări este importantă și este astfel aleasă, încît componentele deformației să corespundă axelor care au fost rotite o dată cu materialul.

În felul acesta se introduce o rotație locală, care variază de la punct la punct și conduce la o separare a proprietăților pur geometrice ale cîmpului deformațiilor de cele care depind de natura fizică a materialului. Tensiunile vor fi de asemenea definite față de aceste axe rotite local. Se introduce o reprezentare duală, referind tensiunea la elemente de arie înainte și după deformație. Aceasta conduce la o libertate destul de mare în formularea proprietăților fizice și permite introducerea principiilor termodinamice în legile constitutive. De asemenea se poate introduce cu ușurință și conceptul de presiune hidrostatică. Evident, această separare în rotire și deformație pură nu este unică; ea depinde în întregime de natura problemei considerate.

Lucrarea cuprinde 6 capitole și un apendice privitor la teorii neliniare și deformații finite. Se dau și indici de autori și probleme.

Capitolul 1 tratează problema staticii și cinematicii variațiilor de tensiune și de deformație. Se consideră pe rînd cazul bi- și tridimensional și se deduc variațiile de tensiune și ecua-

[1]) În limba engleză *incremental deformation*; la noi nu există încă o terminologie consacrată.

țiile de echilibru corespunzătoare. Teoria elastică generală a unui mediu supus la tensiuni inițiale este prezentată în capitolul 2. După ce se definesc variațiile de tensiune referitoare la elementele de arie inițiale, se trece la relațiile dintre acestea și variațiile de deformație în cəz bi- și tridimensional. Se discută apoi variațiile de coeficienți elastici pentru medii ortotrope și izotrope. În cazul mediului incompresibil se fac aplicații la elasticitatea cauciucului. Problema coeficienților eləstici este tratată și în cazul elasticității de ordinul doi. Menționăm considerarea rigidității la torsiune a unei bare supuse la o stare de tensiune axială.

În capitolul 3 se prezintă o teorie a stabilității elastice, cu aplicații la mediile izotrope. După o scurtă introducere se discută semnificația fizică a ecuațiilor de stabilitate în cazul unei stări de deformație plană. Problema stabilității barelor și plăcilor este de asemenea luată în considerare. Menționăm unele formulări variaționəle, ca și problema stabilității în prezența unei presiuni hidrostatice. Se mai prezintă stabilitatea barelor groase. Un studiu special este făcut de autor pentru instabilitatea superficială a corpurilor, cu aplicații la semispațiul omogen și neomogen. Cazul mediilor elastice anizotrope este considerat în capitolul 4. Ca un prim exemplu se consideră un mediu laminat. Menționăm și în acest caz instabilitatea superficială a semispațiului anizotrop, ca și un studiu privitor la instabilitatea interioară. O atenție specială este acordată plăcilor plane și mediilor stratificate.

Dinamica mediilor elastice supuse la tensiuni inițiale este considerată în capitolul 5. După stabilirea ecuațiilor fundamentale se trece la studiul influenței gravitației asupra undelor Rayleigh și asupra propagării undelor acustice în fluide ; pentru aceste cazuri se stabilesc și unele principii diferențiale. Se pun astfel în evidență unele proprietăți fundamentale ale propagării undelor acustice datorite tensiunilor inițiale. Dinamica plăcilor plane elastice și a mediilor stratificate supuse la tensiuni inițiale este de asemenea luată în considerare. Problemele corespunzătoare pentru medii vîscoelastice sînt tratate în capitolul 6. După ce se fac considerații cu privire la termodinamica viscoelasticității cu tensiuni inițiale, se trece la expresiile operaționale pentru variațiile de tensiuni și se stabilește un principiu de corespondență. Un studiu special este făcut pentru micile deformații suprapuse peste o stare inițială de curgere. Menționăm rezultatele privind instabilitatea internă în viscoelasticitatea anizotropă și instabilitatea superficiəlă a mediilor viscoelastice în general și a celor stratificate în particular ; în acest din urmă caz apare problema separării straturilor. Cazul fluidelor vîscoase într-un cîmp gravitațional este de asemenea luat în considerare.

Teoriile prezentate mai sus au un caracter liniar. În apendice sînt cuprinse pe scurt unele rezultate cu caracter neliniar, analogii formale între cazul liniar și cel neliniar, variații de deformație și principiul lucrului mecənic virtual, diferite tipuri de neliniarități, deformații mici în raport cu rotațiile ; de asemenea, se introduc operatorii de derivare a diferitelor mărimi ca un caz limită al variației mărimilor corespunzătoare.

Lucrarea este scrisă deosebit de clar și de sistematic, punînd în mod deosebit accentul pe fenomenul mecanic. Ea este utilă pentru toți cei interesați în problemele fundamentale ale mecanicii solidelor deformabile.

P. P. Teodorescu

P. P. BENHAM, *Elementary mechanics of solids* (Mecanica elementară a solidelor), Londra, Pergamon Press, 1965

În capitolele 1—3 autorul redă unele dintre principiile fundamentale care stau actualmente la baza calculului și teoriei corpurilor solide ce se găsesc cu precădere în stare elastică. Capitolele 4—6 prezintă teoriile recente privind două aspecte importante ale mecanicii

solidului, anume încovoierea și torsiunea. Ultimul capitol tratează o serie de probleme specifice încovoierii și torsiunii.

Materialul este așa fel ales, încît să cuprindă cele mai simple și mai elegante soluții inginerești de calcul. Rezultatele obținute cu ajutorul acestora sînt apropiate de cele preconizate îndeosebi de tratatele de specialitate ale teoriei elasticității.

Tratarea subiectelor este făcută la un nivel accesibil, folosindu-se aparatul matematic strict necesar înțelegerii problemelor și rezolvării lor practice. Pe lîngă claritatea și simplitatea soluțiilor prezentate, cartea conține un număr apreciabil de probleme, repartizate pe capitole, redate cu scopul de a consolida cunoștințele cititorului. Soluțiile problemelor propuse spre rezolvare sînt date la sfîrșitul manualului.

Publicația este utilă celor care se ocupă cu proiectarea și calculul mașinilor și este întocmită cu scop didactic, adresîndu-se studenților din anii I și II ai institutelor tehnice de învățămînt superior.

I. Mitrică

Information Processing Machines (Mașini de prelucrare a informației), Proceedings of a Symposium held in Prague on September 7th—9th, 1964. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1965, 249 p. Scientific Editor doc. inz. Vladimir Bubenik, ČSC.

Ritmul cu totul impresionant de creștere în ultimul deceniu a volumului și a problematicii cercetărilor relative la MEC, a cercetărilor operaționale, a jocurilor, și îndeosebi a jocurilor diferențiale, a controlului, informației și comunicației, face necesară an de an apariția unor noi reviste, reclamă inserarea din ce în ce mai sistematică a materialelor elaborate în ordinea de idei de mai sus în revistele de specialitate (matematică și mecanică, uneori electrotehnică și electronică) existente.

Aceasta pledează pentru organizarea la diferite nivele și anvergură a conferințelor, colocviilor sau simpozioanelor cu caracter internațional, consacrate prezentării subiectelor mai mult sau mai puțin restrînse din acest important domeniu.

Ultimul simpozion organizat de Academia cehoslovacă de științe privitor la gama mai restrînsă de MEC, și anume mașini de prelucrare a datelor, s-a ținut în 1957. Volumul recenzat reflectă tematica unui nou simpozion, desfășurat la Praga (7—9 septembrie 1964) sub egida Academiei cehoslovace de științe, reprezentată prin Institutul de studii ale mașinilor matematice și prin Societatea cehoslovacă de știință și tehnică, fiind consacrat în principal problematicii referitoare la structură logică și la programarea automată a mașinilor de prelucrare a datelor.

În imposibilitate de a ne opri aici asupra conținutului celor aproape 25 de referate prezentate și dezbătute în conferință de cei circa 100 de participanți din 12 țări (Austria, Anglia, Cehoslovacia, Danemarca, Elveția, R.D.G., R.F.G., Polonia, România, Ungaria, S.U.A., U.R.S.S.), reproducem mai jos în traducere, dată fiind importanța tematicii elaborate și incluse în volum, titlurile lucrărilor inserate.

Jan Oblonský, Antonin Svoboda, *Factori de seamă în proiectarea sistemelor de prelucrare a datelor* (p. 19—31); Bernard Meltzer, *Utilizarea mașinilor de calcul monoliniare în cercetarea științifică* (p. 32—37); Manfred Roesner, *Verificarea proiectării logice a unei mașini de calcul digitale cu ajutorul unei alte mașini* (p. 38—42); David B. G. Edwards, *Mașina de calcul ATLAS* (p. 43—56); Kornel Spiro, *Model logic de diferențiere și generalizare în sistemele de instruire* (p. 57—74); K. Vasspeg, *Asupra organizării sistemelor* (p. 75—84); Evzen Kinler, *Metode neexacte în studiul limbilor de programare* (p. 85—88); Peter Naur, *Funcționarea unui sistem de subdivizare a programelor care folosesc ALGOL în mașinile GIER* (p. 89—106);

Maurice V. Wilkes, *Descrierea limbii artificiale PUFS pentru introducerea rațională a unor mulțimi de date* (p. 107—116); Willem L. van der Poel, *SERA — mașină de simulat menită a explica tehnica și construcția programelor de compilare*; Jiri Reichl, *Încercare de elaborare a unei limbi de programare pentru rezolvarea problemelor de prelucrare a datelor cu caracter de masă* (p. 132—139); Jaroslav Král, *Asupra problemei de subdivizare a programelor* (p. 140—149); Gregory M. Dillon, *Stadiul actual al cercetărilor și folosirea limbii informaționale COBOL în S.U.A.* (p. 150—159); Jaroslav Vlcek și Edvard Outrata, *Elemente de programare subdivizată într-un sistem de programare automată* (p. 160—165); Anatol W. Holt, *Considerații teoretice relative la structura memoriei și căutarea informației* (p. 166—178); Walter J. Karllus, *Subprograme analogice pentru MEC* (p. 179—190); Jerzy Swianjewicz, *Limbajul pentru descrierea formală a mașinilor* (p. 191—201); Karel Culik, *Asupra sintezei și minimizării automatelor abstracte* (p. 202—203); Peter T. Kirstein, *Folosirea mașinilor electronice cifrice în rezolvarea problemelor relative la tuburi electronice în cîmpuri magnetice* (p. 204—211); Jaroslav Formandl și Tomislav Shejbal, *Procesor EK pentru traducerea codului simbolic în codul mașinii EPOS* (p. 212—221); Jiri Mikulás, *Autocod pentru generarea programelor la mașină electronică NE 803 B destinate MEC EPOS—1* (p. 222—236); Stanislav Majerski, *Descrierea unui sumator asincron* (p. 237); Erich Bürger, *Problema conservării informației pe o bandă perforată* (p. 238—249).

Încheind această scurtă prezentare, subliniem că lucrarea se încadrează armonios prin conținutul său în seria volumelor (pînă astăzi 11 la număr) editate începînd cu 1953 de Institutul de studii relative la MEC din Praga.

D. Mangeron

Developments in mechanics, vol. 2, part 1, *Fluid mechanics*, Londra, Pergamon Press, 1965

Volumul cuprinde lucrări care atacă probleme de turbulență, magnetohidrodinamică, mecanica fluidelor, transfer de căldură, hidrodinamică, mișcări în regim hipersonic și scurgeri cu două faze.

În capitolul I, intitulat „Turbulență", sînt studiate aspecte ale tranziției de la regimul laminar la cel turbulent în prezența unor perturbații mari, influența rugozității pereților asupra intensității turbulenței și asupra distribuției eforturilor tangențiale în scurgerea bidimensională printr-un canal și scurgerea nestaționară în jurul corpurilor cu secțiune transversală mare. De asemenea sînt date cîteva aspecte matematice cu privire la dîra turbulentă staționară din spatele unui corp axial-simetric situat într-un curent neuniform.

Capitolul II tratează atît probleme de magnetohidrodinamică, printre care distribuția de viteze, de temperatură și de cîmp magnetic într-un fluid vîscos, bun conducător atît termic, cît și electric (cazul conductivității electrice infinite, indusă de o placă plană infinită, avînd o mișcare impulsivă în planul său), cît și interacțiunea dintre stratul-limită, produsă în mișcarea vîscoasă rotațională a unui fluid incompresibil electric-conductor în jurul unui disc, și un cîmp magnetic, probleme legate de propagarea undelor Alfven într-un cîmp magnetic neomogen etc.

În capitolele III și V („Mecanica fluidelor" și „Hidrodinamică") sînt prezentate o serie de rezultate teoretice și experimentale privind hidrodinamica regiunii de intrare în conducte de diferite secțiuni, stratul-limită tridimensional (pe corpuri de revoluție), problemele

formării cavităţilor la intrarea bruscă a unui solid într-un lichid (printre care şi undele de şoc generate) şi altele.

În capitolul destinat problemelor de transfer de căldură (IV) sînt tratate : transferul turbulent lichid-metal la intrarea în conducte, transferul de căldură în mişcarea lui Couette, convecţia liberă şi forţată în tuburi, transferul de căldură într-un strat-limită de aer parţial ionizat.

Capitolul VI cuprinde probleme de mişcări hipersonice în jurul corpurilor bontite sau cu vîrf ascuţit. De asemenea sînt tratate problemele de transfer de căldură cu disocierea gazelor şi probleme de strat-limită cu injecţie discretă pentru aer în echilibru chimic.

Ultimul capitol (VII) conţine probleme de mişcare unidimensională a două faze (una dispersată), probleme de condensare în picături pe o suprafaţă orizontală, de transfer de masă (în picături), precum şi studii asupra dispersiei în tuburi de extracţie sau asupra efectului unui jet turbulent introdus într-un rezervor conţinînd un lichid din care se separă, prin sedimentare, particule solide.

C. Berbente

R. S. BRADLEY, *Advances in high pressure research* (Progrese în cercetările din domeniul presiunilor înalte), Londra—New York, Academic Press, vol. 1, 1966, 396 p.

Lucrarea prezintă un material de sinteză şi de cercetări proprii, semnate de J. Lees, S. D. Hamann, E. Whalley, R. C. Newton, M. Tossi, T. Arai, L. S. Whatley şi A. van Varkenburg. Redactorul ei, R. S. Bradley, arată în prefaţă că lucrarea formează primul volum dintr-o serie ce va apărea în anii viitori, derivînd din publicaţia „High Pressure Physics and Chemistry".

Tematica cuprinde principii teoretice şi performanţele aparaturii pentru cercetări în domeniul presiunilor foarte înalte UPH (*ultra-high pressures*). Astfel se prezintă în mod critic aparatul cu calibru tetraedric, la care gradientul de presiune poate fi menţinut în limite acceptabile pînă la presiunea de $70 \cdot 10^{-3}$ kgf/cm^2, iar în combinaţie cu temperatura în limitele 1 000°C şi 40 kgf/cm^2. Efectele presiunilor înalte asupra proprietăţilor electrice, optice şi de transformări chimice la mediile solide şi lichide sînt analizate în condiţiile realizării acestor presiuni prin intermediul undelor de şoc. Se tratează apoi, în condiţiile presiunilor înalte, aspecte privind refracţia şi proprietăţile dielectrice ale mediilor care au sau nu o polarizare orientată, prezentîndu-se şi valori măsurate ale acestor constante.

În condiţii de presiuni înalte sînt prezentate de asemenea studii privind echilibrul şi stabilitatea la diferite structuri cristaline cu legături ionice, transmisia electronică în metale, tranziţia de la starea izolantă la cea metalică, apoi particularităţile microscopiei vizuale şi spectroscopia în domeniul ultraviolet, vizibil şi infraroşu, precum şi determinarea structurii cu raze X. Prin analiza făcută se demonstrează de asemenea că investigaţiile cu presiuni înalte constituie linia cea mai adecvată pentru cercetări geofizice privind starea actuală şi viitoare a presiunilor statice etc. din interiorul globului pămîntesc.

Direcţiile şi metodele de investigaţie prezentate în lucrare sînt de cea mai recentă dată (ultimii 2—4 ani), ceea ce, împreună cu amploarea şi nivelul înalt la care se tratează problemele, ridică în mod deosebit valoarea şi importanţa acestor studii pe linia progresului ştiinţei.

Gh. Vasilca

Prof. dr. ULRICH GRIGULL, *Technische Thermodynamik* (Termodinamica tehnică), Berlin, Ed. Walter de Gruyter & Co, 1966, 171 p., 74 fig., + 7 tabele.

Acest manual de buzunar cuprinde esenţialul despre termodinamica tehnică, adică ansamblul de legi prin care mărimile macroscopice considerate definesc un sistem termodinamic.

Sînt astfel introduse mărimile intensive (presiune, temperatură) şi extensive (masă, volum, energie), ca şi formele de transfer a energiei, adică lucrul mecanic şi căldura. Primul principiu al termodinamicii este expus în legătură cu comportarea gazului ideal şi problemele de calorimetrie. Cel de-al doilea principiu este prezentat în legătură cu procesele ireversibile, problema entropiei şi sistemele multifazate. Procesele termodinamice uzuale Carnot, Otto, Diesel, Joule, în gaz ideal, şi Clausius-Rankine, în abur, sînt expuse prin diagramele caracteristice şi formulele de randament termodinamic. Un interesant capitol prezintă elemente de gazodinamică (scurgere dintr-un rezervor, scurgere printr-un ajutaj Laval, unda de şoc dreaptă), iar la sfîrşit sînt date diagrame şi formule pentru comportarea amestecului gaz-abur cu aplicaţii la aerul umed.

Ceea ce este demn de remarcat în această lucrare este stilul prezentării, o reuşită îmbinare de rigoare ştiinţifică, claritate didactică (definiţii însoţite de numeroase exemple), notaţia cît mai unitară (sistemul SI) şi utilitate tehnică prin tabele şi date practice. Cartea poate fi de un real folos tuturor celor care studiază termodinamica fie pentru însuşirea acestei discipline, fie pentru aprofundarea ei.

Şt. N. Săvulescu

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

N. S. Pokrovski, *Propitocinaia ghidroizoleaţia betona*, Moskva, Izd. Energhia, 1964, 71 p.

A. I. Morozov, *Avtomatizaţia vertikalno-sverlilnih stankov s pomoşciiu pnevmogidravliki*, Lvov, Lvovskii Politehniceskii Institut, 1964, 58 p.

V. T. Bardacevski ş.a., *Avtomatizirovanniî elektroprivod*, Lvov, Lvovskii Politehniceskii Institut, 1964, 318 p.

* * * *Vladimir Afanasievici Obrucev*, Moskva, Izd. Nauka, 1965, 232 p.

A. P. Filippov, *Kolebania mehaniceskih sistem*, Kiev, 1965, 70 p.

G. P. Katis, *Skaniruiuşcie fotoelektriceskie ustroistva i slejenia*, Moskva, 1964, 36 p.

A. I. Strelbiţkaia, *Issledovanie procinosti tonkostennih sterjnei za predelom uprugosti*, Kiev, 1958, 63 p.

A. G. Nazarov, *Metod injenernogo analiza seismiceskih sil*, Erevan, Izd. A. N. Arm. SSR, 1959, 285 p.

A. G. Nazarov, *O mehaniceskom podobii tverdih deformiruemih tel*, Erevan, Izd. Arm. SSR, 1965, 83 p.

* * * *Akademia Nauk Estonskoi SSR v godi 1956—1964*, Tallin, 1965, 365 p.

* * * *Nikolai Feodorovici Belcikov*, Moskva, Izd. Nauka, 1965, 63 p.

* * * *Axel Ivanovici Berg*, Moskva, Izd. Nauka, 1965, 114 p.

E. M. Krisiuk, *Aktivnîi osadok radiotoria*, 1960, 82 p.

Iu. I. Iagn, *Konspeckt lekţii po kursu mehaniki tverdogo i deformiruemogo tela*, Leningrad, 1965, 166 p.

S. Toi ş.a., *Upravlenie i teoria grafov*, Alma-Ata, 1965, 103 p.

V. B. Pototki, *Osnovî teorii i proiektirovania ghidroudarnih burovih maşin pulsaţionnogo pressovogo deistvia*, Alma-Ata, 1964, 69 p.

* * * *Naucinaia Konferenţia po mehaniki gornih porod*, Alma-Ata, 1965, 54 p.

N. V. Kornouhov, *Izbranntie trudî po stroitelnoi mehanike*, Kiev, 1963, 322 p.

N. I. Cerneak, *Mehaniceskie svoistva stali v oblasti malih plasticeskih deformaţii*, Kiev, 1962, 103 p.

N. Z. Pinus ş.a., *Aerologhia*, ceasti II, *Fizika svobodnoi atmosferî*, Leningrad, 1965, 352 p.

* * * *Godicinik na maşino-elektrotehniceskaia institut*, vol. I—III, Sofia, 1965.

O. Bogatîrev, *Ocistka i ispolzovanie stocinih vod ot proizvodstva*, Bratislava, 1963, 236 p.

W. Olszak, *Nové směry vývoje v teorii plasticity*, Praha, 1964, 195 p.

Z. Bazant, *Zakladani vodních děl na sypkých zeminách*, Bratislava, 1963, 138 p.

* * * *Vybrané teoreticke problémy stavby zemných hrádzi*, Bratislava, 1964, 259 p.

J. Juza, *Formulae for thermodynamic properties of water and steam suitable for industrial calculations*, Pilsen, Skoda Works, 1966, 13 p.

W. Hutschenreiter, *Darstellung und Auswertung multivariabler Zusammenhänge auf der Grundlage der Ausgleichsrechnung*, Technische Hochschule Ilmenau, 1964, 40 p.

J. Susanszky, *Die Anwendung von Schmalfilmkameras mit Steuereinrichtungen bei der Multimoment-Methode der Arbeitsstudien*, Technische Hochschule Ilmenau, 1964, 84 p.

G. Tietböhl, *Darstellung eines linearen Optimierungsmodells für die Projektierung des Transportes zwischen den Abteilungen von Maschinenbaubetrieben*, Technische Hochschule Ilmenau, 1964, 26 p.

* * * *IX. Internationales Kolloquium Elektrowärme*, Ilmenau, 1964, 63 p.

E. Huhn, *Die Optimierung der Laufgüte imgleichmässig übersetzender Getriebe*, Karl Marx-Stadt, 1965, 131 p.

R. Piegert, *Untersuchungen der Einflussfaktoren auf die Bearbeitungsfehler beim Innenschleifen*, Karl Marx-Stadt, 1965, 170 p.

* * * *Scientific activities of the Institute of basic technical problems of the Polish Academy of Sciences in 1963*, Warszawa, 1965, 87 p.

Ch. O. Heller, *Dictionary of Engineering Mechanics. Russian-English*, Amsterdam, Elsevier Publishing Company, 1965, 79 p.

* * * *Elsevier's Dictionary of Aeronautics in six Languages*, Amsterdam, 1964, 842 p.

G. J. Hauptfleisch, *Quasi-Group Extensions of Abelian Groups*, Leiden, 1965, 56 p.

W. H. G. Lewin, *Determinations of Nuclear Decay Energies and Conversion Coefficients Using Coincidence Techniques*, 'S Gravenhage, 1965, 103 p.

F. G. Insinger, *A Rotating Plasma Experiment*, Haag, 1965, 159 p.

P. J. Halewijn, *Contributions to the Theory of Asymptotic Distribution Modulo I*, Delft, 1965, 49 p.

C. F. Lerk, *Enkele Aspekten van de Ontijzeeung van Grondwater*, Delft, 1965, 142 p.

* * * *Proceedings of the Eighth Japan Congress on Testing Materials*, Kyoto, 1965, 155 p. Appendix 45 p.

J. H. Kopp, *Über den Wärme- und Stoffaustausch bei Mischkondensation*, Zürich, E.T.H., 1965, 43 p.

M. Naguib, *Theoretical estimation of dynamic forces and vibratory stresses for a turbine blade*, Zürich, E.T.H., 1965, 34 p.

J. F. Rando, *Microwave power measurements by means of thermally excited mechanical vibrations*, Zürich, E.T.H., 1964, 59 p.

W. Issler, *Membranschalen gleicher Festigkeit*, Zürich, E.T.H., 1964, 82 p.

M. Edinger, *Pulsierende Strömung von Flüssigkeiten in Leitungen mit sehr kleinem Querschnitt*, Zürich, E.T.H., 1964, 53 p.

H. Thomae, *Geschwindigkeitsverteilungen in Rohren grosser Durchmesser*, Zürich, E.T.H., 1965, 172 p.

A. O. Awophy ș.a., *Vibration of rigid bodies on semi-infinite elastic media*, Londra, 1965, 46 p.

H. O. Anwar, *Coefficients of discharge for gravity flow into vertical pipes*, Londra, 1965, 19 p.

H. O. Anwar, *Flow in a free vortex*, Londra, 1965, 11 p.

C. T. Harnden, *Numerical analysis of variable thickness plates*, Londra, 1966, 9 p.

S. C. Redshaw, *The application of electrical analogues for the solution of structural and aerodynamic problems in aeronautics*, Londra, 1964, 21 p.

A. Jaumotte, *Généralisation de la formule de Kutta et Joukowski aux grilles d'ailes en fluide réel incompressible*, Mémoires presentés au IIIe Congrès National de Science, Bruxelles, 1965, 4 p.

A. Jaumotte, *Le bruit des ventilateurs*, Mémoires presentés au IIIe Congrès National de Science, Bruxelles, 1965, 11 p.

* * * *Scritti di Giulio de Marchi*, Milano, 1965, 363 p.

T. VAN LANGENDONCK, *Charneiras plasticas em Lajes retangulares de pontes*, Sao Paolo, 1965, 76 p.

* * * *Zbornik Saopstenja y savetovanie proizvodnog masinstvo*, Beograd—Zagreb, 1965, 190 p.

M. E. GURTIN ș.a., *On dissipation inequalities and linear viscoelasticity*, New York, 1965, 11 p.

G. M. FISHER ș.a., *Wave propagation in the linear theory of viscoelasticity*, New York, 1965, 7 p.

J. J. UICKER, *On the dynamic analysis of spatial linkages using 4×4 matrices*, Evanston, Ills., 1965, 123 p.

D. F. LIVERMORE, *Analysis of large deflections in multiple degree of freedom suspension systems*, Evanston, Ill., 1965, 154 p.

* * * *Yearbook of American Iron and Steel Institute*, New York, 1965, 380 p.

H. C. MERCHANT, *Mode superposition methods applied to linear mechanical systems under earthquake type excitation*, Pasadena, California, 1961, 112 p.

Disertații de la Institutul politehnic Aachen

J. DERICHS, *Untersuchungen an Schrittmotoren*, 1965, 114 p.

H. QUENTIN, *Untersuchung über das dynamische Verhalten einer drehzahlgeregelten Anlage mit elektronischen Reglern im Hinblick auf das Ausregelvermögen von Schwingungen bei Fördermaschinen und Walzenzugmaschinen*, 1964, 138 p.

D. MLYNSKI, *Der Wirkungsgrad experimenteller Optimierungs-Strategien*, 1964, 91 p.

J. BERND, *Wirtschaftliche Pläne für messende Prüfung bei Kenntnis der Qualitätszahlverteilung (a priori Verteilung)*, 1964, 91 p.

W. MARTIN, *Beitrag zur Untersuchung von Überspannungsableitern mit rechteckärmigen Stossströmen*, 1964, 82 p.

Disertații de la Institutul politehnic Stuttgart

K. O. HONSTETTER, *Funktionsgeber für zwei unabhängige Veränderliche*, 1965, 105 p.

R. UNBEHANEN, *Über die Lösung der Approximationsprobleme bei der Synthese elektrischer Zweipole*, 1962, 208 p.

B. KWAKYE, *Untersuchung der kubischen Verzerrungen am Ringmodulator*, 1964, 130 p.

E. VOGT, *Impulsformung und Impulsentzerrung behandelt als Approximationsproblem der digitalen Rechenmaschine*, 1965, 134 p.

Disertații de la Institutul politehnic Braunschweig

D. REX, *Thermoelektrische Pumpen für flüssiges Natrium*, 1963, 104 p.

J. MEHRDORF, *Herstellen von Schneidspänen mit Flachscheibenspanern*, 1963, 17 p.

W. WITTING, *Untersuchung am Laufwerk eines Tonbandgerätes mittels Bandzugmessung*, 1963, 15 p.

W. STREWE, *Geschwindigkeitsfeld, Temperaturfeld und Wärmeübergang bei laminaren Kanalströmung von Wasser mit temperaturabhängiger Zähigkeit*, 1964, 99 p.

J. SPURK, *Messungen der aerodynamischen Beiwerte schwingender Flügelprofile im Windkanal und Vergleich mit der Theorie*, 1963, 94 p.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 25, nr. 3 1967

SUMAR

STUDII

Pag.

CR. MATEESCU, Sensibilitatea la suprasarcini şi siguranţa construcţiilor 487

CONSTANTIN AVRAM, OVIDIU MÎRŞU şi CORNELIU BOB, Cadre dublu încastrate din beton armat în stadiul plastic 515

C. STĂNESCU, Consideraţii asupra unei teorii a plăcilor 527

LIVIU LIBRESCU, Asupra unei teorii a învelitorilor şi plăcilor elastice anizotrope . 539

N. I. MANOLESCU şi IOSIF TEMPEA, Sinteza structurală a lanţurilor cinematice plane cu articulaţii multiple şi cinci grade de libertate $L_2 = 5$ „total", $L_3^p = 5$ „parţial" şi $L_3^{fr} = 3$ „fracţionat" 549

CHR. PELECUDI, Metoda contururilor în sinteza numerică şi structurală a lanţurilor cinematice 573

L. LIVOVSCHI, Analiza mecanismelor automate cu elemente mecanice 601

AMEDEU ORĂNESCU, Metoda schimbării elementului conducător, aplicată la integrarea ecuaţiei de mişcare a maşinii 625

V. N. CONSTANTINESCU şi M. SĂLCUDEAN, O metodă pentru determinarea aproximativă a distribuţiei presiunilor în lagărele circulare lubrificate cu gaze, alimentate sub presiune printr-un şir central de orificii 631

ELIE CARAFOLI şi DAN MATEESCU, Aplicarea mişcărilor cvasiconice la studiul sistemelor portante aripă-fuzelaj în regim supersonic 653

TEODOR OROVEANU, Unele aspecte ale scurgerii lichidelor compresibile prin medii poroase 669

NOTE

I. POP, Asupra stratului-limită nestaţionar din apropierea unui disc care se roteşte în jurul unei axe 689

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

AL. NICA, Asupra bazelor fizice ale proceselor de frecare şi ungere. III. Ungerea semifluidă 697

ILIE MÎNDRU şi TEODOR HUIDU, Asupra folosirii răşinilor epoxidice în fotoelasticitate 705

RECENZII 715

St. Cerc. Mec. Apl., Tom. 25, Nr. 3, P. 485 – 722, Bucureşti 1967

SENSIBILITATEA LA SUPRASARCINI ŞI SIGURANŢA CONSTRUCŢIILOR[1)]

CR. MATEESCU

624

Se studiază variaţia coeficientului de siguranţă al unei structuri în raport cu variaţia suprasarcinii peste limita reglementară. Se stabilesc pentru elemente de structuri simple şi pentru structuri complicate relaţiile dintre un indice de securitate relativă şi indicele de suprasarcină relativă, ţinînd seama şi de unii indici de sensibilitate la suprasarcină de natură geometrică sau mecanică. Aceste relaţii sînt reprezentate prin familii de curbe caracteristice de siguranţă pentru diferite tipuri de elemente şi de structuri, ca stîlpi, grinzi, cabluri aeriene. Se indică şi cîteva aplicaţii.

1. INTRODUCERE

Progresul realizat în ultimul secol în privinţa siguranţei construcţiilor este datorat următoarelor fapte:

— cunoaşterea tot mai exactă a forţelor exterioare ale construcţiilor;

— perfecţionarea metodelor de calcul static şi elastic al structurilor de rezistenţă;

— cunoaşterea tot mai exactă a însuşirilor fizice-mecanice ale materialelor de construcţie prin cercetări şi specializarea acestor însuşiri cu ajutorul tehnologiei;

— normalizarea sarcinilor de considerat în calcule;

— reglementarea coeficienţilor de siguranţă, diferenţiaţi după stadiile de solicitare [5], [9];

— aplicarea teoriei probabilităţilor şi a statisticii matematice la evaluarea numeroaselor mărimi aleatoare care intră în calcule (rezistenţele materialelor, intensităţile şi distribuţia forţelor mobile, forţele accidentale şi excepţionale, coeficienţii de siguranţă) [1], [4], [6];

[1)] Publicată şi în Rev. Roum. Sci. Techn. — Mec. appl. (în limba franceză) *12*, 3 (1967).

— considerarea efectelor speciale de suprasarcină, de pierdere a rezistenței și de pierdere a stabilității (impact, rezonanță, flambaj, voalare, concentrarea eforturilor, fisurare, plastificare etc.).

Toate faptele și cunoștințele noi au condus la o „teorie a siguranței structurilor" și la o nouă metodologie de calcul al structurilor, „metoda de calcul la stările-limită", în curs de dezvoltare și de extensiune [1]—[3], [5]—[7].

Trebuie observat că, după noile concepții, siguranța unei construcții proiectate nu constituie o categorie absolută și nu se exprimă printr-un coeficient unic; unii probabiliști consideră chiar că noțiunea de siguranță trebuie să fie înlocuită prin aceea de „nesiguranță", care este o probabilitate extrem de mică a ruinării structurii supuse sarcinilor-limită normate.

Cum cele mai mari sarcini sînt cauzate de evenimente foarte rare, nu putem avea valori sigure pentru intensitățile acestor sarcini, deoarece nu dispunem de numărul de observații necesare efectuate într-un timp îndelungat. Pe de altă parte, proiectanții ezită a se servi în calculele lor de dimensionare de sarcini de intensități prea ridicate, care i-ar conduce la lucrări prea costisitoare. Ei vor fi obligați a găsi soluția prin încercări sau printr-un calcul de optimizare economică în mai multe variante cu mai multe ipoteze de sarcini și admițînd chiar sarcini depășind limitele reglementare. Așadar, proiectantul, fie că întrebuințează metoda deterministă sau cea probabilistă de calcul, va fi nevoit să considere coeficientul de siguranță funcție de sarcinile aplicate și să studieze această dependență funcțională pînă la limita de ruptură probabilă a materialelor [6], [7], [10].

Autorul acestei lucrări va face o cercetare teoretică a elementelor și structurilor de diferite tipuri spre a stabili relația (coeficient de siguranță, suprasarcină) și indicii de sensibilitate ai fiecărui tip de structură la suprasarcină, prin mijlocirea unor parametri geometrici și mecanici ai structurilor și ai sistemelor de forțe date.

II. CARACTERISTICI DE SIGURANȚĂ ALE STRUCTURILOR SIMPLE SAU ALE ELEMENTELOR LOR

DEFINIȚII ȘI NOTAȚII

G — sarcina rezultantă (sau echivalentă care revine unui element) a forțelor permanente (aproape totdeauna greutățile proprii și greutățile moarte ale materialelor și instalațiilor fixe);

P — sarcina rezultantă (sau echivalentă care revine aceluiași element) a forțelor mobile (mobilier, materiale și mărfuri în depozit, vehicule și oameni), a forțelor accidentale (zăpadă, vînt) și a celor excepționale (forțe seismice), conform prescripțiilor în ipoteza de bază;

ΔP — creșterea sarcinii P peste prevederile reglementare care revine aceluiași element structural. Mărimea lui ΔP este de același ordin cu P și nu are rolul unei diferențiale. Se numește

$$\frac{\Delta P}{P} = p \quad \textit{suprasarcina relativă} \tag{1}$$

Prin G, P și ΔP se notează într-un mod simbolic forța rezultantă și momentul rezultant la care se reduc forțele exterioare și reacțiile de reazem aplicate de aceeași parte a unei secțiuni drepte printr-un element

structural în centrul de greutate al acesteia, sau, ceea ce este tot una, forţele componente N (normală), T (tăietoare) şi momentele componente M_f (de încovoiere) şi M_t (de torsiune), considerate separat sau simultan.

Se vor studia mai întîi cazurile simple, cînd eforturile unitare sînt funcţii F de forţe şi momente care posedă proprietatea

$$F(\overline{G} + \overline{P} + \overline{\Delta P}) = F(\overline{G}) + F(\overline{P}) + F(\overline{\Delta P}), \tag{2}$$

ceea ce se realizează cînd se constată admisibilitatea suprapunerii efectelor. Fie

σ_0 — efortul unitar maxim în secţiune dreaptă, calculat pentru sarcina $\overline{G} + \overline{P}$;

σ — idem în acelaşi punct pentru sistemul de forţe $\overline{G} + \overline{P} + \overline{\Delta P}$;

R — rezistenţa la rupere a materialului, corespunzător naturii solicitării;

$c_0 = \dfrac{R}{\sigma_0}$ şi $c = \dfrac{R}{\sigma}$ — coeficienţii de siguranţă în ipoteza unor sarcini maxime (limite normate) sînt $\overline{G} + \overline{P}$, respectiv în ipoteza sarcinilor $\overline{G} + \overline{P} + \overline{\Delta P}$;

$s = \dfrac{c}{c_0} = \dfrac{\sigma_0}{\sigma}$ (3) se va numi *indice de siguranţă relativă*, număr subunitar. Valoarea $s = 1$ se realizează pentru $c = c_0$, deci $\sigma = \sigma_0 = R$; $s < 1$ dacă $c < c_0$, iar la rupere, cînd $\sigma = R$, $c = 1$ şi $s = \dfrac{1}{c_0}$. În cazul oţelurilor, limita R' a marilor deformaţii nu trebuie depăşită, structura suferind deformaţii inadmisibile.

Inversul lui s,

$$\frac{1}{s} = \frac{\sigma}{\sigma_0} \tag{3}$$

poate fi numit „supraefort unitar relativ", ceea ce ar avea pentru probabilişti avantajul evitării noţiunii de siguranţă.

Răspunsul elementului unei structuri la suprasarcina relativă $p = \dfrac{\Delta P}{P}$ va fi micşorarea indicelui de siguranţă relativă s. În relaţia

$$s = s(p) \tag{4}$$

intră şi alţi parametri geometrici şi mecanici caracteristici ai elementului (sau structurii) de rezistenţe. Relaţia (4) şi familiile de curbe care reprezintă această relaţie în spaţiu (sau plan) vor fi numite *caracteristici de siguranţă* ale structurii sau caracteristici de *comportare la suprasarcină*. Vom întrebuinţa de preferinţă prima expresie, pentru că, în dezacord cu probabiliştii, noţiunea de siguranţă trebuie să subziste — chiar dezbrăcată de caracterul său de categorie absolută — pentru a afirma mai ferm tendinţa pe care trebuie s-o aibă proiectantul de a îmbunătăţi tot mai mult condiţiile de siguranţă ale unor construcţii.

A. ELEMENTE ŞI STRUCTURI CĂRORA LI SE APLICĂ SUPRAPUNEREA EFECTELOR

1. *Coloană (stîlp, bară) dreaptă acţionată de o forţă axială (de tensiune sau de compresiune simplă, cînd nu e cazul de flambaj)* $G + P$

Dacă A este aria unei secţiuni drepte în care lucrează forţele G, P şi ΔP, eforturile unitare în cele două etape de încărcări sînt

$$\sigma_0 = \frac{G + P}{A} \qquad \sigma = \frac{G + P + \Delta P}{A}. \tag{5}$$

Din relaţiile (3) şi (5) rezultă

$$s = 1 + \frac{\Delta P/P}{1 + G/P}. \tag{6}$$

Introducînd noţiunea de *indice de sensibilitate la suprasarcină*

$$\mu = \frac{P}{G}, \tag{7}$$

relaţia (6) devine

$$s = \frac{\mu + 1}{\mu p + \mu + 1.} \tag{8}$$

Aceasta este caracteristica de siguranţă a coloanei supuse la o forţă axială în două stadii şi exprimă relaţia dintre cei trei parametri s, p şi μ, definiţi mai sus. Cînd unul dintre parametri este menţinut constant, ecuaţia (8) reprezintă o hiperbolă în planul celorlalţi doi parametri. Se obţin trei grupuri de asemenea hiperbole-caracteristice.

În figura 1 se reprezintă hiperbolele (s, p) pentru diferite valori constante ale lui μ. Calculul lor s-a făcut cu tabela 1.

Tabela 1

μ	0	0,2	0,5	1,0	1,5	2	3	∞
s	1	$\frac{1,2}{0,2+p+1,2}$	$\frac{1,5}{0,5p+1,5}$	$\frac{2}{p+2}$	$\frac{2,5}{1,5p+2,5}$	$\frac{3}{2p+3}$	$\frac{4}{3p+4}$	$\frac{1}{p+1}$

Comportarea la suprasarcină a barei se apreciază urmărind traseele liniilor AC şi AB:

1) în punctul figurativ A, caracteristica posedă indicele de siguranţă relativă $s = 0,8$ pentru o suprasarcină relativă $p = 1,5$ şi un indice de sensibilitate la suprasarcină $\mu = \frac{P}{G} = 0,2$, în timp ce în punctul C, pentru acelaşi s, dar cu $\mu = 3$, indicele de suprasarcină relativă scade

la 0,3; aşadar, o structură al cărui raport al sarcinii nepermanente către sarcina permanentă (μ) este mic poate suporta suprasarcini de cinci ori mai mari decît structura uşoară la egalitatea coeficienţilor de siguranţă în primul stadiu de calcul;

2) comparaţia dintre situaţiile figurate în punctele A şi B arată că pentru aceeaşi suprasarcină relativă indicele de siguranţă relativă s

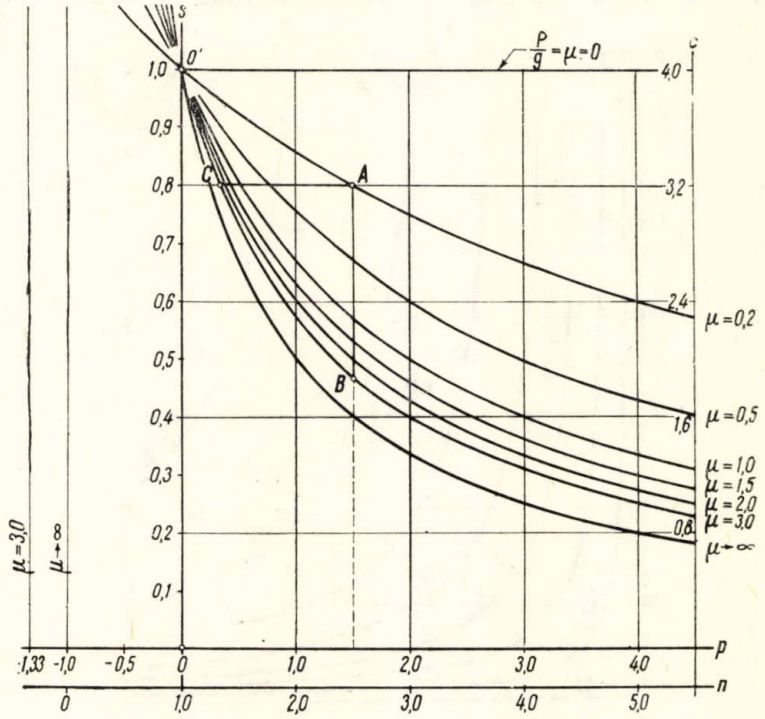


Fig. 1. — Caracteristici de siguranţă a elementelor de structură şi a structurilor simple $f(s, p) = 0$ (curbe iso-μ).

este 0,8 la structura grea ($\mu = 0{,}2$), pe cînd la structura uşoară ($\mu = 3$) acel indice scoboară la 0,47.

În aceeaşi figură s-a introdus şi scara lui $n = \dfrac{P}{P_0}$ (raportul dintre sarcina actuală şi sarcina iniţială P_0, normată), iar curbele caracteristice de siguranţă exprimă şi relaţia dintre s şi $n = \dfrac{P_0 + \Delta P}{P_0} = 1 + p$. În sfîrşit, s-a introdus şi scara coeficientului de siguranţă c a unui beton obişnuit la compresiune pură, făcînd să corespundă $c = 4$ la $s = 1$.

În figura 2 s-au reprezentat cele trei mărimi p, s şi μ, dintre care p şi μ sînt raportate într-un plan de proiecţie (p, μ), iar s este a treia dimensiune, reprezentată în plan prin hiperbole pentru diferite valori $s = \text{const}$.

La structurile următoare, caracteristicile de siguranţă vor fi reprezentate numai în planul (p, s) pentru $\mu = \text{const.}$

2. *Pilon în Λ acţionat la vîrf printr-o forţă orizontală accidentală şi în axa verticală printr-o forţă G permanentă, fără a se considera flambajul barelor*

Forţele $\overline{G}$, $\overline{P}$ şi $\overline{\Delta F}$ se descompun după direcţiile axelor celor două bare înclinate de unghiul α cu verticala. Dacă a^2 = aria unei secţii

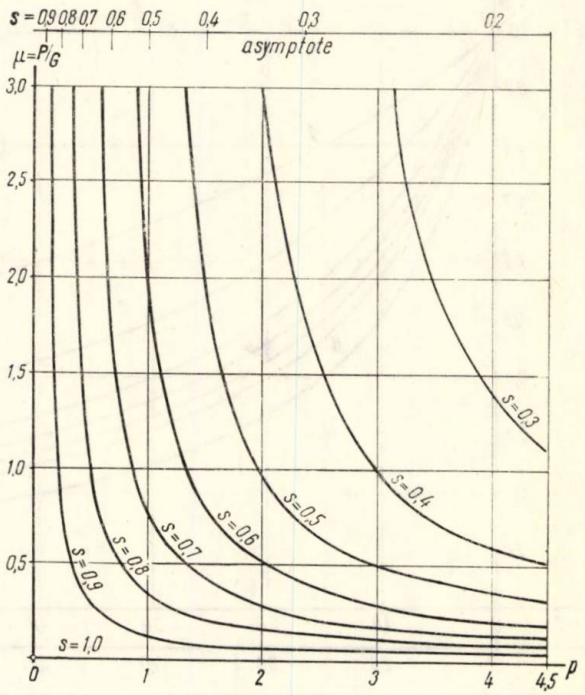


Fig. 2. — Caracteristici de siguranţă a elementelor de structură şi a structurilor simple $f(\mu, p)=0$ (curbe iso-s).

drepte la baza fiecărui stîlp, eforturile unitare în cele două stadii de solicitare sînt în stîlpul comprimat

$$\sigma_0 = \frac{G\cos\alpha + F/\sin\alpha}{2\,a^2} \qquad \sigma = \frac{G\cos\alpha + (F+\Delta F)/\sin\alpha}{2\,a^2}.$$

Rezultă

$$\frac{\sigma_0}{\sigma} = s = \frac{\mu + 1}{\mu p + \mu + 1}, \tag{9}$$

unde $\mu = \dfrac{P/G}{\sin\alpha\cos\alpha}$ este indicele de sensibilitate la suprasarcina ΔP şi $p = \Delta F/F$. Se observă că relaţia (9) este identică cu (8), indicele μ diferînd printr-un factor constant.

3. *Grindă rectilinie acţionată de sistemele de forţe G (fixe, permanente) şi P (mobile sau accidentale)*

Se examinează două cazuri mai frecvente:

a) forţele G şi P (mobile) sînt distribuite uniform şi se află în planul median, vertical al grinzii. În stadiul al doilea de calcul, forţele P cresc cu cantitatea ΔP. În aceste ipoteze, momentele încovoietoare sînt proporţionale cu rezultantele sistemelor de forţe care acţionează într-o secţiune dreaptă. În primul stadiu, efortul maxim în secţia aleasă este $\sigma_0 = \frac{M_0}{W_x}$, iar în stadiul următor $\sigma = \frac{M}{W_x}$; în acest caz, $s = \frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{M_0}{M} = \frac{G + P}{G + P + \Delta P} = \frac{\mu + 1}{\mu p + \mu + 1}$, în care $\mu = P/G$, deci se menţine între s şi p relaţia (8);

b) forţele G sînt în planul median vertical şi forţele P şi ΔP în planul orizontal care trece prin fibra mediană a grinzii: cazul unei grinzi acţionate de sarcinile permanente G şi presiunea orizontală a vîntului P. Se admite o repartiţie uniformă la fiecare dintre cele două sisteme de forţe. Fie M_G, M_P şi $M_{\Delta P}$ momentele încovoietoare în secţia dată şi W_y şi W_x modulele de rezistenţă în punctul extrem al secţiunii. În cele două stadii ale calculului, eforturile unitare maxime sînt

$$\sigma_0 = \frac{M_G}{W_x} + \frac{M_P}{W_y}; \quad \sigma = \frac{M_G}{W_x} + \frac{M_P}{W_y} + \frac{M_{\Delta P}}{W_y}.$$

Prin formarea lui $\frac{\sigma_0}{\sigma}$ şi introducerea parametrilor

$$\frac{1}{\mu} = \frac{M_G}{M_P} \frac{W_y}{W_x} \text{ şi } p = \frac{M_{\Delta P}}{M_P} \tag{10}$$

se obţine ecuaţia (8).

În cazurile mai complicate întîlnite în practică, este recomandabil, pentru a obţine caracteristicile de siguranţă, de a recurge la diagrame de forţe echivalente, însă repartizate uniform.

4. *Bară dreaptă solicitată la torsiunea compusă din M_{tG} momentul datorit forţelor G şi M_{tP} momentului forţelor P*

În urma unei analize similare cu cea precedentă, se ajunge tot la relaţia (8), în care însă

$$p = \frac{M_{t\Delta P}}{M_{tP}} \quad \text{şi} \quad \mu = \frac{M_{tP}}{M_{tG}}.$$

5. *Secţiunea dreaptă într-o grindă solicitată de o forţă tăietoare T datorată sistemelor de forţe G, P, ΔP situate într-un plan trecînd prin axa longitudinală a grinzii*

În acest caz, axa neutră este determinată şi constantă pentru orice variaţie a lui ΔP. Indicele de siguranţă relativă s poate fi definit ca raportul dintre eforturile unitare de tăiere τ_0/τ în punctul ales. Dacă T_G şi T_P şi $T_{\Delta P}$ desemnează forţele tăietoare produse de sistemele G, respectiv P şi ΔP, şi dacă $\mu = T_P/T_G$ (indice de sensibilitate a elementului), se ajunge ca şi în cazurile precedente, la relaţia (8).

6. *Bară rectilinie solicitată la compresiune în condiţiile flambajului*

Dacă în primul stadiu s-a proiectat bara pentru a realiza un coeficient de siguranţă la flambaj c_0, avem

$$\frac{\pi^2 EI}{c_0 l^2} = G + P,$$

în care l este lungimea de flambaj. În stadiul următor, coeficientul c va rezulta din relaţia

$$\frac{\pi^2 EI}{cl^2} = G + P + \Delta P.$$

Din aceste relaţii rezultă aceeaşi ecuaţie caracteristică de siguranţă (8), în care μ şi p au aceleaşi semnificaţii ca la pct. 1.

În cazul aplicării altor formule de flambaj (Tetmayer, Johnson etc.) se obţine aceeaşi caracteristică de siguranţă.

7. *Rolul „indicelui de sensibilitate la suprasarcină"*

Examinînd indicii μ care influenţează sensibilitatea structurilor la suprasarcină, se constată că ei depind de mai mulţi parametri, precum:

a) mărimi fizico-mecanice ale materialului, ca greutatea specifică, rezistenţa la rupere, modulul de elasticitate ş.a.;

b) mărimi şi forme geometrice, ca lungimea sau deschiderea elementului, forma secţiunii transversale sau forma conturului, numărul şi natura reazemelor, distribuţia maselor şi a momentelor de inerţie proprii.

Tabela 2

Încovoierea unor grinzi simplu rezemate sub sarcina utilă de 210 kg/m

Deschidere	Grinzi de lemn $\left(b/h = \frac{1}{2}\right)$			Grinzi de oţel PNI			P/G oţel / P/G lemn
l (m)	b/h 1/2	G/l kg/m	P/G	INr.	G/l kg/m	P/G	
4	9/18	8,1	26,2	10	8,5	25,3	0,97
8	15/29	21,8	9,2	17	19,8	10,5	1,14
11	18/36	32,5	6,5	22	33,1	6,4	0,98

În exemplul următor se va examina comportarea la încovoiere a unor grinzi liber rezemate, din lemn cu secţiuni dreptunghiulare sau din oţel cu secţiuni în I, în funcţie de deschidere.

Deschiderile s-au luat 4, 8 şi 11 m, secţiunile de lemn în raportul 1/2 şi la oţel profilele normale. Secţiunile s-au calculat ca pentru aceeaşi

sarcină utilă de 210 kg/m, eforturile maxime să ajungă la limitele de 88 kg/cm² în lemn şi 1 320 kg/cm² în oţel. În tabelă sînt date valorile lui P/G corespunzătoare şi în figura 3 sînt trasate curbele caracteristice pentru valorile P/G din tabelă. Din acest studiu rezultă că :

— greutatea proprie pe m de lungime variază pentru toate grinzile conform formulei $\alpha l^2 + \beta l$;

— pentru aceeaşi sarcină utilă şi aceeaşi deschidere, greutatea proprie a unei grinzi de lemn este aceeaşi ca a unei grinzi de oţel moale,

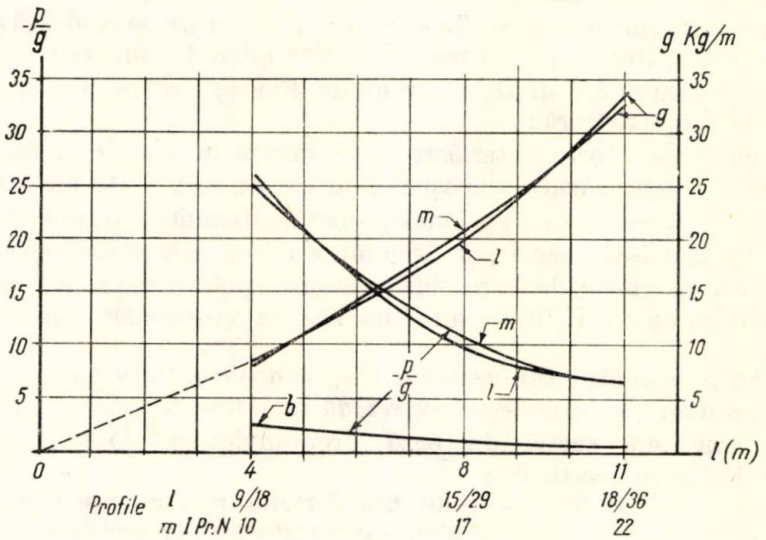


Fig. 3. — Variaţii ale greutăţilor proprii G (kg/m) şi a raporturilor P/G pentru grinzi de lemn şi de oţel, calculate pentru o sarcină mobilă P repartizată uniform după normele în uz : l — lemn ; m — oţel moale ; b — beton armat.

fapt cunoscut de altfel de constructori. În cazul de faţă, raportul γ/R ia valorile

$$\frac{500}{88 \text{ lemn}} \sim \frac{7\,850}{1\,390 \text{ oţel}} \sim 5{,}7 ;$$

— indicele P/G scade pe un arc cvasiiperbolic şi grinda e cu atît mai puţin sensibilă la suprasarcină, cu cît creşte deschiderea.

Calculul în aceleaşi condiţii al unui set de trei grinzi de beton armat avînd secţiuni dreptunghiulare ($\gamma = 2\,400$ kg/m² şi $R_a = 40$ kg/cm²) conduce la o dimensionare a sectorului astfel ca $\frac{\gamma}{R_a} = \frac{2\,400}{40} = 60$. Prin urmare, la deschideri egale, pentru a rezista la aceleaşi sarcini utile, grinzile de beton armat masiv sînt de 10 ori mai grele ca grinzile metalice sau de lemn ($60 = 10 \cdot 5{,}7$), însă cu atît sînt mai puţin sensibile la suprasarcini neprevăzute. Se mai poate întrevedea că grinzile din beton de mare rezistenţă sau de beton precomprimat se apropie din ce în ce mai mult de grinzile metalice în cece ce priveşte comportarea la suprasarcini.

III. STRUCTURI ŞI ELEMENTE STRUCTURALE LA CARE NU SE APLICĂ SUPRAPUNEREA EFECTELOR

Iată mai întîi cîteva cazuri cînd regula suprapunerii efectelor nu e valabilă :

— în secţiunile supuse la încovoiere compusă cu compresiune, cînd, materialul nerezistînd la eforturi de întindere, secţiunea activă scade cu excentricitatea M/N (zidării, beton simplu, pămînt, piatră);

— în structuri prea flexibile, cînd forma structurii se modifică simţitor cu intensitatea sarcinii (cablu metalic întins între doi suporţi);

— cînd sarcinile, depăşind anumite limite, provoacă plastificarea unor părţi din structură;

— cînd apar forţe exterioare neprevăzute în puncte şi direcţii şi cu intensităţi neprevăzute, depăşind limitele de stabilitate ale structurii (forţe accidentale sau excepţionale, efecte dinamice, rezonanţă etc.).

În toate aceste cazuri pot fi stabilite totuşi caracteristicile de siguranţă. Dacă sistemele de forţe sînt compuse, pot apărea mai mult decît un parametru de sensibilitate, după cum se va vedea mai departe.

1. *Stîlp de zidărie sau de beton simplu acţionat de o forţă excentrică paralelă cu axa, dar materialul nu rezistă la întindere*

Se consideră secţia de bază dreptunghiulară ($b \times d$) şi două sisteme de forţe verticale :

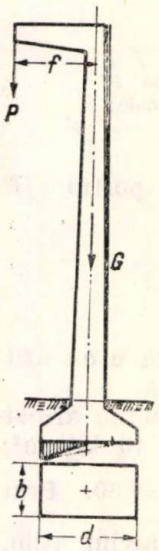


Fig. 4. — Siguranţă la răsturnare a unui stîlp pe fundaţie cu bază dreptunghiulară (schemă).

G — rezultanta forţelor permanente trecînd prin centrul de gravitate O al secţiunii;

P — rezultanta sarcinilor mobile maxime normate, acţionînd la extremitatea unei console al cărei braţ de pîrghie este f;

ΔP — creşterea forţei P peste normă şi suprapusă lui P (figura 4).

Prima ipoteză. Secţiunea $b \times d$ rămîne mereu activă. În primul stadiu al calculului, efortul maxim de compresiune este dat de relaţia

$$\sigma_0 = \frac{G + P}{bd} + \frac{6\,Pf/d}{bd} \tag{11}$$

În stadiul următor,

$$\sigma = \frac{G + P + \Delta P}{bd} + \frac{6\,(P + \Delta P)f/d}{bd}.$$

Din ultimele două relaţii rezultă

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + \frac{P}{1 + \dfrac{G}{P(1 + 6\,f/d)}}. \tag{12}$$

Dacă se notează indicele de sensibilitate la suprasarcină

$$\mu = \frac{P}{G}(1 + 6\, f/d) \tag{13}$$

şi se introduce μ în ecuaţia (12), se obţine aceeaşi ecuaţie (8) a caracteristicii de siguranţă la suprasarcină.

A doua ipoteză. Dacă

$$\frac{G + P}{bd} < \frac{6\, Pf}{bd^2}, \tag{14}$$

secţiunea rămîne activă numai pe înălţimea $\frac{3}{2}\left(\frac{d}{2} - e_0\right)$. În primul stadiu de calcul fiind $e_0 = \frac{Pf}{G + P}$, înălţimea secţiunii active este

$$3\left(\frac{d}{2} - \frac{Pf}{G + P}\right). \tag{15}$$

În al doilea stadiu, excentricitatea creşte la valoarea

$$e = \frac{(P + \Delta P)f}{G + P + \Delta P} \tag{16}$$

şi secţiunea activă se micşorează. Eforturile unitare maxime în acest caz sînt în cele două stadii de calcul:

$$\sigma_0 = \frac{2(G + P)}{3b\left(\frac{d}{2} - \frac{Pf}{G + P}\right)} \tag{17}$$

$$\sigma = \frac{2(G + P + \Delta P)}{3b\left(\frac{d}{2} - \frac{(P + \Delta P)f}{G + G + \Delta P}\right)}. \tag{18}$$

Indicele $s = \frac{\sigma_0}{\sigma}$ rezultă din relaţiile (17) şi (18), în care vor fi introduse relaţiile de definiţie

$$\frac{\Delta P}{P} = p\,; \quad \frac{P}{G} = \mu\,; \quad \frac{f}{d} = m. \tag{19}$$

Rezultă ecuaţia generală a caracteristicii de siguranţă la suprasarcină:

$$s = \frac{(\mu + 1)^2 \cdot \{1 + \mu\,[1 + p - 2(1 + p)\, m]\}}{[(1 + p)\,\mu + 1]^2\,[1 + \mu\,(1 - 2\ \mathrm{m})]}. \tag{20}$$

În acest caz sînt doi parametri de sensibilitate la suprasarcină: un parametru mecanic μ și un parametru geometric m. Studiul familiilor de curbe caracteristice de siguranță ale acestor structuri necesită obținerea unor perechi de valori (s, p), menținînd constante valorile lui μ și ale lui m.

În tabela 3 sînt calculate coordonatele curbelor caracteristice de siguranță pentru patru valori ale lui μ: 1/2, 1, 2 și 4, și pentru grupuri de cîte trei valori ale lui m. Acest calcul a fost înlesnit prin formulele următoare ce dau pe s:

$$\mu = \frac{1}{2}, \quad s = \frac{9\left[1 + \frac{1}{2}(p+1)(1-2m)\right]}{(3+p)^2\left(\frac{3}{2} - m\right)}; \quad m_{cr} = \frac{3}{2}$$

$$\mu = 1, \quad s = \frac{4[1 + (1+p)(1-2m)]}{(2+p)^2(2-2m)}; \quad m_{cr} = 1$$

$$\mu = 2, \quad s = \frac{9[1 + 2(1+p)(1-2m)]}{(3+2p)^2(3-4m)}; \quad m_{cr} = \frac{3}{4} \qquad (21)$$

$$\mu = 4, \quad s = \frac{25[1 + 4(1+p)(1-2m)]}{(5+4p)^2(5-8m)}; \quad m_{cr} = \frac{5}{8}$$

Dacă μ tinde spre infinit (adică G neglijabil), ecuația (20) se reduce la $sp + s = 1$, formă găsită anterior (vezi fig. 1).

În figura 5 sînt reprezentate curbele caracteristice de siguranță, care sînt curbe asimptotice de ordinul 3.

Observație. Pentru ca rezultanta $P + G$ să cadă în exteriorul treimii mediane a secțiunii, trebuie ca $\frac{f}{d} > \frac{G+P}{6P}$, ceea ce revine la $m > \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\mu} + 1\right)$, condiție respectată la elaborarea tabelei 3.

2. *Baraj de greutate de beton*

Se consideră un baraj de profil triunghiular cu taluz amonte vertical, calculat după condiția Maurice Lévy, atenuată în sensul că subpresiunea admisă la piciorul paramentului din amonte este $m\gamma H$ în loc de γH, m fiind subunitar. În acest caz trebuie ca efortul unitar de compresiune la acest punct al bazei să fie $\geqslant m\gamma H$. Dacă paramentul din aval este înclinat de λ pe verticală, această condiție revine la

$$\lambda \geqslant \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_b - m\lambda}}. \qquad (22)$$

Se presupune că nivelul maxim normal trece prin intersecția paramentelor și că se neglijează variația nivelului din aval în scopul simplificării schemei prezente. Presupunem că diferența dintre nivelele celor două planuri de apă din amonte și din aval nu este depășită chiar în cazul unui debit natural cu probabilitate 1/1 000 de ani, datorită descărcătorului de

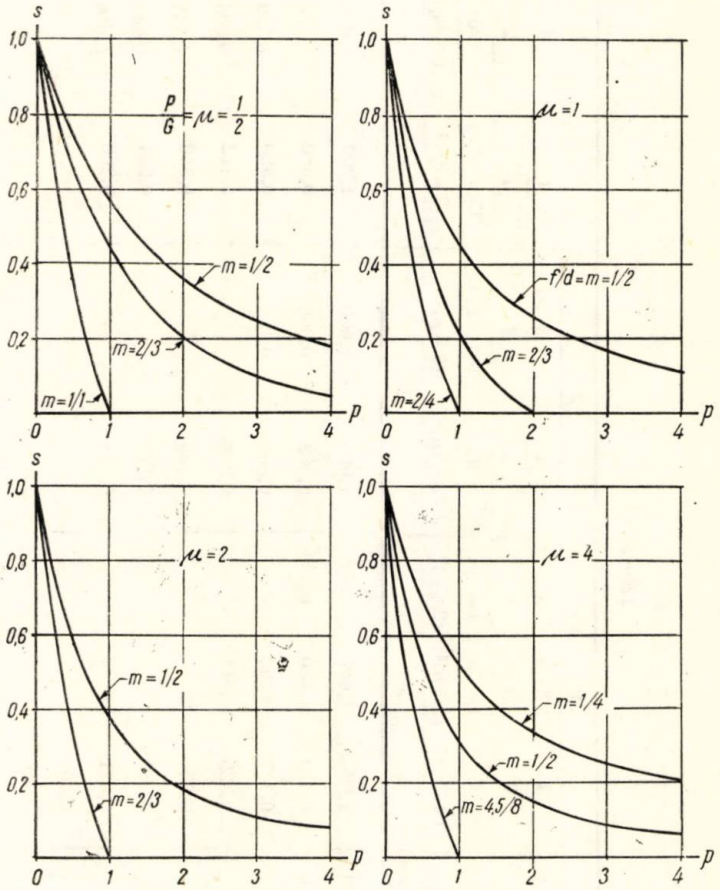


Fig. 5. — Caracteristicile de siguranță ale stîlpului din figura 4, funcție de parametrii de sensibilitate $\mu = P/G$ și $m = f/d$.

ape mari. În secțiunea de calcul de la baza barajului se admite o distribuție liniară a subpresiunilor de la $m\gamma H$ (amonte) la zero (aval) și că, rezistența materialului la rupere fiind R în acea secțiune orizontală, se ia ca rezistență admisibilă

$$\sigma_0 = \frac{R}{c_0}.$$

Coeficientul de siguranță se ia cu suficientă rezervă, pentru ca în faza a doua de calcul, cînd va apărea o suprasarcină excepțională prin creșterea nivelului din amonte cu cantitatea h, să nu se depășească în

Tabela 3

$\mu =$	1/2			1			2		4		
$m =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4,5}{8}$
$s =$	$\frac{9}{(3+p)^2}$	$\frac{9(5-p)}{5(3+p)^2}$	$\frac{9(1+p)}{(3+p)^2}$	$\frac{4}{(3+p)^2}$	$\frac{4-2p}{(2+p)^2}$	$\frac{4-4p}{(2+p)^2}$	$\frac{9}{(2+2p)^2}$	$\frac{9(1-2p)}{(3+p)^2}$	$\frac{25(3+2p)}{(3+2p)^2}$	$\frac{25}{(5+4p)^2}$	$\frac{100(1-p)}{31(5+4p)^2}$
p	s			s			s		s		
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,5	0,730	0,658	0,366	0,640	0,480	0,320	0,562	0,365	0,680	0,510	0,304
1,0	0,564	0,450	0	0,445	0,222	0	0,360	0	0,520	0,309	
1,5	0,443	0,310		0,325	0,081		0,278		0,412	0,206	
2,0	0,360	0,216		0,250	0		0,250		0,350	0,148	
3,0	0,250	0,100		0,160			0,111		0,261	0,087	
4,0	0,183	0,037		0,011			0,074		0,206	0,056	
5,0	0,040	0		0,063							

secțiune limita de deformații mari. Această creștere s-ar datora fie unei insuficiente funcționări a evacuatoarelor, fie apariției unui debit extraordinar neprevăzut, cînd lacul e plin, evenimente rare, apreciate de ex. să apară cu o probabilitate 1/10 000 de ani. Efortul de compresiune la piciorul din aval ar fi atunci $\sigma = \frac{R}{c}$. Indicele de siguranță relativă s va fi în acel caz

$$s = \frac{c}{c_0} = \frac{\sigma_0}{\sigma}.$$

Se va lua ca indice de suprasarcină relativă raportul rezultantelor presiunilor pe paramentul din amonte $p = \frac{\Delta P}{P}$, adică

$$p = \frac{\gamma H h}{\frac{\gamma}{2} H^2} = \frac{2h}{H}.$$

Mărimile mecanice în cele două stadii de calcul sînt următoarele (vezi fig. 6):

	Stadiul 1	*Stadiul 2*
Greutatea proprie a barajului	$G = \frac{\lambda}{2}\gamma_b H^2$	$G = \frac{\lambda}{2}\gamma_b H^2$
Rezultanta subpresiunilor pe talpă	$A_0 = \frac{m}{2}\lambda\gamma H^2$	$A = \frac{m}{2}\gamma\lambda(H^2 + hH)$
Rezultanta forțelor verticale	$G - A_0 = \frac{\lambda}{2}(\gamma_b - m\gamma)H^2$,	$G - A = \frac{\lambda}{2}\left((\gamma_b - m\gamma) - m\gamma\frac{h}{H}\right)H^2$
Forțe de presiune a apei pe par. amonte	$P_0 = \frac{\gamma}{2}H^2$	$P = \frac{\gamma}{2}H^2 + \gamma H h$
Momentul încovoierii în centrul secțiunii de bază:		
a) al forței P	$M_{P_0} = \frac{\gamma}{6}H^3$	$M_P = \frac{\gamma}{6}H^3 + \frac{\gamma}{2}H^2 h$
b) al forței $N = G - A$	$M_{n_0} = -\frac{\lambda^2}{12}(\gamma_b - m\gamma)H^3$;	$M_n = -\frac{\lambda}{12}\gamma_b H^3 + \frac{\lambda^2\gamma m}{12}(H + h)H^2$

(23)

c) rezultant

$$M_0 = \left(\frac{\gamma}{3} + \frac{m\gamma\lambda^2}{6} - \gamma_b\frac{\lambda^2}{6}\right)\frac{H^3}{2};\quad M = \left[\left(\frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma m\lambda^2}{6} - \frac{\gamma_b\lambda^2}{6}\right)H + \left(1 + \frac{m\lambda^2}{6}\right)h\right]\frac{H^2}{2}$$

Excentricitatea forței în secțiune datorită momentului M_t

$$e_0 = \frac{M_0}{G - A_0} = \frac{\left[\frac{\gamma}{3} + \frac{\lambda^2}{6}(\gamma m - \gamma_b)\right]H}{\lambda(\gamma_b - m\gamma)};$$

$$e = \frac{M}{G - A} = \frac{\left[\frac{\gamma}{3} + \frac{\lambda^2}{6}(\gamma m - \gamma_b) + \left(1 + \frac{m\lambda^2}{6}\right)\frac{\gamma h}{H}\right]H}{\left(\gamma_b - m\gamma - m\gamma\frac{h}{H}\right)} \quad (23)$$

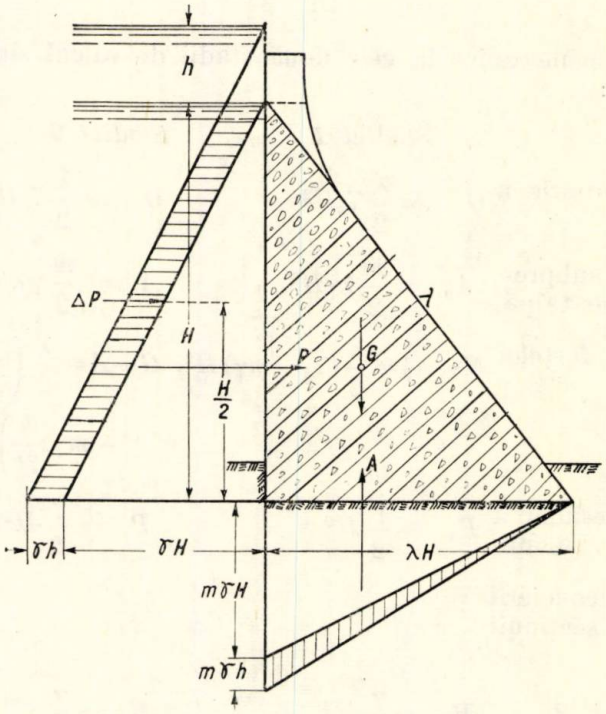


Fig. 6. — Baraj de greutate din beton (schema forțelor exterioare pentru două nivele de apă) (maximul normal și maximul supraînălțat cu h [m]).

Spre a schematiza și a prinde mai bine efectele parametrilor legați de sensibilitatea construcției la suprasarcină, să particularizăm problema, punînd $m = 1$, ceea ce s-a admis adeseori la proiectarea barajelor.

În acest caz avem

$$\lambda^2(\gamma_b - \gamma) = \gamma, \qquad \text{(vezi rel. (22))}$$

$$G - A = \lambda\left(\gamma_b - \gamma - \gamma\frac{p}{2}\right)H^2, \tag{24}$$

$$M = \left[\frac{\gamma}{3} + \frac{\lambda^2}{6}(\gamma - \gamma_b) + \left(1 + \frac{\lambda^2}{6}\right)\frac{p}{2}\right]\frac{H^2}{2}; \tag{25}$$

— în primul stadiu : $\sigma_{0\,\max\,(aval)} = \dfrac{2(G - A_0)}{\lambda H}$! $\sigma_{0\,\min\,(amonte)} = 0$; (26)

— în al doilea stadiu : $\sigma_{\max\,(aval)} = \dfrac{2}{3}\dfrac{(G - A)}{\left(\lambda\dfrac{H}{2} - e\right)}$, (27)

întrucît se consideră numai secţiunea activă (supusă la compresiune).

Ultima dintre relaţiile (23) care dă pe e în stadiul al doilea se simplifică sub forma

$$e = \frac{\dfrac{\gamma}{3} + \dfrac{\lambda^2}{6}(\gamma - \gamma_b) + \gamma\left(1 + \dfrac{\lambda^2}{6}\right)\dfrac{p}{2}}{\lambda\left(\gamma_b - \gamma - \gamma\dfrac{p}{2}\right)}. \tag{28}$$

Din ecuaţiile (26) şi (27) rezultă

$$e = \lambda H\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 - \lambda^2\frac{p}{2}\right)\right]. \tag{29}$$

Eliminînd pe e din ecuaţiile (29) şi (23, ultima), rezultă ecuaţia în p şi s, care reprezintă o curbă de ordinul 3 asimptotică :

$$\lambda^4 sp^2 - 4\lambda^2 sp + 2(2\lambda^2 + 3)p + 4s - 4 = 0. \tag{30}$$

Este ecuaţia caracteristicilor de siguranţă a structurii, conţinînd parametrul λ (fig. 7). Se poate face mai uşor studiul curbelor caracteristice reprezentative, punînd ecuaţia (30) sub forma

$$s = \frac{-(2\lambda^2 + 3)\dfrac{p}{2} + 1}{\left(\lambda^2\dfrac{p}{2} - 1\right)^2}. \tag{31}$$

Se constată că pentru

$p = 0$	$\dfrac{2}{\lambda^2}$	$\dfrac{2}{2\lambda^2 + 3}$	$\pm\infty$,	
$s = 1$	$-\infty$	0	0.	

Valorile lui p pentru care s este maxim sînt obținute prin anularea derivatei $\frac{\partial s}{\partial p}$, adică prin relația

$$\left(\frac{\lambda^2 p}{2} - 1\right)[(2\lambda^4 + 3\lambda^2)\, p + 6] = 0. \tag{32}$$

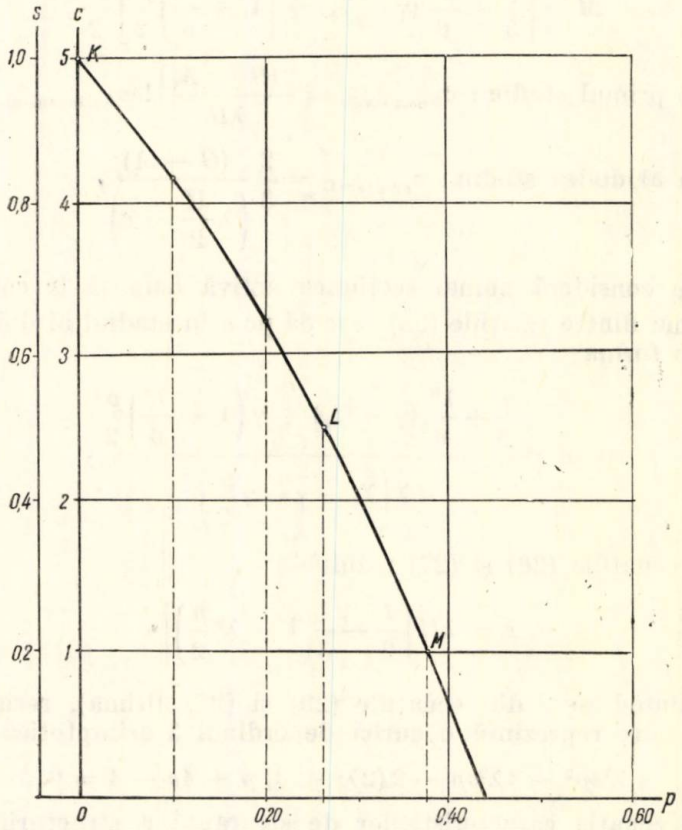


Fig. 7. — Baraj de greutate din beton. Caracteristicile de siguranță privind efortul de compresiune la piciorul aval al barajului.

Soluția este negativă, deci pentru o sarcină inferioară celei din primul stadiu ; soluția pozitivă este aceeași care dă asimptota verticală ($s = -\infty$).

Una dintre caracteristicile de siguranță se reprezintă geometric, după precizarea prealabilă a parametrului λ, prin formula (21), în care se ia $\gamma_b = 2{,}35$. Se găsește $\lambda = 0{,}88$. Alte caracteristici se pot calcula dînd lui m diferite valori, cuprinse între 0,5 și 1, folosite în practică.

Cu privire la curba caracteristică trasată în figura 7, se constată că această curbă coboară repede în primul cadran, astfel că pentru o suprasarcină relativă $p = 44\%$ (supraînălțarea nivelului $h/H = 0{,}22$) secțiunea activă devine nulă și în secțiunea de bază *efortul unitar devine*

infinit! În partea superioară KL, între $s = 1{,}0$ şi $s = 0{,}8$, variaţia e mai puţin rapidă; totuşi, pentru o supraînălţare de nivel de numai 6%, indicele de siguranţă relativă s scade de la 1 la 0,8, iar pentru $p = 0{,}26$ (căreia îi corespunde o supraînălţare a nivelului apei de 13%), indicele

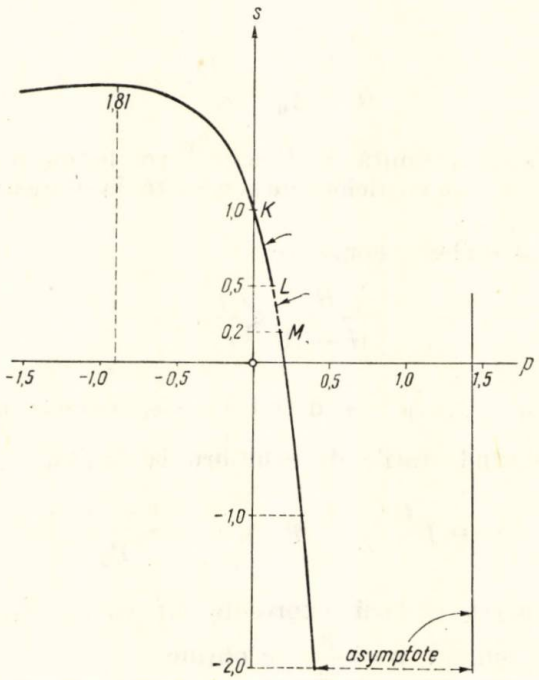


Fig. 8. — Baraj de greutate din beton. Curba completă a caracteristicii de siguranţă (compresiune la piciorul aval), inclusiv ramurile nefolosibile.

de siguranţă relativă s ajunge la limita periculoasă de 0,4. Arcul LM figurează zona de fisurare a betonului pînă la rupere în punctul M, la o suprasarcină relativă $p = 0{,}38$ (supraînălţare de nivel cu 19%).

Pentru a obţine o siguranţă acceptabilă în condiţiile unei suprasarcini relative mari (în cazul barajelor de înălţime mică) este necesar a proiecta barajul cu o lăţime de bază mult mai mare decît condiţia-limită Maurice Lévy. Astfel, dacă se compară un baraj înalt ($H = 100$ m) şi supraînălţarea apei de 2 m, adică = 4%, se găseşte $s = 0{,}94$, deci viitura are un efect neînsemnat; dacă însă aceeaşi creştere de nivel de 2 m se produce la un baraj cu $H = 10$ m, proiectat în aceleaşi condiţii, $p = 40\%$ şi $s = 0{,}125$ şi ruina se produce prin zdrobirea betonului (sau a rocii de bază).

În figura 8 se reprezintă curba caracteristică $(s, p) = 0$ şi în afară de zona KLM de interes tehnic şi fizic.

3. *Stabilitatea unui baraj de beton la alunecare pe terenul de fundație*

Fie un baraj de profil triunghiular, dimensionat după criteriile arătate. În primul stadiu de calcul, rezultanta forțelor orizontale fiind $P_0 = \frac{\gamma}{2} H^2$ și rezultanta forțelor verticale $G - A_0 = \frac{\gamma}{2}(\gamma_b - m\gamma) H^2$, trebuie ca

$$\frac{P_0}{G - A_0} \leqslant \frac{f}{c_{f_0}}, \tag{33}$$

unde f este coeficientul-limită de frecare între beton și rocă (sau între rocă și rocă *), iar c_{f_0} un coeficient de siguranță la alunecare (de exemplu cuprins între 1,5 și 2).

În stadiul al doilea trebuie ca

$$\frac{G}{G - A} \leqslant \frac{f}{c_f},$$

unde $c_f < c_{f_0}$, dar > 1. Se va defini $\frac{c_f}{c_{f_0}} = s$, indicele de siguranță la alunecare. Considerînd stările de echilibru la limită,

$$c_f = f \cdot \frac{G - A}{P} \quad \text{și} \quad c_{f_0} = f \cdot \frac{G - A_0}{P_0}. \tag{34}$$

Introducînd în aceste relații expresiile lui G, A, A_0, P și P_0 din formulele (23) și punînd $p = \frac{h}{H}$, se obține

$$s = \frac{(G - A) P_0}{(G - A_0) P}, \tag{35}$$

$$s = \frac{\gamma_b - m\gamma(1 + p)}{(\gamma_b - m\gamma)(1 + 2p)}. \tag{36}$$

Ultima ecuație reprezintă curbele caracteristice de siguranță la alunecare, avînd pe m ca parametru. Asimptotele și cîteva puncte mai importante sînt date de perechile de valori ale coordonatelor care urmează :

p	0	$\frac{\gamma_b}{m\gamma} - 1$	1	$\pm\infty$	$-\frac{1}{2}$
s	1	0	$\frac{\gamma_b - 2m\gamma}{3(\gamma_b - m\gamma)}$	$-\frac{m}{\gamma_b - m\gamma}$	$\pm\infty$

* Se ia cel mai mic dintre cei doi coeficienți de frecare.

Introducînd valorile $m = 1$ şi $m = 0{,}5$ în relaţia (36), se deduc formele particulare ale caracteristicilor de siguranţă la alunecare:

$$s = \frac{1{,}35 - p}{1{,}35\,(1 + 2p)} \text{ şi } s = \frac{1{,}85 - 0{,}5\,p}{1{,}85\,(1 + 2p)}.$$

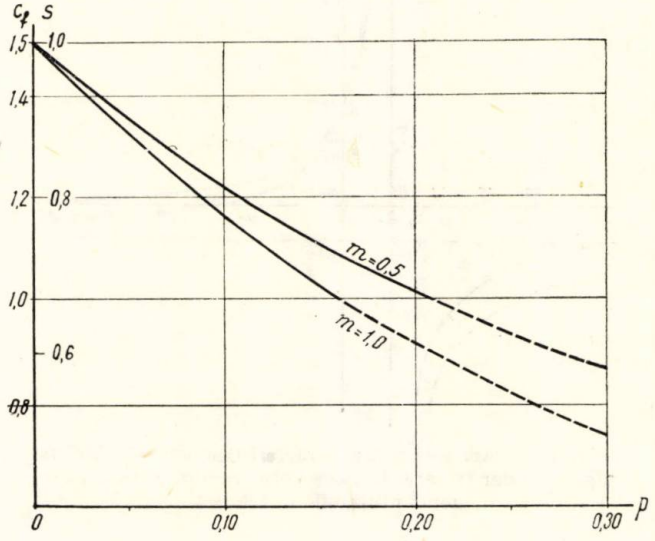


Fig. 9. — Baraj de greutate din beton. Caracteristicile de siguranţă privind alunecarea pe terenul de fundaţie.

Aceste relaţii permit a se calcula valorile s în funcţie de unele valori ale lui m şi p, conform tabelei 4.

Tabela 4

m	p	$-\infty$	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$0{,}0$	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}3$	$1{,}0$	$1{,}35$	$3{,}7$	∞
1	s	$-0{,}37$	$-0{,}83$	$-1{,}74$	$\pm\infty$	$3{,}08$	$1{,}91$	$1{,}00$	$0{,}77$	$0{,}61$	$0{,}49$	$0{,}09$	$0{,}0$	$-0{,}21$	$-0{,}37$
0,5	s	$-0{,}13$	$-0{,}51$	$-1{,}27$	$\mp\infty$	$2{,}70$	$1{,}77$	$1{,}00$	$0{,}81$	$0{,}68$	$0{,}58$	$0{,}24$	$0{,}17$	$0{,}0$	$-0{,}135$

În figura 10 s-a reprezentat printr-un arc plin porţiunile din curbe care corespund unui $c_f > 1$. Caracteristicile de siguranţă la alunecare (fig. 9) apar foarte favorabile şi scoborîrea lor este lină; totuşi coeficientul de siguranţă $c_{f_0} = 1{,}5$, fiind ales cam mic, dacă $p = \frac{h}{H}$ creşte la 16—21%, se ajunge la $c_f = 1$, la o limită periculoasă pentru stabilitate. Se mai constată că, dacă factorul de reducere a subpresiunii m scade de la $m = 1$ la $m = 0{,}5$, s creşte relativ puţin.

4. *Stabilitatea la alunecare a infrastructurii unei deschideri a unui baraj fluvial* (fig. 11)

Se consideră un radier redus schematic la o secțiune dreptunghiulară și se calculează la alunecare pe terenul de fundație în ipoteza că batar-

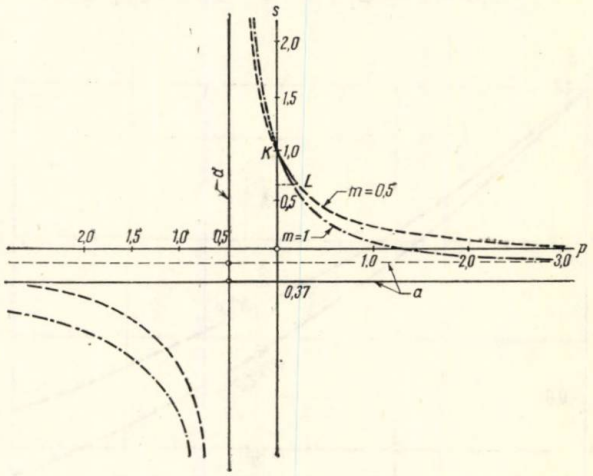


Fig. 10. — Aceleași curbe caracteristice ca cele de la figura 9, dar trasate incluzîndu-se ramurile exterioare zonei utilizabile în tehnică.

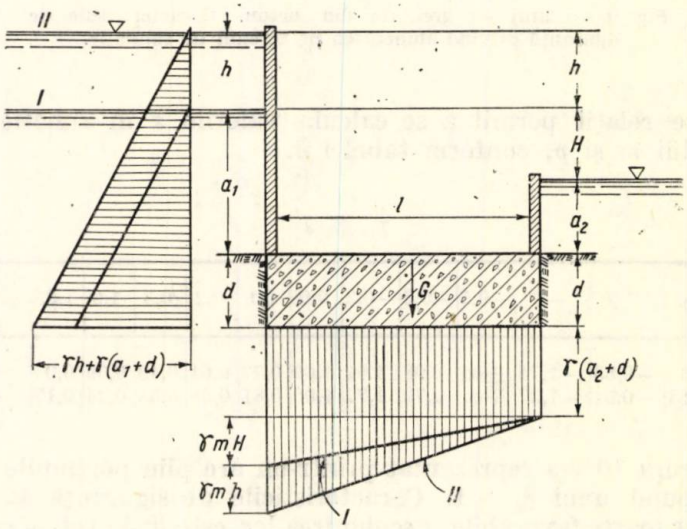


Fig. 11. — Schema infrastructurii unui baraj fluvial mobil, cu diagrame de presiuni în ipoteza canalului între pile secat.

dourile din amonte și din aval sînt închise, iar apa între pile este evacuată în scop de reparații; factorul de reducere a subpresiunilor se ia

$m \leqslant 1$. Pentru stabilitatea la alunecare (echilibru la limită) trebuie ca în primul stadiu

$$\frac{P_0}{G - A_0} = \frac{f_0}{c_0}, \tag{37}$$

în care

$$G - A_0 = \gamma_b d\, l - \gamma \left(a_2 + d + \frac{mH}{2} \right) l,$$

f_0 este coeficientul de frecare-limită între terenul de fundație și beton sau coeficientul de frecare internă a terenului,

c_0 — coeficient de siguranță, cuprins, de exemplu, între 1,5 și 2.

Din relațiile (37) se obține

$$c_0 = \frac{f_0 (G - A_0)}{P_0}. \tag{38}$$

În stadiul 2 al calculului, cînd nivelul din amonte a crescut cu cantitatea h, se realizează un coeficient de siguranță $c < c_0$ datorită noilor forțe, astfel că

$$c = f_0 \frac{G - A}{P},$$

în care $P = \gamma (H + h)\, d$ și

$$A = \gamma (a_2 + d)\, l + \frac{\gamma m (H + h)}{2} l = \gamma \left[a_2 + d + m \frac{H + h}{2} \right] l. \tag{39}$$

Indicele de suprasarcină relativă este definit prin $p = \frac{h}{H}$. Indicele de siguranță relativă va fi

$$s = \frac{c}{c_0} = \frac{P_0 (G - A)}{P (G - A_0)}$$

sau, ținînd seama de relațiile anterioare,

$$s = \frac{1}{1 + p} \frac{\gamma_b d - \gamma a_2 - \gamma \left[d + \frac{m}{2} H (1 + p) \right]}{\gamma_b d - \gamma a_2 - \gamma \left(d + \frac{m}{2} H \right)}. \tag{40}$$

Observăm că s nu depinde de lungimea radierului, deci, dacă numitorul fracțiunii (40) este nul, adică grosimea $d = d_{\text{critică}}$:

$$d_{cr} = \frac{a_2 + mH/2}{\gamma_b - \gamma},$$

s devine $\pm \infty$ pentru p pozitiv, ceea ce e absurd, dar pentru $p = 0$, $s = 1$ și $s = \frac{0}{0}$.

Aceeaşi grosime critică corespunde şi limitei de plutire a radierului cînd greutatea este echilibrată de subpresiune [9]. Relaţia (40) exprimă familiile de curbe caracteristice de siguranţă la alunecare care se pot pune şi sub forma

$$s = \frac{1}{1+p}\left[1 - \frac{mp}{2\left(\frac{\gamma_b}{\gamma} - 1\right)\frac{d}{H} - \left(\frac{2a_2}{H} + m\right)}\right] \qquad (40')$$

Şi în acest caz caracteristicile de siguranţă sînt arce de hiperbolă cuprinse între $s = 1$ şi $s = 0$.

Ca exemplu numeric se va considera $m = 0{,}5$, $\gamma_b = 2{,}3$, $H = 8$ m, $a_2 = 3$ m şi d parametru de sensibilitate la suprasarcina relativă p. Relaţia (40′) devine în acest caz

$$s = \frac{1}{1+p}\left[1 - \frac{0{,}5\,p}{0{,}325\,d - 1{,}25}\right]. \qquad (40'')$$

Pentru valorile lui d din tabela 5 se obţin pentru s formule particulare, din care rezultă valorile lui p pentru care $s = 0$.

Tabela 5

d	3,83	4	5	6	7	8
s	$-\infty$	$\frac{1-10\,p}{1+p}$	$\frac{1-1{,}33\,p}{1+p}$	$\frac{1-0{,}71\,p}{1+p}$	$\frac{1-0{,}49\,p}{1+p}$	$\frac{1-0{,}37\,p}{1+p}$
$s = 0$ pt. $p =$		0,100	0,750	1,401	2,055	2,700

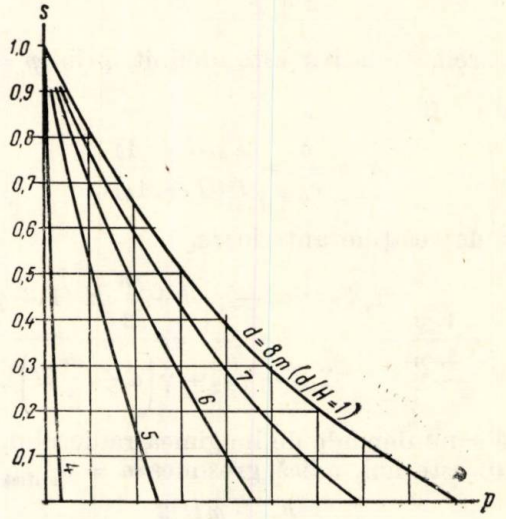


Fig. 12. — Caracteristica de siguranţă a infrastructurii unui baraj fluvial.

Rezultă că pentru valori ale lui d mai mici ca 4 m, suprasarcina relativă p ia valori foarte mici, pe cînd pentru $d > 5$ structura poate să suporte suprasarcini din ce în ce mai mari.

În cazul general (relaţia 40′) s-ar putea lua ca indici de sensibilitate $\frac{d}{H}$, $\frac{a_2}{H}$ şi m şi studia pentru variaţia fiecăruia comportarea structurii la suprasarcină. În exemplul precedent s-a studiat numai efectul variaţiei primului indice $\frac{d}{H}$, cu înălţimea H dată şi egală cu 8 m.

5. *Linii electrice aeriene pentru curenţi intenşi*

Se consideră un conductor aerian de secţiune ω [mm²] suspendat la acelaşi nivel de doi suporţi, avînd ca deschidere lungimea a [m]. Fie

g [kg/m¹ · mm²] — greutatea specifică proprie raportată la secţiunea cablului;

j_0 [kg/m¹ · mm²] — sarcina adiţională (chiciură, vînt) specifică, raportată la secţiunea cablului, conform cu prescripţiile;

$j = j_0 + \Delta j$ „ — sarcina adiţională, inclusiv suprasarcina Δj, care depăşeşte sarcina prescrisă;

R [kg/mm²] — rezistenţa de rupere mecanică a materialului;

β [mm²/kg] — inversul modulului de elasticitate al conductorului;

α — coeficient de dilataţie termică;

t_0, t — temperatura, în grade Celsius, la două stări diferite: t_0 la starea-limită prevăzută de prescripţii şi t în caz de supraîncărcare;

σ_0 şi c_0 — efort interior unitar şi coeficient de siguranţă corespunzînd sarcinii totale $(g + j_0)$ prescrisă;

σ şi c — efort interior unitar şi coeficient de siguranţă corespunzînd sarcinii totale $g + p + \Delta j$;

$p = \frac{\Delta j}{j_0}$ — suprasarcina relativă;

$s = \frac{c}{c_0} = \frac{\sigma_0}{\sigma}$ — indice de siguranţă relativă.

Se va admite $t_0 = t = 0°C$, starea fizică la care se formează îndeosebi poleiul dens. Sarcinile specifice totale în cele două cazuri sînt respectiv:

$$g + j_0 \quad \text{şi} \quad g + (1 + p)\, j_0. \tag{41}$$

Cele două stări de echilibru ale conductoarelor sînt legate prin relaţia

$$\sigma_0 - \frac{a^2 (g + j_0)^2}{24\, \beta \sigma_0^2} = \sigma - \frac{a^2 [g + (1 + p)\, j_0]^2}{24\, \beta \sigma^2} \tag{42}$$

(s-a presupus că forma luată de cablu este o parabolă, foarte apropiată de lănţişor). Punînd

$$\mu = \frac{j_0}{g} \quad \text{şi} \quad K = \frac{24 \beta \sigma_0^3}{(g + j_0)^2 a^2}, \tag{43}$$

se obţine din ecuaţia (42) relaţia (44), care reprezintă caracteristica de siguranţă a structurii :

$$1 + \frac{\mu p}{1 + \mu} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{s(1-K)+K}{a}}. \qquad (44)$$

Din comparaţia relaţiei (44) cu relaţia (8), pusă sub forma

$$1 + \frac{\mu p}{1 + \mu} = \frac{1}{s},$$

se constată că, în cazul conductorului suspendat, caracteristica de siguranţă este reprezentabilă printr-o curbă de ordinul 4, iar indicii de sensibilitate μ şi K depind ei înşişi de mai multe mărimi geometrice şi mecanice (a, σ_0, β, g).

În acest caz, suprapunerea efectelor nu se mai poate aplica, deoarece : a) conductorul este foarte deformabil sub sarcină şi la variaţiile de tem-

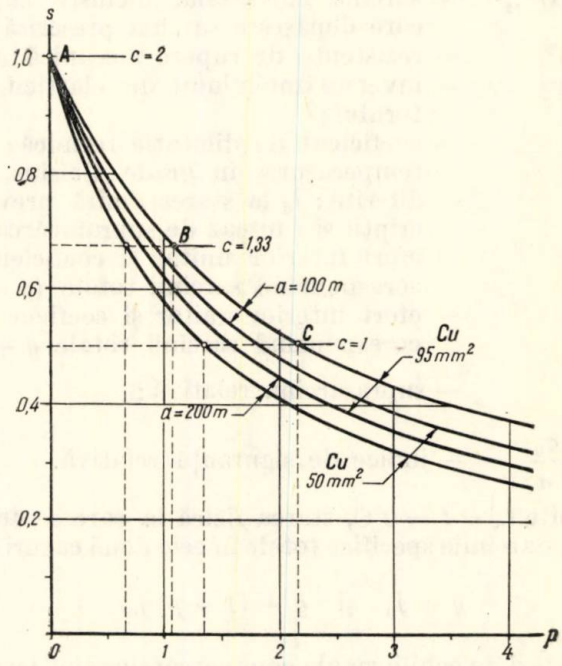


Fig. 13. — Caracteristici de siguranţă a conductorilor liniilor aeriene funcţie de suporţi şi de secţiunea conductorului.

peratură şi nu-şi păstrează o formă geometrică neschimbată ; b) materialele folosite pentru conductorii electrici nu posedă, ca oţelul moale, o zonă de deformaţie proporţională cu efortul. De aceea şi forma caracteristică de siguranţă este mult mai complicată şi indicii de sensibilitate mai numeroşi.

În figura 13 sînt figurate ambele caracteristici de siguranţă pentru linii aeriene cu conductori de cupru electrolitic de 50 şi 120 mm ^{2} secţiune

şi deschideri de 100 şi 200 m lungime. Calculul s-a făcut după normele româneşti din 1964 pentru L.A.E., care prevăd o sarcină de polei în strat inelar de 2 cm grosime, de greutate specifică 900 kg/m ^{3} şi, simultan, cu vînt de 20 m/s, echivalent cu o presiune de 30 kg/m ^{2} pe secţiunea bătută normal, iar rezistenţa la rupere de circa 40 kg/mm^2.

Se observă că parametrul K se poate pune sub forma cîtului:

$$\frac{3\beta\sigma_0^2}{(g+j_0)} : \frac{(g+j_0)\,a^2}{8\sigma_0} = \text{prop.}\frac{f_{el}}{f_c},$$

care exprimă raportul dintre săgeata f_{el} a cablului rezultînd din deformaţiile elastice şi săgeata f_c a cablului, considerat absolut flexibil şi inextensibil.

Din examinarea curbelor (fig. 12) se observă, ca exemple de comportare a diferiţilor conductori, că pentru a face ca indicele de siguranţă relativă să scoboare la 0,66 trebuie ca indicele de suprasarcină relativă să ia valorile lui p din tabela 6:

Tabela 6

Deschidere m	Secţiunea mm^2	$p = \frac{\Delta j}{j_0}$
200	50	0,68
200	95	0,76
100	50	0,86
100	95	1,06

În concluzie, cablul rezistă cu atît mai mult la suprasarcini peste cele prescrise, cu cît deschiderile sînt mai mici şi secţiunile mai mari. Autorul obţinuse rezultate similare cu ocazia unui studiu prezentat la C.I.G.R.E. [2].

IV. CONCLUZII

Dat fiind că forţele nepermanente mobile şi accidentale care solicită structurile nu sînt îndeajuns cunoscute şi că pot să întreacă uneori valorile maxime normate, autorul şi-a propus să studieze comportarea diferitelor tipuri de elemente de structură şi de construcţii supuse la suprasarcini neprevăzute. Comparînd stadiul I de calcul, cînd solicitările ating maximele reglementare, cu stadiul II al ipotezei solicitărilor suplimentare, s-au stabilit relaţii între *indicele de siguranţă relativă s* şi *indicele de suprasarcină relativă p*, ţinînd seama şi de unii *parametri de sensibilitate la suprasarcină*, de natură geometrică (lungimi, secţiuni) sau mecanică, cel mai important fiind raportul $\mu = P/G$ dintre rezultanta forţelor nepermanente şi a celor permanente care acţionează în secţiune.

Curbele reprezentative ale acestor relaţii sînt hiperbole dacă solicitările şi structurile sînt simple şi sînt de ordin superior dacă intervin condiţii complexe şi dacă nu este aplicabilă suprapunerea efectelor.

Parametrii de sensibilitate la suprasarcină joacă roluri importante, făcînd ca aceleaşi structuri supuse la sisteme de forţe similare să se comporte foarte diferenţiat, în funcţie de mărimea parametrilor de sensibilitate.

Structurile clădirilor moderne, avînd greutate proprie relativ mică, sînt mai sensibile ca structurile masive pentru aceeaşi suprasarcină relativă.

Proiectantul este avizat să examineze rezerve de siguranţă în cazul de suprasarcini neprevăzute de regulamente şi să stabilească măsurile de luat în consecinţă.

Caracteristicile de siguranţă ar putea fi folosite ca îndreptar la revizia prescripţiilor, la alegerea rezistenţelor admisibile, la evaluarea comportării structurii în apropierea stărilor-limită, la abordarea studiului structurilor noi pentru care există o experienţă redusă, la verificarea construcţiilor existente [5], [6], [8].

Primită la redacţie la 4 ianuarie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. Max Mayer *Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkräften anstatt nach zulässigen Spannungen*, Springer Verlag, Berlin, 1926.
2. C. Mateescu, *A contribution to the unification of methods of calculation relating to supports and conductors for overhead lines*, Intern. Conf. on large Electric Systems (C.I.G.R.E.), Paris, 1929, Rapport no. 8.
3. — *Résistance des constructions chargées au-delà des prescriptions réglementaires*, Bull. de l'Ec. Polytechnique de Bucarest, **XII**, *1—2*, 94 — 103 (1942).
4. M. Prot, R. Lévy, *Conceptions modernes relatives à la sécurité des constructions*, Rev. Gén. de Ch., de Fer, juin, 1951.
5. M. Keldysch, *Berechnung von Baukonstruktionen nach den Grenzbeanspruchungem*, VEB, Verlag Technik, Berlin, 1953.
6. A. N. Freundenthal, *Safety and Probability of Structural Failure*, Transactions ASCE, **121**, 2843 (1956).
7. N. Nicolau, C. Ionescu ş.a., *Introducere în teoria betonului*, vol. II, Bucureşti, 1957.
8. C. Meteescu, *Consideraţii critice asupra calculului barajelor de beton*, Hidrotehnica, **3**, *9*, 325 — 344 (1959).
9. — *Dimensionarea economică a infrastructurilor barajelor fluviale*, Hidrotehnica, **5**, *3*, 73—80, (1960).
10. E. Constantinescu, N. Berza, *The determination of the Economic Safety Factors for Overhead Electric Lines*, GIGRE, Paris, Session 1960, 15—25 juin.
11. C. Mateescu, *Aspecte ale siguranţei de funcţionare a marilor baraje*, Hidrotehnica, gospodărirea apelor, meteorologia, **9**, *1*, 1—6 (1964).

CADRE DUBLU ÎNCASTRATE DIN BETON ARMAT ÎN STADIUL PLASTIC *)

CONSTANTIN AVRAM **), OVIDIU MÎRŞU **), CORNELIU BOB **)

Se prezintă studiul teoretic şi încercarea pînă la rupere a nouă cadre dublu încastrate supuse la diferite scheme de încărcare. S-a urmărit comportarea articulaţiilor plastice la încovoiere şi la compresiune excentrică.

Prezentul articol conţine studiile teoretice şi experimentale privind comportarea cadrelor dublu încastrate din beton armat în domeniul plastic (apariţia succesivă a articulaţiilor plastice, starea-limită a structurii, rotaţiile-limită ale articulaţiilor plastice, efectul excentricităţii efortului normal etc.).

1. *Programul încercărilor.* S-au proiectat şi încercat pînă la rupere trei serii a trei cadre dublu încastrate din beton armat, a căror carac-

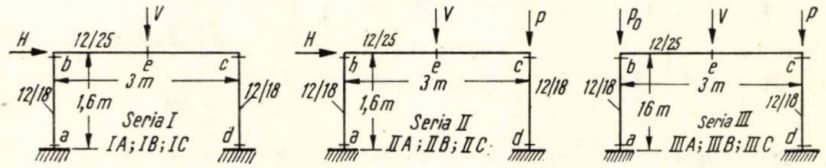


Fig. 1. — Schemele de încărcare ale cadrelor.

teristici geometrice şi scheme de încărcare sînt date în figura 1. Desenul de execuţie al cadrului este dat în figura 2.

Caracteristicile mecanice ale materialelor folosite sînt date în tabela 1 (rezistenţa la compresiune cubică R_b, rezistenţa la compresiune prismatică

*) Publicată în Rev. Roum. Sci. Techn.-Mécanique Appliquée, **11**, *3* (1966).
**) Institutul politehnic din Timişoara.

R_{pr}, rezistența la compresiune din încovoiere $R_i = 1{,}25$, R_{pr}, rezistența la întindere R_t, modulul de elasticitate pentru beton E_b; limita de curgere σ_c și de rupere σ_r pentru oțel).

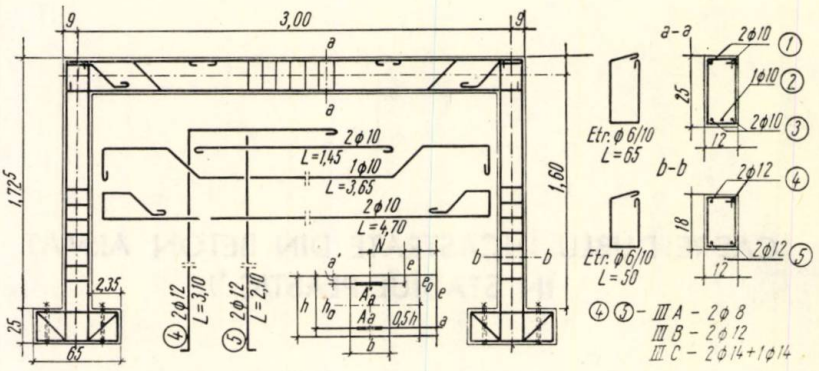


Fig. 2. — Armarea cadrelor.

Încărcările au fost aplicate în fracțiuni de 10—5% din încărcarea teoretică de rupere, la intervale de 10—15 min. Au fost determinate: deformațiile specifice ale betonului și ale armăturii, apariția și deschiderea fisurilor, deplasările orizontale și săgețile, ordinea de apariție și rotațiile articulațiilor plastice, formarea mecanismului de rupere în funcție de încărcările aplicate.

Tabela 1

Caracteristicile mecanice ale betonului și oțelului

Seria	Beton (kgf/cm²)					Oțel (kgf/cm²)		
	R_b	R_{pr}	R_i	R_t	E_b	Φ mm	σ_c	σ_r
I	260	185*)	230*)	27,0	295 000*)	10 12	2 890 2 990	4 210 4 100
II	210	140	175*)	17,4	270 000	10 12	2 580 2 700	3 930 4 300
III	380	266	332*)	30,2	335 000	8 10 12	2 800 2 700 2 810	4 200 4 220 4 800

*) Valori teoretice.

2. *Considerații teoretice.* Pentru încercările efectuate s-au calculat următoarele valori teoretice:

— momentele încovoietoare *plastice* M_p în stadiul II după teoria lui Murașev [6], cu $\sigma_a = \sigma_c$ și $\sigma_b < R_i$;

— momentele încovoietoare de *rupere* M_r în stadiul III, cu $\sigma_a = \sigma_c$ și $\sigma_b = R_i$;

— lungimile l_p și rotațiile-limită Θ ale articulațiilor plastice după Baker [4] și Petcu [7];

— încărcările caracteristice V_1^{te}, V_2^{te} . . ., la apariţia primei, a doua,. . ., articulaţii plastice, după teoria elastică (calculul biografic);

— încărcările caracteristice limită în momentul formării mecanismului final după calculul biografic (V_m^{te}) şi calculul plastic (V_m^{tp}).

Pentru încovoierea simplă avem

$$M_p = \left[(1 - 0{,}5\,\zeta_p) + \frac{\zeta_p - \delta'}{1 - \zeta_p}(0{,}5\,\zeta_p - \delta')\frac{\mu'}{\mu}\right] h_0 A_a \sigma_c, \tag{1}$$

unde înălţimea relativă a zonei comprimate are valoarea

$$\zeta_p = \frac{x_p}{h_0} = -\frac{\alpha + \alpha'}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha+\alpha')^2}{4} + \alpha + \alpha'\delta'}, \tag{2}$$

cu

$$n = \frac{E_a}{E_b};\quad \mu = \frac{A_a}{bh_0};\quad \mu' = \frac{A'_a}{bh_0};\quad \alpha = 3n\mu;\quad \alpha' = 3n\mu';\quad \delta' = \frac{a'}{h_0}. \tag{3}$$

De asemenea, pentru compresiunea excentrică, în cazul micii excentricităţi avem

$$M_p = M_r = [0{,}4\,bh_0^2 R_i + A'_a \sigma_c (h_0 - a')]\frac{e_0}{e}, \tag{4}$$

iar în cazul marii excentricităţi

$$M_p = N_p \cdot e_0 = \frac{\sigma_c A_a(1 - 0{,}5\,\zeta_p) + \sigma_c A'_a \dfrac{\zeta_p - \delta'}{1 - \zeta_p}(0{,}5\,\zeta_p - \delta')}{c - 1 + 0{,}5\,\zeta_p} \cdot e_0, \tag{5}$$

în care ζ_p este dat de ecuaţia

$$\zeta_p^3 + 2(c - 1)\zeta_p^2 + 2(c\alpha + c'\alpha')\zeta_p - 2(c\alpha' + \delta' c'\alpha') = 0, \tag{6}$$

cu

$$c = \frac{e}{h_0};\quad c' = \frac{e'}{h_0} = c - 1 + \delta'. \tag{7}$$

Momentele încovoietoare teoretice M_p şi M_r sînt date în tabela 2.

Încărcările caracteristice teoretice şi ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice a fost determinată analitic pentru seria I; mecanismele realizate sînt date în figura 3. Pentru celelalte două serii, problema este mai complicată, deoarece momentele M_p în stîlpi — supuşi la compresiune excentrică — sînt funcţie de excentricitatea e_0 (ecuaţiile (4), (5) şi (6)); aceasta rămîne constantă pînă la apariţia primei articulaţii plastice, după care variază în funcţie de V conform ecuaţiei

$$e_0 = \frac{M}{N} = \varphi - \frac{\psi}{V}, \tag{8}$$

unde φ şi ψ au valori constante în intervalele cuprinse între două articulaţii plastice succesive (fig. 4).

Tabela 2

Momentele plastice și de rupere a secțiunilor critice

Cadrul	Secțiunea	b cm	h cm	h_0 cm	$\mu\% = \frac{100\,A_a}{bh_0}$	$\varepsilon_0 = \frac{e_0}{h}$	M_p kgfm	M_r kgfm
IA	*b*	12,1	18,0	15,3	1,22	—	895	950
	e	12,1	25,0	23,4	0,84	—	1 275	1 510
	c	12,4	18,0	15,3	1,22	—	890	950
	d	12,0	18,0	13,6	1,38	—	793	835
IB	*a*	12,1	17,9	15,6	1,20	—	915	960
	e	12,3	24,7	21,3	0,90	—	1 200	1 370
	c	12,3	18,0	15,3	1,20	—	895	955
	d	12,1	18,1	15,3	1,22	—	895	950
IC	*a*	12,0	17,9	14,1	1,34	—	823	870
	b	11,9	18,0	15,4	1,23	—	901	954
	c	12,3	17,9	15,3	1,20	—	875	952
	d	12,2	18,0	14,1	1,31	—	825	870
IIA	*b*	12,1	18,0	14,8	1,26	—	728	816
	e	12,3	24,9	20,8	0,92	—	1 030	1 180
	e	12,7	17,5	15,2	1,21	1,91	845	1 000
IIB	*b*	12,3	17,7	14,4	1,28	—	697	796
	e	12,0	24,8	22,3	0,88	—	1 110	1 275
	c	12,5	18,0	15,4	1,18	0,94	1 020	1 200
IIC	*b*	12,4	17,8	14,1	1,29	—	695	774
	e	12,0	24,4	21,4	0,92	—	1 055	1 210
	c	12,5	17,6	14,7	1,23	0,52	1 320	1 550
IIIA	*b*	12,2	17,5	15,6	0,53	0,62	805	1 200
	e	12,6	25,3	23,5	0,80	—	1 260	1 450
	c	12,3	18,2	15,8	0,52	1,13	550	695
IIIB	*b*	12,1	18,1	15,8	1,18	0,38	2 450	2 450
	e	12,0	25,0	23,2	0,85	—	1 240	1 440
	c	11,9	18,0	15,9	1,20	0,88	1 270	1 710

Notă. Valorile ε_0 și M_p sînt calculate pentru momentul de apariție a articulațiilor plastice în secțiunile respective.

Valorile excentricității e_0 la apariția articulațiilor plastice, cu care s-a efectuat calculul biografic și plastic, au fost determinate experimental; momentele plastice M_p scad cînd excentricitatea e_0 crește și invers (fig. 4 și 5 [8]).

În figura 5 este dată variația momentelor plastice cu încărcarea la cadrul III A. În sistemul de coordonate $M-V$ s-au introdus valorile momentelor plastice la formarea articulațiilor plastice, calculate pe baza excentricității experimentale, admițîndu-se între două valori consecutive o variație liniară. Totodată s-a trasat variația momentelor de încovoiere funcție de încărcare ca pentru un sistem elastic. La intersecția dreptei momentului încovoietor M_e din secțiunea e cu dreapta momentului plastic M_{pe} s-a obținut încărcarea V_1^{te} de formare a primei articulații plastice. În continuare, sistemul static se modifică, iar dreptele care dau variația momentelor încovoietoare în secțiunile b și c își schimbă panta. În același timp, datorită modificării excentricității, se modifică și legea de variație a momentului plastic. Admițînd aceeași variație liniară ca și

a momentului de plastificare dedus din datele experimentale, se poate determina încărcarea de formare a celei de-a doua articulații plastice (secțiunea *c*). Se procedează analog pentru celelalte articulații plastice pînă ce sistemul se transformă în mecanism.

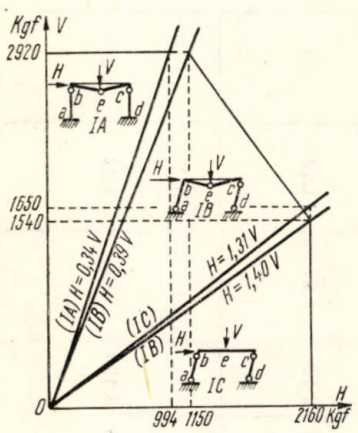


Fig. 3. — Diagrama de colaps a cadrelor din seria I.

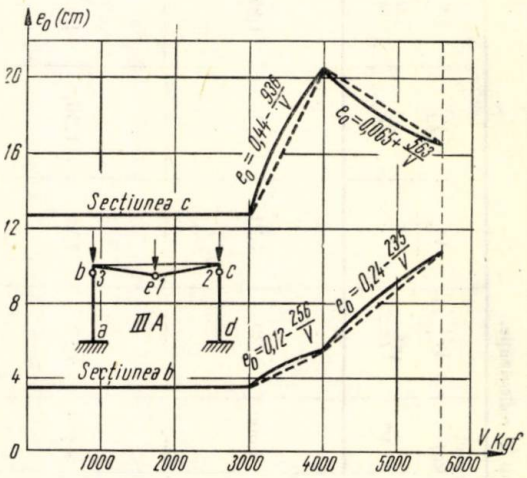


Fig. 4. — Diagrama de variație a excentricităților în funcție de V (cadrul III A).

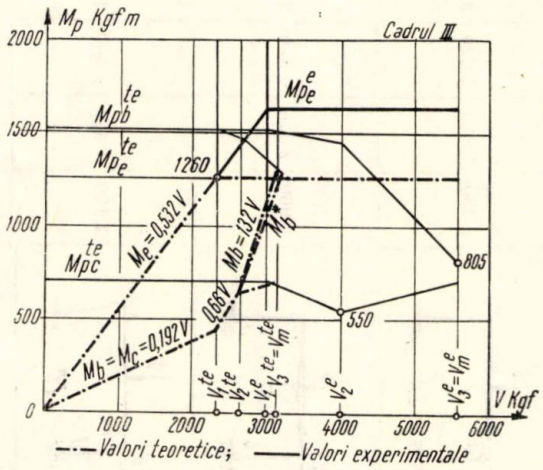
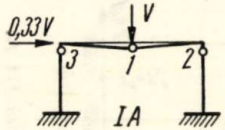
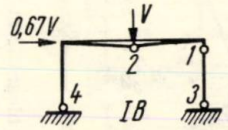
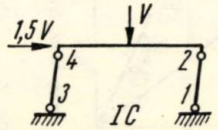
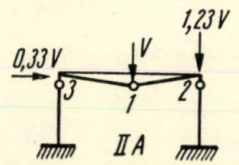


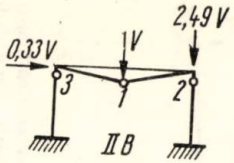
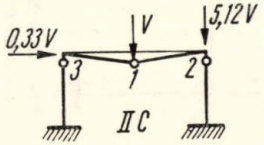
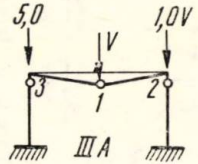
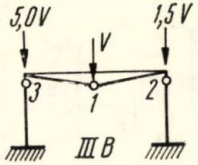
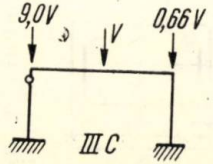
Fig. 5. — Calculul biografic al cadrului III A.

După formarea articulațiilor plastice, momentele de plastificare nu rămîn constante. Pentru secțiunile cu procente obișnuite de armare supuse la încovoiere simplă există diferențe între momentele de rupere și cele plastice, care scad cu creșterea procentului de armare. În calculul plastic al cadrelor am presupus o comportare ideală a articulațiilor (M_p —

Tabela 3

Încărcări caracteristice și coeficienți de redistribuție.

Cadrul	Mecanismul	Încărcări caract. teoretice kgf			Încărcări caract. experim. kgf			$\frac{V_m^{te}}{V_l^{te}}$	$\frac{V_m^e}{V_l^e}$	$\frac{V_l^e}{V_l^{te}}$	$\frac{V_m^e}{V_m^{te}}$	$\frac{V_r^e}{V_m^{te}}$
		V_l^{te}	V_m^{te}	V_m^{tp}	V_l^e	V_m^e	V_r^e					
IA		2 430	2 914	2 920	3 311	4 000	4 000	1,20	1,21	1,36	1,37	1,37
IB		1 960	2 328	2 330	2 550	3 300	3 450	1,19	1,29	1,30	1,42	1,48
IC		1 160	1 471	1 400	1 820	2 160	2 160	1,27	1,19	1,57	1,47	1,47
IIA		1 940	2 425	2 420	2 340	3 120	3 120	1,25	1,33	1,20	1,28	1,28

IIB		2 090	2 626	2 620	2 550	3 300	3 600	1,26	1,29	1,22	1,26	1,37
IIC		1 990	2 755	2 750	2 550	3 450	3 600	1,38	1,35	1,28	1,25	1,31
IIIA		2 350	3 150	3 230	3 000	5 600	5 600	1,34	1,87	1,28	1,78	1,78
IIIB		2 400	4 550	4 300	4 400	6 400	6 400	1,89	1,45	1,83	1,41	1,41
IIIC		2 350	—	—	—	—	3 400	—	—	—	—	—

const), ceea ce este acoperitor, secțiunea de beton armat avînd rezerve neglijate în calcul.

Secțiunile supuse compresiunii excentrice cu mare excentricitate se comportă diferit față de cele încovoiate. Pentru a urmări variația excentricității și a momentului de plastificare în secțiunea c, am presupus că poziția axei neutre rămîne constantă după formarea articulației plastice, iar creșterea momentului interior datorită măririi efortului în armătura comprimată este neglijată. Creșterea momentului încovoietor în secțiunea c (fig. 6) s-a calculat scriind ecuația de momente în raport cu centrul de greutate al ariei betonului comprimat. În momentul formării articulației plastice (stadiul IIa) avem

$$M_p - nV_p\,(0{,}5\,h - 0{,}5\,x_p) = \sigma_c A_a\,(h_0 - 0{,}5\,x_p) + \sigma'_a A'_a (0{,}5\,x_p - a'). \quad (9)$$

La o creștere oarecare ΔV a încărcării, relația devine

$$M_p + \Delta M_p - n\,(V_p + \Delta V)\,(0{,}5\,h - 0{,}5\,x_p) = \sigma_c A_a\,(h_0 - 0{,}5\,x_p) + \\ + \sigma'_{a_1} A'_a\,(0{,}5\,x_p - a'). \quad (10)$$

Cum membrii drepți ai relațiilor (9) și (10) sînt aceiași, conform ipotezelor admise va rezulta

$$\Delta M_p - n\,\Delta V\,(0{,}5\,h - 0{,}5\,x_p) = 0. \quad (11)$$

Notînd

$$\rho = (0{,}5\,h - 0{,}5\,x_p) \text{ și } \nu = n\rho,$$

rezultă

$$\Delta M_p = \nu\,\Delta V, \quad (12)$$

$$M = M_p + \nu\,\Delta V, \quad (13)$$

$$e_0 = \frac{M_p + \nu\,\Delta V}{nV}. \quad (14)$$

Creșterea momentului în articulația plastică din secțiunea c face ca redistribuția eforturilor spre secțiunea b să fie mai mică decît în

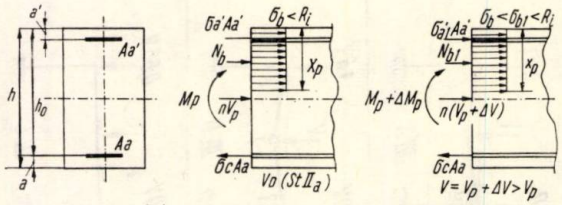


Fig. 6. — Distribuția eforturilor interioare în secțiunea c a cadrului III A la formarea articulației plastice și la creșterea încărcării.

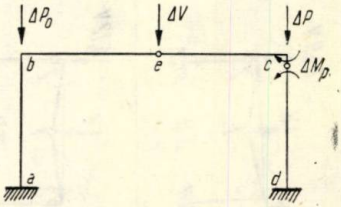


Fig. 7. — Schema statică folosită la corectarea valorii momentului în secțiunea b a cadrului III A.

cazul considerării unei articulații ideale în c. Calculul momentului elastic care apare în secțiunea b s-a făcut considerînd că în sistemul odată static nedeterminat acționează, în afară de încărcarea existentă, și creșterea momentului în c (fig. 7).

În figura 5 s-a trasat variația momentelor reprezentînd atît comportarea ideală a articulației în secțiunea c (M_b), cît și cea care ține seama de creșterea momentului în c (M^*_b).

3. Interpretarea rezultatelor. Încărcările H, P, P_0 au crescut proporțional cu V pînă la formarea mecanismului final și ruperea structurii; succesiunea apariției articulațiilor plastice confirmă calculul biografic (tabela 3, coloana 2).

Încărcările caracteristice experimentale la apariția primei articulații (V^e_1), la formarea mecanismului final (V^e_m) și la rupere (V^e_r), ca și coeficienții de redistribuție (V_m/V_1), sînt dați în tabela 3.

Rezerva de rezistență plastică experimentală a structurii este cuprinsă între 19 și 45% (exceptînd cadrul III A); cadrul III C a cedat prin strivirea directă a betonului în nodul b.

Rezerva teoretică de rezistență este de același ordin de mărime (19—38%), însă încărcările experimentale V^e sînt totdeauna mai mari decît aceleași valori teoretice V^t. Diferențele se datoresc simplificărilor admise în calcul; ele măresc coeficientul de siguranță al structurii.

Valorile experimentale ale rotirilor articulațiilor plastice supuse la încovoiere sînt mai mari decît valorile-limită teoretice, deși măsurătorile nu au fost duse pînă la distrugerea articulațiilor (tabela 4).

Tabela 4

Rotațiile – limită ale articulațiilor plastice (10^{-3} rad.)

Cadrul	Secțiunea	Valori teoretice		Valori experimentale
		Baker	Petcu	
IA	e	16,80	23,50	23,40*)
IB	e	17,50	22,10	35,60
IC	c	6,54	5,50	5,65*)
IIA	e	15,85	16,10	27,50
IIB	e	15,40	16,00	15,20*)
IIC	e	14,90	14,60	22,10
IIIA	e	23,50	38,2	13,22*)
IIIB	e	18,00	25,4	11,71*)

*) Măsurătorile au fost oprite înaintea formării mecanismului.

Figura 8 arată o vedere parțială a cadrului II C pregătit pentru încercare, figura 9 mecanismul final al cadrului II C, iar figurile 10, 11 și 12 detalii cu montarea aparaturii și cu dezvoltarea unor articulații plastice.

4. Concluzii. Studiul teoretic și experimental privind comportarea cadrelor dublu încastrate din beton armat sub acțiunea încărcărilor statice de scurtă durată a pus în evidență comportarea plastică a acestor structuri și redistribuția eforturilor care rezultă, cum și rezervele de rezistență ale calculului plastic în raport cu calculul elastic.

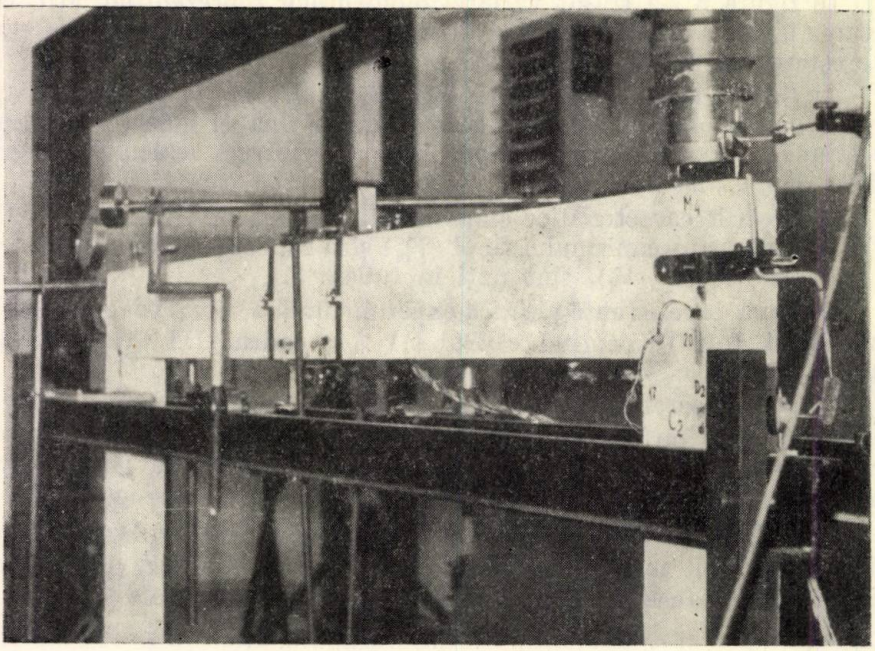


Fig. 8. — Vedere parțială a încărcării cadrului II A.

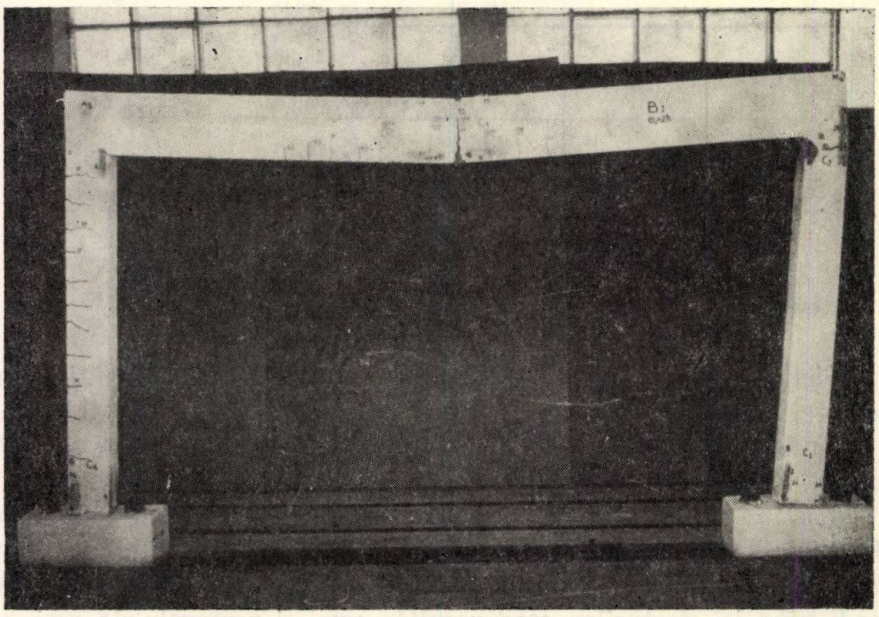


Fig. 9. — Mecanismul final al cadrului II A.

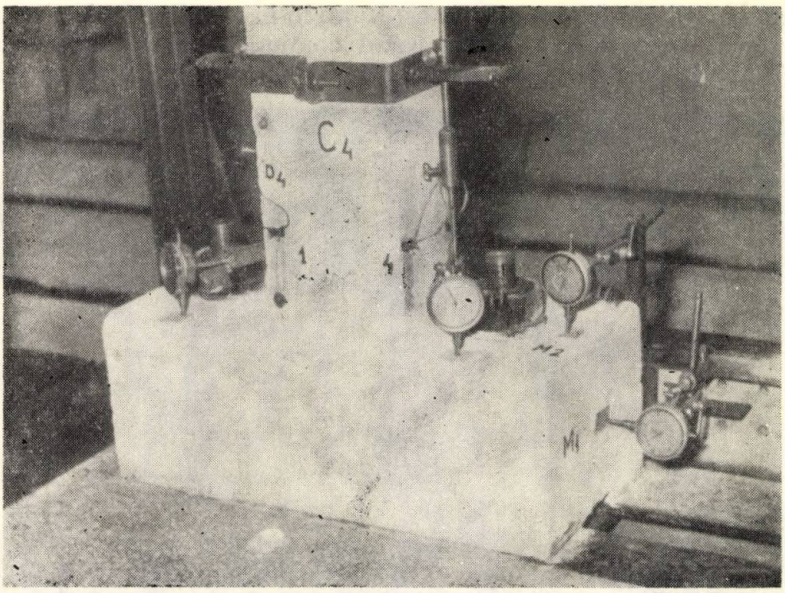


Fig. 10. — Nodul *a* (seria II).

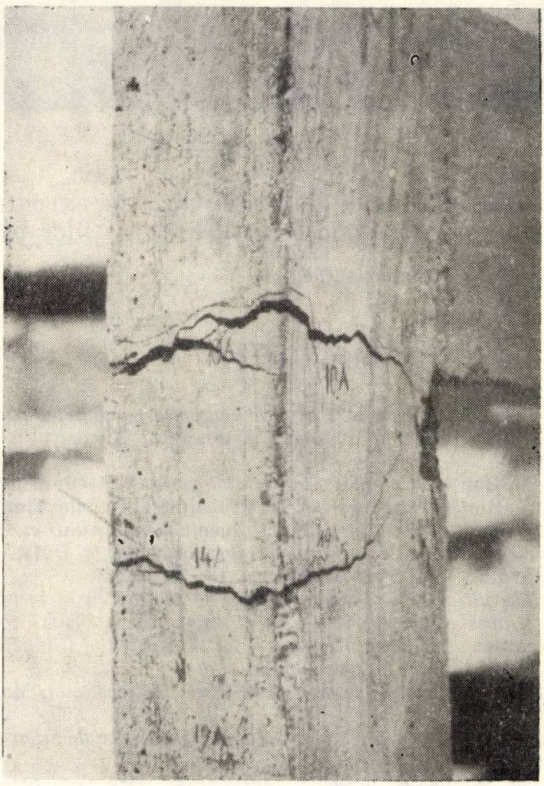


Fig. 11. — Nodul *b* (seria I).

Calculul biografic sau plastic este simplu în cazul articulațiilor supuse la încovoiere ($e_0/h \geqslant 3 \ldots 4$). În cazul compresiunii excentrice, calculul necesită simplificări deduse dintr-un număr mare de încercări, din cauza

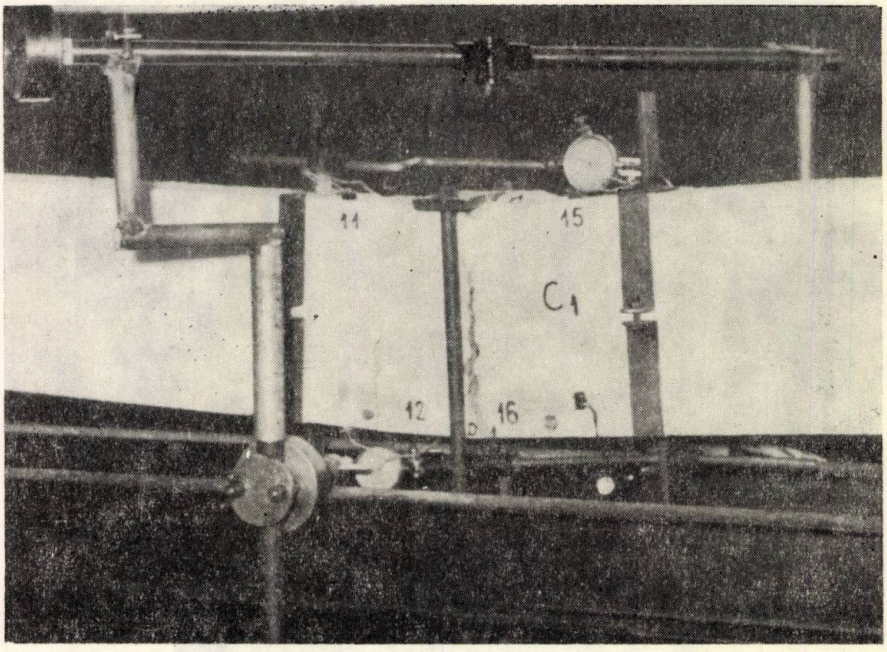


Fig. 12. — Nodul *e* (seria II).

modificării momentelor plastice datorită variației excentricității efortului normal ca urmare a apariției succesive a articulațiilor plastice.

Primită la redacție la 4 ianuarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Avram C., Mîrșu O., Bob C., *Încercări privind comportarea cadrelor portal de beton armat în stadiul plastic*, Buletinul științific și tehnic al Institutului politehnic Timișoara, **8**, *2* (1963).
2. Avram C., Mîrșu O., Bob C., *Comportarea cadrelor portal de beton armat în domeniul plastic*, Buletinul științific și tehnic al Institutului politehnic Timișoara, **9**, *2* (1964).
3. Avram C., Mîrșu O., Bob C., Friedrich R., *Influența compresiunii excentrice asupra comportării cadrelor portal de beton armat în domeniul plastic*, Buletinul științific și tehnic al Institutului politehnic Timișoara, **10**, *1* (1965).
4. Baker A. L. L., *The ultimate load theory applied to the design of reinforced and prestressed concrete frames*, Concrets Series, Londra, 1956.
5. * * * *Ultimate load design of concrete structures. The Institution of Civil Engineers*, Proceedings February 1962, volume 21, Anglia.
6. Murașev V. I., *Trescinoustoicivosti, jestkosti i procinosti jelezobetona*, Masstroiizdat, Moscova, 1950.
7. Petcu V., *Articulația plastică în calculul plastic al structurilor de beton armat*, St. cerc. mec. apl. **8**, *1* (1963).
8. Ryzynsky A., *Praca zelbetowego przegubu plastycznego sciskanego przy duzym mimosrodzie*, Archiwum Inzynierii Ladowej, t. **X**, *2*, (1964).

CONSIDERAȚII ASUPRA UNEI TEORII A PLĂCILOR*)

C. STĂNESCU

Centrul de mecanica solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Teoria plăcilor curbe, care nu se bazează pe ipoteza clasică Love-Kirchhoff, a căpătat în ultima vreme o extindere considerabilă, ea constituind obiectul a numeroase cercetări.
Într-o lucrare publicată recent [1], L. Librescu formulează o teorie a plăcilor curbe elastice omogene și anizotrope. În particular, teoria expusă se aplică și la plăcile plane, iar în ultima parte a lucrării tratează și acest caz.
În nota de față vom face o serie de observații cu privire la teoria propusă, precum și la posibilitățile ei de aplicare. Considerăm însă că este util să expunem la început, în mod succint, această teorie pentru o înțelegere mai clară a observațiilor pe care le vom formula.

I. EXPUNERE SUCCINTĂ A TEORIEI [1]

I.1. Folosim notațiile adoptate în lucrare, precum și cîteva relații cunoscute din literatură [3], [4], de care se servește și autorul:

h — grosimea plăcii curbe (învelitorii);

(x^μ, z) — coordonatele unui punct din mediul tridimensional ocupat de placa curbă (învelitoare) [1];

g^{ij}, g_{ij} — componentele contravariante, respectiv covariante, ale tensorului metric fundamental, corespunzînd mediului tridimensional al învelitorii nedeformate.

Menționăm că avem [2]

$$g_{\alpha 3} = g^{\alpha 3} = 0 \tag{1}$$

*) În lucrarea de față, C. Stănescu prezintă o serie de observații asupra unei lucrări publicate de L. Librescu în St. Cerc. mec. apl. 18, 1, (1965). În paginile următoare se publică răspunsul lui L. Librescu privind aceste observații.

[1]) Indicii greci iau valorile 1, 2, iar indicii latini valorile 1, 2, 3; vezi [1], [3], [4].

[2]) Vezi [1] relațiile (10), p. 3; referindu-ne la lucrarea [1], în viitor vom adopta următoarea notație: primul număr, închis între paranteze pătrate, se referă la lucrarea citată; al doilea număr, închis între paranteze, indică relația, iar ultimul număr pagina la care se găsește relația.

$a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ — componentele covariante, respectiv contravariante, ale tensorului metric al suprafeței mediane.

$m = 1 - 2Hz + Kz^2$ (în care H și K sînt curbura medie, respectiv curbura gaussiană a suprafeței mediane; în cazul plăcii plane, $m=1$);

V_i — componentele covariante ale vectorului deplasare a punctelor mediului tridimensional al învelitorii;

e_{ik} — componentele tensorului deformație;

τ^{ik} — componentele tensorului tensiune;

$s_n^{(\rho)}, p_{(n)}$ — $(n = 0, 1, \ldots)$ — funcții cunoscute, depinzînd de sarcinile aplicate pe suprafețele $z = \pm \frac{h}{2}$ [3])

Au loc ecuațiile fizice (legea lui Hooke)

$$\tau^{ik} = E^{ikrs} e_{rs}, \tag{2}$$ [4])

precum și relațiile inverse

$$e_{rs} = F_{rslm} \tau^{lm}. \tag{3}$$ [5])

Tensorii E^{ikrs} și F_{rslm}, care depind de componentele tensorului metric fundamental și de proprietățile fizice ale corpului nedeformat, posedă proprietățile de simetrie [6])

$$E^{ikrs} = E^{kirs} = E^{kisr} = E^{rsik}. \tag{4}$$

Din relațiile (2) și (3) ținînd seama de proprietățile de simetrie (4) rezultă pentru un material anizotrop, avînd un plan de simetrie elastic, următoarele ecuații fizice (valabile evident și pentru un material izotrop) [3]:

$$\tau^{\omega\pi} = \left(E^{\omega\pi\alpha\beta} - \frac{E^{\omega\pi 33} E^{33\alpha\beta}}{E^{3333}} \right) e_{\alpha\beta} + \frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}} \tau^{33}, \tag{5}$$ [7])

$$e_{\lambda 3} = 2F_{\lambda 3\omega 3} \tau^{\omega 3}, \tag{6}$$ [8])

$$e_{33} = \frac{1}{E^{3333}} (\tau^{33} - E^{33\alpha\beta} e_{\alpha\beta}). \tag{7}$$ [9])

I.2. PREZENTAREA TEORIEI PROPUSĂ DE AUTORI

I.2.1. Considerînd pentru componentele deplasării următoarele dezvoltări în serii de puteri:

$$\begin{aligned} V_\alpha &= \overset{(0)}{V}_\alpha + z\overset{(1)}{V}_\alpha + z^2\overset{(2)}{V}_\alpha + \ldots + z^n\overset{(n)}{V}_\alpha + \ldots, \\ V_3 &= \overset{(0)}{V}_3 + z\overset{(1)}{V}_3 + z^2\overset{(2)}{V}_3 + \ldots + z^n\overset{(n)}{V}_3 + \ldots \end{aligned} \tag{8}$$ [10])

[3]) [1], (33), 6.
[4]) [1], (35), 7.
[5]) [1], (36), 7.
[6]) [1], (37), 7.
[7]) [1], (43), 8.
[8]) [1], (41b), 8.
[9]) [1], (42), 8.
[10]) [1], (52), 10.

și adoptînd pentru τ^{i3} dezvoltările

$$m\tau^{\rho 3} = \frac{s^{\rho}_{(1)}}{h} + \frac{s^{\rho}_{(0)}}{h} z + \overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \overset{(3)}{\varphi}{}^{\rho} z\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \overset{(2n)}{\varphi}{}^{\rho}\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \overset{(2n+1)}{\varphi}{}^{\rho} z\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \ldots, \qquad (9)\ ^{11})$$

$$m\tau^{33} = \frac{p_{(1)}}{h} + \frac{p_{(0)} z}{h} + \overset{(2)}{\psi}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \overset{(3)}{\psi} z\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \overset{(2n)}{\psi}\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \overset{(2n+1)}{\psi} z\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \ldots, \qquad (10)\ ^{11})$$

necunoscutele de bază care intervin în formularea propusă de autor sînt funcțiile $\overset{(0)}{V}_{\alpha}(x^{\lambda})$, $\overset{(0)}{V}_{3}(x^{\lambda})$, $\overset{(j)}{\varphi}{}^{\rho}(x^{\lambda})$ și $\overset{(j)}{\psi}(x^{\lambda})$ $(j = 2, 3, 4, \ldots)$. Ceilalți coeficienți din dezvoltările (8), precum și componentele tensiunii $\tau^{\omega\pi}$ trebuie exprimați în funcție de necunoscutele de bază. Cu privire la această problemă se dau următoarele indicații:

a) Din ecuațiile fizice (6) și (7) rezultă că

$$V_{\alpha,3} = 4F_{\alpha 3\lambda 3}\,\tau^{\lambda 3} - V_{3\|\alpha}, \qquad (11)\ ^{12})$$

$$V_{3,3} = \frac{1}{E^{3333}}(\tau^{33} - E^{33\sigma\rho} e_{\sigma\rho}). \qquad (12)\ ^{13})$$

Mai departe, autorul ia în considerare dezvoltările

$$E^{\omega\pi\lambda\rho} = \overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} + z\overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} + \ldots + z^n \overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} + \ldots,$$

$$E^{33\omega\pi} = \overset{(0)}{E}{}^{33\omega\pi} + z\overset{(1)}{E}{}^{33\omega\pi} + \ldots + z^n \overset{(n)}{E}{}^{33\omega\pi} + \ldots, \qquad (13)\ ^{14})$$

$$E^{3333} = \overset{(0)}{E}{}^{3333};\ F_{\omega 3\lambda 3} = \overset{(0)}{F}_{\omega 3\lambda 3} + z\overset{(1)}{F}_{\omega 3\lambda 3} + z^2\overset{(2)}{F}_{\omega 3\lambda 3},$$

precum și dezvoltarea lui $e_{\alpha\beta}$ după puterile lui z.

$$e_{\alpha\beta} = \overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + z\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} + z^2\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} + \ldots + z^n\overset{(n)}{e}_{\alpha\beta} + \ldots, \qquad (14)\ ^{15})$$

și, folosind (8), (9), (10), din (11) și (12) se obține — prin identificarea coeficienților acelorași puteri ale lui z — un sistem recurent [16]; din acest sistem ar rezulta coeficienții $\overset{(n)}{V}_{\alpha}$ și $\overset{(n)}{V}_{3}$ $(n \geqslant 1)$ în funcție de necunoscutele de bază.

---

11) [1], (45a; 45b), 8.

12) [1], (50), 10; din relația (11) se deduce relația corespunzătoare dată în lucrare, înlocuind derivata covariantă $V_{3\|\alpha}$ din spațiul tridimensional cu ajutorul derivatei de suprafață ([1], (24), 5).

13) [1], (51), 10.

14) [1] (46), 9.

15) [1], (54), 11.

16) [1], (53), 11.

b) Utilizînd rezultatele obținute în etapa anterioară și ecuația fizică (5), s-ar găsi, în funcție de necunoscutele de bază, componentele $\tau^{\omega\pi}$, care se prezintă tot sub forma de serii de puteri [17]).

Avînd exprimate în funcție de aceste necunoscute componentele tensorului tensiune, s-ar obține momentele de ordinul n [18]), care, înlocuite în ecuațiile de echilibru [19]), conduc la sistemul ce ar permite determinarea necunoscutelor de bază.

I.2.2. Prin reținerea unui număr finit de termeni în dezvoltările (9) și (10), în lucrare sînt menționate două variante care ar putea determina soluția aproximativă a problemei. Vom indica aici în ce constă a doua variantă (pentru motivul că aceasta este folosită de autor în studiul echilibrului elastic al plăcii plane).

În cadrul aproximației de ordinul N ($N \geqslant 2$), după terminologia introdusă în lucrare, în dezvoltarea (9) se reține termenii $\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}, \ldots, \overset{(N)}{\varphi}{}^{\rho}$, iar în dezvoltarea (10) termenii $\overset{(2)}{\psi}, \overset{(3)}{\psi}, \ldots, \overset{(N+1)}{\psi}$. În acest caz se arată că $\overset{(2)}{\psi}, \overset{(3)}{\psi}, \ldots, \overset{(N+1)}{\psi}$ se determină, în funcție de $\overset{(0)}{V}_{\alpha}, \overset{(0)}{V}_{3}, \overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}, \ldots, \overset{(N)}{\varphi}{}^{\rho}$ prin integrarea unui sistem de ecuații cu derivate parțiale cu coeficienți variabili [20]). Semnalînd dificultățile care apar la integrarea sistemului, se remarcă posibilitatea degenerării în anumite cazuri a acestui sistem într-un sistem algebric. Astfel este, de exemplu, cazul plăcilor plane.

I.2.3. Cazul plăcii plane. Se caută determinarea soluției aproximative a problemei și se consideră aproximația de ordinul doi ($N = 2$). Prin urmare, în dezvoltarea (9) se reține numai termenul $\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}$, iar în dezvoltarea (10) termenii $\overset{(2)}{\psi}$ și $\overset{(3)}{\psi}$.

În acest caz vom avea

$$\tau^{\rho 3} = \frac{s^{\rho}_{(1)}}{h} + s^{\rho}_{(0)} \frac{z}{h} + \overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) \tag{15}$$ [21])

și, printr-o regrupare a termenilor, expresia lui τ^{33} se scrie

$$\tau^{33} = \overset{(0)}{\tau}{}^{33} + z\overset{(1)}{\tau}{}^{33} + z^2\overset{(2)}{\tau}{}^{33} + z^3\overset{(3)}{\tau}{}^{33}, \tag{16}$$ [22])

unde

$$\begin{aligned} \overset{(0)}{\tau}{}^{33} &= \frac{p_{(1)}}{h} + \frac{h}{8} s^{\rho}_{(0)|\rho}\,; & \overset{(1)}{\tau}{}^{33} &= \frac{p_{(0)}}{h} + \frac{h^2}{12}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}{}_{|\rho}, \\ \overset{(2)}{\tau}{}^{33} &= -\frac{1}{2h} s^{\rho}_{(0)|\rho}\,; & \overset{(3)}{\tau}{}^{33} &= -\frac{1}{3}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}{}_{|\rho}. \end{aligned} \tag{17}$$

---

[17]) [1], (56), 12.
[18]) [1], (31), 6.
[19]) [1], (32), 6.
[20]) În lucrare nu se stabilește efectiv acest sistem; vezi [1], (60), 13.
[21]) [1], (61), 14.
[22]) [1], (63), 14.

De asemenea menționăm ecuația [23])

$$\frac{h^2}{6}\overset{(2)}{\varphi^0}|_\rho - \frac{p_{(0)}}{h} - \frac{1}{h}s^0_{(1)}|_\rho = 0. \tag{18}$$

Pentru componentele deplasării se admit expresiile aproximative

$$V_\omega = \overset{(0)}{V}_\omega + z\overset{(1)}{V}_\omega + z^2\overset{(2)}{V}_\omega + z^3\overset{(3)}{V}_\omega + z^4\overset{(4)}{V}_\omega, \tag{19}$$

$$V_3 = \overset{(0)}{V}_3 + z\overset{(1)}{V}_3 + z^2\overset{(2)}{V}_3 + z^3\overset{(3)}{V}_3$$

și deci

$$e_{\alpha\beta} = \overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + z\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} + z^2\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} + z^3\overset{(3)}{e}_{\alpha\beta} + z^4\overset{(4)}{e}_{\alpha\beta}, \tag{20}$$

unde

$$\overset{(j)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overset{(j)}{V}_{\alpha|\beta} + \overset{(j)}{V}_{\beta|\alpha}) \quad (j = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Necunoscutele de bază sînt funcțiile $\overset{(0)}{V}_\omega$, $\overset{(0)}{V}_3$, $\overset{(2)}{\varphi^0}$ și restul termenilor din (19) și (20) se obțin, în funcție de aceste necunoscute, dintr-un sistem recurent [24]).

În baza ecuațiilor tensiunii-deformații se obțin componentele

$$\begin{aligned}\tau^{\omega\pi} = {} & \overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + z\overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} + z^2\overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} + \\ & + z^3\overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(3)}{e}_{\alpha\beta} + z^4\overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(4)}{e}_{\alpha\beta} + \\ & + \frac{\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}(\overset{(0)}{\tau}{}^{33} + z\overset{(1)}{\tau}{}^{33} + z^2\overset{(2)}{\tau}{}^{33} + z^3\overset{(3)}{\tau}{}^{33}),\end{aligned} \tag{21 [25])}$$

din care rezultă prin integrare expresiile momentelor de ordinele zero și unu [26]), în funcție de necunoscutele problemei.

Prin înlocuirea acestor expresii în ecuațiile de echilibru [27]) se afirmă că se obține un sistem de cinci ecuații cu derivate parțiale în funcțiile necunoscute $\overset{(0)}{V}_\delta$, $\overset{(0)}{V}_3$, $\overset{(2)}{\varphi^\delta}$.

Aceasta este teoria propusă.

II. CONSIDERAȚII CRITICE CU PRIVIRE LA TEORIA AUTORULUI

În legătură cu teoria prezentată vom formula o serie de observații. De asemenea vom semnala o serie de incompatibilități între rezultatele pe care ni le furnizează această teorie și rezultatele obținute de alți autori.

---

[23]) Această ecuație rezultă prin simple transformări din [1], (59), 13.
[24]) [1], (67), 15.
[25]) [1], (68), 16.
[26]) [1], (69), 16.
[27]) [1], (70), 16.

II.1. Calculele nu sînt efectuate complet, au un caracter formal și se rezumă numai la operațiile facile. Din această cauză nu sînt puse în adevărata lor lumină dificultățile care se ivesc în rezolvarea completă a unei astfel de probleme prin metoda autorului. Astfel nu sînt date, în funcție de necunoscutele de bază, expresiile finale ale coeficienților $V_\alpha^{(n)}$, $V_3^{(n)}$ $(n \geqslant 1)$ [28]), precum și componentele tensiunii $\tau^{\omega\pi}$ [29]). Ca urmare, nu sînt date expresiile momentelor de ordinul n în funcție de aceste necunoscute, nu se stabilește sistemul corespunzător din care ar urma să fie determinate prin integrare necunoscutele problemei și nu sînt formulate condițiile la limită (nici chiar pentru cazul simplu al plăcii plane).

Din această cauză, pentru o anumită aproximație, nu se cunoaște care este ordinul acestui sistem, condițiile la limită corespunzătoare și dacă numărul acestor condiții este compatibil cu ordinul sistemului.

Notă. Se știe că, în teoria bazată pe ipoteza Love-Kirchhoff, în problema încovoierii plăcii plane rezultă o ecuație cu derivate parțiale de ordinul 4, în timp ce numărul condițiilor la limită naturale este de 3.

Din această cauză, numărul condițiilor la limită trebuie pus de acord cu ordinul ecuației, și felul cum se rezolvă această problemă este cunoscut din literatură [3]—[5].

II.2. Metoda, pentru a putea fi aplicată în cazul anizotrop, necesită cunoașterea coeficienților dezvoltărilor (13). Cu privire la această problemă, în lucrare nu se dau nici un fel de indicații, *dezvoltările avînd un caracter formal.*

Pentru cazul izotrop, plecînd de la expresiile tensorilor E^{ijlr}, F_{rslm} care intervin în relațiile (2)—(3)

$$E^{ijlr} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\, g^{ij}\, g^{lr} + g^{il}g^{jr}\right],$$
$$F_{rslm} = \frac{1+\nu}{E}\left[g_{rl}\, g_{sm} - \frac{\nu}{1+\nu}\, g_{rs}\, g_{lm}\right] \qquad \text{(a)}\ [30])$$

și folosind dezvoltările în serie ale componentelor tensorului metric fundamental al spațiului tridimensional [31]), se dau coeficienții dezvoltărilor (13) [32]).

Trebuie remarcat însă că expresiile (a) adoptate pentru acești tensori *nu satisfac proprietățile de simetrie* (4).

Adoptînd pentru tensorul F_{rslm} forma (a) de mai sus, *ecuațiile fizice* (6) *sînt date greșit*, deoarece ele rezultă din ecuațiile (3) ca urmare a proprietăților (4). În consecință, *sînt greșite* și toate relațiile deduse pe baza ecuațiilor (6).

Afirmația că tensorii E^{ijlr} și F_{rslm}, dați de relațiile (a), nu satisfac proprietățile de simetrie (4) se poate verifica pe un caz particular simplu.

---

[28]) [1], (53), 11.
[29]) [1], (56), 12.
[30]) [1], (subsol), 9.
[31]) [1], (10) și (11), 3.
[32]) [1], (subsol), 9.

Să admitem, prin absurd, că tensorul F_{rslm} dat de (a) ar fi simetric în raport cu indicii l și m, adică

$$F_{rslm} = F_{rsml}.$$

Atunci ecuația fizică (6) se scrie

$$e_{\lambda 3} = 2F_{\lambda 3\omega 3}\,\tau^{\omega 3} = 2F_{\lambda 33\omega}\,\tau^{\omega 3}.$$

Să calculăm acum $F_{\lambda 33\omega}$. Pentru aceasta, în expresiile lui F_{rslm} să facem înlocuirile

$$r = \lambda,\ s = 3,\ l = 3,\ m = \omega.$$

Ținînd seama de relațiile (1), obținem

$$F_{\lambda 33\omega} = 0$$

și, prin urmare, rezultă că

$$e_{\lambda 3} = 0,$$

deși

$$\tau^{\omega 3} \neq 0. \qquad \text{(absurd!)}$$

Notă. Remarcăm următoarele: pentru un material anizotrop nu se cunoaște dependența tensorilor E^{ijlr} și F_{rslm} în funcție de constantele fizice și de metrica spațiului și din această cauză nu se pot obține coeficienții dezvoltărilor (13) direct, ca în cazul izotrop.

În lucrarea [3, p. 57], prof. P. M. Naghdi indică metoda cu ajutorul căreia se pot exprima componentele tensorilor spațiali E^{ijlr} și F_{rslm} în funcție de componentele lor definite pe suprafața mediană. Însă problema referitoare la dependența tensorilor de suprafață $\overset{(0)}{E}{}^{ijlr}$ și $\overset{(0)}{F}_{rslm}$ în funcție de constantele fizice și de metrica suprafeței mediane rămîne încă deschisă.

II.3. Ne vom opri acum mai amănunțit asupra exemplului tratat în lucrare: cazul plăcii plane. În cadrul acestei exemplificări și prin compararea rezultatelor cu rezultatele obținute de alți autori, vom vedea în ce măsură metoda propusă permite determinarea stării de tensiune a plăcilor groase și vom reuși să punem în evidență, relativ simplu, alte lipsuri de fond ale teoriei prezentate.

În acest scop să stabilim efectiv, pentru cazul plăcii plane izotrope, sistemul care determină funcțiile necunoscute ale problemei $\overset{(0)}{V}_{\delta}$, $\overset{(0)}{V}_{3}$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^{\delta}$. Se obține [33])

$$\Delta \overset{(0)}{V}{}^{\pi} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\, a^{\pi\omega}\, \overset{(0)}{\theta}_{|\omega} + \frac{\nu h^2}{12(1-\nu)^2}\, a^{\pi\omega}\, \Delta \overset{(0)}{\theta}_{|\omega} + \\ + \frac{\nu^2 h^4}{960\,(1-\nu)^3}\, a^{\pi\omega}\, \Delta^2 \overset{(0)}{\theta}_{|\omega} = L^{\pi}, \qquad (b_1)$$

[33]) În stabilirea sistemului am ținut seama de observația precedentă și, în consecință, am folosit forma simetrică pentru tensorii E^{ijlr} și F_{rslm}. Acest sistem nu este stabilit în lucrare. Din această cauză, după cum vom vedea, chiar autorul face afirmații eronate în legătură cu grosimea plăcii plane, a cărei stare de tensiune s-ar găsi prin integrarea sistemului.

$$\left.\begin{aligned} &D\Delta^2\left[\overset{(0)}{V}_3+\frac{\nu h^2}{40\,(1-\nu)}\,\Delta\overset{(0)}{V}_3\right]=P,\\ &\overset{(2)}{\varphi}{}^{\pi}-\frac{h^2}{10}\,\Delta\overset{(2)}{\varphi}{}^{\pi}-\frac{6D}{h^3}\,a^{\omega\pi}\left[\Delta\overset{(0)}{V}_3+\frac{\nu h^2}{40\,(1-\nu)}\,\Delta^2\overset{(0)}{V}_3\right]_{|\omega}=P^{\pi}. \end{aligned}\right\} \qquad (b_2)$$

S-au introdus notaţiile:

$\overset{(0)}{V}{}^{\pi}$ — componentele contravariante ale vectorului deplasare a unui punct din planul median;

$$\overset{(0)}{\theta}=\overset{(0)}{V}{}^{\omega}|_{\omega};$$

Δ — operatorul bidimensional al lui Laplace;

ν — coeficientul lui Poisson;

$D=\dfrac{Eh^3}{12\,(1-\nu^2)}$ — rigiditatea cilindrică a plăcii.

Funcţiile L^{π}, P şi P^{π} sînt cunoscute, ele depinzînd de sarcinile exterioare aplicate pe feţele $z=\pm\dfrac{h}{2}$ [34]).

Din sistemul de ecuaţii (b_1) se determină funcţiile necunoscute $\overset{(0)}{V}{}^{\pi}$, iar din sistemul (b_2) funcţiile $\overset{(0)}{V}_3$ şi $\overset{(2)}{\varphi}{}^{\pi}$.

★

În cazul unei soluţii aproximative, o problemă esenţială pe care o ridică teoria propusă este aceea a stabilirii criteriului privind *alegerea numărului de termeni din dezvoltările* (8) *în funcţie de alegerea aproximativă făcută pentru* $\tau^{\rho 3}$ *şi* τ^{33} [35]).

Evident, de această alegere depinde:

1) ordinul sistemului din care prin integrare se determină necunoscutele de bază şi

2) numărul condiţiilor la limită [36]).

În lucrarea autorului cu privire la această problemă nu se dau nici un fel de indicaţii.

---

[34]) Funcţiile L^{π} depind de sarcinile exterioare $s^{\circ}_{(0)}$ şi $p_{(1)}$, iar funcţiile P şi P^{π}, de sarcinile exterioare $s^{\circ}_{(1)}$ şi $p_{(0)}$.

[35]) Vezi pct. I.2.2.

[36]) Iată un exemplu pentru a clarifica această afirmaţie. Dacă în dezvoltările (19) ne mărginim la primii patru termeni, renunţînd la termenul $z^4\overset{(4)}{V}_{\omega}$, atunci în locul sistemului (b_1) se va obţine un alt sistem $(\tilde{b}_1)$. În noul sistem $(\tilde{b}_1)$, faţă de sistemul (b_1) lipseşte termenul $\dfrac{\nu^2h^4}{960\,(1-\nu)^3}\,a^{\pi\omega}\,\Delta^2\overset{(0)}{\theta}_{|\omega}$ (membrul drept L^{π} se modifică în mod corespunzător). Deci ordinele celor două sisteme (b_1) şi $(\tilde{b}_1)$ sînt diferite şi, ca atare, şi numărul condiţiilor la limită.

Observația de mai sus ne-a fost sugerată de următoarea întrebare: care sînt plăcile plane cărora le putem determina starea de tensiune cu ajutorul ecuațiilor (b_1) și (b_2)? [37]).

Vom căuta să clarificăm această problemă, comparînd ecuațiile (b_1) și (b_2) cu ecuațiile stabilite de alți autori prin alte metode.

Fără a restrînge generalitatea considerațiilor care urmează, ne putem mărgini — pentru simplitate — la cazul cînd lipsesc sarcinile aplicate pe fețele $z = \pm \frac{h}{2}$ $(L^\pi = P = P^\pi = 0)$.

Să admitem că ecuațiile respective sînt stabilite pentru plăcile plane *subțiri*. După cum se știe din literatură, pentru plăcile plane subțiri, sistemul care determină funcțiile $\overset{(0)}{V}{}^\pi$ este

$$\Delta \overset{(0)}{V}{}^\pi + \frac{1+\nu}{1-\nu} a^{\pi\omega} \overset{(0)}{\theta}_{|\omega} = 0$$

și integrarea acestui sistem este cunoscută [38]).

Acest sistem însă diferă *esențial* de sistemul (b_1) ca ordin și număr al condițiilor la limită.

Să examinăm acum prima ecuație din sistemul (b_2):

$$\Delta^2 \left[\overset{(0)}{V}_3 + \frac{\nu h^2}{40\,(1-\nu)} \Delta \overset{(0)}{V}_3 \right] = 0$$

În baza unei teoreme a lui Boggio, soluția ei este

$$\overset{(0)}{V}_3 = w + W,$$

unde w este o funcție biarmonică, iar W este o soluție a ecuației lui Helmholtz

$$\Delta W + \frac{40\,(1-\nu)}{\nu h^2} W = 0.$$

Este evident că funcția W astfel determinată nu conduce la stări de tensiune marginale (stări care să se amortizeze rapid de la frontiera plăcii). Această concluzie este bizară.

După cum se știe, teoria clasică a încovoierii plăcilor plane subțiri se bazează pe ipoteza Love-Kirchhoff. Încă de la 1877, M. Lévy a remarcat că soluția dată de ecuația clasică S. Germain nu permite luarea în considerare a stărilor de tensiune marginale și Lévy a completat soluția în acest sens. Ulterior, Reissner [6] și alți autori au stabilit teorii aproxi-

---

[37]) Considerațiile critice din nota de față sînt valabile și pentru lucrarea [2], în care autorul extinde teoria propusă la cazul problemei termoelastice a plăcilor curbe izotrope, folosind procedeul clasic de reducere la o problemă elastică echivalentă. Dacă se stabilește sistemul de ecuații corespunzător plăcilor plane, se obține în cadrul aceleiași aproximații $(N = 2)$ ecuațiile (b_1) și (b_2) (în expresiile funcțiilor cunoscute L^π, P, P^π, intervin acum și sarcinile termice). În lucrarea [1], autorul afirmă că aceste ecuații sînt stabilite pentru plăcile plane subțiri, pe cînd în lucrarea [2] se afirmă că aceleași ecuații se aplică plăcilor plane de grosime medie.

[38]) Integrînd acest sistem, se obțin formulele Kolosov-Muschelișvili, binecunoscute din teoria elasticității plane.

mative ale plăcilor plane subțiri care să ia în considerare și aceste efecte de zonă marginală. După cum arată recent A. L. Goldenveizer [7], stările de tensiune marginale se pot pune în evidență atunci cînd ipotezele Love-Kirchhoff se înlocuiesc cu alte ipoteze. Așa cum afirmă autorul, în teoria propusă sînt eliminate ipotezele Love-Kirchhoff. Prin urmare, dacă prima ecuație (b_2) s-ar aplica plăcilor plane subțiri, atunci soluția acestei ecuații ar trebui să prindă și efectele semnalate mai sus, ceea ce, după cum am văzut, nu are loc.

În consecință, ecuațiile (b_1) și (b_2) nu permit determinarea stării de tensiune a plăcilor plane subțiri.

Să presupunem acum că ecuațiile (b_1) și (b_2) sînt stabilite pentru plăcile plane de *grosime medie*.

Vom proceda și în acest caz la o comparare a acestor ecuații cu ecuațiile deduse de alți autori.

Sistemul (b_2) coincide cu sistemul obținut de Mușstari în lucrarea [8]. Ecuația care determină funcția $\overset{(0)}{V}_3$ diferă de ecuația

$$\Delta^2\left[\overset{(0)}{V}_3 + \frac{8-3\nu}{40\,(1-\nu)}\,h^2\,\Delta\overset{(0)}{V}_3\right] = 0,$$

care a fost stabilită inițial de A. I. Lurie [9] și apoi regăsită de Mușstari și Teregulov [10].

Deosebiri *esențiale* apar în ceea ce privește sistemul de ecuații care determină funcțiile $\overset{(0)}{V}{}^{\pi}$. În lucrarea [10], Mușstari și Teregulov stabilesc sistemul [39])

$$\Delta\overset{(0)}{V}{}^{\pi} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\,a^{\pi\omega}\,\overset{(0)}{\theta}_{|\omega} - \frac{h^2}{24}\left(\Delta^2\overset{(0)}{V}{}^{\pi} + \frac{3+\nu}{1-\nu}\,a^{\pi\omega}\Delta\overset{(0)}{\theta}_{|\omega}\right) = 0. \qquad (b_1')$$

Sistemul (b_1), obținut prin metoda autorului, diferă esențial de sistemul (b_1') prin neglijarea unui termen $h^2\Delta^2\overset{(0)}{V}{}^{\pi}$, care este de același ordin de mărime cu cel menținut $h^2a^{\pi\omega}\,\Delta\overset{(0)}{\theta}_{|\omega}$, și reținerea în schimb a unui termen de un ordin de mărime superior (termenul $h^4a^{\pi\omega}\Delta^2\overset{(0)}{\theta}_{|\omega}$).

Dacă se ține seama că pentru determinarea stării globale de tensiune trebuie să însumăm soluțiile date de ecuațiile (b_1) și (b_2), în conformitate cu formula (21), rezultă că ecuațiile respective nu pot fi aplicate nici plăcilor plane de grosime medie.

Analiza făcută mai sus arată cît de necesar este să se stabilească criteriul după care trebuie ales numărul termenilor din dezvoltările (8) în cazul alegerii unor expresii aproximative pentru τ^{i3} ($i = 1, 2, 3$).

În lipsa unui asemenea criteriu nu există certitudinea că ecuațiile deduse sînt corecte.

Notă. Remarcăm în legătură cu observația de mai sus următoarele: pentru componentele $\tau^{\rho 3}$, în lucrare s-a adoptat forma (16), adică poli-

---

[39]) Acest sistem se poate obține folosindu-se soluția stabilită pe cale simbolică de A. I. Lurie [11] pentru ecuațiile lui Lamé sau aplicînd algoritmul propus de N. A. Kilcevski [12] în teoria plăcilor curbe (în particular și al celor plane).

noame de gradul doi în raport cu variabila z, rezultînd pentru componentele $\tau^{\omega\pi}$ forma (21), adică de polinoame de gradul patru în z.

Acest rezultat este în contradicție cu ecuațiile de echilibru ale teoriei elasticității :

$$\tau^{\omega\pi}|_{\pi} + \frac{\partial \tau^{\omega 3}}{\partial z} = 0$$

Primită la redacție la 14 aprilie 1966

(Text adăugat la corectură)

II. 4. În rezolvarea sistemului de ecuații, stabilit prin metoda autorului, intervin ecuații de forma

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0$$

După cum se știe aceste ecuații nu admit soluții *unice*, ceea ce dovedește că teoria propusă nu este corectă.

★

Considerațiile de mai sus nu epuizează toate observațiile critice care se pot aduce teoriei propuse. Menționăm că problema determinării stării de tensiune a plăcilor curbe de grosime medie este mult mai dificilă.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Librescu, *Asupra teoriei învelitorilor și plăcilor elastice anizotrope*, St. cerc. mec. apl., **18**, *1* (1965).
2. — *On the thermoelastic problem of shells, treated by eliminating the Love. Kirchhoff hypothesis*, în *Non-Classical Shells Problems Proceedings on the IASS Symposium*, 1964.
3. P. M. Naghdi, *Foundation of elastic shells theory*, Progress in Solid Mechanics, vol. 4, 1963.
4. A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford Univ. Press, 1953.
5. S. T. Timoshenko, *Theory of Plates and shells*, New York, 1940.
6. E. Reissner, *On bending of elastic plates*, Quarterly of Applied Mathematics, *1* (1947).
7. А. Л. Гольденвейзер, *Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости*, Р.М.М., XXVI, *4* (1962).
8. Х. М. Муштари, *Теория изгиба плит средней толщины*, Известия Акад. наук СССР, ОТН, 2 (1959).
9. А. И. Лурье, *К задаче о равновесии пластины переменной толщины*, Труды Ленинградского индустриального института, 6 (1936).
10. Х. Муштари, И. Терегулов, *К теории оболочек средней толщины*, ДАН СССР, 128, *6* (1959).
11. А. И. Лурье, *Пространственные задачи теории упругости*, Москва, Государ. Изд. теорет. лит., 1955.
12. Н. А. Кильчевский, *Основы аналитической механики оболочек*, Изд. Акад. наук. Укр. ССР, Киев, 1963.

ASUPRA UNEI TEORII A ÎNVELITORILOR ŞI PLĂCILOR ELASTICE ANIZOTROPE

LIVIU LIBRESCU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.3

În această notă, după ce se face o expunere sumară a principiilor care stau la baza teoriei învelitorilor şi plăcilor anizotrope, dezvoltată în lucrările [1], [2], se pune în evidenţă caracterul greşit al observaţiilor cuprinse în *Consideraţii asupra unei teorii a plăcilor* de Chr. Stănescu.

1. În lucrările [1], [2] am fundamentat o teorie a învelitorilor elastice anizotrope de formă arbitrară, în care ipoteza Love-Kirchhoff era abrogată. În construirea acestei teorii s-a ţinut seama de componentele τ^{i3} $(i = 1, 2, 3)$ [1] şi e_{i3} ale tensorului tensiune, respectiv deformaţie. Condiţiile la limită pe suprafeţele de mărginire ale învelitorii erau satisfăcute riguros.

Nu s-a făcut nici o restricţie privind grosimea învelitorii, avînd astfel posibilitatea de a determina starea de tensiune a învelitorilor groase.

În lucrarea [2] rezultatele au fost generalizate în cazul existenţei unui cîmp de temperatură neuniform arbitrar $T(x^\alpha, x^3)$.

Rezultatele obţinute în cadrul teoriei generale au fost particularizate pentru cazul plăcii, în cazul considerării unei erori relative de $f_1^4 f_2 h^4/L^4$, unde f_1 este indicele de variaţie al stării de tensiune, h grosimea plăcii, L o dimensiune caracteristică corespunzînd planului median al plăcii şi f_2 factor fizico-mecanic care depinde de constantele elastice ale corpului anizotrop.

Într-o lucrare [3] comunicată la Conferinţa de mecanică ţinută la Bucureşti, în septembrie 1965, teoria fundamentată în lucrările [1], [2] a fost dezvoltată şi completată.

---

[1]) Peste tot în lucrare indicii greci iau valorile 1, 2, iar indicii latini valorile 1, 2, 3.

Astfel, pornindu-se de la principiul variațional Hellinger-Reissner, au fost deduse condițiile la limită naturale statice și geometrice. În aceeași lucrare [3] s-a arătat că sistemul general de ecuații și condiții la limită deduse pentru cazul învelitorilor anizotrope de grosime arbitrară se scindează în cazul considerării cazului plan în două grupe de ecuații independente: un grup de ecuații corespunde stării plane de tensiune generalizate, iar celălalt încovoierii transversale a plăcilor.

Pe baza grupelor de ecuații corespunzînd celor două stări de tensiune, s-au dedus, respectiv, ecuațiile rezolvente cu o eroare relativă de $f_1^4 f_2 h^4/L^4$.

Este demn de menționat că ecuațiile generale corespunzînd învelitorilor anizotrope, particularizate pentru cazul $e_{33} = \tau^{33} = 0$, și ecuațiile rezolvente ale teoriei plăcilor plane în cazul $e_{33} = 0$ și al considerării unei erori relative de $\frac{f_1^4 f_2 h^4}{L^4}$ vin în concordanță cu ecuațiile deduse de S. A. Ambarțumian [4]—[8].

În cele ce urmează vom prezenta în mod cît se poate de succint elementele care stau la baza problemei determinării stării de tensiune a învelitorilor anizotrope de formă arbitrară, așa cum rezultă din teoria expusă de noi în [1], [2].

Astfel, problema determinării stării de tensiune a cocilor anizotrope de formă și grosime arbitrare se reduce la determinarea funcțiilor $\overset{(n)}{\varphi^i}(x^\alpha)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ și $\overset{(0)}{V_i}(x^\alpha)$, funcții care reprezintă coeficienții lui z^n ai dezvoltării în serie a componentelor τ^{i3} ale tensorului tensiune

$$\lambda\tau^{i3} = \frac{s^i_{(1)}}{h} + s^i_{(0)}\frac{z}{h} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\overset{(2n)}{\varphi^i}\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \overset{(2n+1)}{\varphi^i}\, z\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right)\right] \tag{1}$$

respectiv componentele vectorului deplasare a suprafeței mediane a învelitorii. De aceste funcții depind expresiile $\overset{(n)}{V_i}(x^\alpha)$ $(n \geqslant 1)$ și $\overset{(n)}{e_{\alpha\beta}}$ $(n \geqslant 0, 1, \ldots)$, acestea reprezentînd, respectiv, coeficienții lui z^n ai dezvoltării în serie a componentelor vectorului deplasare a unui punct al mediului tridimensional al învelitorii, respectiv a tensorului deformație,

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{V_i} z^n, \quad e_{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{e_{\alpha\beta}} z^n. \tag{2}$$

Expresiile $\overset{(n)}{V_i}$ $(n \geqslant 1)$ și $\overset{(n)}{e_{\alpha\beta}}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ se pot determina dintr-un sistem de ecuații recurent dedus în lucrările [1] și [2], la obținerea căruia nu s-a introdus nici un fel de restricție privind forma, grosimea sau tipul de anizotropie al materialului învelitorii (anizotropia se consideră de tipul simetriei elastice în raport cu suprafața $x^3 = \text{const.}$). Funcțiile $\overset{(n)}{V_i}(x^\alpha)$ și $\overset{(n)}{e_{\alpha\beta}}(x^\alpha)$ fiind exprimate prin intermediul necunoscutelor de bază, se poate porni în continuare la determinarea expresiei tensiunilor $\tau^{\omega\pi}$:

$$\tau^{\omega\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{n} z^n \overset{(n-q)}{\tilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}}\, \overset{(q)}{e_{\alpha\beta}} + \frac{1}{E^{3333}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{(n)} \overset{(n-q)}{E^{\omega\pi 33}}\, \overset{(q)}{\tau^{33}}\, z^n, \tag{3}$$

de unde prin integrare (vezi relaţiile [1] (2.7)) se pot obţine expresiile momentelor de ordinul n ($n = 0, 1, \ldots$) în funcţie de necunoscutele de bază ale problemei.

Introducerea momentelor de ordinul n în ecuaţiile de echilibru ([1], (2.6)) conduce la obţinerea unui sistem infinit de ecuaţii cu tot atîtea necunoscute, sistem care prezintă dificultăţi evidente. S-a expus cazul cînd, pentru a obţine o soluţie aproximativă a problemei determinării stării de tensiune a învelitorilor anizotrope de formă arbitrară, se consideră aproximaţia de ordinul N a dezvoltărilor lui τ^{i3} (în cadrul aproximaţiei de ordinul N a dezvoltărilor (1) se consideră că $\overset{(n)}{\varphi^i}(x^\alpha) = 0$ pentru $n > N$) ($N = 2, 3, \ldots$). În acest caz rezultă un număr de $3N$ necunoscute ($\overset{(0)}{V_i}, \overset{(2)}{\varphi^i}, \ldots, \overset{(N)}{\varphi^i}$) şi un număr egal de ecuaţii (ecuaţiile de echilibru în momentele de ordin n ($n = 0, 1, \ldots, (N-1)$), care permit determinarea acestor funcţii.

În scopul reducerii numărului de necunoscute şi deci în scopul simplificării posibile a problemei, s-a arătat că în anumite cazuri particulare (cazul plăcii plane etc.) numărul necunoscutelor şi al ecuaţiilor poate fi redus de la $3N$ la $2N + 1$, necunoscutele în acest caz fiind $\overset{(0)}{V_i}, \overset{(2)}{\varphi^\rho}, \ldots, \overset{(N)}{\varphi^\rho_i}$.

Acestea sînt elementele care stau la baza problemei determinării stării de tensiune a cocilor anizotrope, problemă abordată amănunţit în lucrările [1], [2].

2. Contrar celor afirmate în *Consideraţii asupra unei teorii a plăcilor*, ecuaţiile deduse în lucrările [1], [2] nu au fost prezentate după criteriul facilităţii, ci după criteriul utilităţii lor.

Astfel, nu am procedat la deducerea expresiilor $\overset{(n)}{V_i}, \overset{(n)}{e_{\alpha\beta}}$ ($n \geqslant 1$) etc. în funcţie de necunoscutele de bază ale problemei, deoarece, în cadrul înaltului grad de generalitate al teoriei propuse, aceste expresii ar fi avut un caracter excesiv de complicat, din care ar fi rezultat tocmai caracterul formal şi inutil al acestora. De aceea noi considerăm util ca aceste expresii şi, în final, ecuaţiile rezolvente să fie deduse pentru o configuraţie geometrică dată a învelitorii, pentru un anumit ordin de aproximaţie a lui τ^{i3}, pentru o anumită eroare relativă, etc.

În acest scop am prezentat în lucrările [1], [2] ecuaţiile recurente care permit deducerea lui $\overset{(n)}{V_i}, \overset{(n)}{e_{\alpha\beta}}$, de unde şi expresiile lui $\tau^{\omega\pi}$ etc., prin relaţii date în lucrările [1], [2]. De altfel scopul oricărei teorii generale nu este acela de a deduce „soluţia" pe cazul general permis de teoria respectivă, ci de a cuprinde în sfera ei de aplicabilitate cît mai multe probleme, care însă se rezolvă în mod separat, folosind principiile ce stau la baza teoriei respective.

De asemenea vom remarca că nu se poate face o legătură între caracterul laborios al relaţiilor lui $\overset{(n)}{V_i}, \overset{(n)}{e_{\alpha\beta}}$ etc. şi dificultăţile pe care le-ar implica teoria propusă de noi, deoarece caracterul complicat al acestor expresii provine din caracterul complex al problemei însăşi, la care se adaugă gradul de generalitate al teoriei în cadrul căreia sînt deduse aceste relaţii.

Astfel, dacă am restrînge gradul de generalitate, considerînd, de exemplu, problema plăcii plane abordate cu o eroare relativă de ordinul $\frac{f_1^4 f_2 h^4}{L^4}$, în acest caz ar rezulta pentru $\overset{(n)}{V}_i$, $\overset{(n)}{e}_{\alpha\beta}$,... expresii mult mai simple.

În ceea ce privește problema condițiilor la limită, aceasta a constituit obiectul studiului detaliat întreprins în lucrarea [3].

3. În ceea ce privește dezvoltările

$$E^{ijlr} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \overset{(n)}{E}{}^{ijlr}, \qquad F_{ijmn} = \sum_{p=0}^{\infty} z^p \overset{(p)}{F}{}_{ijmn}, \tag{4}$$

remarcăm că cunoașterea acestor expresii este necesară nu numai în cadrul teoriei propuse de noi, ci și în fundamentarea oricărei alte teorii a învelitorilor anizotrope groase de formă arbitrară.

În lucrarea [1] am menționat că în cazul unui corp anizotrop tensorii modulelor de elasticitate E^{ijlr}, F_{ijmn} depind de tensorul metric al spațiului și de constantele elastice ale materialului (vezi [10]). Tot în [1] am arătat, pe baza exemplului corpului izotrop, care este posibilitatea practică de deducere a dezvoltărilor (4) pentru cazul corpului anizotrop. Aceste posibilități se reduc, după metoda noastră, la cunoașterea apriori a dependenței componentelor tensorului modulelor de elasticitate de tensorul metric al spațiului și de constantele elastice ale materialului sau, după metoda lui P. M. Naghdi [11], la cunoașterea apriori a dependenței tensorilor de suprafață a modulelor de elasticitate de tensorul metric al suprafeței mediane și de constantele elastice ale materialului.

Aceste metode, care conduc la rezultate identice, au fost deduse independent, aplicarea lor necesitînd același volum de calcule. Identitatea rezultatelor la care conduc cele două metode poate fi verificată în cazul anizotrop, de exemplu pentru cazul corpului transversal izotrop.

În ceea ce privește expresiile tensorilor modulelor de elasticitate în cazul corpului izotrop,

$$E^{ijlr} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{lr} + g^{il} g^{jr}\right], \qquad F_{rsmn} = \frac{1+\nu}{E}\left[g_{rl} g_{sm} - \frac{\nu}{1+\nu} g_{rs} g_{mn}\right], \tag{5}$$

acestea sînt exacte și ele corespund formei „brute", adică formei care rezultă direct din scrierea legii fizice a lui Hooke în cazul corpului izotrop, fără punerea condițiilor de simetrie a tensorului tensiune. In lucrările [1], [2], în toate relațiile deduse, intervin părțile simetrice ale tensorilor modulelor de elasticitate.

În cazul cînd aceste relații ar trebui explicitate pentru cazul corpului izotrop, atunci componentele tensorilor modulelor de elasticitate trebuie

înlocuite corespunzător cu expresiile simetrice ale tensorilor modulelor de elasticitate, obţinute din expresiile (5) prin relaţiile binecunoscute

$$\frac{1}{2}(E^{ijlr}+E^{ijrl})=\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}g^{ij}g^{lr}+\frac{1}{2}(g^{il}g^{jr}+g^{ir}g^{jl})\right],$$
$$\frac{1}{2}(F_{ijmn}+F_{ijnm})=\frac{1+\nu}{E}\left[\frac{1}{2}(g_{im}g_{jn}+g_{in}g_{jm})-\frac{\nu}{1+\nu}g_{ij}g_{mn}\right]. \tag{6}$$

Aceasta corespunde convenţiei tacite folosite într-o serie de lucrări (vezi, de exemplu, N. A. Kilcevski [12], [13], H. M. Muştari şi I. G. Teregulov [15], L. A. Agalovian [16]).

În versiunea în limba română a lucrării [2], expresiile tensorilor modulelor de elasticitate sînt date direct sub formă simetrică.

4. În lucrările [1], [2], în capitolele consacrate teoriei plăcii plane, nu au fost repetate o serie de rezultate presupuse cunoscute şi care au fost deduse într-o serie de lucrări anterioare, abordînd teoria aproximativă a plăcilor plane. Astfel, problema criteriului privind alegerea numărului de termeni în dezvoltările (2), (3) în funcţie de alegerea aproximativă făcută pentru τ^{i3} nu este specifică teoriei dezvoltate de noi, ea fiind comună şi altor teorii aproximative ale învelitorilor şi plăcilor.

După cum se ştie (vezi în acest sens lucrările [14], [15], [4]—[9], care figurează în bibliografia articolelor [1], [2]), aproximaţia de ordinul doi a relaţiilor (1) conduce la o eroare relativă de ordinul $\frac{f_1^4 h^4}{L^4}$, eroare relativă care constituie însuşi criteriul de alegere a numărului de termeni din dezvoltările (2) (şi, evident, a oricăror dezvoltări). Acestei erori relative îi corespund învelitorile izotrope la care grosimea este „medie" (vezi [14], [15]).

În articolul nostru [1], în capitolul abordînd problema plăcilor anizotrope, la aceeaşi aproximaţie de ordinul doi pentru $\tau^{\omega 3}$ şi deci la aceeaşi eroare relativă noi am afirmat că teoria este aplicabilă plăcilor subţiri. Folosirea termenului de „subţire" nu poate presupune că am avut în vedere teoria plăcilor anizotrope subţiri, abordată în cazul clasic.

Este clar că nu se poate face această presupunere din motive evidente, care rezultă din scopurile lucrării însăşi. Atunci de ce denumirile de placă subţire în cazul anizotrop [1] şi placă de grosime medie în cazul izotrop [2], deşi s-a considerat aceeaşi aproximaţie de ordin doi pentru $\tau^{\omega 3}$? Răspunsul la această întrebare se obţine cunoscînd rezultatele obţinute în domeniul plăcilor anizotrope de S. A. Ambarţumian [4]—[9]. Astfel, în cazul plăcilor anizotrope este posibil ca placa să fie „geometric" subţire şi totuşi mărimea $\frac{k f_1^2 h^2}{L^2}$ să nu fie neglijabilă faţă de unitate, unde k_1 este un factor fizic reflectînd gradul de anizotropie al materialului plăcii (în cazul izotrop, $k_1 = 0(1)$). În acest caz, evident, teoria plăcii nu mai poate fi abordată în cadrul teoriei clasice, ci în cadrul unei teorii mai rafinate, pentru care mărimea $\frac{f_1^4 h^4}{L^4} f_2 \ll 1$. În cadrul aceleiaşi erori, în cazul izotrop, grosimea plăcii este medie, iar în cazul anizotrop

poate fi și subțire. De aceea, pentru a pune în lumină acest caracter special care intervine în cazul anizotrop, S. A. Ambarțumian a folosit terminologia de placă subțire, terminologie adoptată și de noi în lucrarea [1]. Astfel teoria plăcilor anizotrope [1] și izotrope [2] a fost abordată cu o eroare relativă de ordinul $\frac{f_1^4 h^4}{L^4} f_2$, respectiv $\frac{f_1^4 h^4}{L^4}$.

În acest fel, ecuațiile plăcilor plane deduse în [1], [2], particularizate pentru cazul corpului izotrop prin folosirea expresiilor tensorilor modulelor de elasticitate date prin relațiile (6), corespund teoriei plăcilor plane de grosime medie deduse în cadrul unei erori relative de $\frac{f_1^4 h^4}{L^4}$.

Privitor la ecuațiile (b_1) și (b_2) prezentate în *Considerații asupra unei teorii a plăcilor*, menționăm că exactitatea lor nu a fost verificată de noi.

Sistemul de ecuații aproximativ (b_1), pentru a fi comparat respectiv cu cel corespunzînd teoriei întinderii plăcii de grosime medie dedus de Mușțari și Teregulov [15], trebuie afectat de aceeași eroare relativă. În acest caz, termenul $h^4 a^{\pi\omega} \Delta^2 \overset{0}{\theta}_{\omega}$ trebuie îndepărtat. Diferența care apare în coeficientul lui h^2 se datorește expresiei simplificate considerate pentru $\tau^{\omega 3}$, aferentă întinderii plăcii:

$$\tau^{\omega 3} = p^{\omega}_{(0)}, \frac{z}{h}. \tag{7}$$

Dacă în locul expresiei (7) s-ar considera expresia mai exactă dată de (vezi [2], versiunea în limba română)

$$\tau^{\omega 3} = p^{\omega}_{(0)} \frac{z}{h} + \overset{(3)}{\varphi}{}^{\omega} z \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right), \tag{8}$$

atunci coeficientul lui h^2 în ecuația întinderii plăcii va avea o structură identică cu cel corespunzător sistemului (b_1').

În ceea ce privește sistemul (b_2), care corespunde încovoierii transversale a plăcii de grosime medie (exactitatea sistemului nu a fost verificată de noi), se menționează în *Considerații...* că el coincide cu cel dedus de Mușțari în [14], dar că diferă de ecuația

$$\Delta^2 \left(\overset{(0)}{V}_3 + \frac{8 - 3\nu}{40(1 - \nu)} h^2 \Delta \overset{(0)}{V}_3 \right) = 0. \tag{9}$$

Deoarece în cazul plăcii plane pătrate izotrope simplu rezemate pe întregul contur, de caracteristici $\frac{h}{a} = \frac{1}{3}$, $\nu = 0.3$, sarcina distribuită fiind dată de $p^3_{(0)} = p^{z}_{(0)} \sin \frac{\pi\alpha}{a} \sin \frac{\pi\beta}{b}$, există valoarea exactă a săgeții centrului plăcii obținută în lucrarea [17], vom compara în cele ce urmează valoarea săgeții adimensionale, obținută în acest caz prin diverse teorii.

$\overset{(0)}{V_3}\frac{E}{p^*_{(0)}h}$ Ecuaţia (9)	Teoria exactă [17]	Teoria sugerată de noi	Teoria clasică
5,2	3,492	3,35	2,27

Se constată că teoria propusă de noi conduce la o valoare a săgeţii apropiată de valoarea exactă şi în interiorul domeniului dintre teoria clasică şi cea exactă (aceeaşi concluzie se obţine şi în cadrul teoriei lui E. Reissner [18]). În contrast cu aceasta, ecuaţia încovoierii (9) menţionată în *Consideraţii...* conduce la o valoare a săgeţii adimensionale mult mai mare ca cea obţinută prin teoria exactă.

Rezultă că compararea ecuaţiilor corespunzînd diverselor teorii aproximative îmbunătăţite constituie un criteriu discutabil în aprecierea valabilităţii unor teorii aproximative în raport cu altele tot aproximative. Concludentă este doar compararea soluţiilor obţinute pe baza diverselor teorii aproximative îmbunătăţite cu cea obţinută prin teoria exactă (cînd, evident, o asemenea soluţie există).

Dar la concordanţa ce există între ecuaţiile aproximative corespunzînd diverselor teorii sau chiar dintre soluţia exactă şi cea aproximativă în cazul încovoierii plăcii plane trebuie să adăugăm concordanţa ce există între ecuaţiile învelitorilor de grosime medie stabilite de S. A. Ambarţumian [5]—[9] şi cele obţinute de noi în cazul $e_{33} = \tau^{33} = 0$ şi al plăcilor de grosime medie în cazul $e_{33} = 0$ [7]—[9].

În ceea ce priveşte ecuaţiile obţinute de noi în [1], [2] pentru cazul plăcii plane, compararea lor cu ecuaţiile plăcilor plane subţiri în teoria clasică este lipsită de sens. Problema care s-ar putea pune cel mult ar fi aceea de a verifica dacă ecuaţiile obţinute în [1], [2], particularizate pentru cazul clasic, conduc la ecuaţiile cunoscute din acest caz. Regăsirea prin particularizare a ecuaţiilor care corespund teoriei clasice a plăcilor subţiri izotrope se obţine fără nici o dificultate.

5. În cuprinsul notei *Consideraţii...* se mai face o afirmaţie, care, ca şi cele anterioare acesteia, are un caracter greşit.

Aceasta se referă la nesatisfacerea în cadrul teoriei aproximative a plăcilor plane [1], [2] a ecuaţiilor de echilibru punctuale

$$\pi^{\omega\pi}{}_{|\pi} + \tau^{\omega 3}{}_{,3} = 0. \tag{10}$$

Referitor la aceasta menţionăm că nici o teorie aproximativă care abordează problema învelitorilor şi a plăcilor nu-şi propune satisfacerea exactă a ecuaţiilor de echilibru punctuale, ci doar satisfacerea exactă a momentelor de ordinul n ale ecuaţiilor de echilibru punctuale.

Satisfacerea exactă a ecuaţiilor de echilibru punctuale corespunde satisfacerii exacte a momentelor de ordinul n ale ecuaţiilor de echilibru punctuale, unde $n = 0, 1, \ldots, \infty$. Dar acest lucru, după cum s-a arătat în lucrările [1]—[3] (vezi şi [19], [20]), corespunde soluţiei exacte a teoriei învelitorilor (sau plăcilor) de grosime arbitrară.

6. Fiind convinşi că teoriei fundamentate de noi în lucrările [1], [2] i se pot aduce completări şi îmbunătăţiri (o dovadă în acest sens o constituie însăşi lucrarea noastră [3]), vom primi cu interes orice sugestie sau critică fundamentată ştiinţific, considerînd că numai acestea pot contribui la dezvoltarea teoriei propuse.

Primită la redacţie la 2 decembrie 1966

(Text adăugat la corectură)

În cazul plăcii plane şi cu o eroare relativă de $\frac{f_1^4 f_2 h^4}{L^4}$ ecuaţiile din [1] — [3] pot fi reduse pentru cazul corpului transversal izotrop la sistemul :

a) Ecuaţiile încovoierii transversale

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(W_3 - \delta_1 \frac{h^2}{60}\frac{E\nu'}{E'(1-\nu)} W_3|^{\lambda}_{\lambda}|^{\omega\sigma}_{\omega\sigma}\right) = \left(p^3_{(0)} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} k_0^2 p^3_{(0)}\Big|^{\pi}_{\pi}\right) +$$

$$+ \left(p^{\alpha}_{(1)}|_{\alpha} - \frac{h^2}{60} k_0^2 \; p^{\omega}_{(1)}|^{\pi}_{\omega\pi}\right), \qquad (a)$$

$$\left(\Phi_1 - \frac{h^2}{10}\frac{G}{G'}\Phi_1|^{\sigma}_{\sigma}\right)\Big|^{\lambda}_{\lambda} = \frac{h}{20}\left(\frac{G}{G'}\right)^2 \varepsilon_{\mu\lambda}\, p^{\mu}_{(1)}|^{\omega\lambda\sigma}_{\omega\sigma}$$

unde

$$k_0^2 = \frac{2G}{G'} - \delta_2 \frac{\nu' E}{E'}$$

b) Ecuaţiile de întindere

$$W^{\pi}|^{\omega}_{\omega} + \frac{1+\nu}{1-\nu} W^{\alpha}|^{\pi}_{\alpha} - \delta_2 \frac{16\,G}{189\,E'(1-\nu)^2} h^2(2+\nu-\nu\nu')\, W^{\rho}|^{\omega\pi}_{\omega\rho} +$$

$$+ \frac{1}{Gh} p^{\pi}_{(0)} + \delta_2 h a_1 \, p^{\rho}_{(0)}|^{\pi}_{\rho} + \delta_2 \frac{a_2}{h} p^3_{(1)}|^{\pi} - \delta_2 h a_3 \, p^3_{(1)}|^{\pi\rho}_{\rho} = 0, \qquad (b)$$

$$\Phi_2|^{\omega}_{\omega} - \frac{h^2}{42}\frac{G}{G'}\Phi_2|^{\lambda\omega}_{\lambda\omega} + \frac{h^5}{42}\frac{G}{G'} E a_4 \, \varepsilon_{\mu\lambda} W^{\mu}|^{\omega\lambda\gamma}_{\omega\gamma} = \frac{h^2}{42}\frac{G}{G'}\varepsilon_{\mu\lambda}\left(h^2 a_5 \, p^{\mu}_{(0)}|^{\lambda\gamma}_{\gamma} - \right.$$

$$\left. - h^4 a_6 \, p^{\mu}_{(0)}|^{\omega\lambda\gamma}_{\omega\gamma}\right)$$

unde W_i — sînt deplasările medii ale plăcii definite de $W_i = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} V_i \, dz$; Φ_1, Φ_2 — funcţii potenţiale; δ_1 şi δ_2 factori ce identifică contribuţia adusă de e_{33} şi respectiv τ^{33} (factorii δ_i se consideră egali cu unitatea sau cu zero cînd se ţine seama şi respectiv cînd nu se ţine seama de contribuţia corespunzătoare), $a_1 - a_6$ coeficienţi depinzînd de constantele fizico-mecanice, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — simbolul de permutare.

Sistemul de ecuaţii (*a*) coincide cu cel dedus de A. E. Green pe baza algoritmului lui E. Reissner (vezi [10]), iar sistemul (b) reprezintă analogul pentru cazul întinderii plăcii plane a ecuaţiilor deduse de E. Reissner.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Libresco, *К теории анизотропных упругих оболочек и пластинок*. Инженерный журнал, 3, IV, Москва, 1964, tradusă în St. cerc. mec. apl., **18**, *1*, (1965).
2. — *On the thermoelastic problem of shells treated by eliminating the Love-Kirchoff hypothesis Non-classical Shell Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, P.W.N., Polish — Scientific Publishers, Warsaw, 1964, tradusă în St. cerc. mec. apl., **21**, *2* (1966).
3. — *Contribuţii la teoria învelitorilor şi plăcilor elastice anizotrope*, Comunicare susţinută la Conferinţa de mecanică, Bucureşti, sept. 1965 (sub tipar, 1966).
4. С. А. Амбарцумян, *К теории изгиба анизотропных пластинок*, Известия Акад. наук СССР, ОТН, *5* (1958).
5. С. С. Амбарцумян, Д. В. Пестмалджян, *К теории анизотропных оболочек и пластинок*, Известия Акад. наук Армянской ССР, **XII**, *1* (1959).
6. С. А. Амбарцумян, *К общей теории анизотропных оболочек*, Прикладная матем. и мех., **XII**, *2* (1958).
7. — *К теории изгиба анизотропных пластинок и пологих оболочек*, Приклад. матем. и мех. **XXIV**, *1* (1960).
8. — *On the theory of anisotropic shells and plates. Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity*, Proceedings of IUTAM Symposium, Warsaw, Sept., 1958.
9. С. А. Амбарцумян, *Теория анизотропных оболочек*, Физматгиз, Москва, 1961.
10. A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford Univ. Press, 1953.
11. P. M. Naghdi, *Foundations of Elastic Shell Theory*, Progress in Solid Mechanics, IV, North-Holland Publ., Amsterdam, 1963.
12. Н. А. Килчевский, *Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике*, ГИТТЛ, Москва, 1954.
13. — *Основы аналитической механики оболочек*, Киев, Изд. АН СССР, 1963.
14. Х. М. Муштари, *Теория изгиба плит средней толщины*, Известия Акад. наук СССР, ОТН, *2* (1959).
15. Х. М. Муштари, И. Г. Терегулов, *К теории оболочек средней толщины*, ДАН СССР, 128, 6 (1959).
16. Л. А. Агаловиан, *Применение метода асимптотического интегрирования к построению приближенной теории анизотропных оболочек*, ПММ, Москва, **30**, *2*.
17. Б. Ф. Власов, *Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты*, Вестник МГУ, 2 (1957).
18. E. Reissner, *On the theory of bending of plates*, Journal math. Phys., **23**, 184 (1944).

SINTEZA STRUCTURALĂ A LANȚURILOR CINEMATICE PLANE CU ARTICULAȚII MULTIPLE ȘI CINCI GRADE DE LIBERTATE $L_3 = 5$ „TOTAL", $L_3^p = 5$ „PARȚIAL" ȘI $L_3^{fr} = 3$ „FRACȚIONAT". I*)

N. I. MANOLESCU și IOSIF TEMPEA
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

După ce se prezintă metoda de alcătuire a lanțurilor cinematice plane cu articulații multiple și în special a celor cu $e = 9$ elemente și $c_5 = 11$ articulații, se trece la alcătuirea celor 110 lanțuri cinematice cu articulații multiple provenite din cele 6 lanțuri cinematice cu articulații simple și cu grad de libertate „total" $L_3 = 5$.

Se obțin 10 lanțuri cu articulații multiple și $L_3 = 5$ „total", 88 cu $L_3^p = 5$ „parțial" și 12 cu $L_3^{fr} = 5$ „fracționat".

§. 1. INTRODUCERE

Problema sintezei mecanismelor plane articulate cu două grade de mobilitate se poate rezolva, după părerea noastră, prin alcătuirea în prealabil a lanțurilor cinematice plane articulate cu 5 grade de libertate ($L_3 = 5$). Prin fixarea apoi a unuia dintre elementele lanțurilor astfel alcătuite și prin indicarea elementelor conducătoare, rezultă toate mecanismele-motor plane articulate ca variante distincte structural și cinematic.

Problema sintezei structurale a mecanismelor plane articulate cu un singur grad de mobilitate ($M_3 = 1$) a fost rezolvată complet [1], [2], folosindu-se metoda indicată mai sus.

În aceste lucrări au fost alcătuite și toate mecanismele cu articulații multiple pentru $e = 8$, $c_5 = 10$, folosindu-se reguli precise privind modul de realizare a articulațiilor multiple.

*) Publicată și în Rev. Roum. Sci. Tech. — Mec. appl. (în limba engleză), **12**, 4 (1967).

ST. CERC. MEC. APL. 25 NR. 3. P. 549–572 BUCUREȘTI 1967

În ceea ce privește mecanismele plane articulate cu mai multe grade de mobilitate, în speță $M_2 = 2$, problema a fost rezolvată prin alcătuirea în prealabil a lanțurilor cinematice cu 5 grade de libertate [3], [4], corespunzătoare lui $e = 9$; $c_5^1 = 11$ [1]).

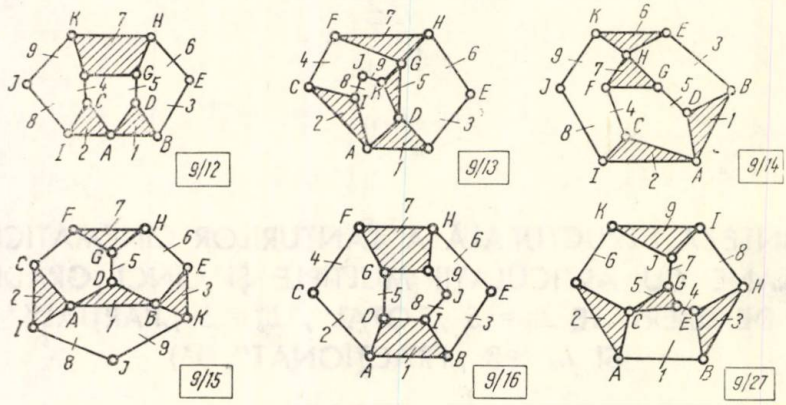


Fig. 1. — Cele 6 lanțuri cu $e = 9c_5^1 = 11$ și $L_3 = 5$ „total".

Din cele 40 de lanțuri care au rezultat, 6 au grad de libertate total (fig. 1). Acestea au fost notate [4] cu 9/12 ; 9/13 ; 9/14 ; 9/15 ; 9/16 ; 9/27.

În lucrarea de față se vor alcătui lanțurile cinematice cu articulații multiple care rezultă din cele 6 lanțuri de mai sus, precum și mecanismele și mecanismele-motor cu articulații multiple, care se vor forma din aceste lanțuri.

§ 2. PRINCIPII ȘI FORMULE CARE STAU LA BAZA ALCĂTUIRII LANȚURILOR CINEMATICE PLANE CU ARTICULAȚII MULTIPLE CU GRAD DE LIBERTATE $L_3 = 5$

§2.1. DEFINIȚII

După cum s-a arătat și în lucrarea [1], o articulație este multiplă atunci cînd pe axa respectivă se află bucelele a mai mult de două elemente. Astfel, articulația din figura 2*a* este simplă, din figura 2*b* dublă și din figura 2*c* triplă.

Se va defini *ordinul de multiplicitate al unei articulații multiple* printr-un număr k plasat la exponent, care va indica numărul total al elementelor articulate la aceasta, din care se scade unitatea.

La o articulație simplă, pe axul de legătură al primului element (1 din fig. 2*a*) se rotește o *bucea*, care aparține elementului al doilea. În acest caz deci $k = 2 - 1 = 1$, iar simbolul care reprezintă numărul acestor cuple este c_5^1.

[1]) În cele ce urmează, articulațiile multiple se vor nota prin indicarea la exponent a gradului de multiplicitate, astfel :

c_5^1 — articulație simplă (se notează astfel cînd se află în structura unui lanț de articulații multiple) ;

c_5^2 — articulație dublă ;

c_5^3 — articulație triplă etc.

La o articulație dublă, pe axul de legătură al primului element (1 din fig. 2*b*) se rotesc *două bucele*, care aparțin celorlalte două elemente. Numărul k de la exponentul simbolului va fi deci $k = 3 - 1 = 2$, iar simbolul c_5^2.

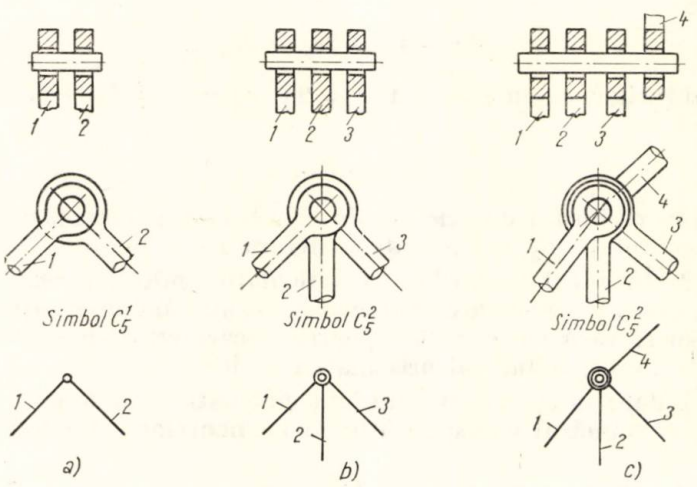


Fig. 2. — Schemele cinematice ale articulațiilor multiple.

În figura 2*c*, pe axul elementului 1 se rotesc 3 *bucele*. Aici vom avea $k = 4 - 1 = 3$ și simbolul c_5^3 etc.

Vom denumi *elemente articulate* numărul total de bare aflate pe același ax al articulației.

Astfel, la o articulație simplă există deci două elemente articulate, la una dublă trei elemente articulate, iar la o articulație cu ordinul de multiplicitate k vor fi $(k + 1)$ elemente articulate.

Elementele articulate din structura unui lanț cinematic se vor nota cu $e_{a(1\ldots k)}$, cifrele din paranteze care urmează după indicele a indicînd ordinele de multiplicitate ale articulațiilor.

Astfel $e_{a(1)}$ este numărul de elemente articulate ale unui lanț cinematic în structura căruia se află numai articulații simple (c_5); $e_{a(12)}$ numărul corespunzător unui lanț cu articulații simple și duble $(c_5^1 + c_5^2)$; $e_{a(1,\,2,\,3)}$, în cazul cînd avem un lanț cu articulații simple, duble și triple $(c_5^1 + c_5^2 + c_5^3)$ etc.

§ 2.2. RELAȚII ÎNTRE $e_{a\,(1\cdots k)}$; c_5^k; n_j și L_3

§ 2.21. La un lanț cu un număr total e de elemente de diferite ranguri j avem

$$e = \sum_{j=2}^{j} n_j, \tag{1}$$

$$e_{a(1)} = 2c_5 = 2n_2 + 3n_3 + \ldots = \sum_{j=2}^{j} jn_j, \tag{2}$$

$$3e - 2c_5 = L_3 \tag{3}$$

Formula (3), care exprimă gradul de libertate al lanțului, se poate scrie și în funcție de gradul de mobilitate:

$$M_3 = L_3 - 3, \tag{4}$$

în care caz

$$3(e-1) - 2c_5 = M_3 \tag{5}$$

În cazul lanțurilor cinematice cu $e = 9$; $c_5 = 11$; $L_3 = 5$, din (2) rezultă că

$$e_{a(1)} = 22.$$

Formula este verificată de oricare din cele 6 lanțuri cinematice, cu grad de libertate „total" $L_3 = 5$, redate în figura 1.

§ 2.22. În cazul lanțurilor cu articulații multiple, relațiile dintre numărul acestora și a elementelor articulate rezultă din observația că numărul lor se micșorează cu o unitate pentru fiecare creștere cu o unitate a ordinului de multiplicitate al articulației multiple.

Astfel, dacă în structura unui lanț cinematic se află și c_5^2 articulații duble, atunci numărul corespunzător al elementelor articulate este

$$e_{a(1,2)} = e_{a(1)} - c_5^2; \tag{6}$$

dacă există și c_5^3 articulații triple, atunci

$$e_{a(1,2,3)} = e_{a(1)} - c_5^2 - 2c_5^3 \tag{7}$$

și, în general,

$$e_{a(1\ldots k)} = e_{a(1)} - \sum_{k=2}^{k} (k-1)\, c_5^k. \tag{8}$$

sau, ținînd seama de (2), relația (8) de mai sus devine

$$e_{a(1\ldots k)} = 2c_5 - \sum_{k=2}^{k} (k-1)\, c_5^k, \tag{9}$$

iar dacă se înlocuiește $2c_5$ din (3) se obține

$$e_{a(1\ldots k)} = 3e - L_3 - \sum_{k=2}^{k} (k-1)\, c_5^k. \tag{10}$$

Formulele (8), (9) și (10) permit determinarea numărului de elemente articulate ale unui lanț cinematic cu articulații multiple în funcție de numărul acestora și fie de numărul de elemente articulate (e_{al}) ale lanțului corespunzător format numai din articulații simple (8), fie de numărul acestora (9) sau de numărul total de elemente și gradul de libertate al lanțului (10).

2.3. *Numărul minim de elemente articulate al* unui lanț cu e elemente și diferite articulații multiple corespunde, evident, lanțului format numai din elemente simple (de rang $j = 2$).

Acest lucru rezultă imediat din formula (2), în care se face $n_3 = n_4 = \ldots n_j = 0$:

$$e_{ak\,\min} = 2n_2 = 2e \text{ [2]} \tag{11}$$

Pentru lanțurile cinematice cu $e = 9$; $c_5 = 11$ din formula (11), rezultă

$$e_{ak\,\min} = 18.$$

§ 2.24. Operația practică de alcătuire a lanțurilor cinematice cu articulații multiple pornind de la cele cu articulații simple se realizează structural prin reducerea succesivă a rangului unui element (prin micșorarea la zero a uneia dintre laturile conturului rigid a elementului respectiv) pînă cînd rangul devine $j = 2$. Această operație se continuă apoi cu celelalte elemente cu $j > 2$ pînă cînd toate elementele lanțului au rangul $j = 2$.

Problema care se pune este determinarea numărului maxim de articulații multiple de un ordin de multiplicitate dat ($c_{5\,\max}^k$), care poate rezulta dintr-un lanț dat cînd acesta are numai elemente de rang $j = 2(n_2)$.

Din formula (8) rezultă

$$\sum_{k=2}^{k} (k-1)\, c_5^k = e_{a(1)} - e_{a(1\cdots k)}. \tag{10'}$$

Valoarea maximă a membrului întîi are evident loc pentru

$$e_{a(1\cdots k)} = e_{ak\,\min}.$$

Înlocuind se obține

$$\text{Max} \sum_{k=2}^{k} (k-1)\, c_5^k = e_{a(1)} - e_{ak\,\text{mtn}} \tag{12}$$

sau, ținînd seama de (2) și (11), avem

$$\text{Max} \sum_{k=2}^{k} (k-1)\, c_5^k = 2(c_5 - e). \tag{12'}$$

Dacă în (12') se face $k = 2$, se obține

$$c_{5\,\max}^2 = 2(c_5 - e); \tag{13}$$

pentru $k = 3$ și $c_5^2 = c_5^4 = \ldots = 0$, avem

$$c_{5\,\max}^3 = (c_5 - e); \tag{14}$$

pentru $c_5^2 = c_5^3 \ldots c_5^{k-1} = 0$ din (12) se obține

$$c_{5\,\max}^k = \frac{2}{k-1}(c_5 - e). \tag{15}$$

În cazul lanțului $e = 9$; $c_5 = 11$ rezultă

$$c_{5\,\max}^2 = 4\,;\; c_{5\,\max}^3 = 2\,;\; c_{5\,\max}^4 = \frac{4}{3}.$$

[2]) Pentru simplificarea notațiilor vom conveni să se noteze acest număr conform formulei (11) și nu $e_{a(1\cdots k)\,\min}$, cum ar fi normal.

Formula de mai sus ne arată că din acest lanț nu se poate forma unul în structura căruia să existe o articulație cvadruplă (c_5^4).

O expresie analogă lui (12′) se obține și din (10):

$$\max \sum_{k=2}^{k} (k-1)\, c_5^k = 3e - L_3 - 2n_2;$$

cum în acest caz $n_2 = 2$,

$$\max \sum_{k=2}^{k} (k-1)\, c_5^k = e - L_3, \tag{12''}$$

iar (15) devine

$$c_{5\,\max}^k = \frac{1}{k-1}(e - L_3) \quad (k > 1). \tag{15'}$$

Pentru lanțul cu $e = 9$, $L_3 = 5$, formula (15′) devine $c_{5\,\max}^k = \dfrac{4}{k-1}$, din care se obține aceleași rezultate ca și din formula (15).

Este de observat că în determinarea lui $c_{5\,\max}^k$ se va opri la valoarea precedentă a lui k pentru care formula (15′) dă o valoare fracționară (4/3) pentru $k=4$ corespunzător lui $e=9$, chiar dacă pentru valori superioare ale lui k se obțin valori întregi. (Se vede că pentru $k = 5$ formula de mai sus dă $c_5^5 = 1$, care nu concordă cu realitatea).

§ 2.5. RELAȚIA DINTRE NUMĂRUL c_5^k și c_5^l

Practic, din două articulații simple rezultă, prin operația indicată la § 2.2 *d*, o articulație dublă. Continuînd operația, din trei articulații simple rezultă una triplă etc.

În consecință,

$$c_5^1 = 2c_5^2,$$
$$c_5^1 = 3c_5^3$$

și, în general,

$$c_5^1 = kc_5^k; \tag{16}$$

din (16) rezultă că între numărul de articulații multiple c_5^k și c_5^l există relația

$$c_5^l = \frac{k}{l} c_5^k. \tag{17}$$

Formulele (16) și (17) servesc la determinarea variantelor posibile de lanțuri cinematice în funcție de numărul și de ordinul de multiplicitate al articulațiilor multiple și de numărul și rangul elementelor folosind în plus și formulele (2), (10′), (15′) și formula cunoscută [4] care dă rangul $j_{\max}$ al elementelor care pot exista în structura unui lanț cinematic dat:

$$j_{\max} = \frac{1}{2}(e + 1 - M_3). \tag{18}$$

§ 3. ALCĂTUIREA LANȚURILOR CINEMATICE PLANE CU ARTICULAȚII MULTIPLE PROVENITE DIN LANȚURILE CINEMATICE CU $e = 9$, $c_5 = 11$, $L_3 = 5$

§ 3.1. STRUCTURA LANȚURILOR CU ARTICULAȚII MULTIPLE

Se vor determina în primul rînd combinațiile de articulații multiple care pot exista într-un lanț cinematic dat (în cazul de față cele 6 lanțuri cu grad de libertate „total" $L_3 = 5$), folosind formulele stabilite în § 2.2. Aceste combinații vor servi la încadrarea lor în grupe, în funcție de numărul și ordinul de multiplicitate al articulțiilor multiple și de numărul și rangul j al elementelor.

Din formula (18), pentru $e = 9$, $c_5 = 11$, $L_3 = 5$ rezultă

$$j_{\max} = 4,$$

iar din formula (10')

$$c_5^2 + 2c_5^3 = 22 - e_{a(1,2,3)}; \tag{10''}$$

cum

$$e_{ak\,\min} = 18,$$

vom avea următoarele valori pentru $e_{a(1,2,3)}$:

$$\begin{aligned} e_{a(1,2)} &= 21, \\ e_{a(1,2)} &= 20, \\ e_{a(1,3)} &= 20, \\ e_{a(1,2,3)} &= 20, \\ e_{a(1,2)} &= 19, \\ e_{a(1,2)} &= 18, \\ e_{a(1,3)} &= 18, \\ e_{a(1,2,3)} &= 18. \end{aligned} \tag{19}$$

Pentru valorile din (19) rezultă următoarele ecuații, din care se rezolvă în numere întregi și pozitive-necunoscutele c_5^3 ; c_5^2 și c_5^1 :

$$e_{a(1,2)} = 21 \ldots c_5^2 + 2c_5^3 = 1, \tag{20}$$

$$e_{a(1,2,3)} = 20 \ldots c_5^2 + 2c_5^3 = 2, \tag{21}$$

$$e_{a(1,2)} = 19 \ldots c_5^2 + 2c_5^3 = 3, \tag{22}$$

$$e_{a(1,2,3)} = 18 \ldots c_5^2 + 2c_5^3 = 4. \tag{23}$$

Din aceste ecuații se obțin soluțiile, ținînd cont de (16) :

din ecuația

(20) $$c_5^1 = 9; \quad c_5^2 = 1; \quad c_5^3 = 0; \tag{20'}$$

din ecuația

(21) $$c_5^1 = 7; \quad c_5^2 = 2; \quad c_5^3 = 0. \tag{21'}$$

din ecuaţia

(21) $c_5^1 = 8\,; \quad c_5^2 = 0\,; \quad c_5^3 = 1\,;$ (21″)

din ecuaţia

(22) $c_5^1 = 5\,; \quad c_5^2 = 3\,; \quad c_5^3 = 0\,;$

din ecuaţia (22′)

(22) $c_5^1 = 6\,; \quad c_5^2 = 1\,; \quad c_5^3 = 1\,;$

din ecuaţia

(23) $c_5^1 = 3\,; \quad c_5^2 = 4\,; \quad c_5^3 = 0\,;$

din ecuaţia

(23) $c_5^1 = 4\,; \quad c_5^2 = 2\,; \quad c_5^3 = 1\,;$ (23′)

din ecuaţia

(23) $c_5^1 = 5\,; \quad c_5^2 = 0\,; \quad c_5^3 = 2.$

Succesiunea practică a operaţiei de alcătuire a acestor lanţuri impune precizarea în primul rînd a tuturor variantelor cu c_5^1 şi c_5^2 corespunzătoare lui $e_{a\,(1)} = 21$ pînă se ajunge la lanţul cu $e_{a\,(1.2)} = e_{ak\,\min} = 18$, după care se determină cele cu $e_{a\,(1.2)} = e_{a\,(1.2.3)} = 20$, apoi a celor cu $e_{a\,(1.2)} = 19$ şi, în sfîrşit, a celor cu $e_{a\,(1.3)} = e_{a\,(1.2.3)} = 18 = e_{ak\,\min}$.

Ecuaţia (2) este valabilă pentru lanţul cinematic cu articulaţii simple (motiv pentru care s-a notat $2c_5 = e_{a\,(1)}$).

În cazul lanţurilor cu articulaţii multiple, formula (2) devine:

$$e_{a\,(1\ldots k)} = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \ldots = \sum_{k=2}^{k} jn_j\,. \tag{24}$$

Din acest grup de ecuaţii, pentru diferitele valori ale lui $e_{a\,(1\ldots k)}$, se rezolvă în numere întregi şi pozitive necunoscutele n_2, n_3, n_4, ...

Pentru cazul de faţă se obţin următoarele ecuaţii:

$$2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 21, \tag{25}$$

$$2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 20, \tag{26}$$

$$2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 19, \tag{27}$$

$$2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 18. \tag{28}$$

Soluţiile ecuaţiilor (25)—(28) corespund pentru articulaţiile multiple ecuaţiilor (26) (23).

La rezolvarea ecuaţiilor de mai sus trebuie să se ţină seama şi de ecuaţia 1 pentru cazul $e = 9$, adică $n_2 + n_3 + n_4 = 9$.

Din ecuaţia (25) corespunzătoare lui $c_5^1 = 9$, $c_5^2 = 1$ ($e_{a\,(1.2)} = 21$) rezultă soluţiile

$$\left.\begin{aligned} n_2 &= 6\,; \quad n_3 = 3\,; \quad n_4 = 0 \\ n_2 &= 7\,; \quad n_3 = 1\,; \quad n_4 = 1 \end{aligned}\right\}; \tag{25′}$$

din ecuația (26) : ($e_{a\,(1,2,3)} = 20$)

$$\left.\begin{aligned} n_2 &= 7\,; \quad n_3 = 2\,; \quad n_4 = 0 \\ n_2 &= 8\,; \quad n_3 = 0\,; \quad n_4 = 1 \end{aligned}\right\}; \tag{26'}$$

din ecuația (27) ($e_{a\,(1,2)} = 19$)

$$n_2 = 8\,; \quad n_3 = 1\,; \quad n_4 = 0\,; \tag{27'}$$

din ecuația (28) ($e_{a\,(1,2,3)} = 18$)

$$n_2 = 9\,; \quad n_3 = 0\,; \quad n_4 = 0. \tag{28'}$$

Din soluțiile (20') — (23') și (25') — (27') se alcătuiește tabela 1, care grupează variantele posibile ale lanțurilor cinematice cu $e = 9$, ($c_5 = 11$, cu articulații multiple în funcție de c_5^k, n_j și $e_{a\,(1\ldots k)}$.

Tabela nr. 1

Variantele distincte de lanțuri cinematice plane cu grad de libertate $l_3 = 5$ și articulații multiple c_5^k $(k = 2, 3)$ în funcție de numărul și felul articulațiilor multiple (c_5^2 ; c_5^3) și de rangul elementelor (n_2, n_3, n_4).

Datele caracteristice ale lanțului			Nr. lanțurilor variante independente	Numărul și felul articulațiilor multiple			Numărul și rangul elementelor lanțului			Nr. variantelor distincte și felul gradului de libertate		
e	c_5	Nr. elementelor articulate		c_5^1	c_5^2	c_5^3	n_2	n_3	n_4	Total	Parțial	Fracțional
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
9	11	$e_{a1,2} = 21$	26	9	1	—	6	3	—	5	16	—
							7	1	1	1	4	—
		$e_{a1,2} = 20$	49	7	2	—	7	2	—	3	39	4
							8	—	1	—	3	—
		$e_{a1,2} = 19$	16	5	3	—	8	1	—	—	13	3
		$e_{a1,2} = 18$	3	3	4	—	9	—	—	—	3	—
		$e_{a1,2} = 20$	6	8	—	1	7	2	—	—	3	1
							8	—	1	1	1	—
		$e_{a1,2,3} = 19$	7	6	1	1	8	1	—	—	4	3
		$e_{a1,3} = 18$	1	5	—	2	9	—	—	—	1	—
		$e_{a1,2,3} = 18$	2	4	2	1	9	—	—	—	1	1
Total variante distincte			110				Total variante distincte după felul gradului de libertate			10	88	12

§ 3.2. TEOREME ÎN LEGĂTURĂ CU FORMAREA ŞI CU STRUCTURA LANŢURILOR CINEMATICE PLANE CU ARTICULAŢII MULTIPLE

TEOREMA 18[3]). *Prin operaţia de alcătuire a lanţurilor cinematice plane cu articulaţii multiple, rangul j al elementelor scade pînă la $j=2$, în timp ce clasa Φ_{zk} a contururilor închise deformabile creşte pînă la valoarea*

$$\Phi_{zk} = \sum_{k=1}^{k} k c_5^k \leqslant \Phi_{zk\,\max} = \Phi_{z\,\max} + \sum_{k=2}^{k} (k-1)\, c_5^k \qquad (29)$$

Conturul închis deformabil de clasă maximă trebuie să conţină toate articulaţiile multiple ale lanţului final rezultat, iar articulaţiile multiple să fie formate din unirea la articulaţiile simple ale conturului iniţial[4]) a articulaţiilor simple, care au aparţinut altor contururi.

Într-adevăr, din lanţul 9/12 din figura 1 *a* rezultă lanţurile cu articulaţii multiple şi cu toate elementele de rang $j = 2$(fig. 3*b* — *f*).

Se vede că clasa celor trei contururi ale lanţului 9/12 este $\Phi_{z\,\max} = 5$ (contururile I, II, III, limitate de cîte cinci articulaţii simple şi cinci elemente).

La lanţul din figura 3*b* (cu $c_5^1 = 3$ şi $c_5^4 = 4$) nu există nici un contur care să cuprindă toate cele patru articulaţii multiple. Din această cauză, conform relaţiei (29), rezultă

$$\Phi_{zk} = 1.1 + 2.3 = 7 < \Phi_{zk\,\max} = 5 + (2-1)\,4 = 9.$$

Formula (29) se aplică la fiecare dintre cele trei contururi ale lanţului, limitate de cîte trei articulaţii duble şi una simplă, adică $c_5^1 = 1$, $c_5^2 = 3$. Acelaşi lucru şi la lanţul din figura 3*c*, la care $\Phi_{zk} = 8 < \Phi_{zk\,\max} = 5 + 1.4 = 9$ (conturul II limitat de 3 articulaţii duble şi 2 simple, adică $c_5^1 = 2$ şi $c_5^2 = 3$).

La lanţul din figura 3*d* (cu $c_5^1 = 5$, $c_5^3 = 2$) se vede că la conturul I, care conţine toate articulaţiile multiple ale lanţului, clasa conform formulei (29) este

$$\Phi_{zk} = 9 = \Phi_{zk\,\max} = 5 + 2.2 = 9.$$

La conturul II al lanţului din figura 3*e* (cu $c_5^1 = 4$, $c_5^2 = 2$, $c_5^3 = 1$), care de asemenea conţine toate articulaţiile multiple ale lanţului, avem însă $\Phi_{zk} = 8 < \Phi_{k\,\max} = 5 + 1.2 + 2.1 = 9$, deoarece în articulaţia triplă *FGH* figurează două articulaţii simple *F* şi *G* care au aparţinut conturului II al lanţului iniţial 9/12.

În sfîrşit, la lanţul din figura 3*f*, clasa conturului II este $\Phi_{zk} = 1.2 + 2.2 + 3.1 = 9 = \Phi_{zk\,\max} = 5 + 1.2 + 2.1 = 9$, deoarece toate articulaţiile multiple ale lanţului şi care fac parte şi din contur s-au obţinut din articulaţiile simple ale celorlalte contururi ale lanţului iniţial.

TEOREMA 19. *În operaţia de alcătuire a lanţurilor cinematice cu articulaţii multiple trebuie evitată posibilitatea apariţiei unei grupe assurice legată cu articulaţiile sale exterioare la acelaşi element al lanţului, deoarece în acest caz partea corespunzătoare a lanţului se rigidizează.*

---

[3]) Pentru asigurarea unei continuităţi cu lucrările anterioare [4] şi [5], teoremele din lucrarea de faţă se vor numerota în continuare.

[4]) Pentru simplificare se va scrie în continuare numai „contur închis" în loc de „contur închis deformabil".

Astfel, dacă din lanțul 9/15 (fig. 4*a*) articulațiile duble AI și BK se realizează prin menținerea constantă ($\Phi_z = 5$) a clasei conturului II ($ABKJI$), atunci apare în lanțul cu articulații multiple rezultat (fig. 4*b*) o diadă (8,9) legată la elementul 1, iar lanțul se reduce în acest caz la unul cu 7 elemente și $L_3 = 5$.

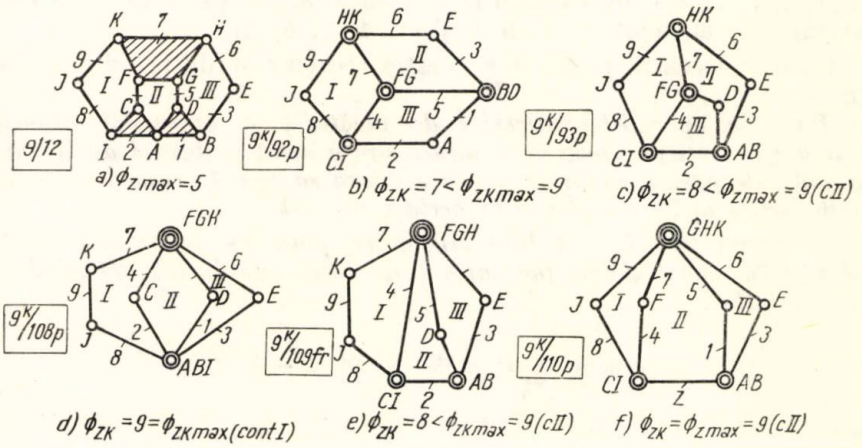


Fig. 3. — Clasa $\Phi_{zk\,max}$ a lanțurilor cinematice cu articulații multiple c_5^k și elemente simple (de rang $j = 2$) conform teoremei 1.

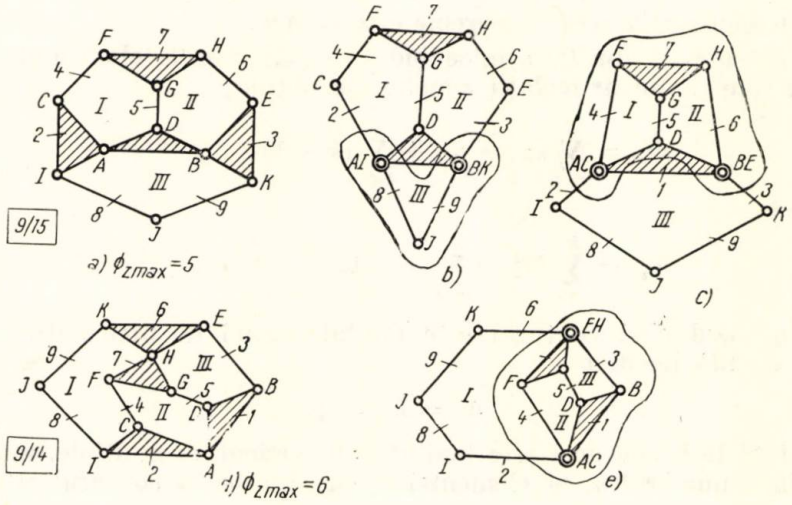


Fig. 4. — Cazuri de apariție a grupelor assurice legate la același element în operația de alcătuire a lanțurilor cinematice plane cu articulații multiple: *b* — diada (8,9) legată la elementul 1; *c* — triada (4, 5, 6, 7) legată la elementul 1; *e* — grupa de cl. IV/2 legată (tetrada) la elementul 3 (teorema 19).

Dacă din același lanț (fig. 4*a*) articulațiile duble AC și BE se realizează prin menținerea constantă a clasei ($\Phi_z = 5$) a celor două contururi I

şi II, atunci apare o triadă (4, 5, 6, 7) legată la acelaşi element 1 şi lanţul se transformă într-unul cu 5 elemente simple (1, 2, 8, 9, 3) (fig. 4*c*).

Dacă din lanţul 9/14 (fig. 4 *d*) articulaţiile duble *EH* şi *AC* se realizează prin menţinerea constantă ($\Phi_z = 5$) a contururilor II şi III, atunci în lanţul cu articulaţii multiple rezultat (fig. 4 *e*) apare grupa de clasa IV/2 (1, 4, 7, 5) (tetrada) legată la elementul *3*. Lanţul se transformă deci într-unul cu 5 elemente 2, 8, 9, 6 şi (1, 4, 7, 5, 3).

Ca o consecinţă practică a acestei teoreme se desprinde regula următoare:

Dacă în operaţiile succesive de alcătuire a lanţurilor cinematice cu articulaţii multiple clasa Φ_z a unuia sau a două contururi vecine rămîne constantă, este posibil ca în structura acestora să apară grupe assurice legate cu toate articulaţiile exterioare la acelaşi element.

TEOREMA 20. *La un lanţ cinematic plan cu articulaţii multiple, numărul elementelor n_z care fac parte dintr-un contur închis deformabil este dat de relaţia*

$$n_z = \sum_{k=1}^{k} c_5^k = \Phi_{zk} - \sum_{k=2}^{k} (k-1)\, c_3^k, \tag{30}$$

în care:

Φ_{zk} este clasa conturului determinată de numărul articulaţiilor simple echivalente care limitează conturul;

c_5^k — numărul cuplelor cinematice de ordinul de multiplicitate k care fac parte din conturul de clasă Φ_{zk}.

Demonstraţia acestei teoreme este simplă.

Într-adevăr, din (29), înlocuind pe $\Phi_{z\,max}$ prin Φ_z (clasa unui contur limitat numai din articulaţii simple), se obţine

$$\Phi_{zk} = \sum_{k=1}^{k} k c_5^k = \Phi_z + \sum_{k=2}^{k} (k-1)\, c_5^k,$$

de unde

$$\Phi_z = \sum_{k=1}^{k} k c_5^k - \sum_{k=2}^{h} (k-1)\, c_5^k = \sum_{k=1}^{k} c_5^k.$$

În cazul cînd conturul este limitat numai de articulaţii simple, atunci rezultă imediat

$$\Phi_z = n_z = c_5^1. \tag{31}$$

Dacă însă conturul este limitat şi de articulaţii multiple, atunci Φ_z reprezintă numărul n_z al elementelor care limitează conturul respectiv, adică

$$\Phi_z = n_z = \sum_{k=1}^{k} c_5^k,$$

deci tocmai formula (30).

A doua egalitate a formulei (30) rezultă tot din (29), în care se înlocuieşte $\Phi_{z\,max}$ prin $\Phi_z = n_z$.

TEOREMA 21, *privind stabilirea felului gradului de libertate al lanțurilor cinematice plane cu articulații multiple, obținute din lanțuri cu articulații simple și grad de libertate „total"* $L_3 = 5$.

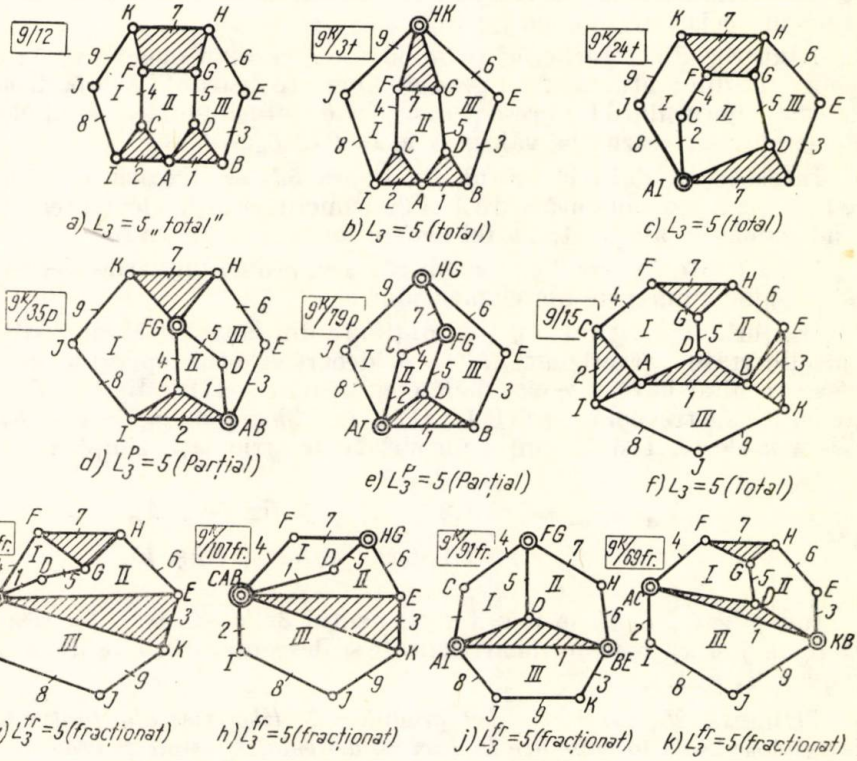


Fig. 5. — Stabilirea felului gradului de libertate ale lanțurilor cinematice cu articulații multiple conform teoremei 21.

a) dacă prin operația de mai sus, la creșterea clasei Φ_{zk} a conturului numărul elementelor acestuia rămîne constant și este dat de:

$$n_z = L_3 \tag{32}$$

și toate contururile lanțului respectă relația (32), atunci gradul de libertate al lanțului cu articulații multiple este „total" ($L_3 = 5$);

b) dacă însă, prin aceeași operație, la creșterea sau la menținerea constantă a clasei Φ_{zk} unui contur numărul n_z al elementelor scade astfel încît

$$n_z = L_3 - 1 \tag{33}$$

atunci lanțul rezultat are gradul de libertate „parțial" ($L_3^p = 5$);

c) dacă lanțul cu articulații multiple rezultat are cel puțin două contururi cu $n_z = L_3 - 1$ iar unul dintre elemente conține un număr de articulații

$$j_{k\max} = \sum kc_5^k \geqslant \frac{1}{2}(e + 4 - L_3), \tag{34}$$

atunci gradul de libertate este „fracționat".

Din figura 5 se poate demonstra teorema de mai sus.

Astfel, lanțurile din figurile 5*b* și 5*c* cu $c_5^1 = 9$; $c_5^2 = 1$, obținute din lanțul 9/12, au grad de libertate „total" $L_3 = 5$, deoarece, deși clasa contururilor I și III (fig. 5*b*), respectiv I și II (fig. 5*c*), a crescut de la $\Phi_z = 5$ la $\Phi_{zk} = 6$, numărul n_z al elementelor acestora a rămas constant, respectînd în același timp condiția (32).

Lanțurile din figurile 5*d* și 5*e* cu $c_5^1 = 7$, $c_5^2 = 2$, respectiv $c_5^1 \cdot 5$; $c_5^2 = 3$ obținute tot din lanțul 9/12,au grad de libertate „parțial" $L_3^p = 5$, deoarece, deși clasa conturului II a crescut la $\Phi_{zk} = 6$, totuși numărul n_z al elementelor acestuia a scăzut la valoarea $n_z = 4 < L_3 = 5$.

Într-adevăr, dacă la lanțul din figura 5*d* se fixează elementul 2 și se aleg elemente conducătoare 1 și 3, atunci mișcările elementelor 4 și 5 depind numai de ale lui 1. La fel pentru lanțul din figura 5*e*.

Dacă 1 este fix, iar 2 și 3 conducătoare, atunci mișcările elementelor 4 și 5 depind numai de ale elementului 2.

Lanțurile din figura 5 *g*— k, obținute din lanțul 9/15, au toate gradul de libertate „fracționat" $L_3^{fr} = 5$, deoarece prin operația de alcătuire au rezultat la fiecare cîte două contururi (I și III la fig. 5*g* și *k*) sau chiar toate cele trei contururi (I, II, III la fig. 5*h* și *j*) au $n_z = 4 < L_3 = 5$, iar elementele (3, 1 și 7) conțin un număr de articulații simple :

$$j_{k\,\max} = \sum kc_5^k = 1.2 + 3.1 = 5 \text{ (fig. 5}g \text{ și } h\text{)},$$
$$= 1.1 + 2.2 = 5 \text{ (fig. 5}j \text{ și } k\text{)}.$$

Într-adevăr, dacă se face fix elementul 3 (la fig. 5*g* și *h*), respectiv 1 (la fig. 5 *j* și *k*), mecanismele rezultate se descompun în cîte două mecanisme cu $M_3 = 1$.

TEOREMA 22, *privind felul gradului de libertate ale lanțurilor cu articulații multiple formate din lanțuri cu articulații simple și grad de libertate „parțial"* $L_3^p = 5$:

Din lanțurile cu articulații simple și grad de libertate „parțial" nu se pot obține prin operația de formare decît lanțuri cu articulații multiple și grad de libertate „parțial" sau „fracționat".

Acest lucru este evident dacă se ține seama de teorema 21 de mai sus și de teoremele 9 și 10 din lucrarea [5], privind definiția lanțurilor cinematice cu articulații simple cu grad de libertate „parțial" și „fracționat" (din lanțurile 9/1 — 9/11 ; 9/17—9/26 ; și 9/28—9/35 din lucrarea [4] se pot forma numai lanțuri cu articulații multiple și grad de libertate „parțial" sau „fracționat".

TEOREMA 23 *privind felul gradului de libertate al lanțurilor cu articulații multiple formate din lanțuri cu articulații simple și grad de libertate „fracționat"* $L_3^{fr} = 5$:

Din astfel de lanțuri nu se pot forma decît lanțuri cu articulații multiple cu grad de libertate „fracționat".

În cazul lanțurilor 9/36 — 9/40 din lucrarea [4] cu grad de libertate „fracționat" $L_3^{fr} = 5$, rezultă în mod evident numai lanțuri cu articulații multiple cu grad de libertate „fracționat", deoarece fiecare dintre ele se încadrează în teoremele nr. 10 și 21 *c*.

§ 3.3. DETERMINAREA NUMĂRULUI DE VARIANTE DISTINCTE STRUCTURAL ALE LANȚURILOR CU ARTICULAȚII MULTIPLE REZULTATE DIN CELE 6 LANȚURI CU $e = 9, c_5 = 11$ ȘI GRAD DE LIBERTATE „TOTAL" $L_3 = 5$

În tabela 2 s-au centralizat cele 110 lanțuri cu articulații multiple provenite din cele 6 lanțuri de mai sus. Ele au fost numerotate de la 1 la 110 și grupate în ordinea succesivă a alcătuirii lor.

Tabela Nr. 2

Lanțurile cinematice plane cu articulații multiple cu $e = 9$, $c_5 = 11$ și grad de libertate „total" „parțial" sau „fracționat" $L_3 = 5$ provenite din lanțurile cu grad de libertate total și articulații simple.

Nr. și felul sirt.	Nr. și rangul elem.	SCHEME STRUCTURALE Felul gradului de libertate: „parțial", „total", „fracționat"				
$c_5=9$ $c_6^1=1$	$n_2=6$ $n_3=3$	(1) Partial	(2) Partial	(3) Total	(4) Partial	(5) Partial
		(6) Total	(7) Partial	(8) Total	(9) Partial	(10) Partial
		(11) Partial	(12) Partial	(13) Total	(14) Partial	(15) Partial
		(16) Partial	(17) Partial	(18) Partial	(19) Partial	(20) Total
		(21) Partial				
	$n_2=7$ $n_3=1$ $n_4=1$	(22) Partial	(23) Partial	(24) Total	(25) Partial	(26) Partial

Tabela nr. 2 (continuare)

Nr. și felul/ art.	Nr. și rangul elem.	SCHEME STRUCTURALE Felul gradului de libertate: „partial", fracționat"				
		(27) Partial	(28) Partial	(29) Partial	(30) Partial	(31) Fractional
		(32) Partial	(33) Partial	(34) Partial	(35) Partial	(36) Partial
	$n_2=7$	(37) Partial	(38) Total	(39) Partial	(40) Fractionat	(41) Partial
$C_5^1=7$		(42) Partial	(43) Partial	(44) Partial	(45) Partial	(46) Partial
$C_5^2=2$	$n_3=2$	(47) Fractionat	(48) Partial	(49) Total	(50) Partial	(51) Partial
		(52) Partial	(53) Partial	(54) Partial	(55) Partial	(56) Partial
		(57) Partial	(58) Partial	(59) Partial	(60) Partial	(61) Partial
		(62) Total	(63) Partial	(64) Partial	(65) Partial	(66) Partial

Tabela nr. 2 (continuare)

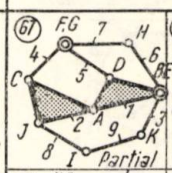
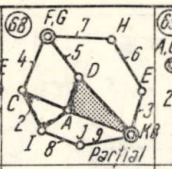
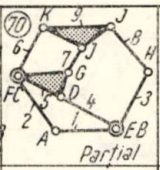
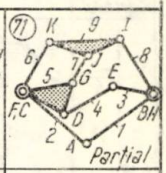
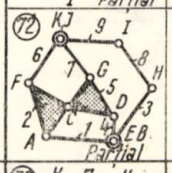
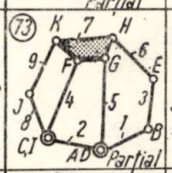
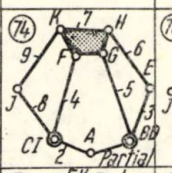
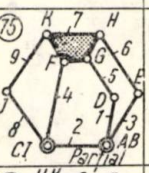
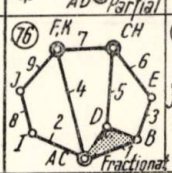
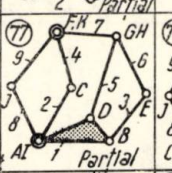
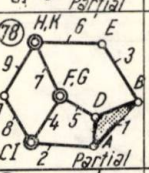
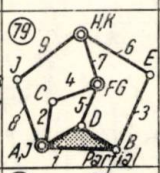
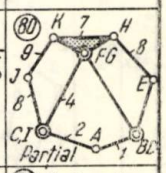
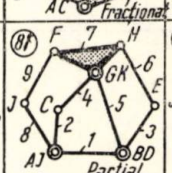
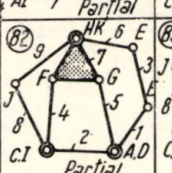
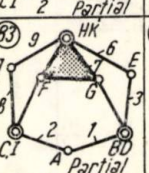
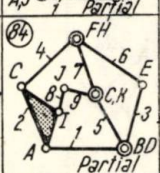
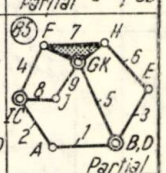
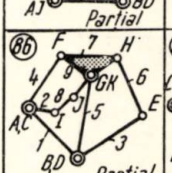
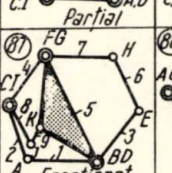
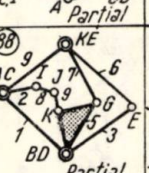
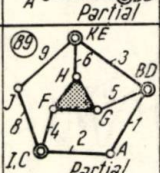
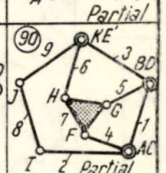
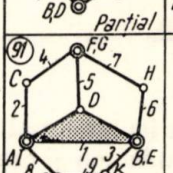
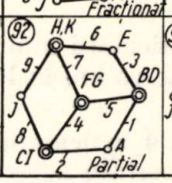
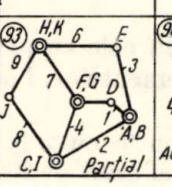
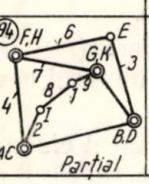
Nr. și felul artic.	Nr. și rangul elem.	SCHEME STRUCTURALE Felul gradului de libertate: „parțial", „total", „fracționat"				
$C_5^1=7$ $C_5^2=2$	$n_2=7$ $n_3=2$	(67) 	(68) 	(69)	(70) 	(71) 
		(72) 				
	$n_2=8$ $n_4=1$	(73) 	(74) 	(75) 		
$C_5^1=5$ $C_5^2=3$	$n_2=8$	(76) 	(77) 	(78) 	(79) 	(80) 
		(81) 	(82) 	(83) 	(84) 	(85) 
	$n_3=1$	(86) 	(87) 	(88) 	(89) 	(90) 
		(91) 				
$C_5^1=3$ $C_5^2=4$	$n_2=9$	(92) 	(93) 	(94) 		

Tabela nr. 2 (continuare)

Nr. și felul articulației	Nr. și rangul elementului	SCHEME STRUCTURALE Felul gradului de libertate „parțial", „total", „fracționat"				
$C_5^1=6$	$n_2=7$ $n_3=2$	(95) Partial	(96) Partial	(97) Partial	(98) Fracționat	
$C_5^3=1$	$n_2=8$ $n_4=1$	(99) Partial	(100) Total			
$C_5^1=5$ $C_5^2=1$ $C_5^3=1$	$n_2=8$ $n_3=1$	(101) Partial	(102) Fracționat	(103) Partial	(104) Partial	(105) Fracționat
		(106) Partial	(107) Fracționat			
$C_5^1=5$ $C_5^3=2$	$n_2=9$	(108) Partial				
$C_5^1=4$ $C_5^2=2$ $C_5^3=1$	$n_2=9$	(109) Fracționat	(110) Partial			

Principiile de notare a lanțurilor plane cu articulații multiple vor fi asemănătoare cu cele din lucrarea [5], privind mecanismele și mecanismele-motor cu articulații simple.

Pentru a putea fi diferențiate, la cele cu articulații multiple, cifrei $e(= 7, 9, \ldots)$ care indică numărul elementelor, i se va afecta la exponent litera k.

Astfel, $9^k/3t$ indică lanțul cinematic cu $e = 9$ articulații multiple, cu numărul de ordine 3 din tabela 2 și grad de libertate $L_3 = 5$ „total"; $9^k/18\ p$ indică lanțul cu $e = 9$ articulații multiple, cu numărul de ordine 18 din tabela 2 și grad de libertate $L_3^p = 5$ „parțial"; $9^k/109\ fr$ este lan-

țul cu numărul de ordine 109 din aceeași tabelă 2, cu grad de libertate $L_3^{fr} = 5$ „fracționat".

Prin operația de alcătuire au rezultat astfel următoarele lanțuri:

cu $L_3 = 5$ „total"	10 lanțuri
cu $L_3 = 5$ „parțial"	88 lanțuri
cu $L_3 = 5$ „fracționat"	12 lanțuri

Numărul de ordine al lanțului s-a notat în partea stîngă de sus, încadrat într-un cerc, iar în dreapta jos s-a notat felul gradului de libertate.

În primele două coloane ale tabelei sînt indicate caracteristicile lanțurilor;

— numărul și gradul de multiplicitate k al articulațiilor (c_5^k);

— numărul și rangul j al elementelor componente (n_j).

În tabela 3, cele 110 lanțuri au fost grupate atît după numărul e_{ak} al elementelor articulate și cele două criterii din tabela 2 (c_5^k, nj) cît și după lanțurile cu articulații simple din figura 1 din care au provenit.

În partea inferioară a căsuței, în care s-a trecut numărul de lanțuri, s-a indicat în paranteze numărul de ordine din tabela 2.

Astfel, de exemplu, din lanțul 9/12 rezultă prin operația de alcătuire pentru lanțuri cu $L_3 = 5$ „total" grupate după c_5^k și n_j (cu numărul de ordine 3, 24, 38 și 100) etc.

§ 3.4. Dificultățile identificării variantelor nedistincte structural în metoda de alcătuire a lanțurilor cu articulații multiple se elimină ținînd seama de următoarele observații:

a) În cazul cînd două astfel de lanțuri provin din același lanț inițial (cu articulații simple):

— articulațiile multiple ale ambelor lanțuri să aibă în componența lor același număr de elemente articulate și de același rang j;

— să se încadreze în aceeași grupă de clasificare după c_5^k și n_j din tabela 1;

— valoarea n_z a celor trei contururi inchise să fie aceeași la ambele lanțuri.

Diferențele poziționale ale articulațiilor multiple se elimină prin rotația cu 180° a unui contur de elemente în jurul unei axe din planul lanțului.

b) În cazul cînd provin din lanțuri inițiale diferite:

— să îndeplinească aceleași condiții de mai sus, cu excepția valorii n_z a contururilor închise. Acestea din urmă se pot face însă identice prin rotirea cu 180° a unui contur de elemente în jurul unei axe din planul lanțului și care trece prin două articulații multiple care diferențiau aparent între ele cele două lanțuri.

Astfel în figura 6 sînt date două exemple de astfel de lanțuri cu articulații multiple, care la prima vedere par diferite, însă, analizate după criteriile de la lit. a) și lit. b), se constată că sînt identice.

Tabela

Proveniența lanțurilor cinematice plane articulate grad de libertate $L_3 = 5$ total.

Datele caract. ale lanțului			Lanțurile cu articulații multiple obținute						
			9/12			9/13			
Numărul elementelor articulate	Numărul și felul cuplelor	Numărul și rangul elementelor	Total	Parțial	Fracționat	Total	Parțial	Fracționat	Total
$e_{a_{1,2}} = 21$	$c_5^1 = 9$	$n_3 = 8$ $n_3 = 3$	1 (3)	2 (1, 2)	—	2 (6, 8)	4 (4, 5, 7, 9)	—	1 (13)
	$c_5^2 = 1$	$n_2 = 7$ $n_3 = 1$ $n_4 = 1$	1 (24)	2 (22, 23)	—	—	—	—	—
$e_{a_{1,2}} = 20$	$c_5^1 = 7$	$n_2 = 7$ $n_3 = 2$	1 (38)	10 (27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37)	1 (31)	1 (49)	11 (39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48 50, 51, 52)	2 (40, 47)	1 (62)
	$c_5^2 = 2$	$n_2 = 8$ $n_4 = 1$	—	3 (73, 74, 75)	—	—	—	—	—
$e_{a_{1,2}} = 19$	$c_5^1 = 5$ $c_5^2 = 3$	$n_2 = 8$ $n_3 = 1$	—	7 (77, 78, 79, 80, 81, 82, 83)	1 (76)	—	4 (84, 85, 86, 88)	1 (87)	—
$e_{a_{1,2}} = 18$	$c_5^1 = 3$ $c_5^2 = 4$	$n_2 = 9$	—	2 (92, 93)	—	—	1 (94)	—	—
$e_{a_{1,3}} = 20$	$c_5^1 = 8$	$n_2 = 7$ $n_3 = 2$	—	2 (95, 96)	—	—	1 (97)	—	—
	$c_5^3 = 1$	$n_2 = 8$ $n_4 = 1$	1 (100)	1 (99)	—	—	—	—	—
$e_{a_{1,2,3}} = 20$	$c_5^1 = 6$ $c_5^2 = 1$ $c_5^3 = 1$	$n_2 = 8$ $n_3 = 1$	—	4 (101, 103, 104, 106)	2 (102, 105)	—	—	—	—
$e_{a_{1,3}} = 18$	$c_5^1 = 5$ $c_5^3 = 2$	$n_2 = 9$	—	1 (108)	—	—	—	—	—
$e_{a_{1,2,3}} = 18$	$c_5^1 = 4$ $c_5^2 = 2$ $c_5^3 = 1$	$n_2 = 9$	—	1 (110)	1 (109)	—	—	—	—
Total variante obținute din cele șase lanțuri în funcție de felul gradului de libertate			4	35	5	3	21	3	2

nr. 3

cu articulaţii multiple cu $c = 8$ elemente şi $e_5 = 11$ cuple cu partial sau fracţionat

din lanţurile cinematice plane articulate cu articulaţii simple

9/14		9/15			9/16			9/27		
Parţial	Fracţionat	Total	Parţial	Fracţionat	Total	Parţial	Fracţionat	Total	Parţial	Fracţionat
3 (10, 11, 12)	—	—	5 (14, 15, 16, 17, 18)	—	—	2 (25, 26)	—	1 (20)	2 (19, 21)	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9 (53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61)	—	—	6 (63, 64, 65, 66, 67, 68)	1 (69)	—	—	—	—	3 (70, 71, 72)	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2 (30, 31)	—	—	—	1 (91)	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	1 (98)	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	1 (107)	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	—	—	11	4	—	2	—	1	5	—

Astfel, lanțul $9^k/79\ p$ din figura 6 *a* are :

— o articulație dublă (AL) cu elemente articulate de rang 2 și 3 ($n_2' - n_2' - n_3'$) ;

— două articulații duble (FG și NK) cu cîte 3 elemente articulate de rang $2(n_2' - n_2' - n_2')$;

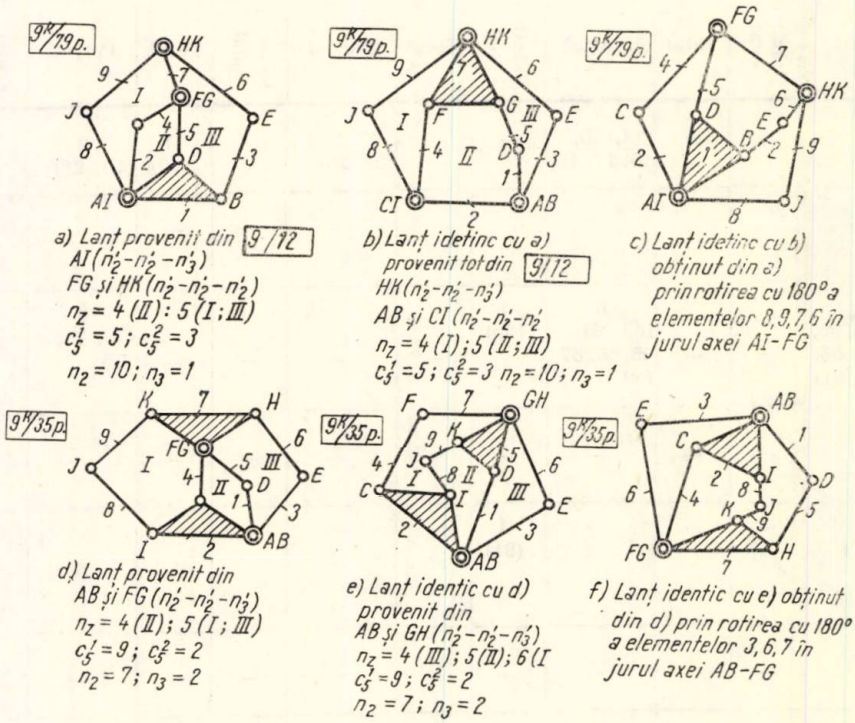


Fig. 6. — Criterii de identificare a variantelor nedistincte structural.

— $n_z = 4$ (conturul II) ; $n_z = 5$ (contururile I și III) ;

— $c_5^1 = 5$; $c_5^2 = 3$; $n_2 = 10$; $n_3 = 1$.

Aceleași caracteristici le are și lanțul din figura 6 *b*, cu deosebirea că în figura 6 *a* conturul II cu $n_z = 4$ este în interior, pe cînd în figura 6b conturul I cu $n_z = 4$ este în exterior. La lanțurile din figura 6 *d* și *e* diferă și valorile lui n_z.

Schemele din figura 6 *c* și *f* au devenit identice cu cele din figura 6 *a*, respectiv *d*, prin operația de rotire a grupei de elemente 6, 7, 9, 8 în jurul axei $AT - FG$ (din fig. 6*a*) sau 3, 6, 7, în jurul axei $A.B—F.G$ (din fig. 6 *d*). Indicarea din figura 6 a modului de notare a rangului *j* a elementelor care formează o articulație multiplă este adoptată din lucrarea[1].

În lucrarea următoare se vor alcătui, pe baza a cinci teoreme stabilite, mecanismele și mecanismele-motor cu articulații multiple care rezultă din cele 98 de lanțuri cu $L_3 = 5$ „total" și $L_3^p = 5$ „parțial" grupate în tabela 2.

Primită la redacție la 28 iulie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. KURT HAIN A. —W. ZIELSTORFF, *Systematik der zwangläfigen achtgliedrigen Getriebe* Maschinenmarkt, Würzburg, *37*, 14—20 (1964).
2. — *Die zwangläufigen achtgliedrigen Getriebe mit Einfach-und Mehrfachgelenken*, Maschinenmarkt, Würzburg, **70**, *64*, 12 — 16 (1964).
3. F. R. E. CROSSLEY, *A Contribution to Grüber's Theory in the Number Synthesis of Plane Mechanisms*. Journal of Engineering for Industry, February 1964. Transactions of the ASME, series B, p. 1 — 8.
4. N. I. MANOLESCU, *O metodă unitară de alcătuire a lanțurilor cinematice și a mecanismelor plane de diferite grade de libertate și mobilitate*, St. Cerc. mec. apl., **17**, *6*, 1465—1512 (1964); Rev. roum. sci. tech., série de Mécanique appliquée, **9**, *4*, 1269—1313 (1964).
5. — *Sistematizarea și clasificarea mecanismelor-motor plane articulate cu două grade de mobilitate „total" ($M_3 = 2$) și „parțial" ($M_3 = 2$)*, St. cerc. mec. apl., **19**, *4*, 933—976 (1965); Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée, **10**, *4* (1965).
6. N. I. MANOLESCU, I. ERCEANU, P. ANTONESCU, *Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate*, St. cerc. mec. apl., **13**, *6*, 1483 — 1539 (1962); revue de Mécanique appliquée, **VIII**, *5*, 817 — 858 (1963); **IX**, *2*, 341 — 363 (1964).
7. N. I. MANOLESCU, V. MANAFU, *Sur la détermination du degré de mobilité des mécanismes*, Bulet. Inst. polit. Buc., **XXV**, *5*, 45 — 66 (1963).
8. И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, Н. И. ЛЕВИЦКИЙ, *Синтез плоских механизмов*, Физматгиз, Москва, 1959, p. 800.
9. KURT HAIN, AUGUST-WILH. ZIELSTORF, *Die höheren Koppelebenen der sechs-und achtgedrigen, zwangläufigen Getriebe*, Maschinenmarkt, Würzburg, **70**, *81*, 19 — 27 (1964).
10. — *Höhere Winkelübertragungen in sechs-und achtgliedergen zwangläufigen Getrieben*, Maschinenmarkt, Würzburg, **71**, *3*, 18—23 (1965).
11. KURT HAIN, *Angewanete Getriebelehre*, 2 Aufl. VDI-Verlag, GmbH, Düsseldorf, 1961, 205 — 212.
12. M. KIRCHHOF, *Das Gelenkfünfeck und sein Bewegungsbereich*, Maschinenbautechnik, **12**, *2*, 99 — 106 (1963).
13. — *Entwurf fünfgliedriger Zweikurbelgetriebe unter Berücksichtigung des Übertragungswinkels*, Maschinenbautechnik (Getriebetechnik), **12**, *6*, 328—332 (1963).
14. F.R.E. CROSSLEY, *The Permutations of Ten-Link-Plane Kinematic Chains*, Antriebstechnik, **3**, *5*, 181—185 (1964).
15. — *The Permutations of Kinematic Chains of Eicht Members or less from the Graph-Teoretic Viewpoint*, în *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 2, Oxford, Pergamon Press, 1965, p. 467—486.
16. П. А. МАЛИШЕВ, Кинематика механизмов, Гизлегпром, 1933.
17. В. В. ДОБРОВОЛЬСКИЙ, И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, *Структура и классификация механизмов*, АН СССР, 1939.
18. П. Л. ЧЕБЫШЕВ, *О параллелограмах*, том II, Сочи, СПВ, 1907, p. 86, 106.
19. Г. Г. БАРАНОВ, *Классификация, строение, кинематика и кинетостатика плоских механизмов с парами первого рода*, Труды АН СССР, 1948, p. 5—20.
20. С. Н. КОЖЕВНИКОВ, *Теория механизмов и машин*, Машгиз, Киев, 1954, p. 39—43.
21. W. LICHTENHELD, *Konstruktionslehre der Getriebe*, Berlin, Akademie-Verlag, 1961.
22. M. GRÜBLER, *Getriebelehre*, Berlin, 1917.
23. ROBERT KRAUSS, *Getriebelehre*, vol. 1 — 3, Berlin, Verlag-Technik, 1951 — 1956.
24. R. C. BOGDAN, CR. PELECUDI, *Contribuții la cinematica diadei Cebîșiov*, St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959); Rev. mec. appl. Acad. R.S.R., **5**, *2* (1960).
25. R. C. BOGDAN *Utilizarea analizei armonice în studiul grupelor asurice plane de aspectul II și III*, St. cerc. apl., **XIV**, *2* (1963).
26. — *Considerații analitice asupra grupelor cinematice cu două elemente*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *1* (1964).
27. — *Studiul general, prin serii armonice complexe, asupra mecanismelor cu cinci elemente articulate*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *2* (1964); Rev. roum. sci. tech., série de Mécanique appliquée, **9**, *4* (1964).
28. — *Cercetarea grupelor asurice în construcția mecanismelor prin serii armonice complexe și metoda mecano-electronică*, Lucrare de disertație, 21 noembrie, 1964, Institutul politehnic, București.

29. Radu Voinea, M. Atanasiu, *Contribuții la determinarea stării cinematice a unui mecanism prin metoda sistemelor conjugate*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *1* (1963).
30. — *Contribuții la determinarea pe cale analitică a vitezelor și accelerațiilor la un mecanism plan*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *2* (1963).
31. — *Determinarea vitezelor și accelerațiilor la un mecanism prin metoda ciclurilor independente*, St. cerc. mec. apl. **XV**, *1* (1964).
32. D. Mangeron, C. Drăgan, O. Munteanu, *Studiul mecanismelor cinematice inferioare bazat pe metoda accelerațiilor* reduse, Bul. Inst. polit. Iași, N. S., **2** (**6**), *3—4*, 263—281 (1956).
33. D. Mangeron, C. Drăgan, *Studiul mecanismelor spațiale prin metoda accelerațiilor reduse*, St. cerc. mec. apl., **12**, *5*, 1025 — 1046 (1961).
34. A. I. Zilbermann, *Aplicarea metodei accelerațiilor reduse la analiza cinematică a mecanismelor plane de cl. a III-a*, St. cerc. șt. fiz. tehn. Acad. R.P.R. Fil. Iași, 1958, **9**, *1*, 39—56.

METODA CONTURURILOR ÎN SINTEZA NUMERICĂ ŞI STRUCTURALĂ A LANŢURILOR CINEMATICE

CHR. PELECUDI
Centrul de mecanica solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

531.1

Prin sinteza numerică se determină numărul contururilor deformabile de diferite complexităţi ale lanţurilor cinematice plane, care apoi, prin sinteza structurală, conduce la construcţia simplă a schemelor distincte. Noua metodă a contururilor are avantaje deosebite în prevederea posibilităţilor de aplicare a metodelor de analiză şi sinteză cinematică ale mecanismelor complexe. Lucrarea cuprinde sinteza numerică şi structurală a lanţurilor cinematice cu 0, 1, 2 grade de mobilitate şi este completată cu lanţurile supraconstrînse cu grade de mobilitate negative −2, −1, precum şi cu lanţurile cinematice de familia a patra, care cuprind numai cuple de translaţie.

Cercetarea structurală şi cinematică în scopul determinării schemei lanţurilor de solide legate şi a distribuţiilor de viteze şi acceleraţii în diferitele elemente se bazează pe o serie de metode grafice, analitice şi experimentale expuse în mai multe lucrări de specialitate [1]—[17]. Utilizarea unora sau altora dintre metodele cunoscute se face în raport cu avantajele specifice pentru unele poziţii sau situaţii ale diferitelor mecanisme simple sau complexe. Prin metodele solidarizării şi acceleraţiilor compuse [15]—[17] eficienţa diferitelor metode cunoscute a fost extinsă pentru utilizarea lor în cazurile cele mai generale ale mecanismelor.

Metodele de analiză cinematică sînt aplicate asupra lanţurilor simple, deschise sau închise, formînd contururi de corpuri. Unitatea de lucru este grupa structurală, adică lanţul cinematic cu grad de mobilitate nul, din care s-a eliminat un element (fix), astfel că prezintă posibilitatea ca prin cuplele potenţiale rămase libere să fie ataşat unor elemente cu mişcări relative determinate ale unui mecanism cu complexitate inferioară pentru a forma mecanisme de complexitate superioară. Aceste grupe sînt părţi integrante ale mecanismelor, avînd proprietatea că sînt complet determinate atît cinematic, cît şi cinetostatic. Construcţiile grafice şi rezolvările

analitice sînt grupate pe aceste unităţi de lucru, rezultatele obţinute din unele fiind necesare în studiile grupelor următoare, formarea mecanismelor complexe bazîndu-se pe legarea acestora în serie sau paralel.

Sistematizările structurale ale lanţurilor cinematice plane, efectuate de H. Alt [7], M. Grüebler [3], L.P. Assur [4], I. I. Artobolevski [1], [2], G.G. Baranov [8], K. Hain [5], [6], N.I. Manolescu [10], F.R.E. Crossley [9] au importanţă deosebită în urmărirea posibilităţilor de construcţie a mecanismelor şi pentru determinarea avantajelor diverselor metode de analiză şi sinteză cinematică şi cinetostatică. O revedere unitară şi omogenă asupra acestor scheme structurale este prezentată mai departe pe baza numărului şi complexităţii elementelor (Grüebler) şi completată totodată cu unele aspecte interesante.

Noua metodă a contururilor, dualã metodei elementelor, se bazează pe numărul şi pe complexitatea contururilor deformabile formate cu mai multe corpuri. Această metodă conduce la construcţia simplă a schemelor structurale distincte şi are avantaje deosebite în prevederea posibilităţilor de aplicare a metodelor de analiză şi sinteză cinematică la mecanismele mult mai complexe. Lucrarea cuprinde sinteza numerică şi structurală a lanţurilor cinematice cu 0, 1, 2, grade de mobilitate şi este completată cu lanţurile supraconstrînse cu grade de mobilitate negative -2, -1, deoarece acestea, într-un lanţ complex, pot compensa o parte din lanţ cu mobilitate superioară. Din acelaşi motiv al modificării gradului de mobilitate sînt expuse lanţurile cinematice formate numai cu cuple de translaţie.

1. Pentru fixarea clară a unor definiţii şi proprietăţi în problemele expuse se menţionează următoarele [1] [10]:

1.1. *Prin element complex de clasa i* (binare, ternare, cuaternare etc.) se înţelege elementul cu *i legături simple*—cuple distincte—cu alte i elemente Cele i puncte distincte corespunzătoare cuplelor formează un contur poligonal propriu elementului ($i > 2$). Dacă legăturile cuprind şi cuple de translaţie, centrele de rotaţie respective sînt aruncate la infinit şi conturul elementului devine deschis cu laturi perpendiculare pe dreptele translaţiilor relative. Centrele de rotaţie corespunzînd cuplelor inferioare — de rotaţie sau de translaţie — sînt permanente, astfel că elementele au contururile proprii nedeformabile. Prin n_i se notează numărul elementelor de clasă i dintr-un lanţ cinematic.

1.2. *Prin cuplă multiplă de ordinul p* se înţeleg legăturile dintre *(1 + p) elemente*, confundate în acelaşi punct geometric. Prin aceasta, cupla multiplă de ordinul p echivalează cu p cuple simple distincte.

Dacă prin i_p se notează numărul cuplelor multiple de ordinul p, atunci pentru un element complex rezultă:

— clasa reală a elementului:

$$i = i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \ldots + p\, i_p\,; \tag{1}$$

— clasa aparentă-redusă a conturului:

$$v = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_p\,, \tag{2}$$

adică i reprezintă numărul total de elemente cu care se leagă, iar v numărul de vîrfuri sau muchii ale conturului poligonal propriu elementului. Dacă elementul are numai cuple simple sau dacă se echivalează cuplele

multiple cu cuplele simple, atunci $i = v$. Prin c se notează numărul total de cuple simple într-un lanț cinematic.

1.3. *Prin contur complex de clasa i* se înțelege un contur deformabil închis, format cu i elemente legate succesiv două cîte două în i centre relative de rotație, care formează și vîrfurile conturului. Într-un lanț cinematic închis, contururile deformabile împreună cu contururile nedeformabile proprii elementelor, formează două ansambluri duale. Între numărul contururilor deformabile N și numărul contururilor nedeformabile n există relația simetrică [18]

$$n + N = c + 1 = \nu(G). \tag{3}$$

Ambele numere sînt în concordanță cu numărul ciclomatic $\nu(G)$ [19] al grafului conex, asociat prin identitate schemei structurale a lanțului. Acest graf cuprinde:

— numărul de puncte-vîrfuri ale grafului, care corespunde cu numărul de cuple simple ale lanțului cinematic $= c$;

— numărul de laturi-muchii ale grafului, care depinde de complexitatea elementelor din lanțul cinematic:

$$m = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \ldots + in_i = 2c,$$

în care pentru elementele binare s-au considerat laturile duble, deoarece se convine că închid un contur propriu de clasa II [1]—[17];

— numărul ciclomatic al grafului, adică numărul total al contururilor independente [19]:

$$\nu(G) = m - c + 1 = c + 1 = n + N.$$

Numărul contururilor deformabile de clasa i se notează prin N_i.

2. *Sinteza numerică prin metoda elementelor.* Într-un lanț cinematic închis avem relațiile:

— numărul elementelor:

$$n = n_2 + n_3 + \ldots + n_i; \tag{4}$$

— numărul cuplelor:

$$c = \frac{2n_2 + 3n_3 + \ldots + in_i}{2}. \tag{5}$$

În această relație se cuprinde condiția ca numărul total al elementelor de clase impare să fie par:

$$n_3 + n_5 + n_7 + \ldots = 2h; \tag{6}$$

— gradul de libertate rezultă din

$$L = 3n - 2c = n_2 - [n_4 + 2n_5 + \ldots + (i - 3)n_i]. \tag{7}$$

Se evidențiază că gradul de libertate nu este influențat de numărul elementelor ternare. Aceeași observație se menține și pentru gradul de mobilitate $M = L - 3$;

— numărul conturelor deformabile independente este

$$N = 1 + \frac{n_3 + 2n_4 + \ldots + (i-2)n_i}{2}. \tag{8}$$

2.1. Ecuațiile generale de pe care s-au sistematizat lanțurile cinematice plane închise, deduse din relațiile [7], [8], sînt

$$n = 2\ (N-1) + L = 2N + M + 1, \tag{9}$$

$$c = 3\ (N-1) + L = 3N + M, \tag{10}$$

$$n_2 - L = n_4 + 2n_5 + 3n_6 + \ldots + (i-3)\, n_i, \tag{11}$$

$$2(N-1) = n - L = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \ldots + (i-2)\, n_i. \tag{12}$$

Aceste relații constituie două ecuații liniare ce trebuie soluționate în numere întregi pozitive și deci

$$n > n_2 \geqslant L > 0, \tag{13}$$

$$\min\left[n, \frac{n_2 - L}{i-3}, \frac{n-L}{i-2}\right] \geqslant n_i \geqslant 0, \quad i \geqslant 3. \tag{14}$$

Ultima relație marchează în general că, pe măsură ce complexitatea i crește, numărul elementelor corespunzătoare se micșorează. În particular avem

$$\begin{aligned} &2\ (N-1) \geqslant n_3 \geqslant 0, \\ &\min\ [n, (n_2 - L), (N-1)\ ] \geqslant n_4 \geqslant 0, \\ &\min\left[n, \frac{n_2 - L}{2}, \frac{2(N-1)}{3}\right] \geqslant n_5 \geqslant 0, \\ &\min\left[n, \frac{n_2 - L}{3}, \frac{N-1}{2}\right] \geqslant n_6 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{15}$$

2.2. Pentru lanțurile cinematice cu gradul de mobilitate $N = 0$ $(L = 3)$ avem

$$n = 2N + 1; \qquad c = 3N, \tag{16}$$

ceea ce conduce la

$$\begin{aligned} n_2 - 3 &= n_4 + 2n_5 + 3n_6 + \ldots + (i-3)\, n_i, \\ n - 3 &= n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \ldots + (i-2)\, n_i. \end{aligned} \tag{17}$$

Cu aceste relații, G. G. Baranov [8] a sistematizat lanțurile cinematice transformate în ferme prin fixarea unui element sau în grupe cinematice prin eliminarea unui element.

La o grupă cinematică avem

$$n_g = 2N; \qquad c_g = 3N, \tag{18}$$

aceasta reprezentînd un lanț cinematic deschis cu cuple potențiale. Clasa grupei este dată de pe I. I. Artobolevski [1], [2] de clasa maximă

a unui contur deformabil al grupei, iar după G. G. Baranov de numărul contururilor fermei care o generează. Ordinul grupei corespunde cu clasa elementului eliminat, respectiv cu numărul cuplelor potenţiale-exterioare.

2.3. În lanţurile cinematice cu gradul de mobilitate $M = 1$ ($L = 4$) avem

$$n = 2N + 2; \qquad c = 3N + 1, \tag{19}$$

adică

$$\begin{aligned} n_2 - 4 &= n_4 + 2n_5 + 3n_6 + \ldots + (i-3)\, n_i, \\ n - 4 &= n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \ldots + (i-2)\, n_i, \end{aligned} \tag{20}$$

relaţii după care H. Alt [7], M. Grüebler [3], K. Hain [5], [6] etc. au indicat diferite feluri de lanţuri care se transformă în mecanisme ($M = 1$) prin fixarea oricărui element.

2.4. Pentru lanţurile cinematice cu gradul de mobilitate $M = 2$ ($L = 5$) avem

$$n = 2N + 3; \qquad c = 3N + 2, \tag{21}$$

adică

$$\begin{aligned} n_2 - 5 &= n_4 + 2n_5 + 3n_6 + \ldots + (i-3)\, n_i, \\ n - 4 &= n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \ldots + (i-2)\, n_i, \end{aligned} \tag{22}$$

relaţii de pe care K. Hain [5], [6], F. R. E. Crossley [9] au indicat diferite scheme structurale ale acestor lanţuri, transformate în mecanisme ($M=2$) prin fixarea oricărui element.

2.5. *Soluţiile ecuaţiilor generale* (9)—(12) se obţin în baza unor proprietăţi specificate de F.R.E. Crossley [9], Grüebler [3] etc.

a) Astfel, pentru diferitele lanţuri cinematice de acelaşi grad de libertate L şi cu acelaşi număr de contururi deformabile independente N, deci în baza relaţiilor (9)—(10) de acelaşi număr de elemente n şi de acelaşi număr de cuple cinematice c, soluţiile se obţin unele din altele prin aplicarea operatorului numeric $\pm$ [1, — 2, 1] sau a operatorilor derivaţi prin aplicarea repetată a primului, de exemplu $\pm$ [1, — 1, — 1, +1].

b) Pentru lanţurile cinematice de aceeaşi clasă N, dar de grade de libertate diferite L şi L', ecuaţiile (11)—(12) dau aceleaşi soluţii pentru variabilele lor n_3, n_4, ..., n_i dacă se condiţionează ca şi termenul liber al ecuaţiei (11) să rămînă acelaşi.

Numărul elementelor simple-binare trebuie să varieze în acelaşi sens cu diferenţa gradelor de libertate. Se remarcă proprietatea importantă [9] că pentru aceeaşi clasă N există acelaşi număr de variante posibile de lanţuri cinematice indiferent de gradul de libertate.

c) Pentru lanţurile cinematice de acelaşi grad de libertate L, dar de clase diferite $N' = N + 1$, soluţiile clasei superioare se obţin din cele ale clasei inferioare prin mărirea cu două unităţi a numărului total de elemente, respectiv a elementelor ternare, aşa cum cere ecuaţia (12), ca apoi să se aplice în continuare operatorii menţionaţi.

2.6. *Determinarea soluţiilor extreme.* Determinarea primei soluţii în numere întregi pozitive se face prin considerarea că

$$n_4 = n_5 = \ldots n_i = 0,$$

adică

$$n_{2\min} = L$$

și

$$n_3 = n - L = 2(N - 1). \tag{23}$$

Determinarea ultimei soluții pozitive a acestor ecuații se face considerînd

$$\text{a) } n_2 = n_{2\max} = n, \tag{24}$$

ceea ce cere ca

$$n_3 = n_4 = \ldots = n_i = 0$$

și deci

$$\begin{gathered} n_{2\max} = n_{2\min}; \\ \text{b) } n_2 = n_{2\max} = n - 1, \end{gathered} \tag{25}$$

ceea ce cere să existe un singur element de clasa $i > 2$, cu valoarea maximă dată de ecuația (12), adică

$$\begin{gathered} n_{i\max} = 1; \quad i_{\max} = 2N; \\ \text{c) } n_2 = n_{2\max} = n - 2, \end{gathered} \tag{26}$$

în care există peste elementele simple binare un element de clasa $j > 2$ și altul de clasa $i > 2$, care, în conformitate cu ecuația (12), corespund la

$$j_{\max} + i_{\max} = 2(N + 1),$$

adică, dacă $j_{\max} < N + 1$, atunci $i_{\max} > N + 1$, iar pentru două elemente de aceeași clasă

$$j_{\max} = i_{\max} = N + 1.$$

2.7. *Determinarea clasei maxime* a elementelor conținute într-un lanț cinematic închis se face pe considerația că, eliminîndu-se elementul respectiv, rămîne mai departe un singur lanț cinematic deschis, care are

— numărul de elemente $n' = n - 1 = 2N + M$;
— numărul de cuple $c' = c - i_{\max} = 3N + M - i_{\max}$;
— numărul de contururi independente

$$N' = c' - n' + 1 = N - i_{\max} + 1 \geqslant 0,$$

adică rezultă

$$i_{\max} \leqslant N + 1, \tag{27}$$

care în cazul mecanismelor $M = 1$ se exprimă sub forma $i_{\max} \leqslant \frac{n}{2}$.

3. *Lanțuri cinematice decompozabile* [9], [11]. Față de un element (considerat fix), un lanț cinematic închis se poate descompune, prin eliminarea elementului considerat, în mai multe lanțuri cinematice deschise. În graful asociat schemei structurale, ansamblul punctelor-vîrfuri ale elementului respectiv constituie un ansamblu de articulație și care prin eliminare dă naștere unui graf neconex.

3.1. Clasa maximă a elementelor dintr-un lanț cu părți distincte depășește valoarea indicată anterior (27). Astfel, dacă se obțin P lanțuri

separate care au fiecare n^1, n^2,..., n^P elemente, c^1, c^2,..., c^P cuple şi, respectiv, cîte N^1, N^2,..., N^P contururi independente, adică $N^P = c^P - n^P + 1$, atunci numărul total al contururilor independente este

$$\overline{N} = N^1 + N^2 + \ldots + N^P = \Sigma c^P - \Sigma n^P + P, \tag{28}$$

în care

$$\overline{c} = \Sigma c^P = c - i_{\max},$$

$$\overline{n} = \Sigma n^P = n - 1,$$

adică

$$\overline{N} = N - i_{\max} + P \geqslant 0.$$

Rezultă deci

$$i_{\max} \leqslant N + P. \tag{29}$$

Reciproc, dacă într-un lanţ cinematic există un element de clasa $i_{\max} > N$, faţă de acesta lanţul se poate descompune în

$$P \geqslant i_{\max} - N \tag{30}$$

lanţuri deschise separate.

3.2. Gradul de mobilitate al lanţului iniţial se compune din gradele de mobilitate ale lanţurilor separate faţă de elementul comun în raport cu care se face descompunerea:

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_P, \tag{31}$$

cu condiţia ca $M_i > 0$. Părţile supraconstrînse $M_i \leqslant 0$ lucrează împreună cu elementul comun ca un singur element rigid. În condiţia menţionată, valoarea maximă a numărului de lanţuri separate descompuse se găseşte pentru $M_i = 1$, adică $P_{\max} = M$. Dacă în lanţurile separate $M_i > 1$ atunci $P < P_{\max} = M$, iar dacă există lanţuri separate supraconstrînse $M_i < 0$ se poate ca $P > P_{\max} = M$.

3.3. Pentru exemplificare, lanţul cinematic din figura 1 are $n = 10$, $c = 13$, $L = 4$, $M = 1$. Faţă de elementul de legătură (1), lanţul parţial format cu elementele (2, 3, 4, 5, 6) are un singur grad de mobilitate, iar acela format cu elementele (7, 8, 9, 10) are gradul de mobilitate nul. Rezultă $M = 4$ şi $P = 2$, astfel că $i_{\max} = 5 < 6$. În realitate, lanţul parţial (1, 7, 8, 9, 10) formează un singur element rigid ($M = 0$), astfel că lanţul cinematic real (1, 2, 3, 4, 5, 6,) are $n = 6$, $c = 7$, $L = 4$, $M = 1$ adică $N = 2$ şi $P = 1$ şi rezultă $i_{\max} \leqslant 3$, ceea ce se verifică pentru elementele (3) şi (4).

4. *Metoda contururilor în sinteza numerică a lanţurilor cinematice.* În raport cu contururile deformabile într-un lanţ închis, cu schemă structurală planară, în care nu există laturi care se încrucişează, avem relaţiile:

— numărul contururilor:

$$N = N_4 + N_5 + \ldots + N_i; \tag{32}$$

— numărul cuplelor

$$c = \frac{4N_4 + 5N_5 + \ldots + iN_i + k}{2}. \tag{33}$$

În ultima relație s-a cuprins și conturul exterior $N_k = 1$, considerat de clasa cea mai mare $k \geqslant i$. Numărul contururilor independente coincide cu al contururilor interioare fundamentale N. Pentru aceasta, B. Paul [14] observă că fiecare contur interior conține cel puțin un element neinclus în alt contur interior și din această cauză este independent, iar orice alt contur, inclusiv cel exterior, se obține prin suprapunerea celor fundamentale, considerînd circulația pentru toate contururile în același sens. De altfel, în teoria grafelor planare, conturul exterior înconjură regiunea infinită complementară celorlalte finite interioare, acestea din urmă formînd baza fundamentală a contururilor independente.

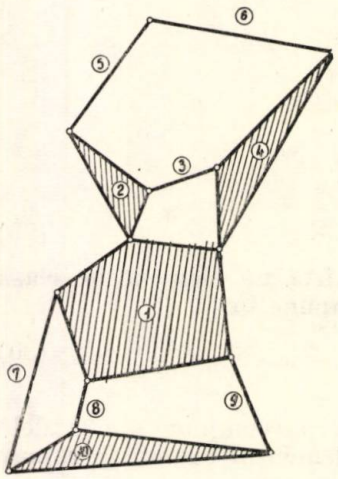


Fig. A

Se menține concluzia ca suma numerelor contururilor de clase impare (inclusiv conturul exterior) să fie pară :

$$N_5 + N_7 + \ldots\ldots = 2h; \tag{34}$$

Numărul gradelor de mobilitate (10) este

$$M = c - 3N$$

sau

$$2M = -2N_4 - N_5 + N_7 + 2N_8 + \ldots + (i-6)\,N_i + k, \tag{35}$$

iar

$$2(N + M) = N_5 + 2N_6 + 3N_7 + \ldots + (i-4)\;N_i + k. \tag{36}$$

Gradul de mobilitate este independent de numărul contururilor interioare de clasa VI.

4.1. *Ecuațiile generale* pentru sistematizarea lanțurilor cinematice pe baza contururilor sînt (32) și (35) :

$$N = N_4 + N_5 + \ldots + N_i, \tag{32}$$

$$2M = -2N_4 - N_5 + N_7 + 2N_8 + \ldots + (i-6)\,N_i + k, \tag{35}$$

în care

$$\min\left[N, \frac{2M + 2N_4 + N_5 - k}{i-6}\right] \geqslant N_i \geqslant 0. \tag{37}$$

4.2. *Determinarea clasei maxime* a conturului exterior $k \geqslant i$ se obține din condiția ca

$$N_5 = N_6 = \ldots + N_i = 0,$$

adică

$$k_{\max} = 2(N + M) \text{ și } N = N_4. \tag{38}$$

Dar valoarea maximă a clasei conturului exterior este limitată și de numărul de elemente ale lanțului cinematic :

$$k'_{\max} \leqslant n = 2N + M + 1, \tag{39}$$

pentru situaţia în care toate elementele sînt repartizate la periferie, adică avem lanţ cinematic simplu închis, şi fiecare element contribuie numai cu o latură la conturul exterior.

Dacă însă, faţă de mai multe elemente, lanţul cinematic se poate descompune în P lanţuri parţiale separate, atunci cele $n'' < P$ elemente de referinţă contribuie la conturul exterior fiecare cu mai multe laturi astfel că valoarea maximă este

$$k''_{max} \leqslant n + (P - n''). \tag{40}$$

Rezultă că, pentru valorile clasei k cuprinse între

$$k'_{max} < k_{max} < k''_{max},$$

lanţul cinematic cuprinde lanţuri parţiale separate.

Pentru a nu avea lanţuri separate trebuie

$$k_{max} = 2(N + M) \leqslant k'_{max} = 2N + M + 1,$$

adică $M \leqslant 1$. În aceeaşi condiţie, la lanţurile cinematice cu $M > 1$ va trebui să se considere

$$N_6 = N_7 = \ldots = N_i = 0,$$

respectiv

$$N = N_4 + N_5, \quad k_{max} = 2\ (N + M) - N_5,$$

ceea ce va fi valabil pînă la $M \leqslant 1 + N_5$, după care din nou apar lanţurile cu părţi separate distincte.

Pentru $M = 2$ se va lua $N_5 = 1$ ca să rezulte $k_{max} = 2\,(N + M) - 1$.

Tabelul nr. 1

	$N = N_4$	k_{max}	k_{min}
$M = 0$	2	4	4
	3	6	5
	4	8	5

Tabelul nr. 2

	N	N_4	k_{max}	k_{min}	
$M = 1$	1	1	4	4	$N_4 = 1$
	2	2	6	5	$N_5 = 2$
	3	3	8	5	$N_5 = 3$
	4	4	10	6	$N_6 = 4$

Tabelul nr. 3

	N	N_4	N_5	k_{max}	k_{min}	
$M = 2$	1	0	1	5	5	$N_5 = 1$
	2	1	1	7	6	$N_6 = 1$
	3	2	1	9	6	$N_6 = 1$
	4	3	1	11	6	$N_6 = 1$

4.3. *Valoarea minimă a clasei conturului exterior* se obține considerînd $k_{min} \geqslant i_{max}$ și totodată $N_{imax} \leqslant N$, ceea ce din (36) rezultă

$$k_{min} \geqslant 2(N + M) - (k_{min} - 4)\, N$$

sau

$$k_{min} \geqslant 6 - \frac{2(3 - M)}{1 + N}. \tag{41}$$

Pentru lanțuri cinematice de diverse grade de mobilitate, valorile k_{min} și k_{max} sînt trecute în tabelele 1, 2 și 3.

4.4. Obținerea soluțiilor ecuațiilor generale (32), (35), care sînt de aceeași structură cu cele utilizate la metoda elementelor, se face prin aplicarea acelorași operatori numerici.

Pentru lanțurile de aceeași mobilitate M și aceeași grupă N, soluțiile se obțin unele din altele cu ajutorul operatorului $\pm$ [1, — 2, 1] sau al celui derivat $\pm$ [1, — 1, — 1, 1].

Soluțiile pentru lanțurile cinematice de aceeași grupă N, dar de mobilități diferite $M' = 1 + M$, se obțin din lanțul de mobilitate inferioară pentru lanțul de mobilitate superioară prin mărirea clasei conturului exterior k cu două unități, cerință exprimată de ecuația (35) fără a modifica ecuația (32), de pe care se aplică repetat operatorii menționați. Se poate trece și direct la soluțiile căutate prin aplicarea simplă a operatorilor $\pm$ [— 2, 2] sau $\pm$ [— 1, 0, 1], care lasă neschimbată valoarea termenului liber din ecuația (32), dar mărește cu două unități valoarea termenului liber din ecuația (35).

Soluțiile pentru lanțurile cinematice de același grad de mobilitate M, dar de grupe diferite $N' = 1 + N$, se obțin din cele ale lanțului de grupă inferioară pentru lanțul de grupă superioară prin mărirea numărului contururilor de clasa VI cu o unitate, cerință impusă de ecuația (32), și prin mărirea clasei conturului exterior cu două unități, cerință exprimată de ecuația (35), după care se aplică repetat operatorii respectivi $\pm$ [1, — 2, 1] sau $\pm$ [1, — 1, — 1, 1]. Aceleași soluții se pot obține prin aplicarea aceluiași operator după mărirea numărului contururilor de clasa VI cu o unitate, în care caz termenul liber al ecuației (35) nu se schimbă, iar termenul liber al ecuației (32) crește cu o unitate. Dacă se mărește numai numărul contururilor de clasa IV cu o unitate, soluțiile pot fi

obținute din cele anterioare (grupa N) prin aplicarea simplă a operatorilor $\pm [-2, 2]$ sau $[-1, 0, 1]$.

Tabelul nr. 4

M	-2			-1			0			$+1$			$+2$			Structura numerică						Nr. crt.
N	c	n	n_2	c	n	n_2	c	n	n_2	c	n	n_2	c	n	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	4	4	5	5	5	—	—	—	—	—	—	1
2	—	—	—	—	—	—	6	5	3	7	6	4	8	7	5	2	—	—	—	—	—	2
			—			—			4			5			6	0	1	—	—	—	—	3
3	—	—	—	8	6	2	9	7	3	10	8	4	11	9	5	4	—	—	—	—	—	4
			—			3			4			5			6	2	1	—	—	—	—	5
			—			4			5			6			7	0	2	—	—	—	—	6
			—			4			5			6			7	1	0	1	—	—	—	7
			—			5			6			7			8	0	0	0	1			8
4	10	7	1	11	8	2	12	9	3	13	10	4	14	11	5	6	—	—	—	—	—	9
			2			3			4			5			6	4	1	—	—	—	—	10
			3			4			5			6			7	2	2	—	—	—	—	11
			3			4			5			6			7	3	0	1	—		—	12
			4			5			6			7			8	0	3	—	—	—	—	13
			4			5			6			7			8	1	1	1	—	—	—	14
			5			6			7			8			9	0	0	2	—	—	—	15
			4			5			6			7			8	2	0	0	1	—	—	16
			5			6			7			8			9	0	1	0	1	—	—	17
			5			6			7			8			9	1	0	0	0	1	—	18
			6			7			8			9			10	0	0	0	0	0	1	19

5. Sinteza structurală s-a întocmit pe baza soluțiilor numerice obținute cu ecuațiile (11) (12) sau (32) (35) și expuse în tabelele 4 și 5. În planșele 1—5 au fost înscrise schemele structurale corespunzătoare cunoscute, împreună cu schemele lanțurilor supraconstrînse. Sinteza structurală și aranjarea schemelor s-au făcut pe baza conturului maxim exterior.

Într-adevăr, numărul punctelor-vîrfuri de pe conturul exterior al grafului asociat schemei structurale corespunde cu clasa acestuia, care este totodată egală și cu numărul elementelor din care este constituit conturul dacă acestea iau parte o singură dată la contur (lanțuri nedecompozabile). Astfel, numărul punctelor-vîrfuri interioare este $c^i = c - k$, iar numărul elementelor interioare este $n^i = n - k$. Ambele numere au variații mici în raport cu variațiile mici ale clasei k cuprinse între k_{min} și k_{max}. Cu cît clasa k este mai mare, cu atît valorile c^i și n^i sînt mai mici. Pe baza acestor observații, pentru construcția unei scheme struc-

Tabelul

M	Structura numerică								Nr. schemelor	Nr. crt.
	N	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}		
+1	1	1(1)							1	1
	2	1	1(1)						1	2
		2	0	(1)					1	3
	3	0	3(1)						2	4
		1	2	(1)					4	5
		2	0	1(1)					4	6
		2	1	0	(1)				4	7
		3	0	0	0	(1)			2	8
	4	0	4	(1)						9
		1	2	1( )						10
		2	0	2(1)						11
		2	1	1	(1)					12
		3	0	0	1(1)					13
		1	3	0	(1)					14
		2	2	0	0	(1)				15
		3	0	1	0	(1)				16
		3	1	0	0	0	(1)			17
		4	0	0	0	0	0	(1)		18
0	2	2(1)							1	1
	3	2	1(1)						2	2
		3	0	(1)					1	3
	4	1	3(1)						4	4
		2	2	(1)					12	5
		3	0	1(1)					4	6
		3	1	0	(1)				3	7
		4	0	0	0	1			1	8
−1	3	3(1)							2	1
	4	3	1(1)						7	2
		4	0	(1)					3	3
−2	4	4(1)							2	1

nr. 5

M	Structura numerică										Nr. scheme-lor	Nr. crt.
	N	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}	N_{11}	N_{12}		
+2	1	0	1(1)								1	1
		1	0	(1)							—	2
	2	0	2	(1)							1	3
		1	0	1(1)							1	4
		1	1	0	(1)						1	5
		2	0	0	0	(1)					1	6
	3	0	2	1(1)							5	7
		1	0	2(1)							2	8
		1	1	1	(1)						8	9
		2	0	0	1(1)						4	10
		0	3	0	(1)						2	11
		1	2	0	0	(1)					6	12
		2	0	1	0	(1)					4	13
		2	1	0	0	0	(1)				7	14
		3	0	0	0	0	0	(1)			2	15
	4	0	2	2(1)								16
		0	3	1	(1)							17
		1	0	3(1)								18
		1	1	2	(1)							19
		1	2	0	1(1)							20
		2	0	1	1(1)							21
		2	1	0	1	(1)						22
		3	0	0	0	1(1)						23
		0	4	0	0	(1)						24
		1	2	1	0	(1)						25
		2	0	2	0	(1)						26
		2	1	1	0	0	(1)					27
		3	0	0	1	0	(1)					28
		1	3	0	0	0	(1)					29
		2	2	0	0	0	0	(1)				30
		3	0	1	0	0	0	(1)				31
		3	1	0	0	0	0	0	(1)			32
		4	0	0	0	0	0	0	0	(1)		33

turale se înscrie într-un cerc dat poligonul regulat cu k laturi și vîrfuri corespunzător conturului exterior. Punctele interioare c^i ale schemei se leagă prin cele n^i elemente rămase, în toate felurile posibile. Totodată se urmărește realizarea numărului de contururi interioare a căror valoare

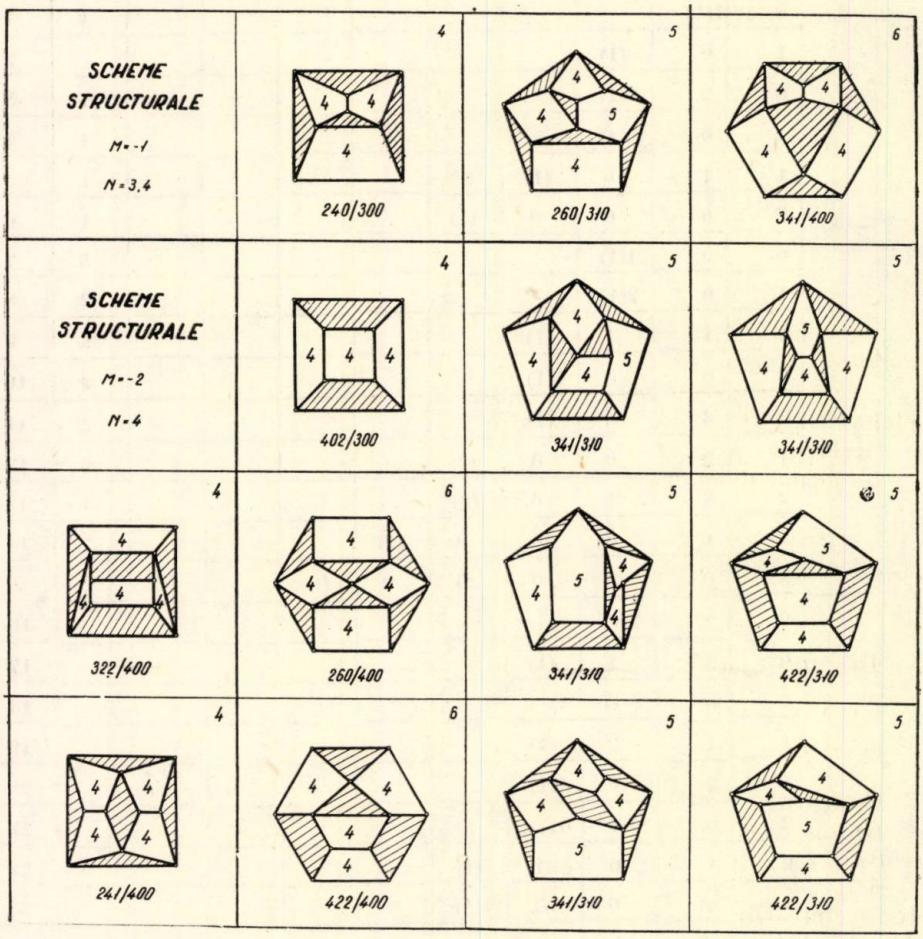


Fig. 1

este mai mică decît a numărului de elemente, clasele contururilor deformabile fiind în general mai mari decît clasele contururilor nedeformabile.

De asemenea, soluțiile întabelate (4), (5) arată, fără a construi schemele structurale, numărul și clasele diferitelor contururi deformabile ale lanțurilor cinematice în raport cu gradul de mobilitate M, ceea ce este important pentru prevederea posibilităților de aplicare a diferitelor metode de analiză cinematică. Astfel, analiza cinematică a unei grupe structurale este cu atît mai dificilă, cu cît cuprinde mai multe contururi deformabile de clase cît mai ridicate și cu cît are mai puține cuple potențiale, adică este de ordin minim, în particular egal cu doi. Desigur, la mecanisme, analiza cinematică depinzînd de numărul și de complexi-

tatea contururilor, acestea se pot reduce prin alegerea convenabilă a elementelor conducătoare și de bază prin utilizarea metodelor indirecte de calcul [12].

6. *Sinteza numerică și structurală a lanțurilor cinematice plane care cuprind numai cuple de translație* (familia IV) *prin metoda elementelor și metoda contururilor.* Pentru aceste lanțuri închise avem următoarele relații:

— gradul de libertate (grad de mobilitate $M = L - 2$):

$$L = 2n - c = \frac{2n_2 + n_3 - n_5 - 2n_6 - \ldots - (i-4)n_i}{2}; \tag{42}$$

— numărul contururilor deformabile independente:

$$N = c - n + 1 = 1 + \frac{n_3 + 2n_4 + \ldots + (i-2)\,n_i}{2}. \tag{43}$$

Se evidențiază că *gradul de libertate nu este influențat de numărul elementelor cuaternare*, iar *numărul contururilor deformabile nu este influențat de numărul elementelor binare.* Se menține condiția ca numărul total al elementelor de clase impare să fie par.

Relațiile inverse sînt:

— numărul elementelor:

$$n = L + N - 1 = N + M + 1; \tag{44}$$

— numărul cuplelor:

$$c = L + 2N - 2 = 2N + M. \tag{45}$$

În raport cu contururile deformabile avem

$$N = N_3 + N_4 + N_5 + \ldots + N_i, \tag{46}$$

$$2M = -N_3 + N_5 + 2N_6 + \ldots + (i-4)N_i + k. \tag{47}$$

Conturul de clasa II este nedeformabil.

Gradul de mobilitate este independent de numărul contururilor interioare de clasa IV.

6.1. Deoarece ecuațiile din metoda elementelor și ecuațiile din metoda contururilor au aceeași structură cu cele pentru lanțurile generale de familia III (cu cuple inferioare de rotație și de translație), rezolvarea lor se face prin aceiași operatori numerici. Astfel:

a) pentru grupa de același grad de mobilitate și același număr de contururi, soluțiile se obțin prin aplicarea repetată a operatorilor $\pm$ [1, — 2, 1] sau $\pm$ [1, — 1, — 1, 1];

b) pentru grupa de același grad de mobilitate $M' = M$, dar de clasă superioară $N' = 1 + N$, soluțiile se obțin fie prin adăugarea unui element cuaternar, fie prin adăugarea unui contur interior de clasa IV, urmate de aplicarea repetată a operatorilor sus-menționați;

c) pentru grupa de aceeași clasă $N' = N$, dar de grad de mobilitate superior $M' = 1 + M$, soluțiile se obțin fie prin adăugarea unui element binar, fie prin mărirea clasei conturului exterior cu două unități, de pe care se aplică aceiași operatori. În metoda contururilor se poate trece

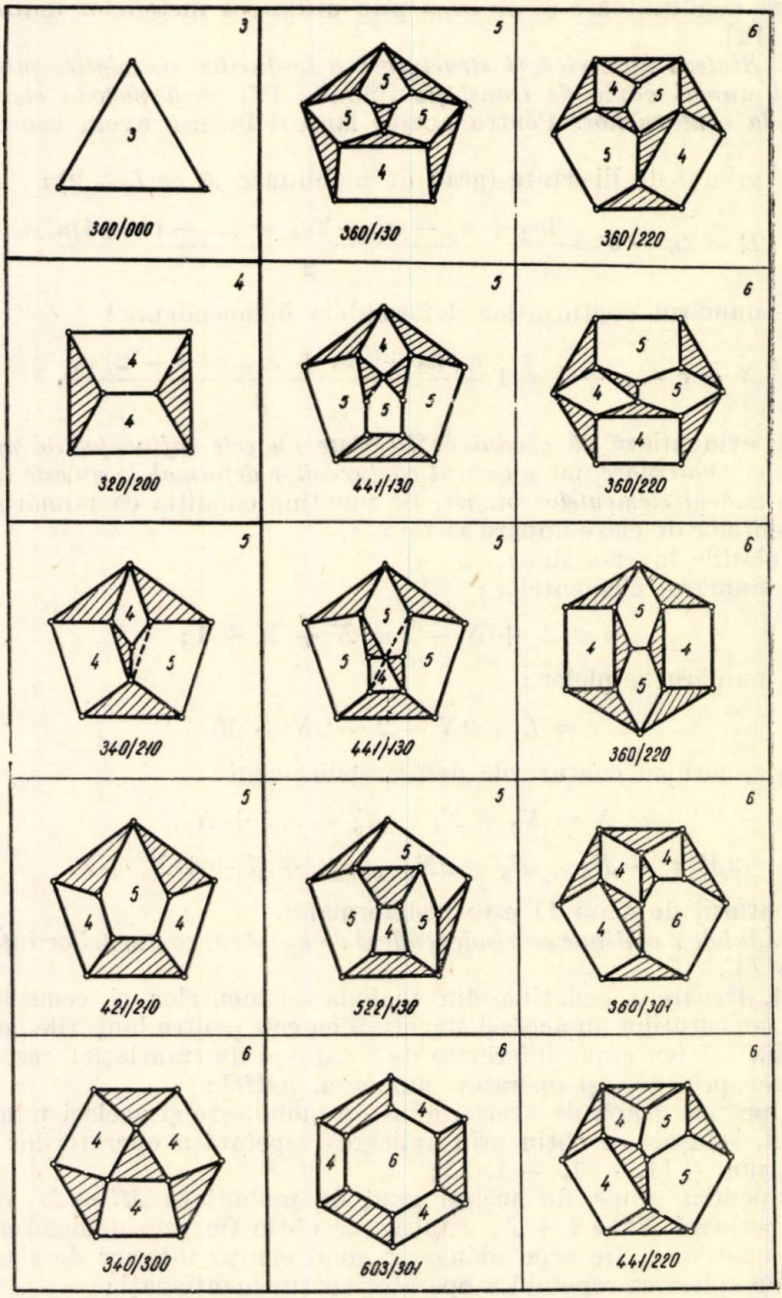

3
300/000
5
360/130
6
360/220
4
320/200
5
441/130
6
360/220
5
340/210
5
441/130
6
360/220
5
421/210
5
522/130
6
360/301
6
340/300
6
603/301
6
441/220

Fig. 2a

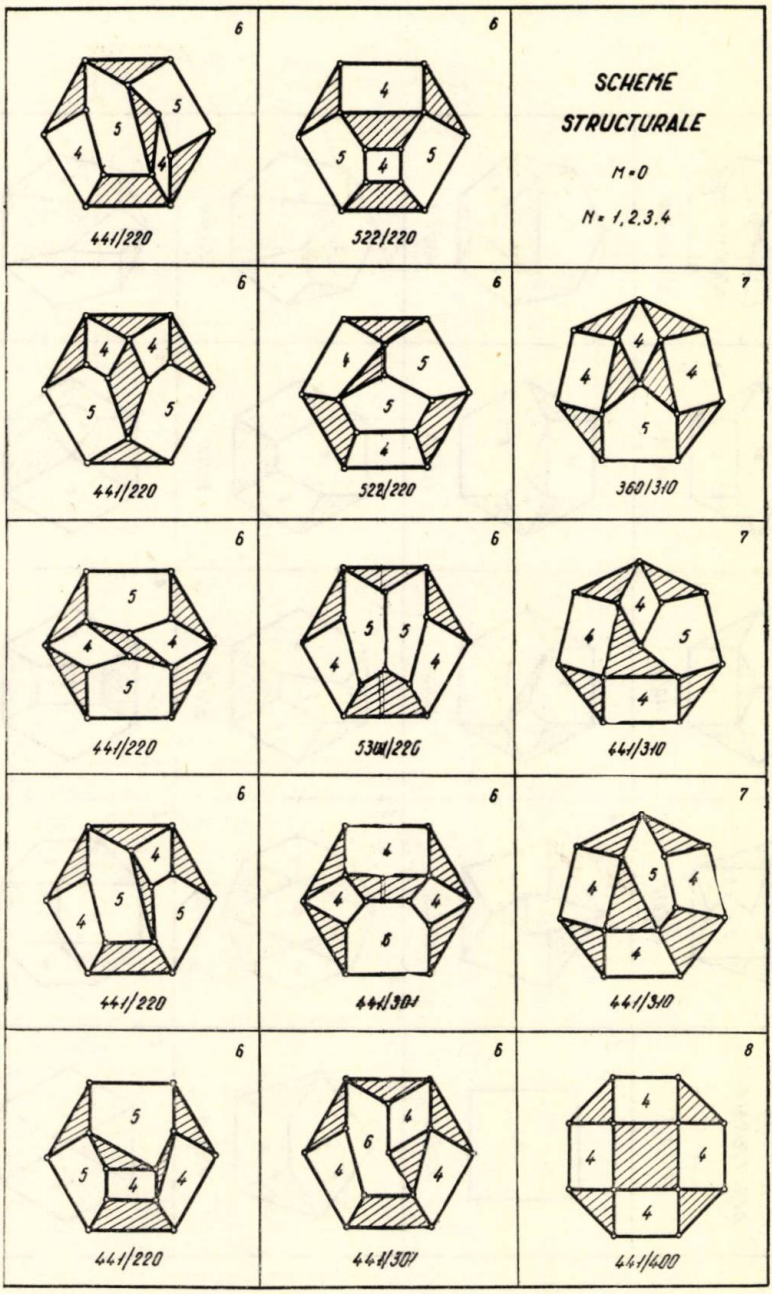

6
441/220
6
522/220
SCHEME
STRUCTURALE
M=0
N=1,2,3,4
6
441/220
6
522/220
7
360/310
6
441/220
6
5301/220
7
441/310
6
441/220
6
441/301
7
441/310
6
441/220
6
441/301
8
441/400

Fig. 2*b*

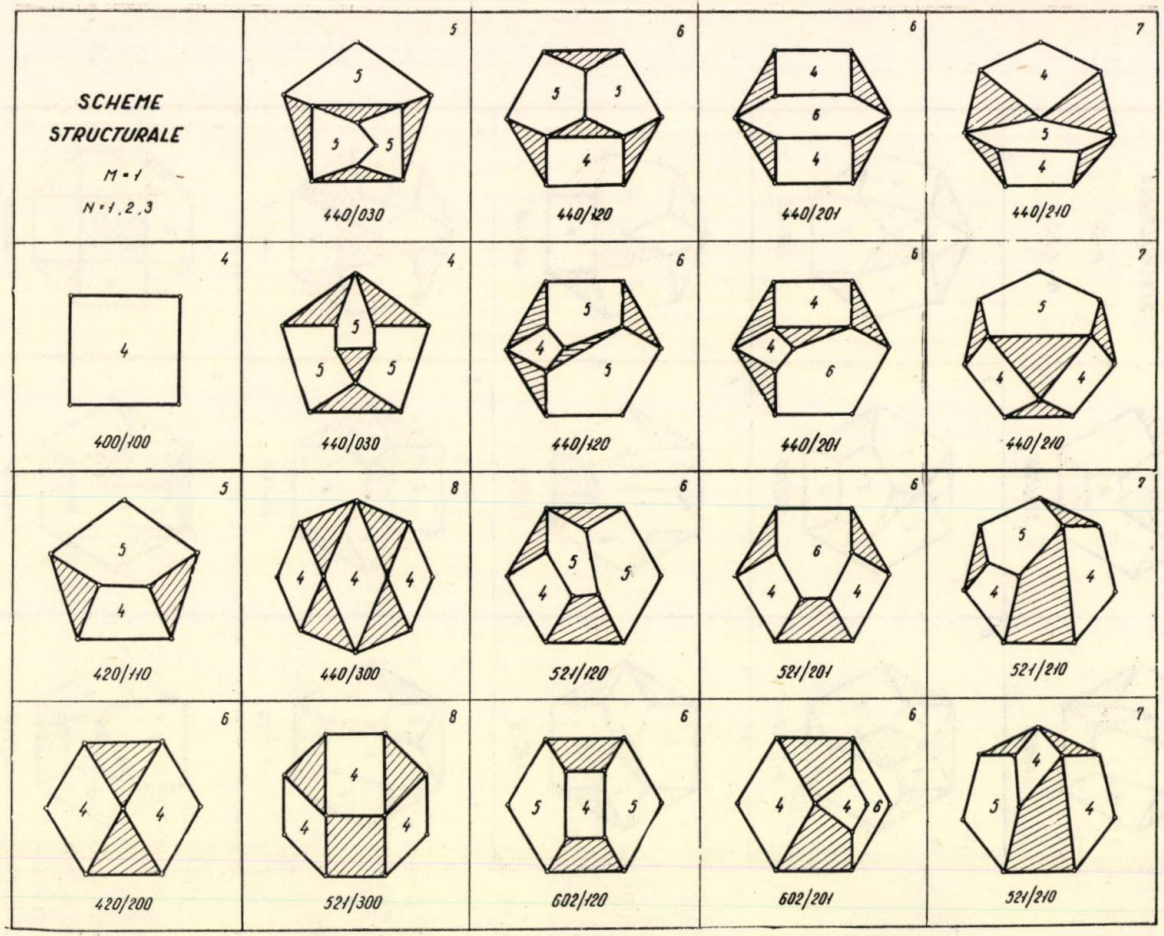

SCHEME
STRUCTURALE
M = 1
N = 1, 2, 3
5
440/030
6
440/120
6
440/201
7
440/210
4
400/100
4
440/030
6
440/120
6
440/201
7
440/210
5
420/110
8
440/300
6
521/120
6
521/201
7
521/210
6
420/200
8
521/300
6
602/120
6
602/201
7
521/210

Fig. 3

direct de la M la M' prin utilizarea operatorilor $\pm [-2, 2]$ sau $\pm [-1, 0, 1]$.

6.2. Valorile-limită ale soluțiilor se obțin astfel:

— dacă $n_5 = n_6 = \ldots = n_i = 0$, din relațiile (42), (43) avem

$$2n_2 + n_3 = 2L; \quad 2n_4 + n_3 = 2(N-1), \tag{48}$$

adică n_3 trebuie să fie par (sau nul). Valorile minime posibile pentru n_2 și n_3 sînt

$$\begin{aligned} &n_3 = 0 \qquad n_2 = L \qquad n_4 = N-1, \\ &n_3 = 2 \qquad n_2 = L-1 \qquad n_4 = N-2, \\ &n_3 = 4 \qquad n_2 = L-2 \qquad n_4 = N-3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Valorile maxime sînt limitate prin

$$\min\left[n, \frac{2n_2 + n_3 - 2L}{i-4}, \quad \frac{2(N-1)}{i-2}\right] \geqslant n_i \geqslant 0. \tag{49}$$

Pe de altă parte, ca și în cazul anterior, clasa maximă posibilă a unui element este

$$i_{\max} \leqslant N+1, \tag{50}$$

cu concluzii asemănătoare pentru lanțurile cu părți distincte.

De asemenea, clasa maximă a conturului exterior este limitată la

$$k_{\max} = 2M, \qquad N = N_4 \tag{51}$$

pentru $N_5 = N_6 = \ldots N_i = 0$ sau la

$$k'_{\max} \leqslant n = N + M + 1, \tag{52}$$

cu aceleași concluzii pentru lanțurile cu părți distincte. Clasa minimă se găsește pentru

$$k_{\min} \geqslant 2M - (k_{\min} - 4)\, N,$$

adică

$$k_{\min} \geqslant 2\,\frac{M+2N}{1+N}. \tag{53}$$

Pe baza acestor observații, soluțiile numerice sînt redate în tabelele 6, 7, iar soluțiile structurale în planșele 6. 7. 8.

7. Determinările lanțurilor cinematice se fac pe baza celor N contururi deformabile independente de corpuri pentru care se pot scrie N ecuații vectoriale de poziții, de viteze, de accelerații, care în cazurile nesingulare conduc la rezolvarea a $2N$ parametri scalari. Prin aceasta, grupele structurale sînt complet determinate, numărul necunoscutelor corespunzînd cu numărul elementelor și deci cu numărul ecuațiilor scalare ($n_g = 2N$). La mecanismele cu M grade de mobilitate, deoarece $n = 2N + (1 + M)$ pentru a avea mișcări determinate la elementele conduse se cere să se cunoască $(1 + M)$ parametri scalari, unul pentru elementul fix și cîte unul pentru fiecare dintre cele M elemente conducătoare

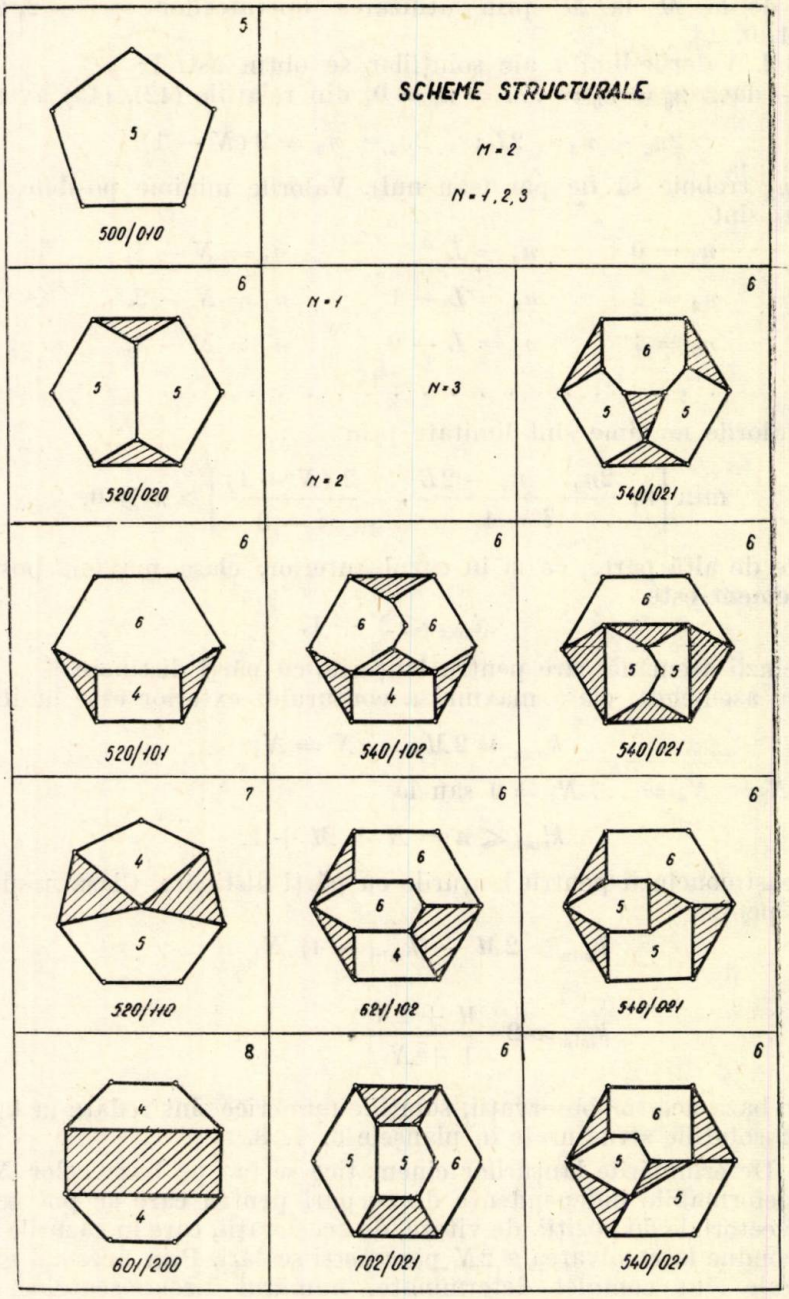

5
5
500/010
SCHEME STRUCTURALE
M = 2
N = 1, 2, 3
6
5 5
520/020
N = 1
N = 3
N = 2
6
6
5 5
540/021
6
6
4
520/101
6
6 6
4
540/102
6
6
5 5
540/021
7
4
5
520/110
6
6
6
4
621/102
6
6
5
5
540/021
8
4
4
601/200
6
5 5 6
702/021
6
6
5
5
540/021

Fig. 4*a*

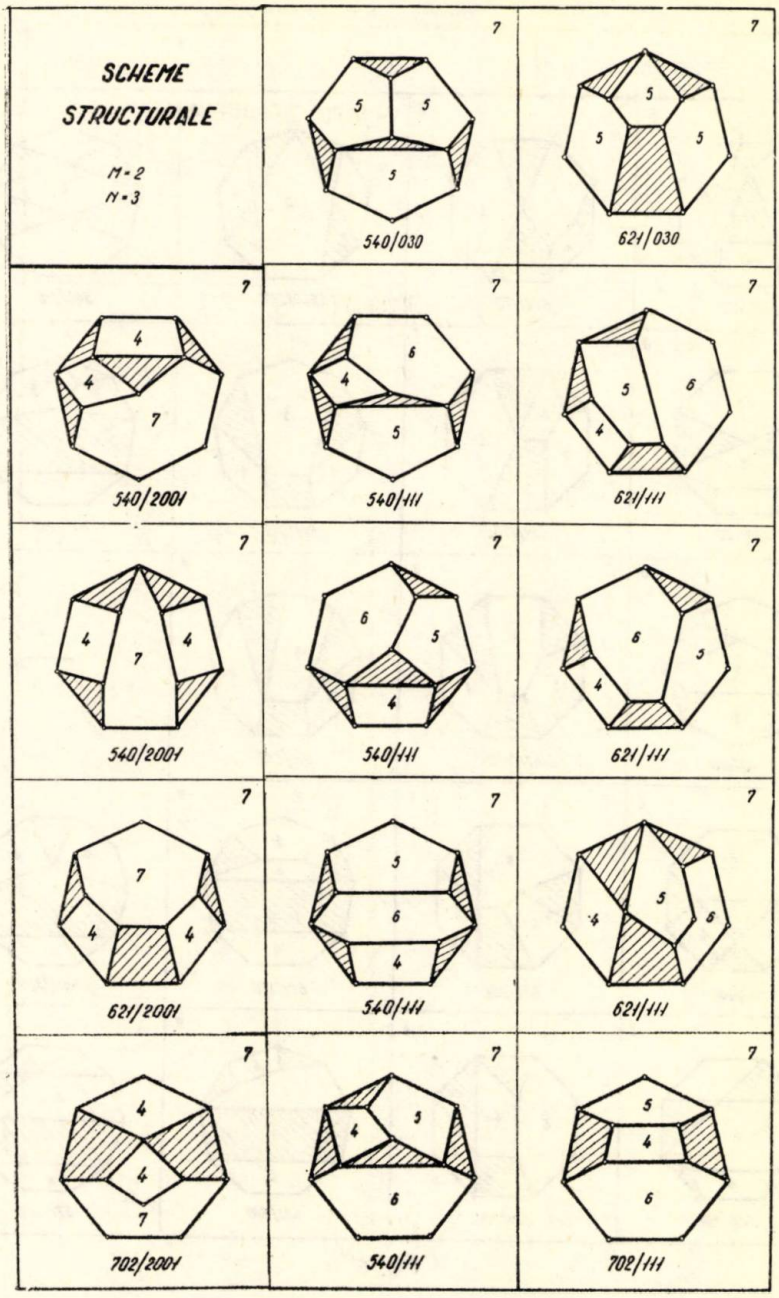

SCHEME
STRUCTURALE
M-2
N-3
7
5 5 5
540/030
7
5 5 5
621/030
7
4 4 7
540/2001
7
6 4 5
540/111
7
5 6 4
621/111
7
4 7 4
540/2001
7
6 5 4
540/111
7
6 3 4
621/111
7
7 4 4
621/2001
7
5 6 4
540/111
7
5 5 4 6
621/111
7
4 4 7
702/2001
7
3 4 6
540/111
7
5 4 6
702/111

Fig. 4*b*

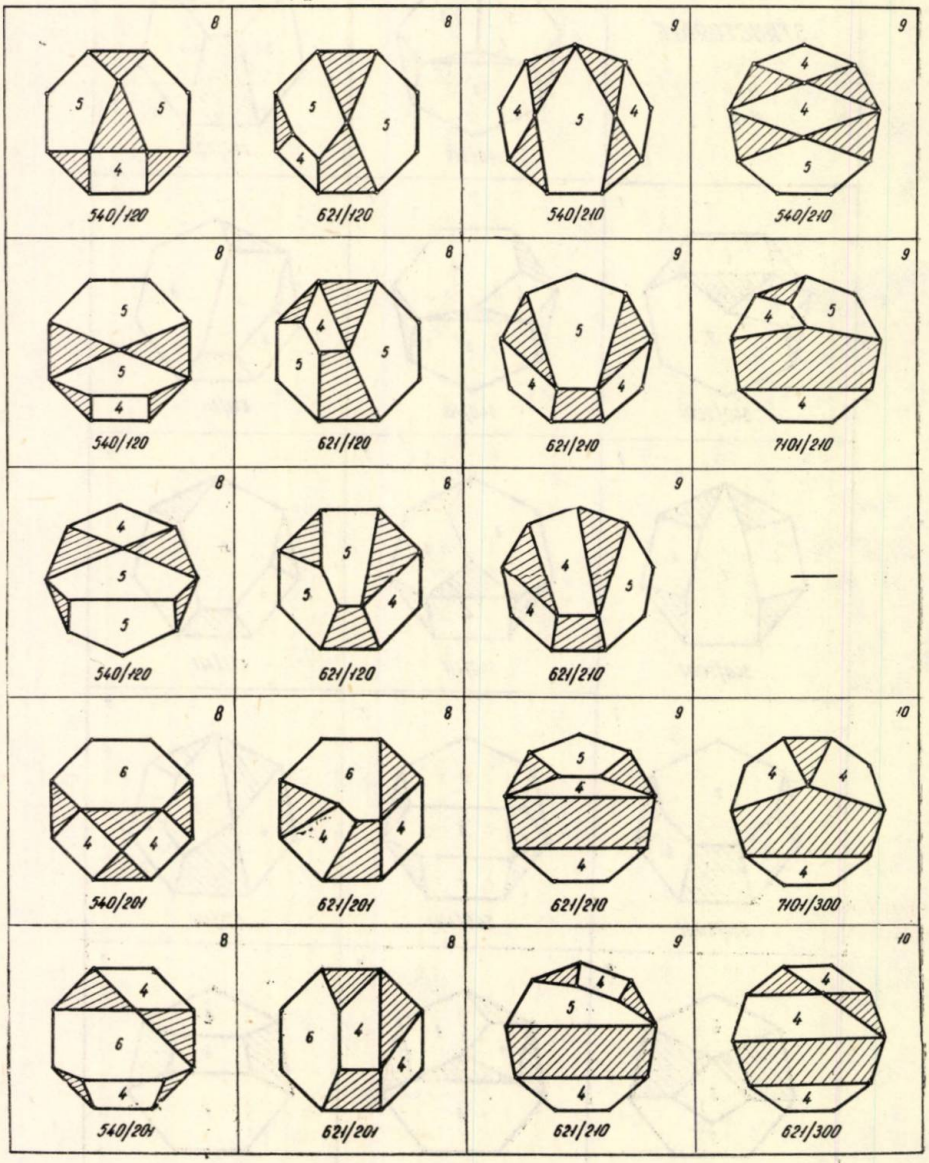

8
5 5 4
540/120
8
5 5 4
621/120
9
4 5 4
540/210
9
4 4 5
540/210
8
5 5 4
540/120
8
4 5 5
621/120
9
5 4 4
621/210
9
4 5 4
7101/210
8
4 5 5
540/120
8
5 5 4
621/120
9
4 4 5
621/210
8
6 4 4
540/201
8
6 4 4
621/201
9
5 4 4
621/210
10
4 4 4
7101/300
8
4 6 4
540/201
8
6 4 4
621/201
9
4 5 4
621/210
10
4 4 4
621/300

Fig. 5

Tabelul nr. 6

M	-2			1			2			Structura numerică						Nr. crt.
N	c	n	n_2	c	n	n_2	c	n	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	
1				3	3	3	4	4	4	—	—	—	—	—	—	1
2				5	4	2	6	5	3	2	—	—	—	—	—	2
						3			4	0	1	—	—	—	—	3
3	6	4	0	7	5	1	8	6	2	4	—	—	—	—	—	4
			1			2			3	2	1	—	—	—	—	5
			2			3			4	0	2	—	—	—	—	6
			2			3			4	1	0	1	—	—		7
			3			4			5	0	0	0	1	—	—	8
4	8	5	—	9	6	0	10	7	1	6	—	—	—	—	—	9
			0			1			2	4	1	—	—	—	—	10
			1			2			3	2	2	—	—	—	—	11
			1			2			3	3	0	1	—	—	—	12
			2			3			4	0	3	—	—	—	—	13
			2			3			4	1	1	1	—	—	—	14
			3			4			5	0	0	2	—	—	—	15
			2			3			4	2	0	0	1	—	—	16
			3			4			5	0	1	0	1	—	—	17
			3			4			5	1	0	0	0	1	—	18
			4			5			6	0	0	0	0	0	1	19

(manivele). În această analiză sînt excluse cazurile speciale menţionate de B. Paul [14], cînd lanţul cinematic ar cuprinde:

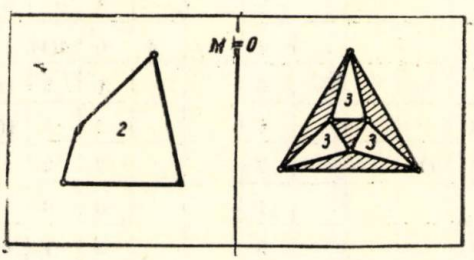


Fig. 6

o parte din lanţ supraconstrîns compensat printr-o altă parte din lanţ cu mobilitate superioară;

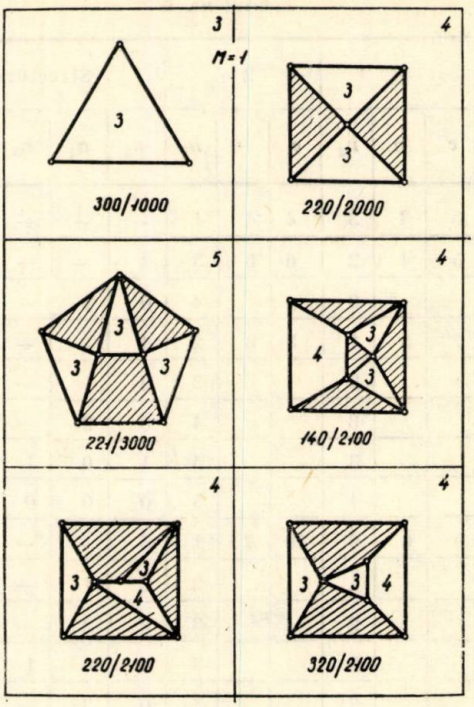


Fig. 7

Tabelul nr.7

M	Structură numerică							Nr. crt.	M	Structura numerică							Nr. crt.
	N	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8			N	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	
0	3	3(1)						1	2	3	0	3(1)					6
	4	4	(1)					2			1	2	(1)				7
1	1	1(1)						1			2	0	1(1)				8
	2	2	(1)					2			2	1	0	(1)			9
	3	2	1(1)					3			3	0	0	0	(1)		10
		3	0	(1)				4		4	0	4(1)					11
	4	2	2(1)					5			1	3	(1)				12
		3	1	(1)				6			2	1	1(1)				13
		4	0	0	(1)			7			2	2	0	(1)			14
2	1	0	1(1)					1			3	0	1	(1)			15
		1	0	(1)				2			3	1	0	0	(1)		16
	2	0	2(1)					3			4	0	0	0	0	(1)	17
		1	1	(1)				4									
		2	0	0	(1)			5									

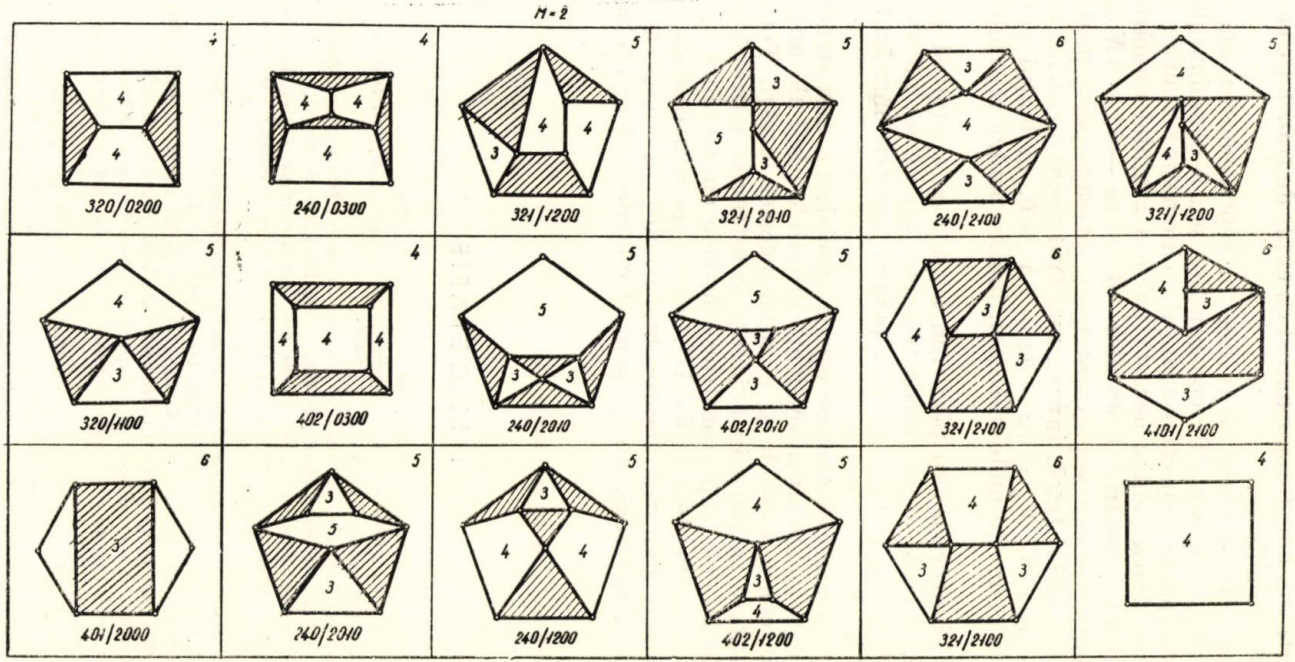

M-2
320/0200
240/0300
321/1200
321/2010
240/2100
321/1200
320/1100
402/0300
240/2010
402/2010
321/2100
4101/2100
401/2000
240/2010
240/1200
402/1200
321/2100

Fig. 8

— condiţii de legătură pasive sau grade de libertate inutile, lanţul avînd forme critice permanente;

— o parte din lanţ format numai cu cuple de translaţie care modifică gradul său de mobilitate.

Aceste cazuri speciale se traduc în reprezentarea analitică [14], [20] prin gruparea în ecuaţiile contururilor sau a combinaţiilor acestora corespunzătoare părţii respective a lanţului cinematic a unui anumit număr de necunoscute. Dacă pentru această parte a lanţului numărul necunoscutelor depăşeşte numărul ecuaţiilor $M_p = (n-1) - 1N \leqslant 0$, lanţul parţial corespunzător este supraconstrîns şi întreaga parte poate fi tratată ca un ansamblu rigid. Dacă, invers, numărul necunoscutelor este inferior numărului de ecuaţii $M_p = (n-1) - 2N > 0$, în lanţul parţial corespunzător apar grade de mobilitate noi, inutile pentru ansamblul lanţului cinematic.

În cazul lanţurilor sau părţi din lanţuri care cuprind numai cuple de translaţie, gradele de supraconstrîngere sau de mobilitate inutilă se obţin din $M_p = (n-1) - N \leqslant 0$, pentru acestea numărul ecuaţiilor reducîndu-se la N.

Deoarece urmărirea acestor cazuri speciale pe cale structurală este mai clară, reieşind imediat în evidenţă diferitele părţi ale unui lanţ cinematic, s-au întocmit tabelele şi planşele acestei lucrări. Totodată, prin această prezentare se pune în evidenţă construcţia comună a lanţurilor cinematice de la cele supraconstrînse la cele cu mobilitate superioară, atît pentru lanţurile de familia III, cît şi pentru cele de familia IV. Este de remarcat unitatea acestor lanţuri atît în metodele de sinteză numerică sau structurală, cît şi pentru metodele elementelor sau contururilor.

Primită la redacţie la 20 septembrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. I. I. Artobolevski, *Teoria mecanismelor şi maşinilor*, Bucureşti, Edit. Tehnică, 1955.
2. — *Despre chestiunea cercetării lanţurilor cinematice complexe*, Bulet. Institutului politehnic Iaşi, seria nouă, **VI (X)** *1–2* (1960).
3. M. Grüebler, *Getriebelehre*, Berlin, 1917 (citat după K. Hain, *Die Analyse und Synthese der achtgliedrigen Gelenkgetriebe*, VDI, Berichte 5, 1955).
4. L. P. Assur *Cercetarea mecanismelor plane din bare articulate*, Bulet. Institutului politehnica din Petrograd, XX-XXVII, 1913–1918 (citat după L. B. Levensohn, *Teoria mecanismelor şi maşinilor*, Bucureşti, Edit. Tehnică, 1951).
5. K. Hain, *Die Analyse und Synthese der achtgliedrigen Gelenkgetriebe*, VDI, Berichte 5, 1955.
6. — *Angewandte Getriebelehre*, VDI Verlag Düsseldorf, 1961.
7. H. Alt, *Nas bisher unveröfentlichen Untersuchungen* (citat după K. Hain, *Die Analyse und Synthese der achtgliedrigen Gelenkgetriebe*, VDI, Berichte 5, 1955).
8. Г. Г. Баранов, *Классификация, строение, кинематика и кинетостатика плоских механизмов с парами первого рода*, Труды семинара по Т М М, XII, 46 (1952).
9. F. R. E. Crossley, *A Contribution to Guebler's Theory in the Number Synthesis o Plane Mechanisms*, Journal of Engineering for Industry, ASME, February 1964.
10. N. I. Manolescu, I. Erceanu, P. Antonescu, *Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate*, St. cerc. mec. apl., *6* (1962).
11. N. I. Manolescu, *O metodă unitară de alcătuire a lanţurilor cinematice şi a mecanismelor plane articulate de diferite grade de libertate şi mobilitate*, St. cerc. mec. apl., *6* (1964).

12. Th. B. Goodman, *An indirect method for determining accelerations in complex mechanisms*, Transactions of the ASME, *81* (1958).
13. D. Mangeron, C. Drăgan, C. Munteanu, *Studiul mecanismelor plane cu cuple inferioare bazat pe metoda accelerațiilor reduse*, Bulet. Institutului politehnic Iași, II, *3—4* (1956).
14. B. Paul, *A unified Criterium for the Degree of Constraint of Plane kinematic Chains*, Journal of Applied Mechanics, ASME, March 1960.
15. Chr. Pelecudi, *Analogia electrică în cinematica mecanismelor plane*, St. cerc. mec. apl., **14**, *6* (1963).
16. — *Metoda accelerațiilor compuse superioare în lanțurile cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., **16**, *2* (1965).
17. — *Metoda solidarizării pentru lanțurile cinematice închise*, St. cerc. mec. apl.,
18. E. Bugaievski, C. R. Bogdan, Chr. Pelecudi, *Zur Einteilung räumlicher Mechanismen*, Revue de Mécanique Appliquée, București, *1* (1957).
19. Cl. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, Edit. Dunod, 1958.
20. R. Voinea, C. M. Atanasiu, *Contribuții la determinarea stării cinematice a unui mecanism prin metoda sistemelor conjugate*, St. cerc. mec. apl., *1* (1963).

ANALIZA MECANISMELOR AUTOMATE CU ELEMENTE MECANICE[1])

L. LIVOVSCHI
Institutul de petrol, gaze şi geologie Bucureşti

621.53

Această lucrare este o expunere a unui procedeu de analiză a funcţionării automatelor mecanice finite, în care se utilizează teoria automatelor finite.
Modul de aplicare al procedeului propus este ilustrat prin cîteva exemple.

1. INTRODUCERE

În practică se folosesc frecvent mecanisme automate cu funcţionare discontinuă, constituite din organe rigide şi resoarte.

Pentru studiul funcţionării acestor mecanisme se pot utiliza metodele teoriei automatelor finite. În cele ce urmează ne ocupăm de problema analizei mecanismelor cu elemente logice mecanice.

Analiza unui automat finit constă în următoarele. Fiind cunoscută funcţionarea automatului şi a elementelor lui, se deduc funcţiile logice care descriu interacţiunea dintre elementele automatului. Dacă interacţionarea elementelor automatului este descrisă corect de funcţiile amintite mai sus, atunci analiza efectuată este corectă (într-un sens care va fi precizat mai jos, la p. 605).

Fiind dat un mecanism, se numesc elemente ale lui orice submulţimi de organe care interacţionează între ele. Prin structură a unui mecanism se înţelege interpretarea lui ca sistem al elementelor componente. Cea mai complexă structură se obţine dacă drept elemente ale mecanismului se

[1]) Prezentată la Conferinţa de mecanică, Bucureşti, septembrie 1965, **12**, 3 (1967). Publicată şi în Rev. Roum. Sci. Tech. Mec. Appl. (în limba rusă)

consideră toate organele lui. Deoarece dificultățile studiului unui mecanism cresc cu numărul de elemente, este natural să se considere însă structuri cu număr redus de elemente. În calitate de elemente este indicat să se aleagă submulțimile de organe care realizează funcția de memorie. Identificarea unor asemenea elemente permite utilizarea lor și în alte mecanisme automate. Evident că pentru un mecanism dat se pot considera diferite structuri, iar complexitatea studiului funcționării mecanismului depinde de structura aleasă.

2. ELEMENTE LOGICE MECANICE

Fie un sistem de solide rigide și resoarte. În acest sistem există organe care transmit informație asupra poziției lor și altor sisteme; notăm cu $q_1, \ldots, q_h$ coordonatele generalizate ale acestor organe, iar cu C_q produsul cartezian al domeniilor lor de variație. Sistemul de solide studiat constituie un *element logic* dacă există criterii care permit determinarea unei împărțiri a produsului cartezian C_q în intervale. Este comod de considerat și aplicația care pune în corespondență mulțimii acestor intervale domeniul de variație al unei variabile x cu un număr finit n_x de valori. Fiecare interval poate fi notat cu valoarea corespunzătoare a lui x. Elementul se află în *starea* i dacă punctul figurativ al poziției lui aparține intervalului notat i.

Fie acum Q_k forța generalizată cu care alte elemente acționează asupra unui anumit organ k al elementului studiat. Numărul forțelor Q_k este egal cu numărul organelor elementului studiat asupra cărora acționează alte organe.

Considerăm produsul cartezian C_Q al domeniilor de variație al forțelor generalizate Q_k. Împărțirea produsului C_q în intervale induce o împărțire în intervale a lui C_Q. Ca și mai sus, este comod de considerat aplicația care pune în corespondență mulțimii intervalelor lui C_Q domeniul de variație al unei variabile X cu un număr finit n_X de valori. Vom zice că asupra elementului acționează o forță generalizată de intensitate j dacă variabila X are valoarea j.

Se numește ecuație caracteristică a unui element funcția

$$X_{N+1} = F(X_N, x_N), \tag{1}$$

unde cu N și $N+1$ s-au notat intervalele temporale succesive definite de schimbările valorilor variabilelor X și x.

Vom studia acum un element de un tip utilizat frecvent în mecanismele mecanice. Acest element este arătat pe figura 1 în trei poziții diferite. Presupunem că este necesară transmiterea de informație asupra poziției tijei T. Se deduce ușor că pentru descrierea configurației tijei T este suficientă o singură coordonată generalizată q, reprezentînd abscisa unui punct al tijei.

Celor trei intervale de variație a variabilei q definite de opritorii O_1, O_2 și cele două poziții relative ale tijei T cu clichetii C_1 și C_2 li se pun în corespondență valorile 0, 1, 2 ale unei variabile x. Celor trei inter-

vale de variație ale lui q le corespund trei intervale de variație ale forței generalizate Q_1 cu care alte elemente acționează asupra tijei T. Rezultă că forța generalizată Q_1 poate fi descrisă cu ajutorul unei variabile X_1 cu trei valori. Cele două forțe generalizate, reprezentînd acțiunea altor elemente asupra clicheților, pot fi de asemenea descrise cu ajutorul a două variabile X_2 și X_3, avînd cîte două valori. În figura 1 *a* cele trei variabile X_1, X_2, X_3 au fost reprezentate convențional prin vectori.

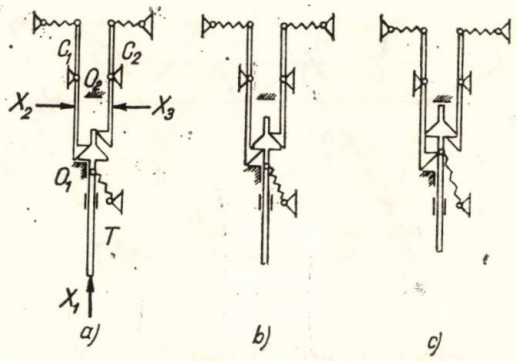


Fig. 1

Ecuația caracteristică a elementului studiat poate fi dedusă din tabela 1. În acest tabel, domeniul de variație al variabilei X este reprezentat ca produs cartezian al domeniilor de variație a variabilelor X_1, X_2, X_3. Liniile și coloanele tabelei reprezintă argumentele funcției (1). Valorile lui x se trec în dreptul punctelor de intersecție ale liniilor cu coloanele. Mai facem observația că, deoarece operarea cu variabile x

Tabela 1

	$X_{1N}\,X_{2N}\,X_{3N}$											
	000	001	011	010	100	101	111	110	200	201	211	210
0	0	0	0	0	1	1	1	1				
x_N 1	1	1	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2
												x_{N+1}

cu un număr de valori p mai mare decît două prezintă dificultăți, utilizăm pentru descrierea acestor variabile un număr de p variabile bivalente, care, ca funcții de variabile x, sînt definite de relațiile (2):

$$\begin{aligned} x^i &= 0 \quad \text{dacă} \quad x \neq i, \\ x^i &= 1 \quad ,, \quad x = i, \\ x^i\,x^j &= 0 \quad ,, \quad i \neq j, \\ x^i\,x^j &= x^i \quad ,, \quad i = j, \\ x^0 + x^1 + \ldots + x^{p-1} &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Ţinînd seama de această observaţie, din tabela 1 deducem

$$\begin{aligned} x^0_{N+1} &= X^0_{1N}\,(x^0_N + x^1_N\,X^1_{2N}),\\ x^1_{N+1} &= X^1_{1N}\,(x^0_N + x^1_N) + X^1_{3N}\,x^2_N + X^0_{1N}\,X^0_{2N}\,x^1_N, \qquad (3)\\ x^2_{N+1} &= X^2_{1N}\,(x^1_N + x^2_N) + X^0_{2N}\,x^2_N. \end{aligned}$$

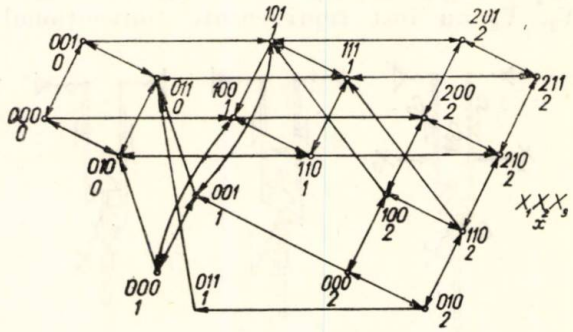


Fig. 2

Pentru simplificarea scrierii, indicii N şi $N+1$ pot fi eliminaţi. Cu această convenţie, ecuaţiile (3) se scriu

$$\begin{aligned} x^0 &= X^0_1\,(x^0 + x^1\,X^1_2),\\ x^1 &= X^1_1\,(x^0 + x^1) + X^1_3\,x^2 + X^0_1\,X^0_2\,x^1, \qquad (3')\\ x^2 &= X^2_1\,(x^1 + x^2) + X^0_2\,x^2. \end{aligned}$$

Vom conveni să spunem că ecuaţiile (3) (sau 3') reprezintă *ecuaţia caracteristică* a elementului studiat.

Funcţionarea unui element poate fi urmărită mai comod pe graful său caracteristic.

Arcele grafului caracteristic reprezintă elementele produsului cartezian $(X_N) \times (x_N)$, iar nodurile elementele produsului cartezian $(X_N) \times (x_{N+1})$ dacă facem convenţia să notăm extremitatea unui arc cu valoarea lui X, iar originea cu valoarea lui x. Un element al produsului $(X_N) \times (x_N)$ se numeşte *stare* $X_N\,x_N$. O stare $X_N\,x_N$ care poate avea o durată oricît de mare se numeşte *stabilă*. Unei asemenea stări îi corespunde un arc ale cărui origine şi extremitate coincid.

Graful caracteristic al elementului studiat este arătat în figura 2. Pe acest graf au fost figurate numai arcele care corespund la evoluţii în care nu are loc schimbarea concomitentă a valorilor a două forţe.

3. INTERACŢIONAREA ELEMENTELOR

Două elemente E_1 şi E_2 interacţionează dacă există organe ale lor care intră în contact în timpul evoluţiei elementelor studiate. Forţa de interacţiune depinde în general de poziţiile celor două elemente, adică este descrisă printr-o funcţie logică de forma

$$F = F\,(x^1, x^2, \ldots, x^n, y^1, y^2, \ldots, y^m), \qquad (4)$$

unde x^i și y^i sînt variabile bivalente care descriu pozițiile elementelor E_1 și E_2.

Dacă mai multe elemente E_1, E_2, ..., E_n acționează asupra aceluiași organ al unui element E, atunci forța generalizată corespunzătoare Q depinde în general atît de poziția lui E, cît și de pozițiile elementelor E_1, E_2, ..., E_n. Interacționarea elementelor poate fi urmărită mai ușor

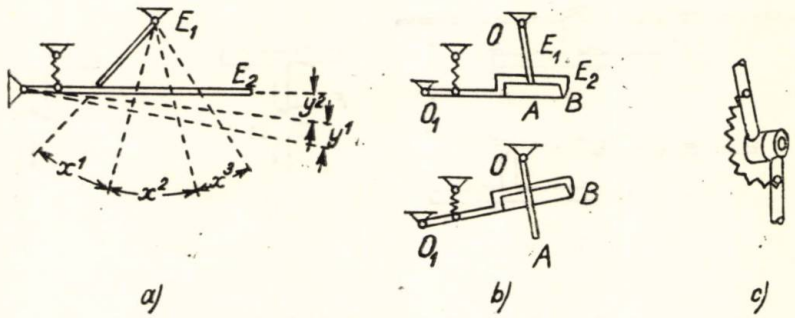


Fig. 3

dacă forța generalizată Q se înlocuiește cu un sistem de forțe generalizate, corespunzătoare forțelor motoare care acționează asupra organului studiat.

În ceea ce privește formele particulare ale funcției F, una dintre ele frecvent întîlnită este

$$F = F_1 F_2 = (x^1 + x^2 + \ldots + x^n)(y^1 + y^2 + \ldots + y^m). \qquad (4')$$

În acest caz, elementele E_1 și E_2 interacționează dacă primul se află într-una dintre pozițiile 1, 2, ..., n, iar al doilea se află într-una dintre pozițiile 1, 2, ..., m.

Foarte frecvente sînt situațiile cînd pozițiile 1, 2, ..., n ale lui E_1 și 1, 2, ..., m ale lui E_2 sînt succesive.

Să presupunem că elementul E_1 este motor. Dacă forța de interacțiune este aceeași pentru ambele sensuri de deplasare ale lui E_1, atunci interacționarea celor două elemente se poate realiza printr-un dispozitiv de tipul arătat pe figura 3 *a*. Pentru forța F cu care E_1 acționează asupra lui E_2 vom avea expresia

$$F = (x^1 + x^2 + x^3)(y^1 + y^2). \qquad (5)$$

Dacă pentru un sens de deplasare a lui E_1 forța care acționează asupra lui E_2 este diferită de zero, iar pentru sensul invers de deplasare este nulă, atunci interacționarea celor două elemente se poate realiza printr-un dispozitiv de tipul arătat pe figura 3 *b*. În timpul deplasării barei OA în sens antiorar, extremitatea ei A se găsește în interiorul canalului din extremitatea barei O_1B. La deplasarea în sens orar a barei OA, ea se împiedică de extremitatea B a barei O_1B, se încovoaie puțin și ajunge deasupra canalului barei O_1B. În felul acesta este asigurată acționarea dorită a barei O_1B.

Menționăm că în acest caz bara OA trebuie interpretată ca un sistem de două solide rigide articulate elastic între ele (fig. 3 *c*).

Un dispozitiv analog cu cel din figura 3 *b* este arătat pe figura 4.

În cazul cînd forța de interacțiune trebuie să fie nulă cu condiția ca elementele care interacționează să rămînă în contact, se pot folosi dispozitive de tipul din figura 5. În poziția din figura 5 *b*, forța F este nulă.

Alte dispozitive de interacționare vor fi întîlnite în cadrul exemplelor.

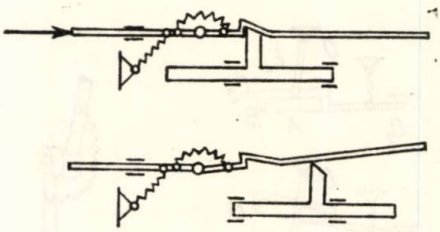


Fig. 4

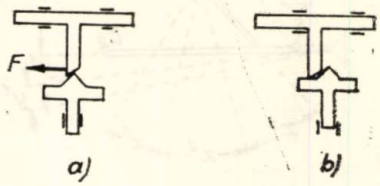


Fig. 5

4. ELEMENTE ȘI DISPOZITIVE DE INTERACȚIONARE ECHIVALENTE

Fie două elemente E_1 și E_2. Vom conveni să spunem că ele sînt *echivalente* dacă între coordonatele și forțele generalizate care intră în descrierea funcționării lor se poate stabili o corespondență biunivocă și dacă ecuațiile caracteristice ale celor două elemente sînt identice.

În mod asemănător, două dispozitive de interacționare sînt *echivalente* dacă între variabilele care descriu pozițiile organelor elementelor în interacțiune se poate stabili o corespondență biunivocă și dacă funcțiile care descriu forțele de interacțiune ale celor două dispozitive sînt identice.

Două elemente sau dispozitive de interacționare echivalente se pot obține unul din celălalt prin următoarele operații :

1) schimbarea naturii mișcării organelor cu conservarea numărului de coordonate generalizate care descriu poziția acestor organe;

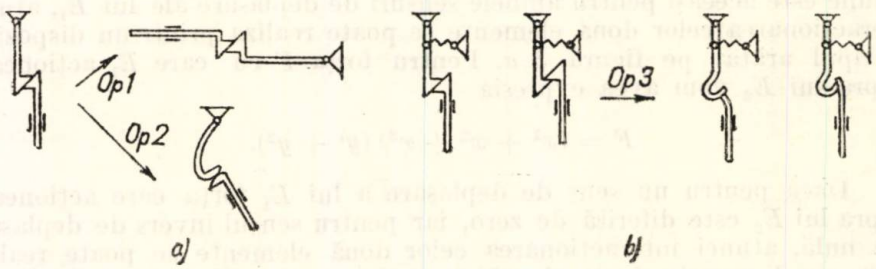


Fig. 6

2) schimbarea formei organelor elementelor cu conservarea numărului de poziții în care organele interacționează;

3) schimbarea naturii forțelor de interacțiune.

Toate operațiile implică și schimbarea formei organelor elementelor.

Cele trei operații sînt ilustrate pe figura 6.

Primele două operații sînt evidente. În ceea ce privește cea de-a treia operație, constatăm că în partea din stînga a figurei 6 *b* blocarea celor două organe se datorește rigidității, pe cînd în partea din dreapta a figurei 6 *b* blocarea se datorește forțelor de frecare.

Menționăm că operațiile descrise nu sînt singurele operații care permit obținerea de elemente echivalente. Într-adevăr, se constată ușor

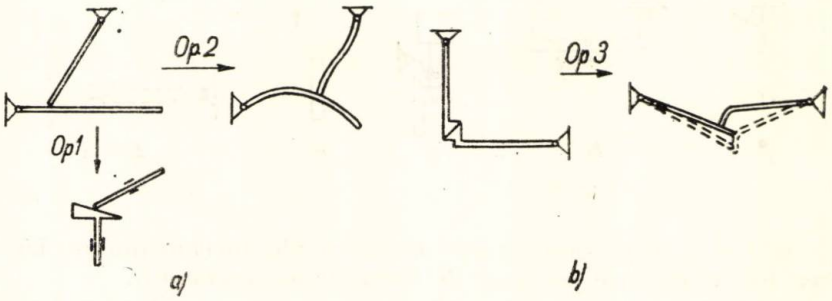


Fig. 7

că un element echivalent cu un element dat *E* se poate obține și prin construirea de elemente avînd un număr mai mare de organe decît *E*.

La fel ca mai sus se pot construi și dispozitive de interacționare echivalente. În figura 7 sînt arătate cîteva asemenea dispozitive.

Mai observăm că un dispozitiv de interacționare nu poate fi interpretat ca fiind un element. Într-adevăr, organele unui dispozitiv de interacționare aparțin la elemente diferite. Pe de altă parte, la studiul funcționării unui element forțele de interacțiune dintre organele lui nu sînt luate în considerație.

5. MECANISME AUTOMATE ȘI ANALIZA FUNCȚIONĂRII LOR

Un mecanism automat este o mulțime de elemente care interacționează între ele. Elementele unui automat pot fi *de comandă, intermediare* și *executive*. Elementele de comandă sînt acționate de corpuri exterioare mecanismului dat. Elementele executive acționează asupra unor corpuri din afara mecanismului dat. Elementele intermediare interacționează numai cu organe ale mecanismului dat.

Elementele de comandă cele mai frecvent utilizate sînt butoanele. Cîteva forme constructive de butoane sînt arătate pe figura 8.

Un buton care revine în starea de repaus după ce acționarea lui a încetat se numește *normal* (element de comandă normal). În caz contrar, butonul se numește *mixt* (element de comandă mixt). Butoanele din figura 8 *a* și 8 *b* sînt normale, iar butonul din figura 8 *c* este mixt.

Un element executiv este *normal* dacă schimbarea poziției lui nu condiționează pozițiile altor elemente. În caz contrar, elementul executiv se numește mixt. Pe figura 9 sînt arătate două elemente executive: unul normal și altul mixt.

Fiind dat un mecanism automat, se notează cu K, Z, W variabilele care descriu poziţiile elementelor de comandă, intermediare şi executive. Funcţionarea mecanismului este descrisă de două ecuaţii de forma

$$\begin{aligned} Z_{N+1} &= f(K_N, Z_N), \\ W_N &= g(K_N, Z_N). \end{aligned} \tag{6}$$

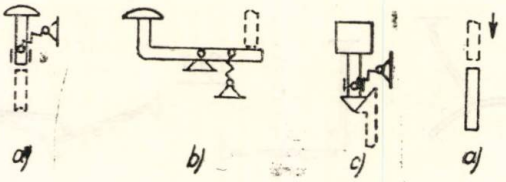


Fig. 8 Fig. 9

Funcţiile f şi g se numesc *funcţii de lucru* ale mecanismului, iar transcrierea lor în cuvinte *program de lucru al mecanismului.*

Pentru un mecanism cunoscut se pot scrie şi ecuaţiile care dau forţele de interacţiune în funcţie de variabilele K şi Z :

$$Q_N = h(K_N, Z_N). \tag{7}$$

Pe de altă parte, ecuaţiile caracteristice ale elementelor mecanismului se pot pune sub forma

$$\begin{aligned} Z_{N+1} &= F(Q_N, Z_N), \\ W_N &= G(Q_N, Z_N). \end{aligned} \tag{8}$$

Eliminînd variabilele Q_N între (7) şi (8), se obţin ecuaţiile (6).

Ţinînd seama de cele expuse mai înainte, rezultă că analiza unui mecanism comportă următoarele etape :

1) determinarea funcţiilor de lucru (6) ;

2) determinarea ecuaţiilor caracteristice ale elementelor mecanismului (8) ;

3) determinarea ecuaţiilor (7) care descriu forţele de interacţiune dintre elementele mecanismului. Aceste ecuaţii vor fi numite *formule structurale de interacţionare* ;

4) se verifică dacă din (7) şi (8) rezultă (6). În caz afirmativ se consideră că analiza efectuată este corectă.

Menţionăm că nu este exclus ca la etapele 1), 2), 3) să se efectueze unele erori şi, totuşi, verificarea de la etapa 4) să dea rezultat pozitiv. În acest caz, calculele efectuate sînt valabile pentru un alt mecanism, rezultat din cercetarea incompletă şi eronată a mecanismului dat.

Pentru analiza mecanismelor automate se poate utiliza şi un procedeu grafic. În acest scop, evoluţia mecanismului se reprezintă sub formă de *graf caracteristic.* Arcele grafului caracteristic reprezintă elementele produsului cartezian $(K_N)\,X(Z_N)$, şi anume extremitatea unui arc se notează cu valoarea lui K_N, iar originea cu valoarea lui Z_N. Dacă sub o comandă K_N starea Z_N a mecanismului nu se schimbă, se obţine un arc a cărui origine şi extremitate coincid. Valoarea corespunzătoare a lui Z reprezintă atunci o stare *stabilă* a mecanismului.

Să notăm graful caracteristic al mecanismului cu G, iar graful caracteristic al unui element al său X cu g_X. Fiecărui arc al lui G îi corespund unul sau mai multe arce ale lui g_X deoarece fiecărei treceri a mecanismului dintr-o stare $K_N Z_N$ în altă stare $K_N^i Z_N^i$ îi corespunde fie trecerea elementului X dintr-o stare $X_N^i x_N^i$ într-o altă stare $X_N^j x_N^j$, fie menţinerea elementului în stare $X_N^i x_N^i$ în care era.

Să presupunem acum că formulele (7) au fost determinate. Analiza efectuată este corectă dacă din corespondenţa arcelor grafurilor G şi g_X rezultă formulele (7). Evident că, dacă formulele (7) se deduc plecînd de la corespondenţa amintită, verificarea lor nu este necesară.

Alte amănunte asupra procedeului grafic de analiză vor fi arătate în cadrul exemplelor.

În ceea ce priveşte mecanismele studiate mai departe, precizăm că am considerat întotdeauna numai cazul funcţionării normale, adică a acelei funcţionări care are loc atunci cînd comenzile se dau corect. În mod asemănător se poate studia funcţionarea mecanismelor şi în cazul cînd se fac erori în darea comenzilor. Se poate întîmpla ca în acest caz să fie necesar să se considere că elementele mecanismelor studiate au un număr mai mare de stări decît cel acceptat.

Observăm de asemenea că în unele cazuri (primul exemplu) am acceptat că schimbarea unei comenzi poate provoca schimbarea concomitentă a valorilor a două forţe de interacţiune. În asemenea situaţii, funcţionarea corectă are loc datorită inerţiei mici a organelor mecanismului. Asemenea situaţii cer un studiu special, care depăşeşte obiectivele prezentei lucrări.

În ceea ce priveşte definirea structurii mecanismelor studiate, singurul criteriu utilizat a fost acela de a obţine elemente componente care să aibă şi funcţia de memorie. Evident că se pot considera şi alte soluţii decît cele expuse.

6. EXEMPLE

Considerăm cîteva exemple de analiză a unor mecanisme cunoscute, şi anume două mecanisme de obturaţie utilizate în aparatele fotografice, mecanismul creionului cu pastă şi un mecanism de comandă utilizat la magnetofoane.

A. OBTURATORUL GAUTHIER

Descrierea mecanismului. Deoarece sub forma în care este construit efectiv acest mecanism este dificil de reprezentat, vom studia o formă echivalentă a mecanismului studiat, reprezentată pe figura 10. Mecanismul este format din tija de comandă *1* şi patru pîrghii *2*, *3*, *4*, *5*, care se rotesc în jurul unor axe trecînd prin punctele O_1, O_2, O_3, O_4. Extremitatea din stînga a pîrghiei *2* (vecinătatea punctului A) este articulată elastic de restul pîrghiei, axa $x—x'$ a acestei articulaţii fiind cuprinsă în planul hîrtiei. În extremitatea ei din dreapta, pîrghia *3* este echipată cu un canal I de forma din figura 3 *b*. Pe figura 10 este reprezentată configuraţia de repaus a mecanismului.

Dacă se acţionează asupra butonului A, poziţiile relative ale organelor mecanismului se schimbă succesiv. Unele dintre aceste poziţii succesive sînt arătate pe figura 11.

Pentru prima acţionare asupra butonului A se realizează succesiv poziţiile stabile a, b, c, d, e. Reamintim cu această ocazie că o poziţie (sau stare) se numeşte stabilă dacă ea durează oricît de mult cu condiţia

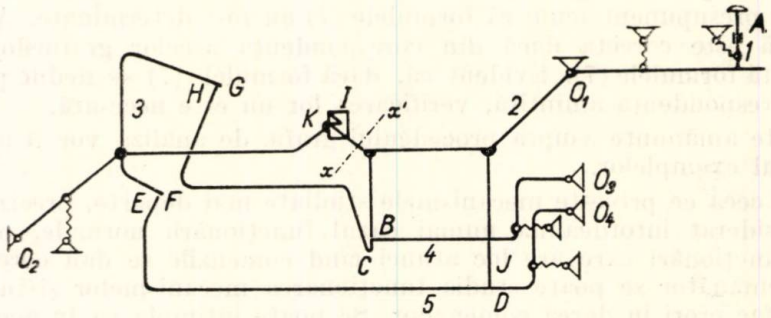


Fig. 10

ca elementele de comandă să nu-şi schimbe poziţia (starea). Stările a, b, c, d, e se realizează pentru cinci poziţii succesive ale butonului A în cursa lui descendentă.

Dacă butonul A este eliberat, mecanismul ia poziţiile nestabile f şi g şi se stabilizează în poziţia d. Foile obturatorului sînt acţionate de pîrghia *3* (prin intermediul unui dispozitiv nefigurat). Foile se deschid în poziţia e (în momentul cînd capătul A al pîrghiei *2* depăşeşte marginea de sus a canalului K) şi rămîn deschise în poziţiile f, g, h, deoarece pîrghia *3* este blocată de pîrghiile *4* sau *5*. În poziţia h, pîrghia *2* este blocată de pîrghia *4*.

Pentru a doua acţionare a butonului A se realizează succesiv poziţiile i, j, k. În poziţia i pîrghia *3* este deblocată şi foile obturatorului închise.

În sfîrşit, dacă butonul A este eliberat, mecanismul trece prin poziţiile nestabile l, m, n, în starea de repaus a.

Menţionăm că pe figura 11 nu sînt figurate toate stările nestabile care au loc în timpul funcţionării mecanismului. De exemplu, la trecerea din starea A în starea b se realizează poziţia nestabilă p.

O enumerare mai completă a stărilor mecanismului va fi dată mai jos.

Elementele mecanismului. În calitate de elemente ale mecanismului studiat alegem cele două submulţimi de organe, arătate pe figura 12.

După cum se vede, cele două elemente au şi un organ comun, şi anume pîrghia *4*. Această pîrghie serveşte în ambele elemente pentru blocarea lor în anumite poziţii.

În ceea ce priveşte numărul de stări al unui anumit element, el este egal cu numărul de intervale al produsului C_a, definit de configuraţiile în care elementul considerat este blocat şi de configuraţiile în care începe sau încetează acţionarea de către elementul studiat a unor alte elemente.

Urmărind figura 11, deducem că elementul Y (fig. 2 a) are patru stări, în care configuraţiile elementelor componente se pot recunoaşte pe figura 11 a, b, c, d.

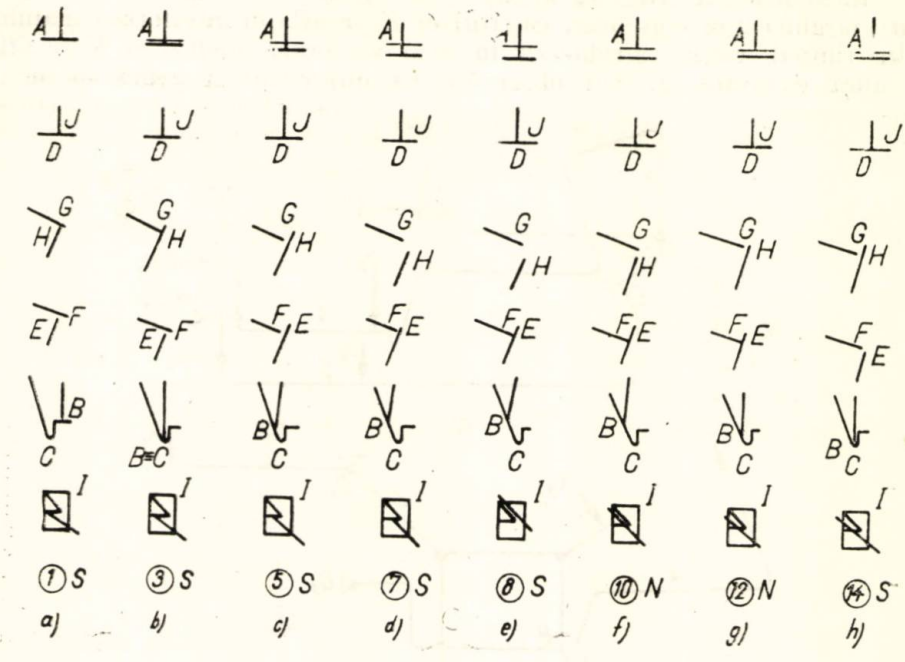

A
J
D
G
H
F
E
B
C
I
① S
③ S
⑤ S
⑦ S
⑧ S
⑩ N
⑫ N
⑭ S
a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
⑰ S
⑱ S
⑲ S
⑳ N
㉑ N
㉒ N
② N
i)
j)
k)
l)
m)
n)
p)

Fig. 11

Elementul X (fig. 12 *b*) are o evoluție ireversibilă. În timpul rotirii pîrghiei *2* în sens orar, capătul ei K se află în interiorul canalului *I*. În timpul rotirii pîrghiei *2* în sens antiorar, capătul ei K se află deasupra canalului *I*. Mai observăm că elementul X comandă pe Y

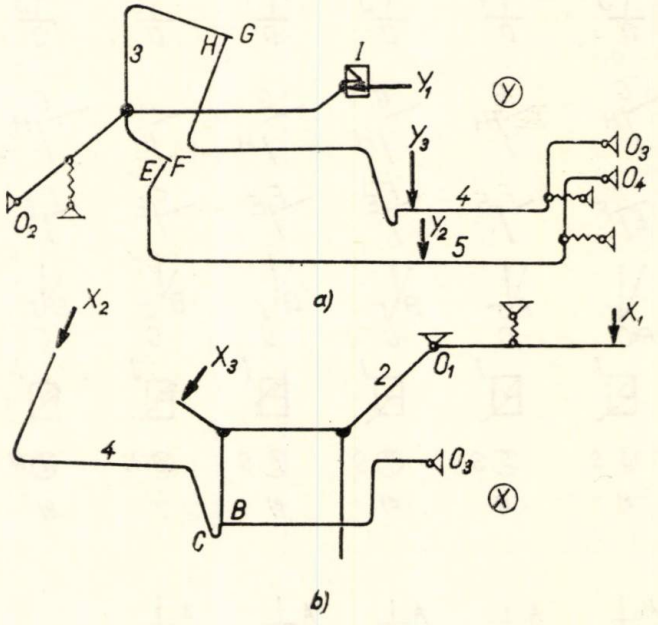


Fig. 12

și pentru rotirea pîrghiei *2* în sens orar trebuie să aibă măcar patru stări. La acestea se mai adaugă starea lui X, în care pîrghia *2* nu mai acționează asupra lui Y (fig. 11 *e*). Deoarece la rotirea pîrghiei *2* în sens antiorar pozițiile pîrghiei *2* se reproduc, este natural să presupunem că elementul X are în total opt stări.

Grafurile din figura 13 ilustrează modul de succedare al stărilor celor două elemente în timpul funcționării mecanismului.

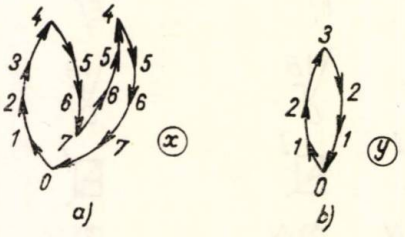


Fig. 13

Nodurile grafurilor sînt notate cu valorile variabilelor x și y, care descriu stările celor două elemente.

Grafurile caracteristice ale elementelor. Pentru deducerea grafurilor caracteristice ale elementelor vom proceda în modul arătat la p. 2, dar pentru simplificare nu vom considera decît evoluțiile care se realizează efectiv în timpul funcționării automatului.

Fie mai întîi elementul X. Asupra lui acționează trei forțe, X_1, X_2, X_3, care au respectiv cinci, două, două valori. Pentru cele cinci valori ale forței X_1, pîrghia *2* este rotită de unghiuri diferite. Pentru $X_2 = 0$, pîrghia *4* se află față de pîrghia *2* în poziția relativă din figura

11 *b*. Pentru $X_2 = 1$, pîrghia *4* se află față de pîrghia *2* în poziția relativă din figura 11 *a*.

În sfîrșit, pentru $X_3 = 0$, capătul K al pîrghiei *2* se află în planul desenului, iar pentru $X_3 = 1$ capătul K este scos din planul desenului.

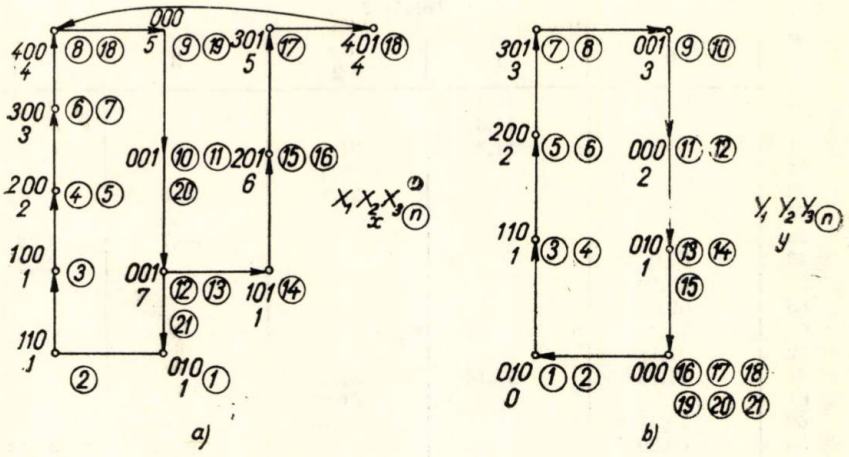


Fig. 14

Graful caracteristic al elementului X este arătat pe figura 14 *a*.

Trecem la elementul Y. Asupra lui acționează trei forțe, Y_1, Y_2, Y_3 avînd respectiv 4, 2, 2 valori. Celor patru valori ale forței Y_1 le corespund unghiuri de rotație diferite ale pîrghiei *3*.

Pentru $Y_2 = 0$, poziția relativă a pîrghiilor *3* și *5* este arătată pe figura 11 *c*. Pentru $Y_2 = 1$, poziția relativă a pîrghiilor *3* și *5* este arătată pe figura 11 *a*. Pentru $Y_3 = 0$, poziția relativă a pîrghiilor *3* și *4* este arătată pe figura 11 *b*.

Pentru $Y_3 = 1$, poziția relativă a pîrghiilor *3* și *4* este arătată pe figura 11 *a*.

Graful caracteristic al elementului Y este arătat pe figura 14 *b*.

Graful caracteristic al mecanismului. Variabila Z poate fi descrisă cu ajutorul elementelor produsului cartezian $(x_n) \times (y_n)$.

Urmărind figurile 10 și 11, putem transcrie programul de funcționare al automatului sub forma unei tabele care dă funcțiile

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= f_x(a_N, x_N, y_N), \\ y_{N+1} &= f_y(a_N, x_N, y_N). \end{aligned} \tag{6}$$

Deoarece elementul executiv Y este mixt, în exemplul studiat nu apare și a doua ecuație (6).

Cu ajutorul tabelei 2 (sau eventual direct) putem transcrie programul automatului sub formă de graf caracteristic (fig. 15). Numerele n ale nodurilor grafului caracteristic au fost trecute și în tabela 2. În felul acesta se poate urmări mai ușor evoluția mecanismului.

La întocmirea tabelei 2 am presupus că transmiterea efectului unei acțiuni de la un element la altul are loc cu întîrziere. În felul acesta,

chiar în cazul cînd două elemente schimbă concomitent de stare, se poate pune în evidență acel element care comandă schimbarea de stare a celuilalt.

Pe figura 11 sînt notate și numerele nodurilor corespunzătoare din graful caracteristic al mecanismului.

Tabela 2

$x_N\ y_N$	0	1	a_N 2	3	4
00	00,1	10,2			
10		11,3			
11		11,3	21,4		
21			22,5		
22			22,5	32,6	
32				33,7	
33				33,7	43,8
43	53,9				43,8
53	63,10				
63	62,11				
62	72,12				
72	71,13				
71	71,13	71,14	61,15		
61			61,16		
60	70,21		60,16	50,18	
50	60,20			50,17	40,18
40	50,19				40,18
70	00,1				

$x_{N+1}\ y_{N+1}, n$

Formulele structurale de interacționare. Pentru deducerea formulelor structurale de interacționare întocmim o tabelă care are drept intrări argumentele funcției (7) și ale căror ieșiri sînt valorile funcției (7). În exemplul nostru, argumentele sînt elementele produsului cartezian $(a_N) \times$

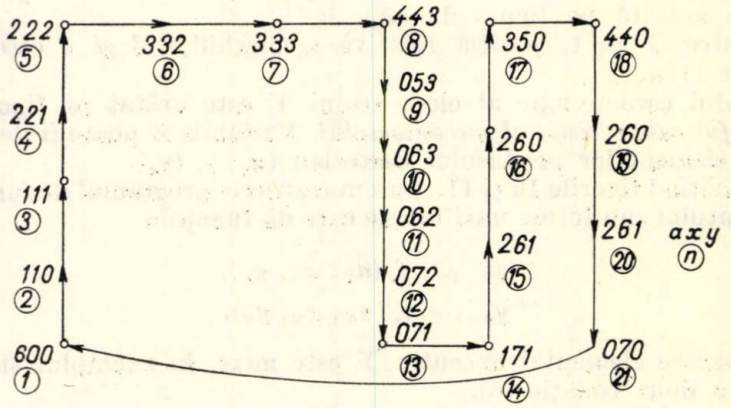


Fig. 15

$\times (x_N) \times (y_N)$, iar valorile sînt elementele produsului cartezian $(X_1) \times \times (X_2) \times (X_3) \times (Y_1) \times (Y_2) \times (Y_3)$. Urmărind tabela 2 și grafurile din figurile 14 și 15, obținem tabela 3.

Din această tabelă, utilizînd pentru simplificarea rezultatelor şi unele elemente ale produsului $(x_N) \times (y_N)$ care nu apar în timpul funcţionării automatului, deducem formulele (9)

$$
\begin{aligned}
&X_1^0 = a^0, \quad X_1^1 = a^1, \quad X_1^2 = a^2, \quad X_1^3 = a^3, \quad X_1^4 = a^4,\\
&X_2^0 = y^1 + \overline{x^0 + x^1 + x^7}, \quad X_2^1 = y^0 (x^0 + x^1 + x^7),\\
&X_3^0 = \overline{x^5 + x^6 + x^7}, \quad X_3^1 = x^5 + x^6 + x^7,\\
&Y_1^0 = x^0, \quad Y_1^1 = x^1, \quad Y_1^2 = x^2, \quad Y_1^3 = x^3, \qquad (9)\\
&Y_2^0 = \overline{x^0 + x^1 + x^7}, \quad Y_2^1 = x^0 + x^1 + x^7,\\
&Y_3^0 = \overline{x^3 + x^4 + x^5}, \quad Y_3^1 = x^3 + x^4 + x^5.
\end{aligned}
$$

Urmărind figurile 10, 11, 12, deducem că formulele (9) descriu corect interacţionarea elementelor mecanismului studiat. Analiza acestui mecanism, presupus format din elementele X şi Y, este încheiată.

Tabela 3

$x_N y_N$	0	1	$\frac{aN}{2}$	3	4
00	010 010,1	110 010,2			
10		110 110,3			
11		100 110,3	200 110,4		
21			200 200,5		
22			200 200,5	300 200,6	
32				300 301,7	
33				300 301,7	400 301,8
43	000 001,9				400 001,8
53	001 001,10				
63	001 000,11				
62	001 000,12				
72	001 010,13				
71	001 010,13	101 010,15	201 010,16		
61			201 000,16		
60	001 000,21		201 000,16	301 000,17	
50	001 000,20			301 000,17	401 000,18
40	000 000,19				400 000,18
70	010 010,1				

$x_{1N}\ x_{2N}\ x_{3N}\ y_{1N}\ y_{2N}\ y_{3N,n}$

Menţionăm că în formulele (9) notaţia $\overline{M}$ înseamnă complementara mulţimii M.

B. OBTURATORUL COMPUR

Descrierea mecanismului. O formă echivalentă a acestui mecanism este arătată pe figura 16. Foile obturatorului sînt acţionate de pîrghia *3* (printr-un dispozitiv nefigurat).

Pe figura 17 sînt arătate unele dintre poziţiile relative ale organelor mecanismului studiat care se realizează în timpul funcţionării lui.

Pentru prima acţionare asupra butonului A, pîrghia *3* este împinsă spre dreapta şi rămîne în această poziţie şi după eliberarea lui A. Pentru

a doua acţionare asupra butonului A pîrghia *3* este eliberată, iar după eliberarea lui A mecanismul revine în starea de repaus.

Elementele mecanismului. În calitate de elemente ale mecanismului considerăm submulţimile de organe din figura 18.

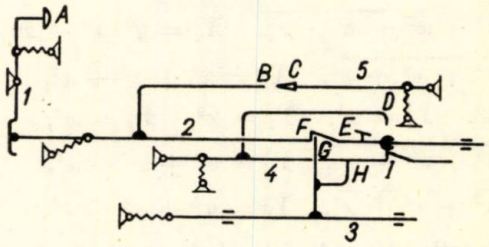


Fig. 16

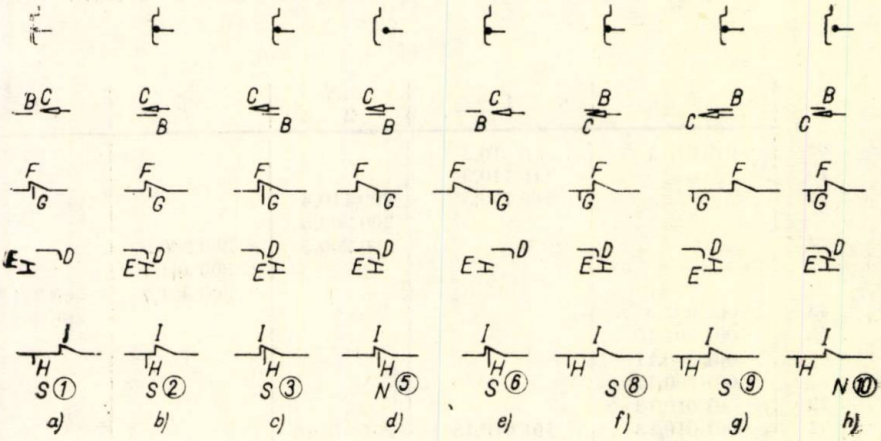


Fig. 17

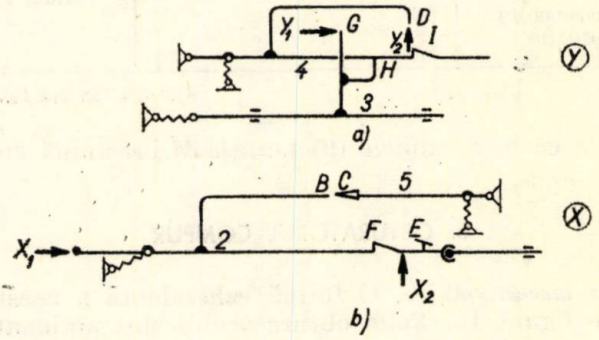


Fig. 18

Asupra elementului X acţionează două forţe, X_1 şi X_2, avînd respectiv trei şi două valori. Pentru a determina numărul de stări distincte ale elementului X observăm că pîrghia *2* are două grade de libertate.

Din examinarea figurilor 16 și 17 rezultă că, în afară de pozițiile extreme stînga și dreapta, pîrghia *2* mai are o poziție intermediară, în care ea poate acționa (în funcție de unghiul de rotație) asupra pîrghiei *4* în punctul *D*. Deducem că elementul *X* are șase stări, care se succedă în timpul funcționării mecanismului în conformitate cu graful din figura 19 *a*. În stările 0, 1, 2, unghiul de rotație al pîrghiei *2* este mic, iar în pozițiile 3, 4, 5 mare.

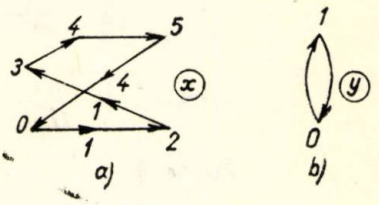


Fig. 19

Asupra elementului *Y* acționează forțele Y_1 și Y_2, avînd respectiv două și două valori. Elementul *Y* are două stări corespunzătoare pozițiilor extreme ale pîrghiei *3*. În timpul funcționării mecanismului ele se succedă ca pe figura 19 *b*.

Grafurile caracteristice ale elementelor. Urmărind figurile 17 și 18, deducem grafurile caracteristice din figura 20. În aceste grafuri au fost trecute numai evoluțiile care au loc în timpul funcționării mecanismului.

Tabela 4

x_N y_N	a_N = 0	a_N = 1	a_N = 2
00	00,1	10,2	
10		10,2	20,3
20			21,4
21	11,5		21,4
11	31,6		
31	31,6	41,7	
41		40,8	
40	00,1	40,8	50,9
50	40,10		50,9

x_{N+1} y_{N+1}, n

Graful caracteristic al mecanismului. Urmărind din nou figurile 17 și 18, transcriem programul mecanismului în tabela 4 și construim graful caracteristic (fig. 21).

Pe figura 17 sînt notate și numerele nodurilor corespunzătoare din graful caracteristic.

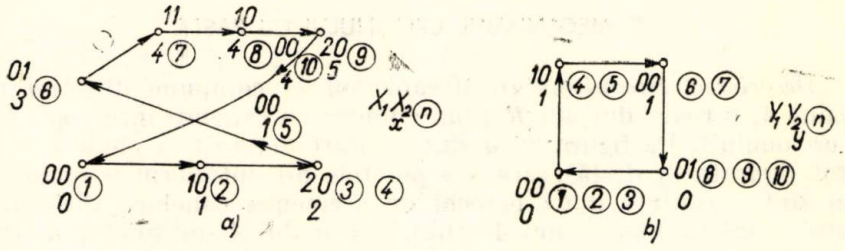


Fig. 20

Formulele structurale de interacționare. Cu ajutorul grafurilor caracteristice ale elementelor și mecanismului și din tabela 4 construim tabela 5 pentru deducerea formulelor structurale de interacționare.

Formulele structurale de interacţionare sînt

$$\begin{aligned} &X_1^0 = a^0, \quad X_1^1 = a^1, \quad X_2^1 = a^2, \\ &X_2^0 = y^0 + \overline{x^1 + x^3}, \quad X_2^1 = y^1 (x^1 + x^3), \\ &Y_1^0 = x^2, \quad Y_1^1 = x^2, \\ &Y_2^0 = \overline{x^4 + x^5}, \quad Y_2^1 = x^4 + x^5. \end{aligned} \tag{10}$$

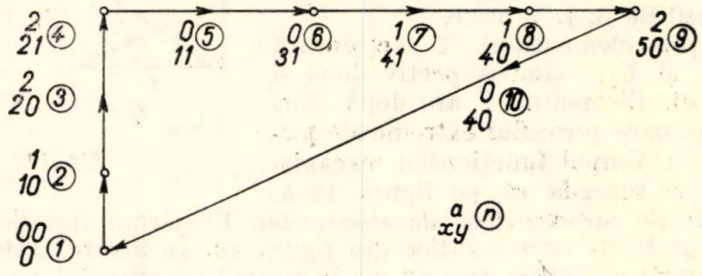


Fig. 21

Urmărind figurile 16, 17, 18 constatăm că formulele (10) descriu corect interacţionarea elementelor X şi Y.

Tabela 5

$x_N y_N$	0	a_N 1	2
00	00 00,1	10,2	
10		10,2	20 00,3
20			20 10,4
21	00 10,5		20 10,4
11	01 00,6		
31	01 00,6	11,00,7	
41		10,01,9	
40		10,01,8	20 01,9
50	00 01,10		20 01,9
	X_{1N}	X_{2N} Y_{1N} Y_{2N},	n

C. MECANISMUL CREIONULUI CU PASTĂ

Descrierea mecanismului. Mecanismul se compune din trei piese: butonul A, o roată dinţată R şi un cilindru cu caneluri interioare C (corpul creionului). Pe figura 22 *a* sînt figurate aceste trei piese. Canelurile C sînt figurate în desfăşurare. Pe peretele din interiorul corpului creionului sînt executate două perechi de asemenea caneluri. Piciorul roţii R intră în orificiul butonului A. Dinţii butonului A sînt ghidaţi de canelurile C astfel încît butonul execută o mişcare de translaţie. Dinţii roţii R sînt de asemenea ghidaţi de canelurile C, dar roata R se poate şi roti dacă butonul A este împins mult în sus. Deoarece dinţii roţii sînt mai înalţi decît grosimea peretelui între cele două proeminenţe P_1 şi P_2 ale lui C, atunci cînd un dinte al roţii R se află între aceste proeminenţe, roata ocupă

o poziţie mai ridicată decît în cazul cînd un dinte al ei se află în dreapta lui P_2 sau în stînga lui P_1. Mina creionului este acţionată de roata R.

Pentru urmărirea mai uşoară a funcţionării mecanismului, pe figura 22 *b* este arătat un mecanism echivalent cu cel dat şi în care toate organele

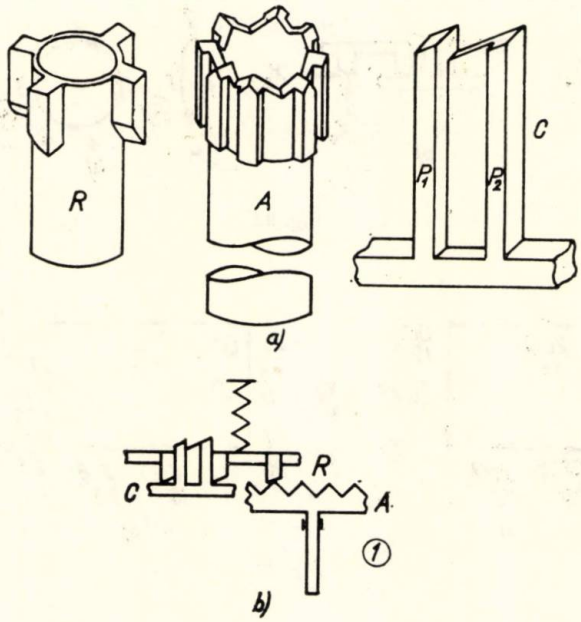


Fig. 22

enumerate mai sus sînt desfăşurate. În poziţia din figura 22 *b*, mecanismul este în starea de repaus. Cîteva poziţii succesive sînt arătate pe figura 23.

Elementele mecanismului. În calitate de element unic al mecanismului considerăm subsistemul format din roata R şi canelurile C. Roata R are două grade de libertate, şi din cercetarea figurilor 22 şi 23 deducem

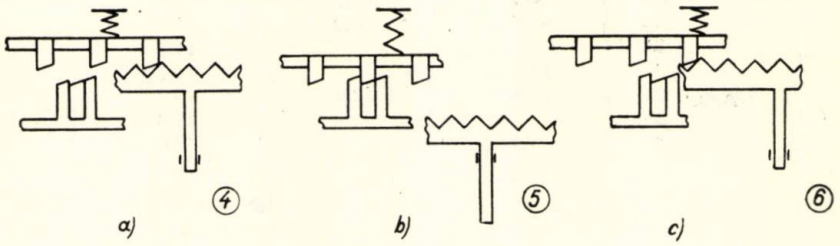


Fig. 23

că toate poziţiile elementului lui X pot fi descrise cu două variabile x_1 şi x_2 prima avînd trei valori, care reprezintă ordonatele roţii, iar a doua avînd patru valori, care reprezintă unghiurile de rotaţie a roţii.

Grafuri caracteristice. Grafurile elementului X și a mecanismului sînt arătate pe figura 25.

Menționăm că dacă în poziția $x_1\ x_2 = 21$ forța X_2 ar continua să aibă valoarea $X_2 = 1$, unghiul de rotație ar crește necontenit. Butonul A

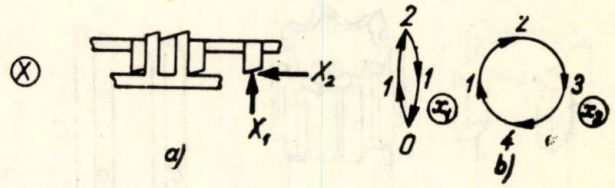


Fig. 24

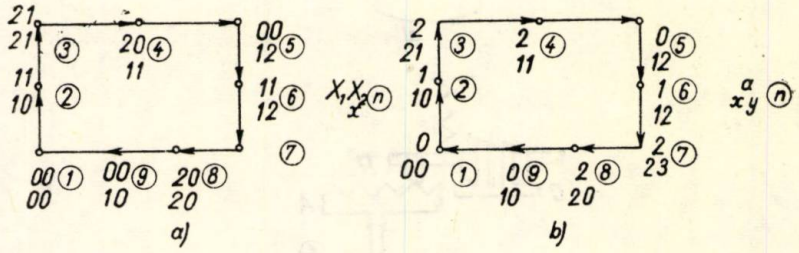


Fig. 25

trebuie deci să interacționeze așa fel cu elementul X încît intensitatea forței X_2 să devină nulă atunci cînd elementul X are poziția $x_1\ x_2 = 21$.

Cu ajutorul grafului din figura 25 *b* transcriem programul mecanismului sub forma tabelei 6.

Tabela 6

$x_{1N}\ x_{2N}$	0	aN 1	2
00	00,1	10,2	
10	00,1	10,2	21,3
21			11,4
11	12,5		11,4
12	12,5	12,6	23,7
23			28,8
20	10,9		20,8
			$x_{1N+1}\ x_{2N+1}, n$

În figurile 22 *b* și 23 sînt notate și numerele nodurilor corespunzătoare din graful caracteristic.

Formulele structurale de interacționare. Urmărind graful din figura 25 *a* și tabela 6, construim pentru formulele structurale de interacționare tabela 7.

Utilizînd pentru simplificarea formulelor şi unele stări a_N x_{1N} x_{2N} care nu se realizează în timpul funcţionării automatului, obţinem $X_1^0 = a^0$, $X_1^1 = a^1$, $X_1^2 = a^2$,

$$X_2^0 = a^0 + x_2^1 + x_2^3, \quad X_2^1 = (a^1 + a^2)(x_2^0 + x_2^2). \tag{11}$$

Tabela 7

x_{1N} x_{2N}	0	a_N 1	2
00	00,1	11,2	
10	00,1	11,2	21,3
21			20,4
11	00,5		20,4
12	00,5	11,6	21,7
23			20,8
20	00,9		20,8

x_{1N} x_{2N}, n

După cum se vede, pentru realizarea funcţiei X_2 este necesar un dispozitiv de tipul din figura 5. Un asemenea dispozitiv îl constituie perechea formată din butonul A şi roata dinţată R. Urmărind funcţionarea mecanismului, se poate constata că formulele (11) descriu corect interacţionarea dintre butonul A şi elementul X.

D. MECANISMUL DE COMANDĂ AL MAGNETOFONULUI

Descrierea mecanismului. Mecanismul se compune din mai multe butoane *Bi* de punere în funcţie a anumitor mişcări ale benzii şi dintr-un buton de blocare *Bo*. Dacă *Bo* este în stare de repaus, butoanele Bi nu

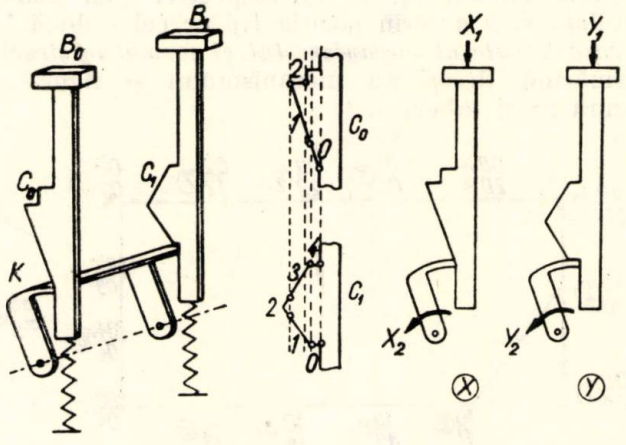


Fig. 26

pot fi acţionate. Dacă *Bo* este apăsat, orice buton *Bi* poate fi acţionat. Totodată acţionarea asupra lui *Bi* provoacă revenirea în repaus a lui *Bo*. Dacă se acţionează din nou *Bo*, butonul *Bi* este eliberat. Un mecanism echialent cu cel descris şi avînd numai doi butoni *Bo* şi B_1 este arătat pe fig. 26*a*.

Din forma profilurilor celor două came Co şi C_1 şi urmărind funcţionarea mecanismului, deducem că poziţiile relative ale camelor Co, C_1 şi a piedicii K esenţiale pentru descrierea funcţionării sînt cele arătate pe fig. 26*b*. În ceea ce priveşte cama Co constatăm că în poziţia O ea nu poate provoca nici o schimbare în starea mecanismului. În poziţia *1* cama Co deblochează cama C_1 de piedica K. În poziţia *2* cama Co se poate bloca de piedica K. Considerăm acum cama C_1. În poziţia O ea este blo-

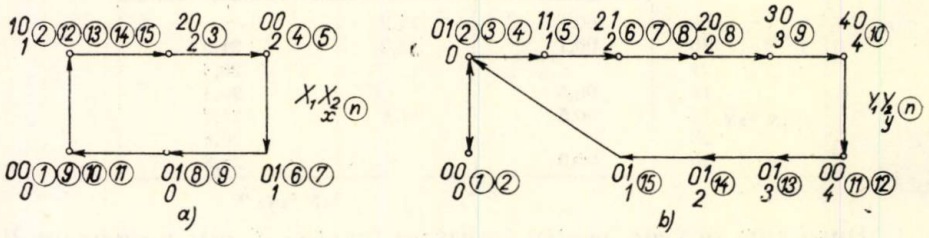


Fig. 27

cată de piedica K. În poziţia *1* cama C_1 est deblocată şi se poate deplasa în direcţie verticală. În poziţia *2* cama C_1 poate debloca pe Co (dacă aceasta era blocată). În sfîrşit, în poziţia *4* cama C_1 se poate bloca. Poziţia *3* separă poziţiile *2* şi *4*.

Elementele automatului şi grafurile lor caracteristice. În calitate de elemente ale mecanismului, considerăm subsistemele formate de butonul B_0 şi piedica K, precum şi butonul B_1 şi piedica K (fig. 26 *c*).

Aceste elemente sînt butoane de comandă mixte.

Grafurile caracteristice ale celor două elemente sînt arătate pe figura 27. Forţele X_1, X_2, Y_1, Y_2 au, respectiv, trei, două, cinci, două valori. Variabilele x, y descriu poziţia tijelor celor două butoane.

Graful caracteristic al mecanismului şi formulele structurale de interacţionare. Urmărind descrierea mecanismului şi figura 26, deducem graful din figura 28 şi tabela 8.

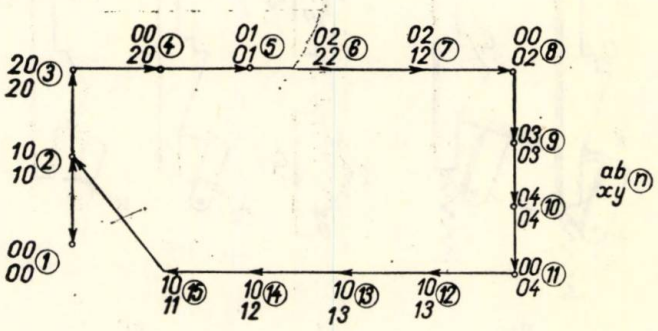


Fig. 28

Cu ajutorul tabelei 8 şi a grafurilor din figurile 27 şi 28, deducem tabela 9 pentru formulele structurale de interacţionare.

Menţionăm că în tabela 8 şi în graful mecanismului variabilele a şi b se consideră ca fiind asociate unor butoni fictivi prin intermediul cărora

se acţionează asupra elementelor X şi Y. Aceşti butoni reprezintă de fapt degetele operatorului.

Formulele structurale de interacţionare sînt (la deducerea lor utilizăm şi elementele a_N b_N x_N y_N care nu se realizează în timpul funcţionării mecanismului) :

$$X_1^0 = a^0, \quad X_1^1 = a^1, \quad X_1^2 = a^2,$$
$$X_2^0 = y^0 + y^1 + y^3, \quad X_2^1 = y^2,$$
$$X_1^0 = b^0, \quad Y_1^1 = b^1, \quad Y_1^2 = b^2, \quad Y_1^3 = b^3, \quad Y_1^4 = b^4,$$
$$Y_2^0 = x^0, \quad Y_2^1 = x^1 + x^2.$$

Tabela 8

x_N y_N	00	10	20	a_N 01	b_N 02	03	04
00	00,1	10,2					
10	00,1	10,2	20,3				
20	00,4		20,5	21,5			
21				21,5	22,6		
22					12,7		
12		11,15			02,8		
02					02,8	03,9	
03						03,9	04,10
04	04,11	14,12					14,10
14		13,13					
13		12,14					
11		10,2					

x_{N+1} $y_{N+1.n}$

Tabela 9

x_N j_N	00	10	20	a_N b_N 01	02	03	04
00							
10	0000,1	1000,2					
20	0001,1	1001,2	2001,3				
21	0001,4		2001,3	0011,5			
22				0011,5	0021,6		
12		1101,15			0121,7		
02					0121,8		
03					0120,8	0130,9	
04						0030,9	
14	0000,11	1000,12					0040,10
13		1001,13					0040,10
11		1001,14					
		1001,2					

X_{1N} X_{2N} Y_{1N} $Y_{2N.n}$

Formulele (12) descriu corect interacţionarea elementelor mecanismului studiat, după cum se poate constata din examinarea funcţionării lui pe figura 26.

8. ÎNCHEIERE

Din exemplele tratate rezultă că problema analizei mecanismelor automate cu elemente mecanice poate fi rezolvată cu ajutorul metodelor teoriei automatelor finite.

Cîmpul de aplicabilitate al acestui tip de mecanisme este relativ redus. Faptul însă că ele sînt utilizate în mașinile de calcul mici, în industria textilă, tipografică, etc. îndreptățește interesul pentru studiul lor.

După cum rezultă din studiul primelor trei mecanisme, care reprezintă în fond contori în baza doi, posibilitățile organelor mecanice în realizarea de mecanisme sînt foarte largi. Acest fapt permite construirea unui număr foarte mare de mecanisme echivalente cu un mecanism dat.

Siguranța de funcționare a mecanismelor mecanice este remarcabilă. Forțele de interacționare sînt foarte mici și din acest motiv uzura este redusă.

În ceea ce privește dimensiunile mecanismelor cu elemente mecanice, ele mai pot fi încă mult reduse.

Toate aceste observații sînt menite să arate că interesul pentru asemenea mecanisme este îndreptățit.

Primită la redacție la 4 iunie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. GR. C. MOISIL. *Teoria algebrică a mecanismelor automate*, București, Edit. tehnică, 1959.
2. R. GRÉA, HIGONNET, *Etude logique des circuits électriques et des systèmes linéaires*, Paris, Berger-Levrault, 1955.
3. S. H. CALDWELL, *Switching circuits and logical design*, John Willey and Son., Inc., 1958.
4. L. LIVOVSCHI, *Automate finite cu elemente logice pneumatice și hidraulice*, București, Edit. Acad. R.P.R., 1963,
5. — *Automate finite cu elemente mecanice*, St. mec. apl., **18**, *1* (1965).

METODA SCHIMBĂRII ELEMENTULUI CONDUCĂTOR, APLICATĂ LA INTEGRAREA ECUAȚIEI DE MIȘCARE A MAȘINII

AMEDEU ORĂNESCU
Institutul politehnic, Galați

531.1

Se arată cum se aplică ecuația de mișcare a mașinii $M_{red_\lambda} = \frac{1}{2}\omega_\lambda^2 \frac{dJ_{red_\lambda}}{d\varphi_\lambda} + \varepsilon_\lambda J_{red_\lambda}$ pentru determinarea accelerației unghiulare ε_λ a manivelei conducătoare în cazul unui mecanism plan cu gradul de mobilitate egal cu unitatea și a cărui clasă se poate micșora prin schimbarea elementului motor.
Se folosește pentru aceasta derivata în raport cu parametrul lagrangean φ_λ a relației $J_{red_\lambda} = \sum_k (f_k^2 J_{ck} + F_k^2 m_k)$, în care f_k și F_k sînt funcții numai de φ_λ, iar J_{ck} și m_k sînt, respectiv, momentul de inerție al elementului k, față de o axă normală la planul mișcării și care trece prin c.d.g. și masa elementului k. Se obține în ecuația de mișcare termenul $\frac{dJ_{red_\lambda}}{d\varphi_\lambda} = 2\sum (f_k f_k' J_{ck} + F_k F_k' m_k)$, în care funcțiile f_k, f_k', F_k, F_k', pot fi calculate pentru fiecare element cu ajutorul unor parametri cinematici arbitrari (deci fictivi) la manivela schimbată a mecanismului. Se exemplifică această metodă pe un mecanism de clasa 5 (în clasificarea Assur-Artobolevski).

1. S-a arătat cu o ocazie precedentă [4] că prin schimbarea elementului conducător, de multe ori clasa mecanismului poate fi micșorată (în clasificarea Assur-Artobolevski) și deci rezolvarea poate fi făcută prin mijloace mai simple. Observîndu-se că accelerațiile normale rămîn neschimbate chiar dacă la manivela conducătoare se introduc parametri cinematici (viteza și accelerație unghiulară în cazul unei manivele) fictivi, se determină un cîmp de accelerații fictive din care se folosesc numai accelerațiile normale. Se revine apoi la elementul conducător real cu parametri cinematici reali. S-a mai arătat că nu este necesar ca gradul de mobilitate al mecanismului să fie egal cu unitatea, deoarece în caz contrar se poate proceda prin suprapunerea mișcărilor. Se face aceeași observație pentru construirea grafică a vitezelor pentru care, în cazul gradului de mobilitate egal cu unitatea, poligonul vectorial rămîne asemenea cu el însuși, consi-

derînd aceeaşi poziţie a mecanismului şi variind viteza unghiulară a elementului conducător.

Metoda de mai sus este arătată şi în lucrarea [3], însă ea a fost dezvoltată ulterior de autor pentru a se folosi un singur poligon de acceleraţii. Metoda este asemănătoare cu aceea arătată în [1].

2. În lucrarea [5] s-a plecat de la ecuaţia de mişcare a maşinii

$$M_{\mathrm{red}_\lambda} = \frac{1}{2}\,\omega_\lambda^2 \frac{\mathrm{d}J_{\mathrm{red}_\lambda}}{\mathrm{d}\varphi_\lambda} + \varepsilon_\lambda J_{\mathrm{red}_\lambda}, \tag{1}$$

unde prin λ s-a notat elementul de reducere sau o altă manivelă a mecanismului, prin M_{red_λ} momentul fictiv care aplicat manivelei conducătoare ar echivala puterea tuturor forţelor active de pe mecanism, denumit moment redus, prin J_{red_λ} momentul de inerţie care, aplicat manivelei conducătoare, ar echivala întreaga energie cinetică a mecanismului, considerat în jurul unei axe ce trece prin articulaţia fixă şi denumit moment de inerţie redus, şi prin φ_λ parametrul lagrangean de care depinde poziţia tuturor punctelor din mecanism în cazul $w = 1$ (gradului de mobilitate egal cu unitatea).

Considerîndu-se principiul d'Alembert $M_{\mathrm{red}_\lambda} = -M_{\mathrm{red}_{i_\lambda}}$, precum şi tensorul de inerţie

$$\tau = \begin{Vmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{Vmatrix},$$

prin transformări simple, pentru mecanismele plane şi cu $w = 1$, se ajunge la relaţia:

$$M_{\mathrm{red}_\lambda} = \frac{1}{\omega_\lambda}\left[\sum_k \omega_k \dot{\omega}_k J_{ck} + \sum_k V_{ck}\dot{V}_{ck}\, m_k\right], \tag{2}$$

unde s-a notat prin ck, centrul de greutate al elementului k.

S-au mai considerat şi relaţiile

$$\frac{\omega_k}{\omega_\lambda} = f_k, \tag{3}$$

$$\frac{V_{ck}}{\omega_\lambda} = F_k, \tag{4}$$

$$\dot{\omega}_k = f_k'\,\omega_\lambda^2 + f_k\,\dot{\omega}_\lambda, \tag{5}$$

$$\dot{V}_{ck} = F_k'\,\omega_\lambda^2 + F_k\,\dot{\omega}_\lambda, \tag{6}$$

în care se ştie că f_k şi F_k sînt numai funcţii de φ_λ şi deci şi $f_k' = \dfrac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}\varphi_\lambda}$, $F_k' = \dfrac{\mathrm{d}F_k}{\mathrm{d}\varphi_\lambda}$.

Pe baza relațiilor (1) — (4) s-a ajuns și la relația

$$J_{red\lambda} = \sum_k (f_k^2 J_{ck} + F_k^2 m_k). \tag{7}$$

Prin particularizarea relației (2) numai la o singură masă concentrată în punctul a cărui accelerație interesează, se ajunge la relația $V_{c\sigma} \dot{V}_{c\sigma} m_\sigma = \frac{1}{2} \omega_\lambda^3 \frac{dJ_{red\lambda}}{d\varphi_\lambda} + \omega_\lambda \varepsilon_\lambda J_{red\lambda}$, care, asociată cu relațiile (3)—(6), permite a se trage o serie de concluzii cinematice atît asupra unor probleme și metode cunoscute, cît și în privința unor noi metode, ca, de exemplu, pentru mecanisme funcționînd în regimuri cinematice variabile, sau un nou aspect al aplicării metodei accelerațiilor reduse.

În lucrarea de față se va arăta aplicarea relației (7) la integrarea ecuației de mișcare a mașinii.

3. Se știe [2] că teorema energiei dE = dL capătă, în cazul mecanismelor cu W = 1, forma integrată

$$\frac{1}{2} \omega_\lambda^2 J_{red\lambda} = \int_0^{\varphi_\lambda} M_{red\lambda} \, d\varphi_\lambda, \tag{8}$$

în care $M_{red\lambda}$ și $J_{red\lambda}$ sînt funcție numai de φ_λ și sînt cunoscuți grafic. Se poate deci calcula ω_λ la fiecare φ_λ, după efectuarea integralei grafice $\int M_{red\lambda} \, d\varphi_\lambda$.

Pentru cîmpul de accelerații se scrie $\varepsilon_\lambda = \dot{\omega}_\lambda = \frac{d\omega_\lambda}{d\varphi_\lambda} \omega_\lambda$, metodă care are dezavantajul că necesită derivata grafică $\frac{d\omega_\lambda}{d\varphi_\lambda}$, care, asociată cu integrala grafică precedentă, face ca metoda să nu mai fie suficient de exactă.

În practică se evită acest neajuns prin folosirea relației (1), în care termenul $\frac{1}{2} \omega_\lambda^2 \frac{dJ_{red\lambda}}{d\varphi_\lambda}$ se calculează ca un moment redus la manivela λ a forțelor și cuplurilor de inerție calculate cu ω_λ real (corespunzător unghiului φ_λ ales), însă constant.

În ecuația (1), toți termenii sînt astfel cunoscuți, în afară de ε_λ, care se poate determina deci din această ecuație în funcție de φ_λ. Se arată mai jos o altă metodă pentru determinarea accelerației unghiulare ε_λ, mai rapidă și utilă în cazul în care prin schimbarea manivelei conducătoare clasa mecanismului se reduce.

4. Se consideră pentru exemplificare mecanismul de clasa 5 din figura 1, la care elementul motor (conducător) este manivela 1, iar prin schimbarea lui cu manivela 4 mecanismul devine de clasa 3, deci rezolvabil prin metode clasice (puncte singulare).

Dacă se consideră o dreaptă de origine Δ, de la care se definește poziția manivelei 1 prin unghiul φ_1, acesta este și parametrul lagrangean al sistemului, de care depinde poziția întregului mecanism.

În ce privește momentul redus al forțelor și cuplurilor aplicate din figură (exclusiv momentul motor), definit de relația

$$M'_{red_1} = \sum_1^7 \frac{\overline{F}_i \overline{V}_{ci}}{\omega_1} + \sum_1^7 \frac{M_i \omega_i}{\omega_1}, \tag{9}$$

el poate fi calculat și pornind de la manivela 4 cu o viteză unghiulară ω_4^x arbitrară, deoarece pentru mecanismul din figură — cu gradul de mobi-

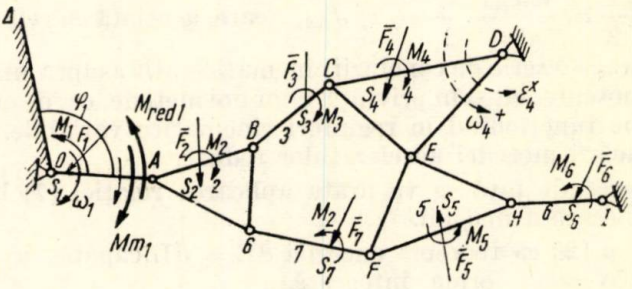


Fig. 1

litate egal cu unitatea — membrul al doilea al relației (9) depinde numai de φ_1 (forțele și cuplurile aplicate nu depind nici de viteze, nici de accelerații prin ipoteză).

Se calculează apoi J_{red_1} în mod obișnuit (funcție tot de variabila independentă φ_1). Se consideră momentul motor $M_{m_1}(\varphi_1)$ ca o funcție dată de φ_1 și se notează $M_{red_1} = M_{m_1} + M'_{red_1}$ (incluzînd semnele).

Ecuația (8) devine în acest caz $\frac{1}{2}\omega_1^2 J_{red_1} = \int_0^{\varphi_1} M_{red_1}\, d\varphi_1$ (integrala s-a făcut de la începutul mișcării mașinii), de unde rezultă

$$\omega_1 = \omega_1(\varphi_1). \tag{10}$$

Se poate deci trasa curba (10) și se poate determina întreg cîmpul de viteze pornind de la manivela 4, cu ω_4^x, oarecare și variabil, punîndu-se în corespondență valorile găsite, cu curba $\omega_1(\varphi_1)$ (relația (10)).

Pentru calculul termenului $\frac{1}{2}\omega_1^2 \frac{dJ_{red_1}}{d\varphi_1}$ nu se mai poate proceda ca mai sus, deoarece este necesar a se determina accelerațiile centrelor de greutate și accelerațiile unghiulare ale elementelor, calculate de fiecare dată cu $\omega_1 = ct$ la manivela 1, așa cum s-a arătat la pct. 3. Este necesar deci a se porni de la manivela conducătoare reală (1), rezolvare care este greoaie.

Se poate evita însă acest lucru dacă se derivează relația (7), obținîndu-se

$$\frac{dJ_{red_1}}{d\varphi_1} = 2\sum_{k=1}^{7}(f_k f_k^1 J_{ck} + F_k F'_k m_k),$$

unde

$$f_k, f_k^1 = \frac{df_k}{d\varphi_1},\ F_k, F'_k = \frac{dF_k}{d\varphi_1} \tag{11}$$

sînt definiți de relațiile (3)—(6).

Avîndu-se în vedere că acestea sînt numai funcţii de φ_1, adică de poziţia mecanismului şi numai de aceasta, ele vor putea fi determinate şi cu parametrii cinematici fictivi la manivela 4, adică cu ω_4^x şi ε_4^x.

Urmează deci că procedeul de lucru pentru calculul lui $\varepsilon_1(\varphi_1)$ după găsirea grafică a curbei (10) $\left(\text{bineînţeles evitînd derivarea grafică } \frac{\mathrm{d}J_{\mathrm{red}_1}}{\mathrm{d}\varphi_1}\right)$ este următorul:

— se rezolvă cîmpul de viteze şi de acceleraţii al întregului mecanism pentru o poziţie oarecare, adică pentru un φ_1 ales, cu ω_4^x şi ε_4^x arbitrari (de exemplu $\varepsilon_4^x = 0$) adică se găsesc vitezele şi acceleraţiile unghiulare ω_k^x şi $\dot{\omega}_k^x$ ale elementelor, precum şi vitezele liniare şi acceleraţiile liniare tangenţiale V_{ck}^x şi $\dot{V}_{ck}^x$ ale centrelor de greutate ale acestor elemente, precum şi ω_1^x şi $\dot{\omega}_1^x$;

— din relaţiile (3)—(6) se determină succesiv

$$f_k = \frac{\omega_k^x}{\omega_1^x}, \quad F_k = \frac{V_{ck}^x}{\omega_1^x}, \quad f_k' = \frac{\dot{\omega}_k^x - f_k \dot{\omega}_1^x}{(\omega_1^x)^2}, \quad F_k' = \frac{\dot{V}_{ck}^x - F_k \dot{\omega}_1^x}{(\omega_1^x)^2};$$

— se calculează astfel $\frac{\mathrm{d}J_{\mathrm{red}_1}}{\mathrm{d}\varphi_1}$ din relaţia (11);

— din relaţia (10) $\omega_1 = \omega_1(\varphi_1)$ se determină ω_1 (real) corespunzător unghiului φ_1 şi deci se poate calcula ε_1 din relaţia (1):

$$\varepsilon_1 = \frac{M_{\mathrm{red}_1} - \frac{1}{2}\omega_1^2 \frac{\mathrm{d}J_{\mathrm{red}_1}}{\mathrm{d}\varphi_1}}{J_{\mathrm{red}_1}}; \tag{12}$$

— făcînd unghiul φ_1 să varieze, se repetă cele de mai sus pentru alte poziţii ale mecanismului şi se obţine curba $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varphi_1)$.

Primită la redacţie la 5 iulie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. I. Artobolevski, *Referitor la problema studiului lanţurilor cinematice complexe*, Bul. Instit. polit. Iaşi, s. n., **VI (X)**, *1—2*, 285 — 289 (1960), (în limba rusă).
2. N. I. Manolescu, D. Maroş, *Cinetostatica şi dinamica mecanismelor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1958.
3. N. I. Manolescu, I. Erceanu, P. Antonescu, *Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate*, St. cerc. mec. apl., **18**, *1*, 1483 — 1487 (1965).
4. A. Orănescu, *O metodă generală pentru determinarea vitezelor şi acceleraţiilor*, Sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic Galaţi, 1958, Bul. Inst. polit. Galaţi, *1*, 165 — 167 (1963).
5. — *Aplicaţiile cinematice ale unei probleme din dinamica mecanismelor*, Sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic Galaţi, 1966.

O METODĂ PENTRU DETERMINAREA APROXIMATIVĂ A DISTRIBUȚIEI PRESIUNILOR ÎN LAGĂRELE CIRCULARE LUBRIFICATE CU GAZE, ALIMENTATE SUB PRESIUNE PRINTR-UN ȘIR CENTRAL DE ORIFICII[1])

V. N. CONSTANTINESCU
Institutul de mecanica fluidelor
M. SĂLCUDEAN
ICEM

621.82 : 533

Folosind unele aproximații, respectiv înlocuirea șirului de orificii cu o sursă continuă și o metodă de liniarizare valabilă pentru excentricități reduse, se deduce o metodă analitică de calcul pentru tipul de lagăr considerat. Rezultatele sînt puse sub formă de relații simple și de diagrame și se scot în evidență condițiile de optimum care apar. În final se analizează aproximațiile introduse, deducîndu-se că metoda este corectă dacă lagărul este alimentat printr-un număr de cel puțin șase orificii.

INTRODUCERE

După cum este cunoscut, lagărele circulare alimentate sub presiune reprezintă tipul cel mai curent de lagăre cu aer folosite în aplicații, deoarece elimină pericolul unui contact direct la pornire și oprire, permit încărcări specifice mai mari; totodată, alimentarea sub presiune exterioară îmbunătățește comportarea dinamică a lagărului.

Deși, dacă se neglijează influența vitezelor tangențiale, ecuația diferențială a presiunilor are o formă mai simplă decît în cazul lagărelor care funcționează în regim aerodinamic, totuși condițiile la limită și de debit complicate fac ca în momentul de față determinarea distribuției de pre-

[1]) Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. appl. (în limba engleză) **12**, *3* (1967).

siuni și îndeosebi optimizarea proiectării unor asemenea lagăre să constituie o operație complexă, laborioasă și destul de aproximativă. Există un număr mare de lucrări care tratează această problemă, sumarizate, de pildă, în monografiile apărute în ultimii ani [1], [2], [3]. Aproape toate metodele de calcul existente se bazează pe neglijarea scurgerii în lungul circumferinței lagărului, considerînd o mișcare pur axială. În plus, lagărul este împărțit într-un număr de lagăre dreptunghiulare echivalente, corespunzător numărului de orificii (sau, cel mult, pentru lagăre cu număr redus de orificii, cu un număr de discuri echivalente).

Fiecare lagăr echivalent este considerat ca avînd grosimea stratului de lubrifiant h constantă, egală cu grosimea din dreptul orificiului respectiv. Presiunea din stratul de lubrifiant în dreptul orificiului rezultă din egalarea debitelor de intrare și ieșire, iar în final sarcina lagărului rezultă din însumarea vectorială a sarcinilor lagărelor echivalente.

Desigur, un asemenea procedeu introduce numeroase aproximații. În plus, rezultatele nu pot fi puse sub o formă analitică unitară și suficient de simplă pentru a pune în evidență efectul diferiților parametri sau grupe de parametri care influențează funcționarea și eventualele condiții de optimum importante pentru proiectare. Dintre încercările făcute pentru a găsi o metodă corectă de determinare a distribuției presiunilor se remarcă observația [2] că pătratul presiunilor este o funcție armonică dacă excentricitatea lagărului este redusă și dacă la excentricitatea $\varepsilon = 0$ distribuția presiunilor nu depinde de coordonata θ din lungul circumferinței lagărului. Heinrich a propus astfel o metodă interesantă de calcul [4], valabilă însă pentru un sistem de compensare special (mai multe orificii în serie cu căderi de presiune locale mici, astfel încît scurgerea să fie izotermă prin restrictor), care nu poate fi folosit pentru sistemele uzuale de compensare folosite în aplicații (compensare inerentă sau prin orificii simple). De aceea în momentul de față se folosește pentru calculul acestor lagăre metoda preconizată de înlocuire a lagărului cu n lagăre echivalente (n-numărul orificiilor de alimentare). În această privință, Tang și Gross [5] au construit o serie de diagrame care facilitează calculele.

În cele ce urmează ne propunem să deducem o metodă liniarizată de determinare a distribuției presiunilor care să permită obținerea caracteristicilor de funcționare sub o formă analitică relativ simplă. În acest scop vom face două ipoteze aproximative, și anume :

1) înlocuirea șirului de n orificii de alimentare cu o fantă (sursă) continuă, echivalentă pe întreaga circumferință a lagărului. Această ipoteză este corectă pentru lagărele compuse din două jumătăți și alimentate efectiv printr-o fantă centrală continuă. Totodată, ipoteza este aproximativ corectă în cazul cînd numărul n de orificii este suficient de mare. Totuși apare posibilă folosirea acestei ipoteze și în cazul cînd numărul de orificii este relativ redus, de exemplu $n \geqslant 6$, așa cum se folosește în mod curent în aplicații ;

2) utilizarea unei metode de liniarizare față de cazul $\varepsilon = 0$. În acest mod, presiunile și rezultanta presiunilor vor rezulta proporționale cu excentricitatea relativă ε. Această aproximație pare a fi justificată pentru un domeniu de excentricități mai mare decît pentru lagărele funcționînd în regim pur aerodinamic, cel puțin așa rezultă din examinarea

datelor experimentale care sugerează o dependenţă cvasiliniară a presiunilor cu ε pînă în zona excentricităţilor relativ mari.

Cazul $\varepsilon = 0$

În aceste condiţii să considerăm mai întîi cazul $\varepsilon = 0$. Debitul masic de intrare prin cele n orificii va fi egal cu [1], [2]

$$M_{i0} = c_D S_{10} p_s \frac{1}{\sqrt{RT_s}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \left(\frac{p_{10}}{p_s}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_{10}}{p_s}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \tag{1}$$

unde c_D este coeficientul de debit:

$$c_D = \frac{\mu d}{\sqrt{1 - \mu_d^2 m_d^2 \left(\frac{p_1}{p_s}\right)^{\frac{2}{\gamma}}}}, \tag{2}$$

în care μ_d este coeficientul de contracţie al jetului, iar m_d raportul secţiunilor (secţiunea din dreptul restrictorului S_{10} şi secţiunea din amonte unde presiunea este p_s). Se constată că, dacă $m_d \ll 1$, atunci $c_D \cong \mu_d$. Practic se poate considera $c_D \approx 0{,}85 \ldots 0{,}95$.

În relaţia (1) S_{10} este secţiunea restrictorului, respectiv secţiunea cea mai strangulată. De exemplu, dacă există o compensare prin orificii,

$$S_{10} = n \frac{\pi d_i^2}{4}, \tag{3}$$

unde d_i este diametrul unui orificiu. Dacă există o compensare inerentă, respectiv dacă secţiunea minimă este secţiunea inelară de intrare în stratul de lubrifiant, atunci

$$S_{10} = n \pi d_i c, \tag{4}$$

unde c este jocul radial al lagărului.

În sfîrşit, în formula (1), p_{10} reprezintă presiunea după restrictor, respectiv presiunea în zona centrală din stratul de lubrifiant (în dreptul secţiunii orificiilor), γ raportul căldurilor specifice (de exemplu $\gamma = 1{,}4$ pentru aer), R constanta gazului $\left(R = \frac{p}{\rho T}\right)$, iar T_s temperatura locală $\left(T_s = \frac{1}{R}\frac{p_s}{\rho_s}\right)$.

Debitul de ieşire pentru o jumătate de lagăr (fig. 1) este debitul ce se scurge (datorită diferenţei de presiune $p_{10} - p_a$, unde p_a este presiunea atmosferică) între două plăci paralele separate de o grosime c, de lungime $\frac{b}{2}$ în sensul scurgerii şi de lăţime $2\pi r = \pi D$, unde $D = 2r$ este diametrul lagărului.

Cum în genere pentru scurgeri longitudinale [2]

$$dM_z = -\frac{h^3}{12\,\mu}\rho\frac{\partial p}{\partial z}\,rd\theta, \tag{5}$$

ţinînd cont de ecuaţia de stare, debitul total de ieşire va rezulta egal cu

$$M_{e0} = \frac{\pi c^3}{6\,\mu\lambda}\,\frac{p_{10}^2 - p_a^2}{RT_{10}}, \tag{6}$$

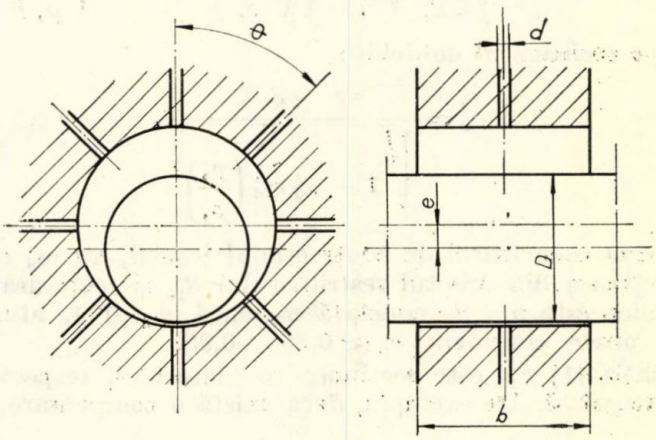


Fig. 1. — Lagăr circular alimentat printr-un rînd de orificii.

unde μ este viscozitatea gazului, $\lambda = \frac{b}{D}$ alungirea lagărului, iar T_{10} temperatura gazului în secţiunea centrală $z = 0$. În plus s-a considerat o evoluţie izotermă a gazului între suprafeţele lagărului.

Aproximînd în plus $T_{s0} \cong T_{10} = T$, din egalitatea relaţiilor (1) şi (6) rezultă

$$\Lambda = \frac{\overline{p}_{10}^2 - 1}{\overline{p}_{10}\left(\frac{p_s}{p_{10}}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\sqrt{\left(\frac{p_s}{p_{10}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}}, \tag{7}$$

unde $\overline{p}_{10} = \frac{p_{10}}{p_a}$, iar Λ este un parametru adimensional:

$$\Lambda = \frac{6\,\mu\lambda c_D S_{10}\sqrt{RT}}{\pi c^3 p_a}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}. \tag{8}$$

Relaţia (7) dă valoarea parametrului Λ dacă p_{10} este cunoscut sau reprezintă o ecuaţie implicită în p_{10} dacă Λ este cunoscut.

În plus, relaţiile (1) şi, respectiv, (7) sînt valabile atîta timp cît

$$\frac{p_{10}}{p_s} \leqslant \overline{p}_c^* = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \quad \overline{p}_c^* = 0{,}528 \text{ pentru } \gamma = 1{,}4, \tag{9}$$

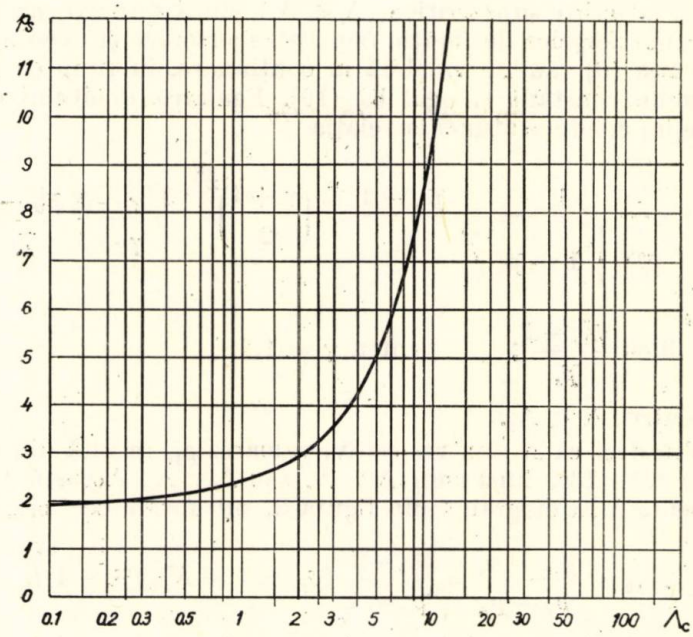


Fig. 2. — Valoarea critică a parametrului Λ pentru diferite presiuni de alimentare $\overline{p}_s$ în cazul aerului (scurgere sonică prin restrictor).

respectiv atîta timp cît scurgerea prin ajutaj este integral subcritică (subsonică). Pentru condiţiile regimului critic cînd inegalitatea (9) se transformă în egalitate, debitul de intrare (1) devine

$$M_{i0} = M_c = c_D S_{10} p_s \frac{1}{\sqrt{RT}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \overline{p}_c^{*\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \overline{p}_c^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \tag{10}$$

iar valoarea Λ critică este egală cu

$$\Lambda_c = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \overline{p}_s^2 - 1}{\overline{p}_s}; \qquad \overline{p}_s = \frac{p_s}{p_a}, \tag{11}$$

$$\Lambda_c = 3{,}86 \frac{0{,}279\,\overline{p}_s^2 - 1}{\overline{p}_s}; \qquad \text{pentru } \gamma = 1{,}4.$$

În diagrama din figura 2 s-a reprezentat valoarea critică a parametrului Λ pentru diferite valori p_s în cazul $\gamma = 1{,}4$ (aer). Rezultă astfel

că relaţiile (1) şi (7) sînt valabile atîta timp cît are loc inegalitatea (9), respectiv pentru

$$\Lambda > \Lambda_c, \tag{12}$$

deoarece, conform relaţiei (7), p_{10} creşte cu Λ.

Pentru condiţii supracritice ($\Lambda < \Lambda_c$), dacă se neglijează în continuare influenţa forţelor de inerţie (zonele supersonice şi eventualele unde de şoc), relaţia (6) rămîne valabilă în continuare, în timp ce debitul de intrare rămîne constant şi egal cu (10). Egalarea debitului de intrare cu cel de ieşire conduce atunci la relaţia

$$\Lambda = \frac{1}{\overline{p}_c^{*\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \overline{p}_c^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}}}} \frac{\overline{p}_{10}^2 - 1}{\overline{p}_s} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{\overline{p}_{10}^2 - 1}{\overline{p}_s}, \tag{13}$$

$$\Lambda = 3{,}86 \frac{\overline{p}_{10}^2 - 1}{\overline{p}_s}; \qquad \text{pentru } \gamma = 1{,}4,$$

valabilă pentru $\Lambda < \Lambda_c$.

Rezultă deci că Λ sau, respectiv, valoarea p_{10} rezultă din una dintre relaţiile (7) sau (13), după cum $\Lambda > \Lambda_c$ sau $\Lambda < \Lambda_c$. Această dependenţă este reprezentată în diagrama din figura 3, sub forma coeficientului [redacted]

$$K_{p0} = \frac{p_{10} - p_a}{p_s - p_a} = \frac{\overline{p}_{10} - 1}{\overline{p}_s - 1} \quad (\overline{p}_{10} = 1 + K_{p0}(\overline{p}_s - 1)), \tag{14}$$

care poate varia între 0 şi 1.

În sfîrşit, debitul de lubrifiant se poate calcula din una dintre formulele (1) sau (10) sau din formula (6). În acest ultim caz rezultă

$$\frac{M_{c0}\sqrt{2\gamma RT/(\gamma-1)}}{c_D S_{10} p_a} = \frac{\overline{p}_{10}^2 - 1}{\Lambda}, \tag{15}$$

relaţie valabilă atît pentru $\Lambda > \Lambda_c$, cît şi pentru $\Lambda < \Lambda_c$.

Pentru a facilita calculele, în diagrama din figura 4 s-a reprezentat debitul redus (adimensional):

$$M_{red} = \frac{M}{M_c} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{2\gamma RT}{\gamma-1}} \frac{M_{c0}}{c_D S_{10} p_s} = \tag{16}$$

$$= 2960 \sqrt{\frac{T}{293}} \frac{M_{c0}}{c_D S_{10} p_s} = 3{,}86 \frac{\overline{p}_{10}^2 - 1}{\Lambda \overline{p}},$$

în funcţie de Λ pentru diferite valori $\overline{p}_s$.

Scurgere pur axială ($\lambda \to 0$)

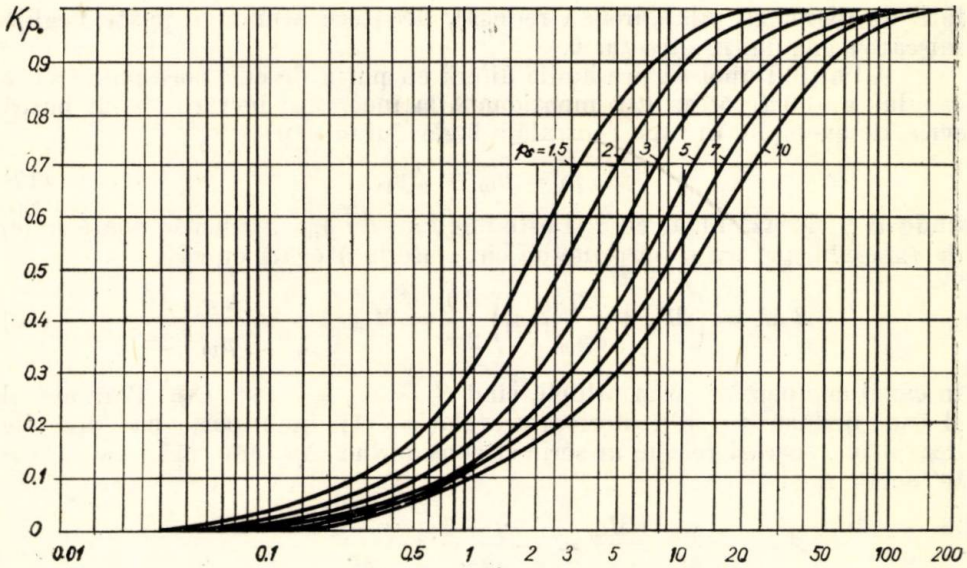


Fig. 3. — Variația parametrului K_{p0} în funcție de Λ pentru diferite valori $\bar{p}_s$.

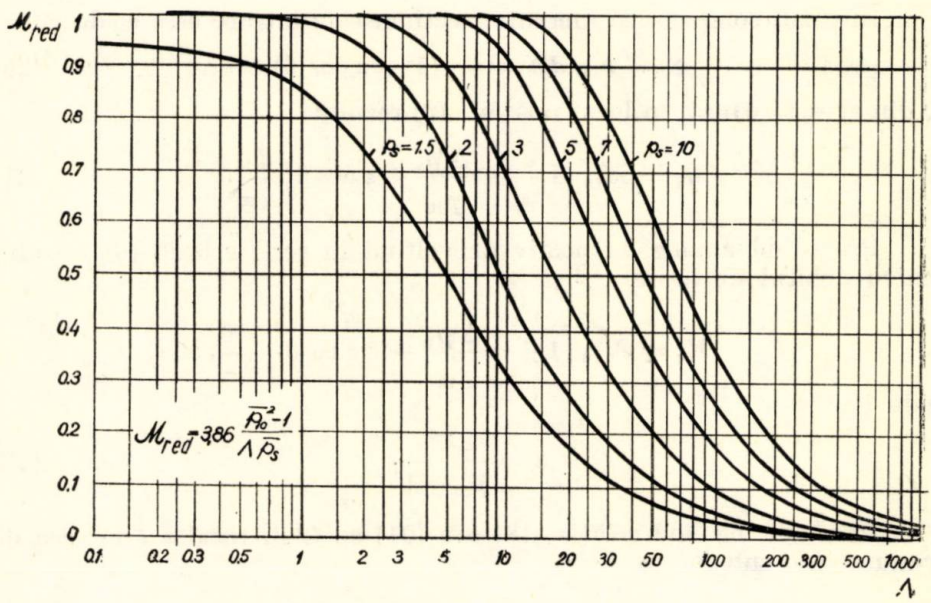


Fig. 4. — Debitul de lubrifiant în funcție de Λ pentru diferite valori $\bar{p}_s$.

Să considerăm mai întîi cazul unei scurgeri pur axiale în stratul de lubrifiant. Asemenea condiţii apar cînd lăţimea b a lagărului este mică faţă de diametru (alungirea λ redusă), deoarece atunci se poate neglija mişcarea gazului în direcţia θ.

Admiţînd apoi că presiunile diferă cu puţin de cele corespunzătoare cazului $\varepsilon = 0$ (ipoteza (2), menţionată la începutul lucrării), vom putea scrie, de exemplu, în zona centrală a lagărului ($z = 0$)

$$p_1 = p_{10} + \Delta p_1, \tag{17}$$

unde Δp variază liniar cu ε şi este mic faţă de p_{10}. Atunci se poate scrie, de exemplu, pentru o porţiune de circumferinţă egală cu $rd\theta$.

$$d M_i = \left(M_{i0} + \frac{\partial M_i}{\partial p_{10}} \Delta p_1 \right) \frac{d\theta}{2\pi} = M_{i0} \left(1 - A \frac{\Delta p_1}{p_{10}} \right) \frac{d\theta}{2\pi} \tag{18}$$

în cazul compensării prin orificii, cînd $S_i = S_{10} = \text{const.}$ (3). Parametrul A se deduce fie din derivarea relaţiei (1) în raport cu p_{10}, fie dezvoltînd aceeaşi relaţie în serie şi considerînd Δp_1 mic (17). Se obţine în acest mod

$$A = -\frac{\bar{p}_{10}}{M_{i0}} \frac{\partial M_{i0}}{\partial p_{10}} = -\frac{\gamma + 1}{2\gamma} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{1}{1 - \left(\frac{p_{10}}{p_s} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}} \tag{19}$$

dacă $\Lambda > \Lambda_c$. Pentru regimuri supracritice ($\Lambda < \Lambda_c$) rezultă $A = 0$, deoarece în acest caz debitul de intrare rămîne constant.

În cazul compensării inerente, secţiunea de intrare este egală cu

$$S_i = n \pi d_i h = S_{10} (1 + \varepsilon \cos \theta) \tag{20}$$

şi, din această cauză, în locul relaţiei (18) rezultă

$$dM_i = M_{i0} \left(1 - A \frac{\Delta p_1}{p_{10}} + \varepsilon \cos \theta \right) \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{21}$$

Procedînd analog, respectiv dezvoltînd în serie relaţia (6), rezultă pentru debitul de ieşire

$$\mathrm{d}M_e = M_{e0} \left(1 + \alpha \frac{\Delta p_1}{p_{10}} + 3 \varepsilon \cos \theta \right) \frac{d\theta}{2\pi}, \tag{22}$$

unde

$$\alpha = \frac{2 \bar{p}_{10}^2}{\bar{p}_{10}^2 - 1}. \tag{23}$$

În sfîrşit, egalînd relaţia (18) sau (21) cu (22), rezultă creşterea de presiune Δp_1 sub forma

$$\Delta p_1 = -\frac{3 p_{10}}{A + \alpha} \varepsilon \cos \theta \quad \text{(compensare prin orificii)} \tag{24}$$

sau

$$\Delta p_1 = -\frac{2 p_{10}}{A+\alpha}\,\varepsilon\cos\theta \quad \text{(compensare inerentă).} \tag{25}$$

Se constată că lagărele compensate prin orificii au o capacitate de încărcare mai mare în raportul 3/2 față de lagărele inerent compensate. În consecință, dacă relația (3) furnizează o secțiune de intrare mult mai redusă decît relația (4), lagărul poate fi considerat ca fiind compensat prin orificii și se poate utiliza relația (24). În cazul invers se va folosi relația (25). În sfîrșit, în cazul cînd formulele (3) (4) dau valori S_{10} de același ordin de mărime, se poate considera că există doi restrictori în serie care pot fi înlocuiți cu unul echivalent, rezultînd o secțiune de intrare echivalentă. În acest sens se pot folosi raționamentul și diagramele propuse de Tang și Gross [5]. În final, presiunile Δp_1 vor avea valori intermediare între cele date de formulele (24) și (25).

Efectuînd acum o ipoteză asupra variației creșterii de presiune Δp cu z, se poate calcula rezultanta presiunilor. De exemplu, cea mai simplă ipoteză în cazul valorilor Δp și $p_{10} - p_a$ mici este aceea de a considera o variație liniară cu z de forma

$$\Delta p = \Delta p_1\left(1 - \frac{2z}{b}\right). \tag{26}$$

Astfel

$$P = -2\int_0^{\frac{b}{2}} dz \int_0^{2\pi} pr\cos\theta\, d\theta \tag{27}$$

sau, definind un coeficient adimensional de încărcare

$$\zeta = \frac{P}{p_a D b}, \tag{28}$$

se deduce, ținînd cont de (24) — (26), o primă valoare aproximativă pentru coeficientul de încărcare:

$$(i\ \zeta_{0,0}) = \frac{3\pi}{4}\,\frac{\overline{p}_{10}}{A+\alpha}\,\varepsilon \qquad \begin{matrix}(i=1, \text{compensare prin orificii}),\\ (i=\frac{3}{2}\ \text{compensare inerentă}).\end{matrix} \tag{29}$$

Relația (29) introduce totuși unele erori, subestimînd capacitatea de încărcare la presiuni p_s mari, cînd variația presiunii cu z se depărtează de o variație liniară. O ipoteză corectă pentru excentricități reduse ar fi aceea de a se considera că legea de variație a presiunii cu z rămîne aceeași ca și pentru cazul $\varepsilon = 0$, adică

$$\overline{p}^2 = \overline{p}_1^2 + (1 - \overline{p}_1^2)\,\frac{2z}{b}. \tag{30}$$

unde $\overline{p}_1 = \overline{p}_{10} + \Delta\overline{p}_1$ este valoarea presiunii la $z = 0$. Considerînd în continuare Δp_1 mic față de p_{10}, rezultă, de exemplu, în cazul cînd Δp este dat de relația (24)

$$\overline{p}^2 = \overline{p}_{10}^2 \left[1 - \frac{\overline{z}\,(\overline{p}_{10}^2 - 1)}{\lambda\,\overline{p}_{10}^2}\right] - \frac{6\,\overline{p}_{10}^2}{A+\alpha}\,\varepsilon\cos\theta\left(1 - \frac{\overline{z}}{\lambda}\right); \qquad \overline{z} = \frac{z}{r}, \tag{31}$$

sau aproximativ

$$\overline{p} = \overline{p}_{10}\left[\sqrt{1 - \frac{\overline{z}\,(\overline{p}_{10}^2 - 1)}{\lambda\,\overline{p}_{10}^2}} + \frac{3\,\varepsilon}{A+\alpha}\,\frac{\cos\theta\left(1 - \frac{\overline{z}}{\lambda}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\overline{z}\,(\overline{p}_{10}^2 - 1)}{\lambda\,\overline{p}_{10}^2}}}\right]. \tag{32}$$

Introducînd această expresie în (27), rezultă pentru coeficientul de încărcare

$$\zeta_0 = \zeta_{0,0} F_0 = \frac{3\pi}{4}\,\frac{\overline{p}_{10}}{A+\alpha}\,F_0\,\varepsilon, \tag{33}$$

unde F_0 reprezintă corecția față de aproximația precedentă (29):

$$F_0 = \frac{2}{\lambda^2}\int_0^{\lambda} \frac{\lambda - \overline{z}}{\sqrt{1 - \frac{\overline{z}\,(p_{10}^2 - 1)}{\lambda\,p_{10}^2}}}\,\mathrm{d}\overline{z} = 2\int_0^1 \frac{1 - \widetilde{z}}{\sqrt{1 - \widetilde{z}\left(1 - \frac{1}{p_{10}^2}\right)}}\,\mathrm{d}\widetilde{z} = \frac{4\,\overline{p}_{10}(\overline{p}_{10} + 2)}{3\,(\overline{p}_{10}+1)^2}, \tag{34}$$

unde $\overline{z} = \dfrac{z}{r}$, iar $\widetilde{z} = \dfrac{2z}{b}$.

Se constată că pentru $\overline{p}_{10} \to 1$, $F_0 \to 1$, iar relația (33) devine identică cu (29). În schimb, la valori p_{10} mari, $F_0 \to 4/3$, relația (33) furnizînd pentru coeficientul de încărcare valori cu 33% mai mari decît aproximația precedentă (29).

Chiar de la o simplă examinare a relațiilor (29) și (33) se constată că ζ se va anula în situațiile extreme $\Lambda \to 0$ și $\Lambda \to \infty$ și, în consecință, va prezenta un maxim pentru o anumită valoare Λ. Într-adevăr, pentru $\Lambda \to 0$ se constată că $\alpha \to \infty$ (23) (deoarece $\overline{p}_{10} \to 1$), în timp ce, pentru $\Lambda \to \infty$, $\overline{p}_{10} \to \overline{p}_s$ și, în consecință, $A \to \infty$ (19).

Aceste rezultate sînt ilustrate în diagrama din figura 5, în care s-au trasat valorile $i\,\dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\varepsilon}$ date de relațiile (33) și, respectiv, (29), în funcție de Λ și $\overline{p}_s$.

Totodată, deoarece Δp este proporţional cu cos θ, influenţa excentricităţii asupra debitului total de lubrifiant este nulă, astfel încît debitul rămîne în continuare aproximativ egal cu cel din cazul $\varepsilon = 0$(15).

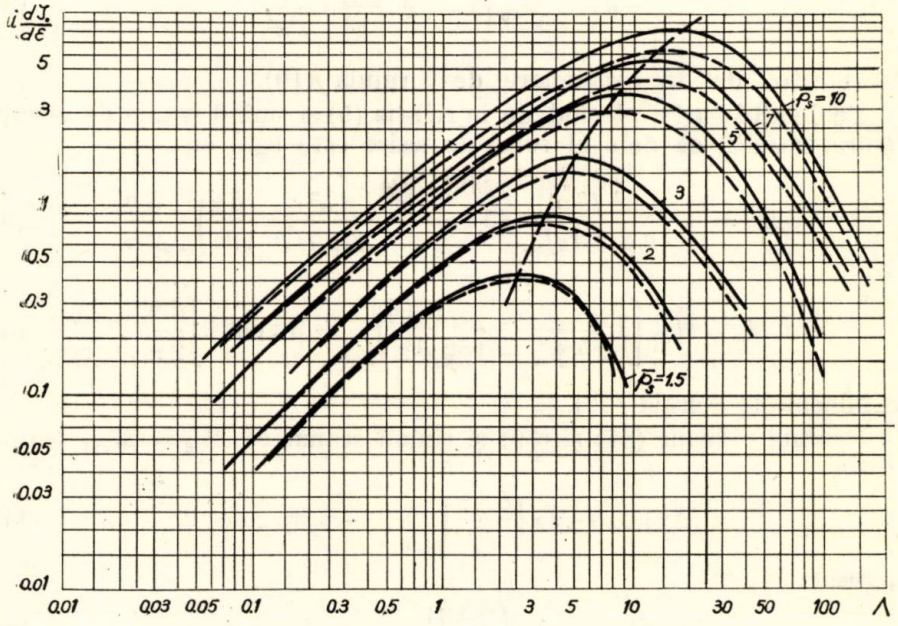


Fig. 5. — Capacitatea de încărcare în funcţie de Λ pentru diferite presiuni de alimentare $\bar{p}_s$ pentru lagăre de alungiri reduse ($\lambda \to 0$): ——— relaţia (33); - - - - relaţia (29).

CONSIDERAREA MIŞCĂRII ÎN LUNGUL CIRCUMFERINŢEI LAGĂRULUI

Rezultatele precedente presupun o mişcare pur radială, care are loc numai în cazul-limită $\lambda \to 0$. În rest este necesar să se ţină seama de influenţa mişcării după θ atît asupra distribuţiei presiunilor, cît şi în special asupra presiunilor în secţiunea $z = 0$. În această privinţă se poate adopta pentru excentricităţi reduse un procedeu asemănător cu cel propus de Heinrich [4]. Astfel putem admite [2] că ecuaţia diferenţială a presiunilor are forma

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{z}^2} = 0\,; \quad \bar{\eta} = \bar{p}^2\,; \quad \bar{z} = \frac{z}{r}, \tag{35}$$

respectiv $\bar{\eta}$ este o funcţie armonică. Pe de altă parte vom considera

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_0 + \Delta\bar{\eta}\,; \quad \bar{\eta}_0 = \bar{p}_{i0}^2\left[1 - \frac{\bar{z}\,(\bar{p}_{i0}^2 - 1)}{\lambda\,\bar{p}_{i0}^2}\right], \tag{36}$$

unde $\bar{\eta}_0$ reprezintă soluţia pentru cazul $\varepsilon = 0$.

Pentru a scrie egalitatea între debitul de intrare şi cel de ieşire, să observăm mai întîi că debitul de intrare rămîne dat de aceleaşi expresii,

cu deosebirea că acum $\Delta\overline{\eta} \cong 2\overline{p}_{10}\Delta\overline{p}$. De exemplu, în cazul compensării prin orificii rămîne valabilă relaţia (18), respectiv

$$\mathrm{d}M_i = M_{i0}\left(1 - A\,\frac{\Delta\overline{\eta}_1}{2\overline{p}_{10}^2}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}, \tag{37}$$

unde A este dat în continuare de formula (19).

Pe de altă parte, plecînd de la relaţia (5) şi ţinînd seama de ecuaţia de stare, rezultă că debitul total de ieşire este egal cu

$$\mathrm{d}M_e = -\frac{\rho_1 h^3}{6\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=0} r\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi h^3 r_1}{6\mu RT}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)_{z=0}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \tag{38}$$

sau

$$\mathrm{d}M_e = M_{e0}\left[1 - \frac{\lambda}{\overline{p}_{10}^2 - 1}\left(\frac{\partial \Delta\overline{\eta}}{\partial \overline{z}}\right)_{\overline{z}=0} + 3\varepsilon\cos\theta\right]\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}, \tag{39}$$

care înlocuieşte relaţia (22).

Egalînd relaţiile (37) şi (39) şi ţinînd seama că $M_{i0} = M_{e0}$, rezultă condiţia

$$A\,(\Delta\overline{\eta})_{\overline{z}=0} - \lambda\alpha\left(\frac{\partial \Delta\overline{\eta}}{\partial \overline{z}}\right)_{\overline{z}=0} = -6\,\overline{p}_{10}^2\,\varepsilon\cos\theta \tag{40}$$

sau, respectiv,

$$A\,(\Delta\overline{\eta})_{\overline{z}=0} - \lambda\alpha\left(\frac{\partial \Delta\overline{\eta}}{\partial \overline{z}}\right)_{\overline{z}=0} = -4\overline{p}_{10}^2\,\varepsilon\cos\theta \tag{41}$$

în cazul compensării inerente, relaţii care înlocuiesc formulele (24) şi, respectiv, (25).

Ţinînd seama de (36), rezultă atunci că funcţia necunoscută este o soluţie a ecuaţiei (35), care se anulează la $\overline{z} = \pm\lambda$ şi care, în plus, trebuie să satisfacă o condiţie de tipul (40) sau (41) la $\overline{z} = 0$. În fapt, avînd o distribuţie continuă de surse la $\overline{z} = 0$, funcţia $\Delta\overline{\eta}$ ar trebui să prezinte o singularitate continuă la $\overline{z} = 0$, iar condiţia (40) sau (41) ar fi valabilă pentru $\overline{z} = 0 + \delta$, unde δ este mic şi ar reprezenta, de pildă, raza orificiilor sau buzunarelor de alimentare. Deoarece o asemenea fîşie îngustă nu afectează distribuţia presiunilor şi are o influenţă neglijabilă asupra rezultantei presiunilor, se poate lua $\delta \to 0$. Este de remarcat că pentru $\overline{z} = 0 - \delta$ condiţia (40), de exemplu, se scrie

$$A\,(\Delta\overline{\eta})_{\overline{z}=0} + \lambda\alpha\left(\frac{\partial \Delta\overline{\eta}}{\partial \overline{z}}\right)_{\overline{z}=0} = -6\overline{p}_{10}^2\,\varepsilon\cos\theta, \tag{42}$$

deoarece derivata $\dfrac{\partial \Delta\overline{\eta}}{\partial \overline{z}}$ are aceeaşi valoare absolută, dar cu semn schimbat (prin ipoteza $\delta \to 0$, curba $\eta(z)$ are un punct unghiular la $\overline{z} = 0$). Rezultă deci că vor trebui considerate două domenii : $\overline{z} > 0$, în care $\Delta\overline{\eta}$ satisface ecuaţia (35) şi condiţia (40), şi $\overline{z} < 0$, în care $\Delta\overline{\eta}$ satisface ecuaţia (35) şi condiţia (42). Este uşor de văzut că cele două soluţii dau

valori simetrice pentru $\Delta\bar{\eta}$, astfel încît este suficientă determinarea soluției pentru $\bar{z} > 0$ de exemplu.

Soluția $\Delta\bar{\eta}$ poate fi considerată de forma

$$\Delta\bar{\eta} = \beta \cos\theta f(\bar{z}), \tag{43}$$

unde $f(\bar{z})$ rezultă din (35), sub forma unei combinații liniare în $\mathrm{sh}\bar{z}$ și $\mathrm{ch}\bar{z}$. Aplicînd și condiția (40) sau (41), rezultă

$$(i\,\Delta\bar{\eta}) = -\frac{6\,\bar{p}_{10}^2\,\varepsilon\cos\theta}{A + \alpha\lambda\,\mathrm{cth}\,\lambda}\,\frac{\mathrm{sh}\,(\lambda - \bar{z})}{\mathrm{sh}\,\lambda}, \tag{44}$$

unde $i = 1$ pentru compensarea prin orificii și $i = 3/2$ pentru compensarea inerentă. Din (36) rezultă apoi

$$\bar{\eta} = \bar{p}_{10}^2\left[1 - \frac{\bar{z}\,(\bar{p}_{10}^2 - 1)}{\lambda\,\bar{p}_{10}^2}\right] - \left(\frac{6}{i}\right)\frac{\bar{p}_{10}^2\,\varepsilon\cos\theta}{A + \alpha\lambda\,\mathrm{cth}\,\lambda}\,\frac{\mathrm{sh}\,(\lambda - \bar{z})}{\mathrm{sh}\,\lambda} \tag{45}$$

și, în sfîrșit,

$$\bar{p} = \bar{p}_{10}\sqrt{1 - \frac{\bar{z}\,(\bar{p}_{10}^2 - 1)}{\lambda\,\bar{p}_{10}^2}} - \left(\frac{3}{i}\right)\frac{\bar{p}_{10}\,\varepsilon\cos\theta}{A + \alpha\lambda\,\mathrm{cth}\,\lambda}\,\frac{\mathrm{sh}\,(\lambda - \bar{z})}{\mathrm{sh}\,\lambda\sqrt{1 - \dfrac{\bar{z}\,(\bar{p}_{10}^2 - 1)}{\lambda\,\bar{p}_{10}^2}}}, \tag{46}$$

relație care înlocuiește formula (32).

Se constată că, pentru $\lambda \to 0$, $\mathrm{cth}\,\lambda \to \dfrac{1}{\lambda}$, iar $\mathrm{sh}\,\lambda \to \lambda$, $\mathrm{sh}\,(\lambda - \bar{z}) \to$ $\to \lambda - \bar{z}$, astfel încît formula (46) se reduce la relația (32).

În continuare, coeficientul de încărcare ζ (27) (28) se deduce fără dificultăți și se poate pune sub forma

$$\zeta = \zeta_{0,0} \cdot k_\lambda, \tag{47}$$

unde $\zeta_{0,0}$ este dat de relația (29), iar

$$k_\lambda = K_\lambda F_\lambda, \tag{48}$$

în care

$$K_\lambda = \frac{A + \alpha}{A + \alpha\lambda\,\mathrm{cth}\,\lambda}, \tag{49}$$

iar

$$F_\lambda = -\frac{2}{\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda}\int_0^\lambda \frac{\mathrm{sh}\,(\lambda - \bar{z})}{\sqrt{1 - \dfrac{\bar{z}\,(\bar{p}_{10}^2 - 1)}{\lambda\,\bar{p}_{10}^2}}}\,\mathrm{d}\bar{z} = \frac{2}{\mathrm{sh}\,\lambda}\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}\,\lambda\,(1 - \tilde{z})}{\sqrt{1 - \tilde{z}\left(1 - \dfrac{1}{\bar{p}_{10}^2}\right)}}\,\mathrm{d}\tilde{z}. \tag{50}$$

Coeficientul K_λ reprezintă influența scurgerii circumferențiale asupra distribuției de presiuni în secțiunea $z = 0$. Se constată că $K_\lambda \to 1$ cînd $\lambda \to 0$ și $K_\lambda \to 0$ cînd $\lambda \to \infty$. Pe de altă parte, la valori Λ mici (regim supracritic), $A = 0$ și $K_\lambda = \dfrac{\mathrm{th}\,\lambda}{\lambda}$, influența alungirii fiind pronunțată.

Din contra, la valori mari, deoarece $A \gg \alpha$, influența alungirii scade ($K_\lambda \to 1$ cînd $\Lambda \to \infty, A \to \infty$).

Coeficientul F_λ reprezintă influența legii de variație a presiunii după z asupra distribuției presiunilor. Cînd $\lambda \to 0$, $F_\lambda \to F_0$, dat de formula (34). Pe de altă parte, dacă distribuția presiunilor ar fi liniară, $F_\lambda = 1$. Integrala (50) poate fi calculată analitic

$$F_\lambda = \frac{2\xi}{\lambda \operatorname{sh}\lambda} \{e^{\lambda-\xi^2}[\psi(\xi) - \psi(\sqrt{\xi^2-\lambda})] - e^{-\lambda+\xi^2}[\Phi(\xi) - \Phi(\sqrt{\xi^2-\lambda})]\}, \quad (51)$$

în care

$$\xi = \frac{\overline{p}_{10}^2}{\overline{p}_{10}^2 - 1}; \quad \psi(\xi) = \int_0^\xi e^{\xi^2} d\xi; \quad \Phi(\xi) = \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi, \quad (52)$$

unde $\psi(\xi)$ și $\Phi(\xi)$ sau funcții proporționale cu acestea se găsesc întabulate. Pentru facilitarea aplicațiilor, în diagrama din figura 6 s-a reprezentat variația coeficientului F_λ cu p_{10} pentru diferite alungiri λ.

Se constată că valorile F_λ oscilează efectiv în jurul valorii $F_\lambda = 1$, crescînd cu p_{10} și scăzînd cu creșterea alungirii. Aceste influențe se datoresc modificării alurii curbei presiunilor în funcție de z la diferite

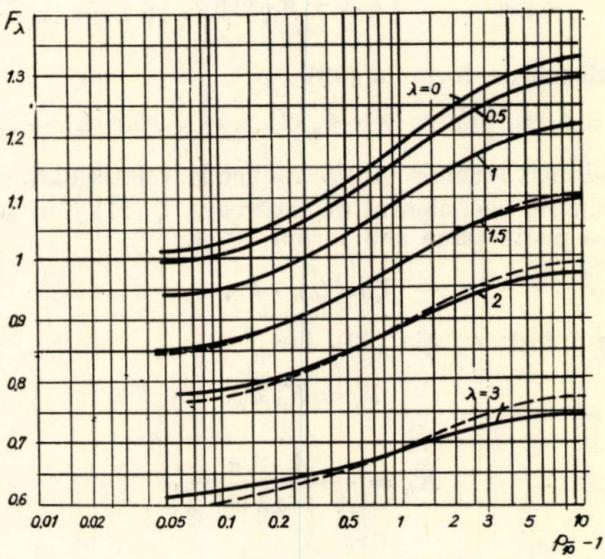


Fig. 6. — Coeficientul F_λ în funcție de presiunea p_{10} pentru diferite alungiri λ.

alungiri și presiuni p_{10}, conform formulei (46). Astfel, în diagramele din figura 7 s-au reprezentat curbele în funcție de z pentru diferite valori λ și p_{10}. Se constată din nou că pentru perechile de valori particulare $\overline{p}_{10}$, λ, pentru care variația $\Delta p(z)$ este cvasiliniară, rezultă $F_\lambda = 1$.

$$\frac{\partial F_\lambda}{\partial \tilde{z}} = \frac{\Delta \overline{p}}{(\Delta \overline{p})_{\tilde{z}=0}} \quad (53)$$

Rezultatele de mai sus permit calculul simplu al coeficientului de încărcare. Calculele respective sînt sintetizate în diagramele din figura 8, în care s-au reprezentat curbele $\frac{d\zeta}{d\varepsilon}$ în funcție de Λ pentru diferite alungiri și valori ale presiunii de alimentare p_s. Se observă că rezultatele

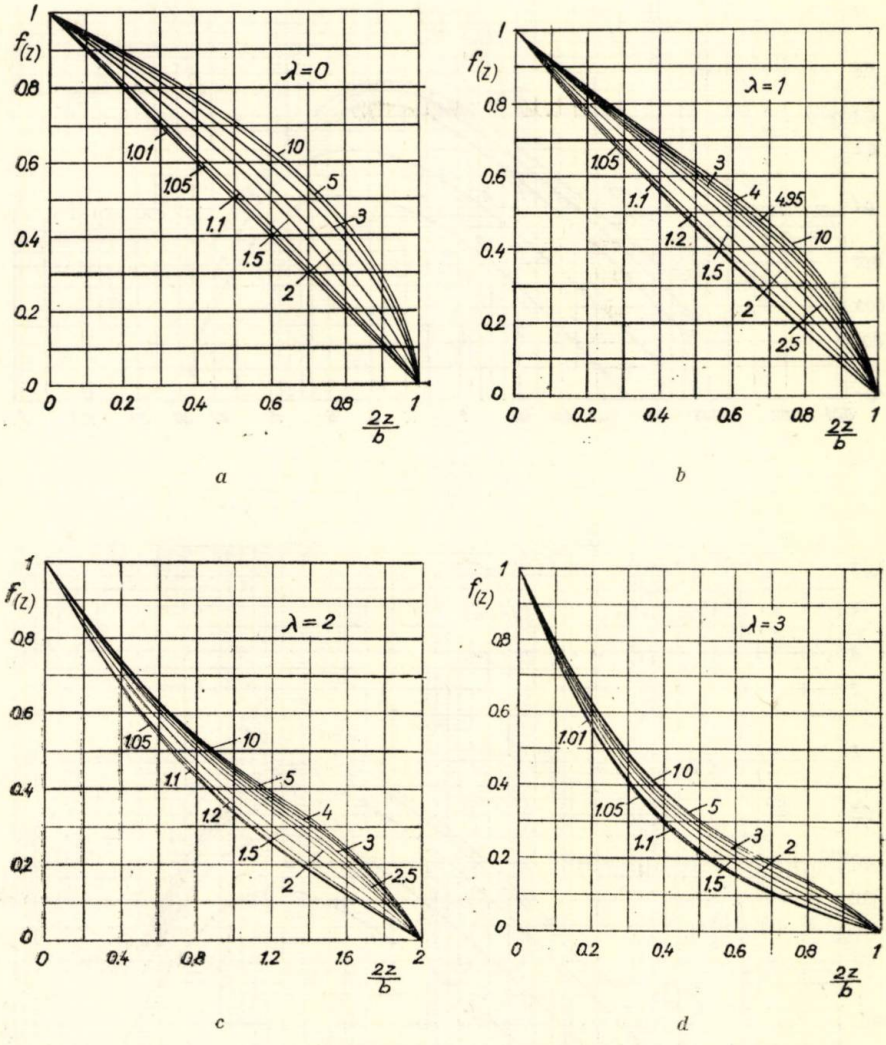
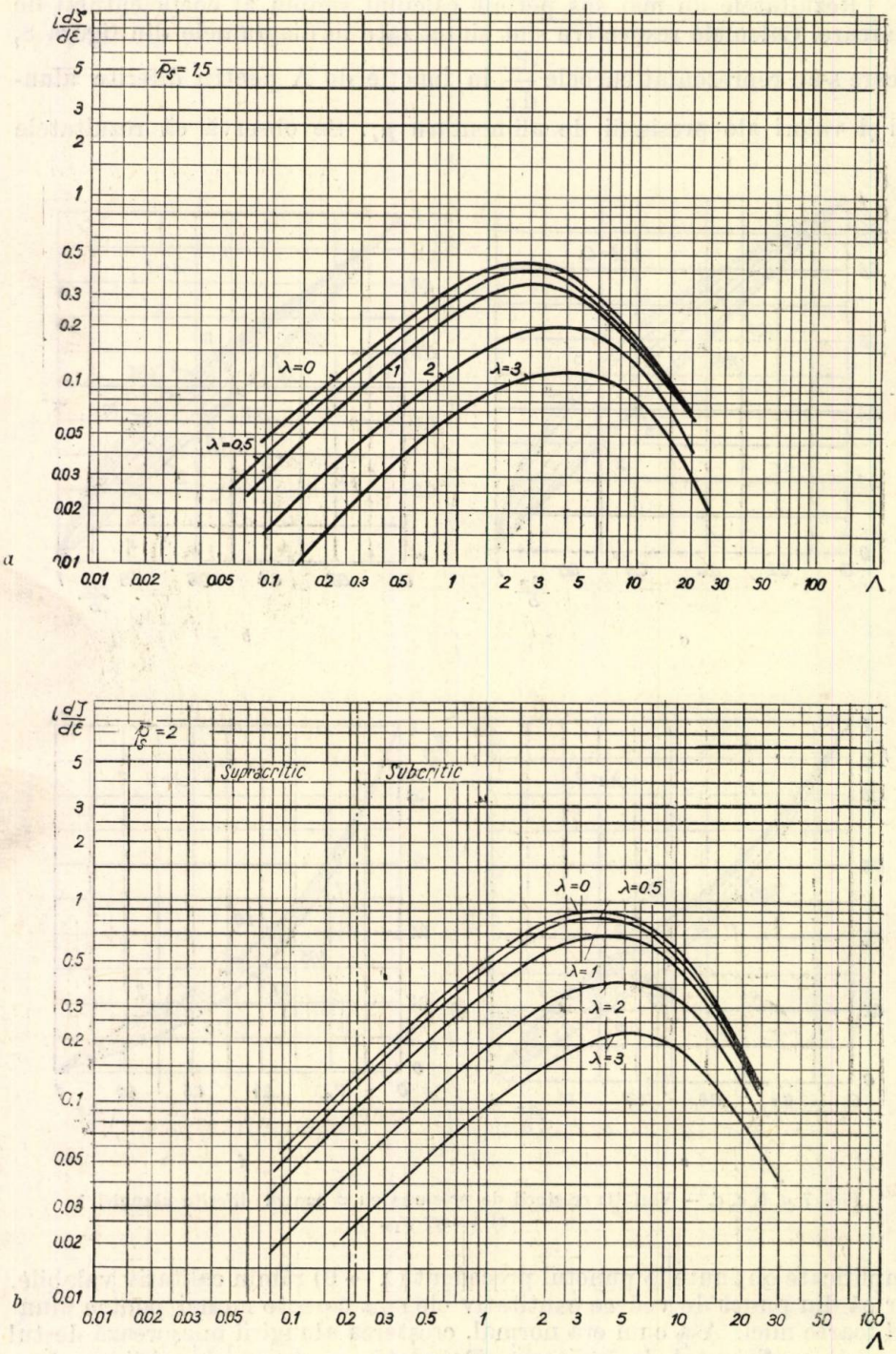


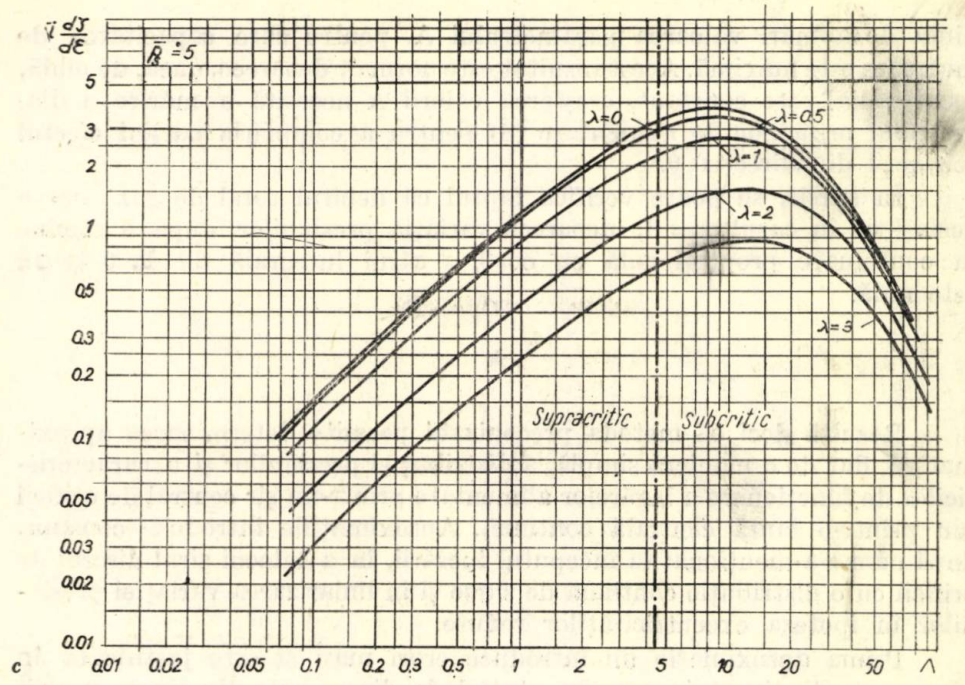
Fig. 7 *a, b, c, d.* — Variația creșterii de presiune cu z pentru diferite alungiri λ și valori p_{10}.

simplificate obținute la punctul precedent ($\lambda \to 0$) rămîn calitativ valabile, dar că din punct de vedere cantitativ ele sînt corecte numai pentru alungiri foarte mici. Așa cum era normal, creșterea alungirii micșorează destul de mult coeficientul de încărcare. Totodată, creșterea alungirii are ten-

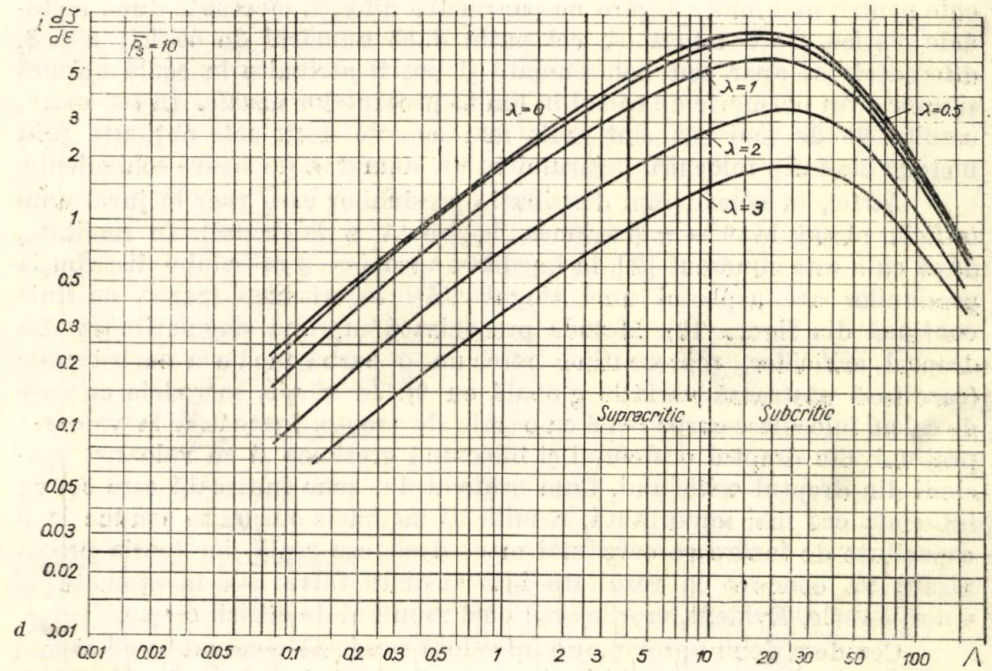


$i\frac{d\zeta}{d\varepsilon}$
$\bar{p}_s = 1.5$
λ=0
1
2
λ=3
λ=0.5
a
Λ
$i\frac{d\zeta}{d\varepsilon}$
$\bar{p}_s = 2$
Supracritic
Subcritic
λ=0
λ=0.5
λ=1
λ=2
λ=3
b
Λ

Fig. 8



c



d

Fig. 8 *a*, *b*, *c*, *d*. — Capacitatea de încărcare în funcție de Λ pentru diferite alungiri și presiuni de alimentare $\bar{p}_s$.

dinţa de a mări valoarea parametrului Λ, pentru care capacitatea de încărcare este maximă. Acest rezultat este normal, deoarece, dacă, de pildă, jocul radial este constant, creşterea valorii Λ necesită o mărire a diametrului orificiilor de alimentare (8) pentru a compensa parţial efectul scurgerii din direcţia θ.

În sfîrşit, se poate verifica faptul că debitul total de gaz rămîne acelaşi ca în cazul $\varepsilon = 0$, deoarece variaţia presiunilor după θ rămîne în continuare proporţională cu $\cos\theta$, a cărui integrală de la 0 la 2π este nulă.

★

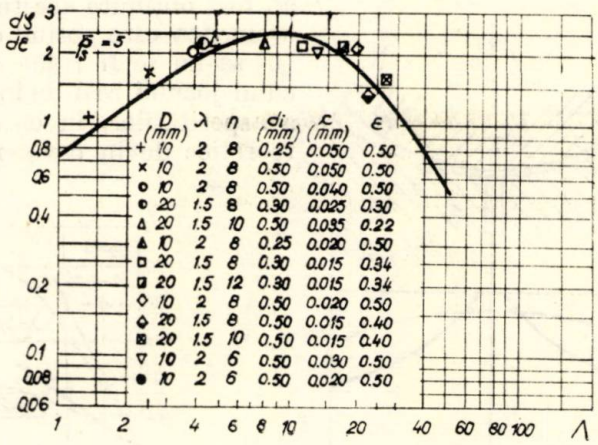
Rezultă deci că metoda preconizată permite determinarea aproximativă, dar de o manieră simplă, a distribuţiei presiunilor şi a caracteristicilor de funcţionare a lagărelor alimentate printr-un şir central de orificii sau printr-o fantă centrală continuă. Aproximaţiile introduse constau, după cum s-a menţionat la începutul lucrării, în a înlocui şirul discret de orificii cu o distribuţie continuă de surse şi în liniarizarea variaţiei presiunilor în ipoteza excentricităţilor reduse.

Prima aproximaţie nu introduce erori mari şi este justificată în aproape toate situaţiile practice. Astfel, în diagramele din figura 9 s-au reprezentat rezultatele obţinute mai sus în comparaţie cu o serie de calcule pentru mai multe lagăre cu parametrii diferiţi, efectuate după metodele clasice. Se constată că, cel puţin dacă numărul de orificii $n \geqslant 8$, diferenţele ce apar sînt neînsemnate şi pot fi atribuite în egală măsură şi unor erori obişnuite de calcul în limita procentelor uzuale. În tot cazul, rezultatele de mai sus sînt mult mai corecte decît cele obţinute prin metoda clasică a înlocuirii lagărului cu un număr n de lagăre echivalente.

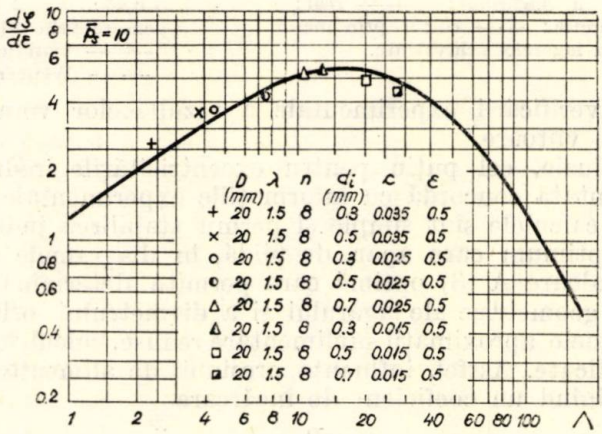
Astfel, să considerăm distribuţia presiunilor care apar în jurul unui orificiu plasat la $\theta = \pi$ (regiunea încărcată a lagărului). În realitate, după cum este cunoscut [2], în imediata apropiere a orificiului distribuţia presiunilor are aspectul unei singularităţi logaritmice (curba cu linie continuă din figura 10). Metoda preconizată suprimă singularitatea din dreptul orificiilor, reprezentînd oarecum o curbă medie a curbei reale (care însă păstrează variaţia globală cu θ). În sfîrşit, metodele curente de calcul înlocuiesc curba reală cu o serie de trepte, luate însă la valoarea presiunii din dreptul orificiului şi înlocuind grosimea h cu valoarea grosimii din dreptul orificiului. Cum orificiul din zona încărcată este cel cu influenţa cea mai importantă, rezultă că metodele obişnuite conduc la o capacitate de încărcare ceva mai mare decît cea reală, iar teoria preconizată va conduce la rezultate intermediare între cele menţionate şi valorile reale. Evident, erorile scad cînd numărul de orificii creşte.

Cea de-a doua aproximaţie introdusă poate să conducă la erori mai importante, la excentricităţi mai mari ($\varepsilon > 0{,}5$). Astfel rezultatele menţionate mai sus concordă integral cu recomandările deduse experimental şi de

Shires [3] în cazul excentricităţilor reduse, în particular faptul că optimul pentru capacitatea de încărcare apare în jurul valorii $Kp_0 = 0{,}6$ (14). Acelaşi autor menţionează însă că la excentricităţi mai mari valoarea Kp_0 optimă scade către $Kp_0 \cong 0{,}4$. Totuşi, pentru o gamă întreagă de



a



b

Fig. 9 *a*, *b*. — Curba $\frac{d\zeta_0}{d\varepsilon}$ în funcţie de Λ pentru $\lambda \to 0$, $\bar{p}_s = 5$, $\bar{p}_s = 10$ (lagăre inerent compensate). Comparaţie cu metoda lagărelor echivalente.

lagăre alimentate sub presiune, în special pentru calcule de vibraţii şi stabilitate, interesează îndeosebi comportarea la excentricităţi reduse, iar pentru acest domeniu metoda dă completă satisfacţie.

În aceeaşi ordine de idei, în figura 11 s-au reprezentat curbele $\zeta(\varepsilon)$ pentru două alungiri obţinute pe baza unor date teoretice şi experimentale de A. Wiemer şi R. Pich [6].

Se constată o concordanţă satisfăcătoare la $\varepsilon < 0{,}5$. Unele diferenţe reduse care mai apar în figura 11 ar putea fi atribuite modului în care au fost obţinute aceste rezultate; de asemenea este posibil ca în lucrarea [6] să nu se fi ţinut seama în calculul jocului real de înălţimea medie a asperităţilor, în care caz valorile teoretice devin ceva mai mici. De altfel asupra verificării experimentale a rezultatelor vom mai reveni într-o lucrare viitoare.

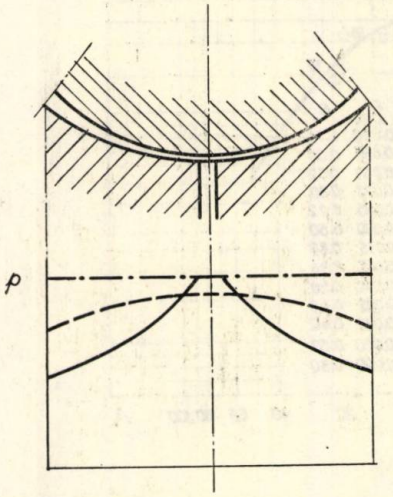


Fig. 10. — Distribuţia presiunilor în jurul orificiului plasat la $\theta = \pi$ în regiunea încărcată a lagărului: ——— real; - - - - teoretic; —·— calcul prin metoda lagărelor echivalente.

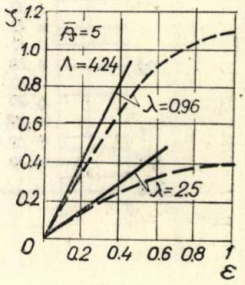


Fig. 11. — Curba $\zeta(\varepsilon)$ pentru $\bar{p}_s = 5$; $\Lambda = 4{,}24$; $\lambda = 0{,}96$; $\lambda = 2{,}5$ (compensare prin orificii): ——— teoretic; - - - - Wiemer [6].

În concluzie, cel puţin pentru excentricităţile reduse ($\varepsilon < 0{,}5$), metoda prezentată concordă cu informaţiile experimentale existente. În acelaşi timp, calculele sînt simple şi permit stabilirea judicioasă a unor condiţii de optimum care apar, de pildă, în diagramele din figura 8, respectiv o valoare Λ (8) optimă care permite determinarea corectă a dimensiunilor geometrice ale lagărului şi a diametrului orificiilor de alimentare. Cu unele aproximaţii suplimentare reduse, calculele ar mai putea fi încă simplificate. Astfel, influenţa presiunii de alimentare ar putea fi eliminată definind un coeficient de încărcare

$$\zeta_{red} = \frac{P}{(\bar{p}_s - 1)\,Db} = \frac{\zeta}{(\bar{p}_s - 1)} \tag{54}$$

şi căutînd o soluţie asimptotică a mişcării în cazul $\Lambda \to \infty$. Se poate verifica astfel că, reprezentînd ζ_{red} în funcţie de

$$\Lambda_{red} = \frac{\Lambda}{\sqrt{(\bar{p}_s - 1)(\bar{p}_s + 2)}}, \tag{55}$$

curbele corespunzătoare a diferite valori $\bar{p}_s$ aproape se suprapun pentru un interval destul de larg de valori care includ şi regiunea maximului.

În sfîrșit, metoda de mai sus va fi extinsă într-o lucrare viitoare și la cazul lagărelor alimentate prin două sau mai multe șiruri de orificii, soluție folosită de asemenea în diferite aplicații tehnice de mașini și aparate pe lagăre cu aer.

Primită la redacție la 3 octombrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. W. A. Gross, *Gas Film Lubrication*, New York, John Wiley, 1962.
2. V. N. Constantinescu, *Lubrificația cu gaze*, București, Edit. Acad. R.P.R., 1963.
3. N. S. Grassam, G. W. Powel editors, *Gas Lubricated Bearings*, Londra, Butterworths, 1964.
4. G. Heinrich, *The theory of externally-pressurized bearings with compressible Lubricant.* Proc. of the 1st International Symposium on Gas Lubricated Bearings, Washington, 1959, p. 251—265.
5. T. C. Tang, W. A. Gross, *Analysis and Design of Externally-Pressurized Gas Bearings*, I. B. M. Research Report R. I. 191, April 17, 1961.
6. A. Wiemer, R. Pich, *Berechnung luftgeschmierter Querlager mit geringer Gleitgeschwindigkeit*, Feingerätetechnik, **14**, *6*, 283—287 (1965).

APLICAREA MIŞCĂRILOR CVASICONICE LA STUDIUL SISTEMELOR PORTANTE ARIPĂ-FUZELAJ ÎN REGIM SUPERSONIC [1)]

ELIE CARAFOLI şi DAN MATEESCU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

În această lucrare este studiată scurgerea cvasiconică în jurul sistemului portant aripă-fuzelaj în scopul determinării distribuţiei de presiuni. În lucrare sînt determinate expresia potenţialului şi cea a vitezei axiale de perturbaţie atît pentru sistemul aripă delta-fuzelaj, cît şi pentru fuzelajul izolat.

NOTAŢII

U_∞ — viteza curentului neperturbat;
a_∞ — viteza sunetului în condiţiile curentului neperturbat;

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach corespunzător;

$Ox_1x_2x_3$ — sistem triortogonal de coordonate, a cărui axă Ox_1 este paralelă cu direcţia curentului neperturbat U_∞;

$\Phi'(x_1, x_2, x_3)$ — potenţialul mişcării în jurul sistemului portant considerat;

$\Phi(x_1, x_2, x_3)$ — potenţialul vitezelor de perturbaţie;

$u = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}$, $v = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2}$, $w = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}$ — componentele vitezei de perturbaţie după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3.

[1)] Publicată în Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. appl. (în limba engleză), *12*, 1 (1967).

1. CONSIDERAȚII ASUPRA METODELOR DE APROXIMARE ÎN MIȘCĂRILE SUPERSONICE. MIȘCAREA CVASICONICĂ

Ecuația diferențială a potențialului de viteze al unei scurgeri compresibile tridimensionale este dată de următoarea expresie în notații vectoriale [1]:

$$\nabla\overline{V} = \frac{1}{2a^2}\,\overline{V}\cdot\nabla(V^2) \quad , \quad \overline{V} = \Delta\Phi', \tag{1}$$

unde Φ' reprezintă potențialul mișcării, care se poate pune sub forma

$$\Phi'(x_1,\ x_2,\ x_3) = U_\infty\, x_1 + \Phi\,(x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{2}$$

$\Phi\,(x_1,\ x_2,\ x_3)$ reprezentînd potențialul vitezelor de perturbație u, v, w.

În ipoteza perturbațiilor mici, putem neglija în primă aproximație toți termenii din (1) care conțin expresii de forma

$$\frac{u^2}{a^2},\ \frac{v^2}{a^2},\ \frac{w^2}{a^2};\ \frac{uv}{a^2},\ \frac{vw}{a^2},\ \frac{wu}{a^2};\ \frac{U_\infty u}{a^2},\ \frac{U_\infty v}{a^2},\ \frac{U_\infty w}{a^1}$$

și obține astfel binecunoscuta ecuație liniarizată a potențialului:

$$(1 - M_\infty^2)\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = 0, \tag{3}$$

cu ajutorul căreia pot fi tratate fără dificultăți deosebite mișcările plane, axial-simetrice, conice etc.

În ceea ce privește corpurile alungite în direcția axei Ox_1, mișcarea generală în jurul acestora se poate separa în două: *mișcarea axial-simetrică*, cuprinzînd efectul grosimii corpului care se tratează relativ mai ușor, și *mișcarea laterală*, cuprinzînd efectul incidenței, care prezintă pentru unele cazuri mari dificultăți, chiar în ipoteza ecuației liniarizate (3). Pentru tratarea acestor mișcări se fac unele aproximații care pornesc de la observația că pentru astfel de corpuri alungite variația vitezei axiale în funcție de x_1 este destul de lentă pentru a putea neglija primul termen al ecuației (3) față de ceilalți doi și a scrie astfel:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = (M_\infty^2 - 1)\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} = (M_\infty^2 - 1)\,\frac{\partial u}{\partial x_1} \approx 0. \tag{4}$$

Dacă membrul al doilea este *riguros nul*,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \tag{5}$$

atunci cădem pe o mișcare *riguros plană* în jurul unui corp de formă cilindrică, ca, de exemplu, un cilindru circular sau o aripă de lungime infinită, a cărei secțiune este raportată la sistemul $Ox_2\,x_3$.

Vom admite însă, ca mai sus, că corpul nu este cilindric, dar că variația dimensiunilor sale transversale, prin ipoteză, este lentă în raport cu x_1; rezultă că și u variază lent, ceea ce ne permite să facem aproximația de mai sus, neglijînd membrul al doilea din (4).

Cu această aproximaţie, elaborată de Munk [2] pentru mişcările subsonice incompresibile ($M_\infty \approx 0$) şi utilizată apoi de Jones [3] pentru mişcările compresibile ($M_\infty^2 \gg 0$), ecuaţia liniarizată a potenţialului (3) se reduce la ecuaţia bidimensională a lui Laplace într-un plan normal pe direcţia curentului neperturbat U_∞.

În acest mod, problema a fost redusă la determinarea unui *potenţial cvasiplan*, care satisface, în condiţiile aproximaţiei admise, ecuaţia bidimensională a lui Laplace (4) în orice secţiune $x_1 = \text{const}$. Acest potenţial cvasiplan depinde totuşi şi de x_1 prin intermediul dimensiunilor transversale ale corpului considerat, care variază în funcţie de x_1. Prin derivarea potenţialului în raport cu x_1 se obţine viteza axială de perturbaţie u, care intră direct în stabilirea distribuţiei de presiuni pe corp.

Ecuaţia (4), care cuprinde aproximaţia Munk-Jones, se utilizează curent în studiul carenelor din mişcarea incompresibilă, precum şi în studiul, în regim supersonic, al *corpurilor alungite* şi al *aripilor plane în săgeată efilată*, cu bordurile drepte sau curbe, ale căror dimensiuni transversale sînt mici, date de conul Mach.

De altfel, teoriile care decurg din aceste consideraţii simplificatoare au fost aplicate şi dezvoltate ulterior de numeroşi autori, ca Ward, Heaslet, Lomax, Spreiter, Sears, [4], [5], [6], [7], [8].

Cînd însă dimensiunile transversale ale unei aripi plane nu sînt mici în raport cu conul Mach, atunci vom pune ecuaţia (3) sub altă formă, pentru a fi analizată mai uşor.

Într-adevăr, făcînd schimbarea de variabile

$$\xi_1 = x_1 \quad , \quad y = \frac{x_2}{x_1} \quad , \quad z = \frac{x_3}{x_1} , \tag{6}$$

putem să punem pentru potenţialul vitezelor de perturbaţie, precum şi pentru expresiile acestora, respectiv

$$\Phi = \Phi(\xi_1, y, z), \tag{7}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = u = u(\xi_1, y, z), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = v = v(\xi_1, y, z), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = w = w(\xi_1, y, z). \tag{7'}$$

În acest caz, punînd

$$B^2 = M_\infty^2 - 1, \tag{8}$$

ecuaţia liniarizată a potenţialului (3) se va putea pune sub forma

$$\begin{aligned} -B^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} &= -B^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_3} = \\ = -B^2 \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{B^2}{\xi_1} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\xi_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

sau încă sub forma

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + B^2\left(y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}\right) - B^2\,\xi_1\frac{\partial u}{\partial \xi_1} = 0. \tag{10}$$

Sub această formă putem să reluăm analiza de mai sus pentru a putea obține și alte rezultate.

Dacă mișcarea este *riguros plană* (5), atunci ultimii doi termeni ai ecuației (10) sînt riguros nuli.

În cazul în care dimensiunile transversale ale corpului considerat sînt mici și variază lent în funcție de ξ_1, ultimii doi termeni se pot neglija și regăsim astfel aproximația lui Jones, care reduce potențialul mișcări reale la un *potențial cvasiplan* :

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = x_1\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}\right) \approx 0. \tag{11}$$

Cînd corpul are o formă conică, vitezele de perturbație sînt constante pe o rază vectoare ($y = \text{const}$, $z = \text{const}$) și deci nu variază cu ξ_1. În acest caz, ultimul termen al ecuației (10) este riguros nul, astfel încît acesta se reduce la ecuația potențialului mișcării conice :

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + B^2\left(y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, \tag{12}$$

a cărei soluție poate fi determinată prin intermediul unor transformări convenabile.

Dacă corpul alungit are o formă care variază lent cu ξ_1, viteza axială de perturbație variază de asemenea lent în unghiul unei raze vectoare (deci și în raport cu ξ_1), și deci, fără a impune vreo restricție privind mărimea dimensiunilor transversale ale corpului față de conul Mach, putem neglija ultimul termen al ecuației (10) :

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + B^2\left(y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = B^2\,\xi_1\frac{\partial u}{\partial \xi_1} \approx 0, \tag{13}$$

obținînd astfel ceea ce am denumit un *potențial cvasiconic.*

Prin aceasta, pentru corpurile cu dimensiuni transversale nu prea mici față de conul Mach, aproximația admisă este mai bună, în orice caz de același ordin de mărime ca și cea admisă de Munk și Jones [4].

Într-adevăr, în loc de a reduce potențialul real al mișcării din jurul unui corp alungit la un *potențial cvasiplan*, ca în teoria lui Jones, l-am redus pe acesta la un *potențial cvasiconic*, care este mai apropiat de mișcarea reală pentru corpurile nu chiar atît de zvelte.

În acest mod, într-o secțiune arbitrară $\xi_1 = \text{const}$, *potențialul cvasiconic* va putea fi dedus prin comparație cu mișcarea conică. Este cazul să menționăm aici că noțiunea de relații de compatibilitate din mișcarea conică ar putea fi introdusă și în mișcarea cvasiconică, dar aceste relații trebuie stabilite pornind de la condițiile de irotaționalitate și observînd că vitezele de perturbație u, v, w depind acum și de ξ_1. Această operație

este pe de o parte, destul de laborioasă şi, pe de altă parte, fără importanţă practică pentru dezvoltările ulterioare din această lucrare.

În continuare ne propunem să aplicăm cele de mai sus la studiul scurgerii supersonice în jurul sistemului aripă-fuzelaj avînd o formă gene-

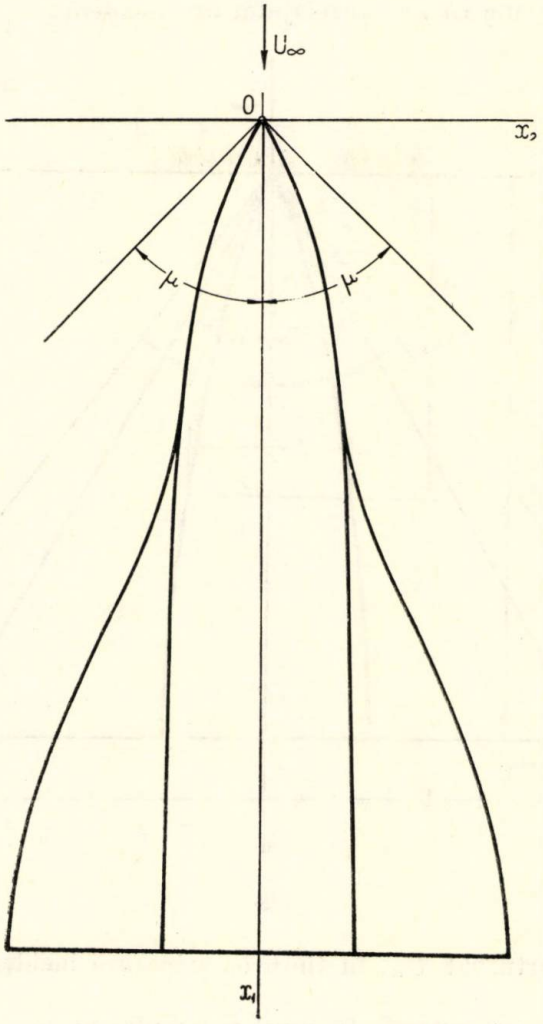


Fig. 1

rală ca cea indicată în figura 1, aşa cum am procedat într-o lucrare anterioară pentru cazul aripii delta cu bordurile de atac curbe [12]. Cum însă tratarea în forma aceasta generală prezintă anumite dificultăţi de calcul, vom căuta să abordăm succesiv în lucrări viitoare diferitele forme speciale care se lasă mai uşor tratate. În această lucrare vom considera numai cazul special al sistemului format dintr-un fuzelaj cvasiconic alungit şi o aripă delta.

2. SISTEMUL FORMAT DIN ARIPĂ DELTA ŞI FUZELAJ ALUNGIT

Pentru ilustrarea metodei expuse mai sus, să considerăm sistemul portant din figura 2 format dintr-o aripă delta subţire şi un fuzelaj alungit. Vom presupune că axa fuzelajului are incidenţa α_0 faţă de direcţia

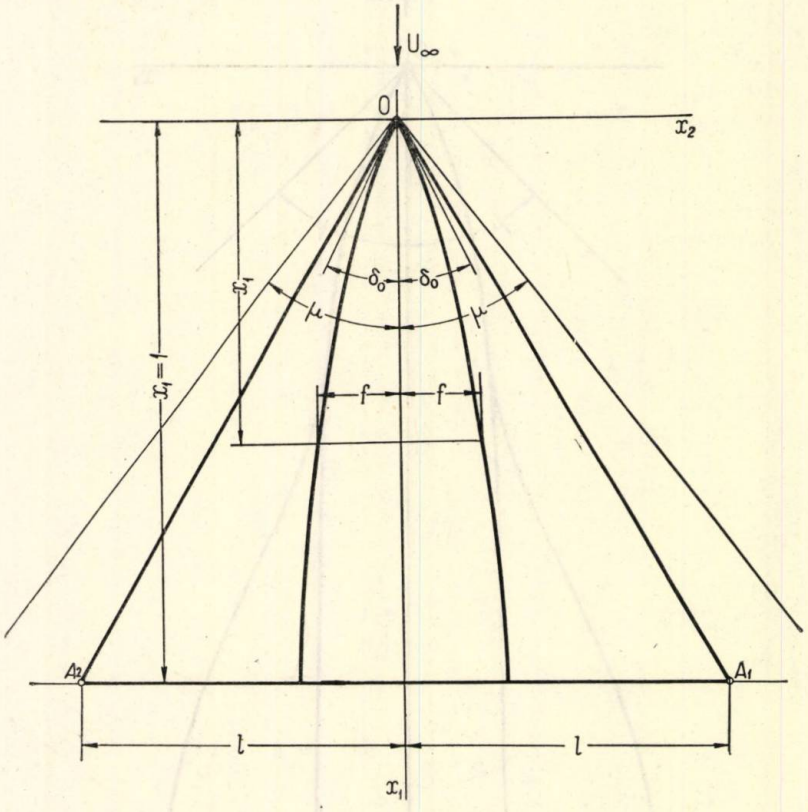


Fig. 2

curentului neperturbat U_∞, în timp ce aripa are incidenţa α diferită în general de α_0.

Din scurgerea generală în jurul sistemului portant considerat, vom putea separa, în cadrul teoriei liniarizate, scurgerea axial-simetrică în jurul fuzelajului izolat fără incidenţă, care poate fi rezolvată prin diferitele metode clasice.

În cele ce urmează ne vom ocupa de mişcarea laterală care rezultă în urma acestei separări şi care ia în consideraţie numai efectul incidenţei aripii şi fuzelajului.

Pentru această mişcare, după cum am arătat mai sus, potenţialul cvasiconic poate fi determinat într-o secţiune oarecare $x_1 = \text{const}$, procedînd în acelaşi mod ca şi pentru potenţialul conic.

Pentru a ușura expunerea vom utiliza la abordarea problemei coordonatele ξ_1, y, z, definite prin relațiile (6), în care însă vom reveni la variabila x_1 în loc de ξ_1.

Să considerăm acum că raza f a fuzelajului din figura 2 este dată de relația

$$f = x_1 c(x_1) \quad , \quad \left(c = \frac{f}{x_1} = c(x_1)\right), \tag{14}$$

unde $c(x_1)$ care va fi notat simplu cu c, este o funcție de x_1, avînd însă o variație lentă în raport cu x_1. Astfel, de exemplu, dacă considerăm un fuzelaj de formă parabolică, funcția $c(x_1)$ va fi de forma

$$c = c_0(1 - \nu x_1) \quad , \quad (c_0 = \operatorname{tg} \delta_0) \tag{15}$$

unde c_0 reprezintă tangenta semiunghiului δ_0 care definește deschiderea conului tangent la fuzelaj în vîrful acestuia (fig. 2), iar ν un coeficient convenabil ales pentru a reda forma fuzelajului utilizat în aviația supersonică.

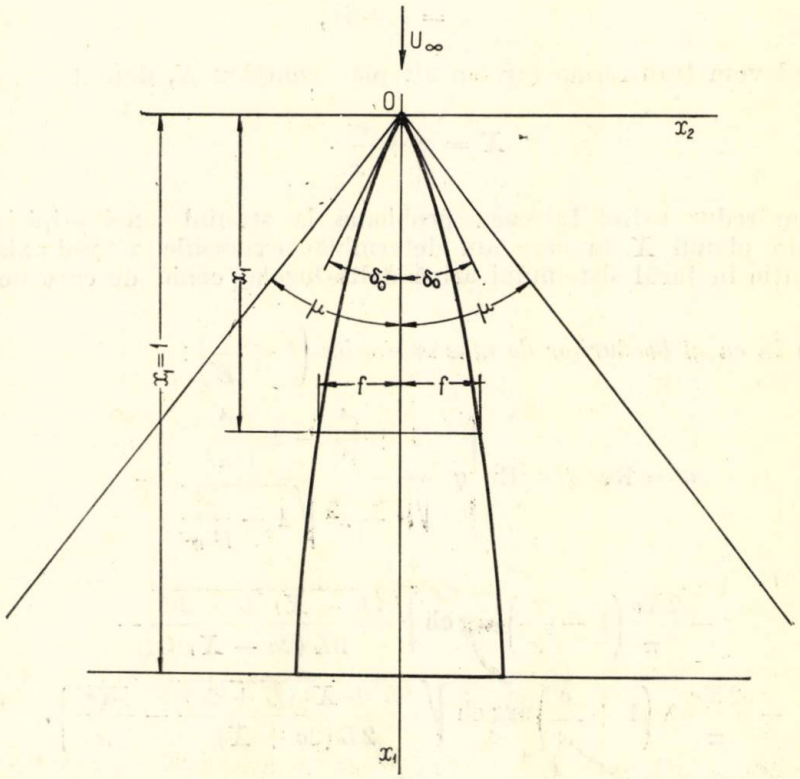


Fig. 3

În conformitate cu aproximațiile admise, vom considera că mișcarea cvasiconică din planul $x_1 = \text{const}$ este echivalentă cu o mișcare conică din vîrful O referitoare la secțiunea sistemului considerat din acest plan.

Determinarea potențialului conic. După cum se poate ușor arăta, potențialul scurgerii conice în jurul sistemului aripă-fuzelaj poate fi pus, aplicînd teorema lui *Euler* pentru funcții omogene de ordinul unu, sub forma

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = x_1(u + yv + zw). \quad (16)$$

În lucrările noastre anterioare [10], [11] am determinat expresia vitezei axiale de perturbație pe sistemul aripă-fuzelaj conic.

În acest sens am utilizat transformarea geometrică, analogă transformării lui Busemann,

$$\eta = \frac{y}{1 - B^2 z^2},\quad \zeta = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2 z^2}, \quad (17)$$

definind un plan auxiliar complex x,

$$x = \eta + i\zeta, \quad (18)$$

pe care-l vom transforma într-un alt plan complex X, definit de relația

$$X = x + \frac{c^2}{x}. \quad (19)$$

Am redus astfel întreaga problemă la studiul unei aripi izolate fictive în planul X, în care am determinat expresiile vitezei axiale de perturbație în jurul sistemului aripă delta-fuzelaj conic de care ne ocupăm :

a) *în cazul bordurilor de atac subsonice* $\left(l < \frac{1}{B}\right)$:

$$u = \operatorname{Re}\mathcal{U} = \operatorname{Re}\left\{q\,\frac{1 + \frac{c^4}{l^4} - 2\frac{c^4}{l^2 x^2}}{\sqrt{l^2 - x^2}\sqrt{1 - \frac{c^4}{l^2 x^2}}} - \right.$$

$$- \frac{2Kc}{\pi}\left(1 - \frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L - X)(L + 2c)}{2L(2c - X)}} -$$

$$\left. - \frac{2Kc}{\pi}\lambda\left(1 + \frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L + X)(L + 2c)}{2L(2c + X)}} - \frac{iKc^2}{x}\right\}, \quad (20)$$

unde am utilizat atît x, cît și X pentru simplificare și unde am notat

$$L = l + \frac{c^2}{l}, \quad (21)$$

l reprezentînd semianvergura aripii în secţiunea $x_1 = 1$. Constantele K şi q, pentru $\frac{c}{l} \leqslant 0{,}95$ au următoarele valori [10], [11]:

$$K = \frac{(\alpha - \alpha_0)\, U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 c^2}}, \tag{22}$$

$$q = \frac{\alpha U_\infty l^2}{E(k)} \cdot \frac{1 - \left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha}\right)\Lambda}{1 - B^2 c^2 \frac{c^2}{l^2}\left[1 - \frac{K(k)}{2E(k)} - \frac{1}{3}\frac{c^2}{l^2}\left(\frac{1}{8}\frac{c^2}{l^2} - B^2 c^2\right)\right]}, \tag{22'}$$

unde

$$\Lambda = \frac{2}{\pi} \frac{\frac{c}{l}}{\sqrt{1 - B^2 c^2}}\left(1 - \frac{c^2}{l^2}\right)\left\{\left[1 + \frac{1}{3}\frac{c^4}{l^4}\left(1 - \frac{1}{2} B^2 l^2\right) + \right.\right.$$

$$+ \frac{1}{5}\frac{c^8}{l^8}\left(1 - \frac{3}{40} B^2 l^2 - \frac{B^4 l^4}{20}\right)\Big] E(k) - B^2 l^2 \left[1 + \frac{1}{6}\frac{c^4}{l^4} + \right. \tag{23}$$

$$\left. + \frac{1}{10}\frac{c^8}{l^8}\left(1 - \frac{5}{4} B^2 l^2\right)\right] K(k) + \frac{1}{2\sqrt{1 - B^2 c^2}} \frac{c^2}{l^2}\left[\sqrt{1 - B^2 l^2} - \right.$$

$$\left. - B^2 l^2 \operatorname{arg\,ch} \frac{1}{Bl}\right],$$

$$k = \sqrt{1 - B^2 l^2}, \tag{23'}$$

şi unde $K(k)$ şi $E(k)$ sînt integralele eliptice complete de speţa întîi şi a doua, avînd modulul k;

b) *în cazul bordurilor de atac supersonice* $\left(l > \frac{1}{B}\right)$:

$$u = \operatorname{Re} \mathcal{U} = \operatorname{Re}\left\{\frac{2Q}{\pi}\left(l - \frac{c^2}{x}\right) \arccos \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L - X)}} + \right.$$

$$+ \frac{2Q}{\pi}\left(l + \frac{c^2}{x}\right) \arccos \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L + X)}} +$$

$$+ \frac{2Qc^2}{\pi x} \arccos \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}^2 X^2)(L^2 - 4c^2)}{(L^2 - X^2)(1 - 4\mathcal{B}^2 c^2)}} -$$

$$- \frac{2Kc}{\pi}\left(1 - \frac{c}{x}\right) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}X)(1 + 2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c - X)}} -$$

$$\left. - \frac{2Kc}{\pi x}\left(1 + \frac{c}{x}\right) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X)(1 + 2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c + X)}} - \frac{\mathrm{i}Kc^2}{x}\right., \tag{24}$$

unde

$$\frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1 + B^2 c^2}{B}, \quad Q = \frac{\alpha U_\infty}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}, \quad K = \frac{(\alpha - \alpha_0) U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 c^2}}. \tag{25}$$

Vitezele de perturbaţie au fost exprimate în planul x sau X ca partea reală a unor funcţii complexe,

$$u = \operatorname{Re} \mathcal{U}, \quad v = \operatorname{Re} \mathcal{V}, \quad w = \operatorname{Re} \mathcal{W}, \tag{26}$$

între care există relaţiile de compatibilitate

$$\mathrm{d}\mathcal{U} = - x \mathrm{d}\mathcal{V} = \frac{\mathrm{i} x \, \mathrm{d}\mathcal{W}}{\sqrt{1 - B^2 x^2}}. \tag{27}$$

Remarcînd acum că, pentru punctele din apropierea fuzelajului, valoarea radicalului poate fi luată egală aproximativ cu unitatea, vom putea scrie

$$\mathcal{W} = \mathrm{i}\mathcal{V} + \text{const}, \tag{28}$$

de unde rezultă pentru w, care intră în (16), relaţia

$$w = - (\alpha_0 U_\infty + \operatorname{Im} \mathcal{V}), \tag{29}$$

care este valabilă pe aripă şi pe fuzelaj.

Vom exprima mai departe potenţialul mişcării conice, dat de (16), sub forma

$$\frac{1}{x_1} \Phi (x_1, x_2, x_3) = \operatorname{Re} (\mathcal{U} + x\mathcal{V}) - z\alpha_0 U_\infty = \operatorname{Re} \mathcal{F}(x) - z\alpha_0 U_\infty, \tag{30}$$

unde, ca şi în lucrările noastre anterioare [10], [11], $\mathcal{F}(x)$ reprezintă potenţialul complex al mişcării din planul x în jurul sistemului considerat, dat de relaţia

$$\mathcal{F} = \mathcal{U} + x\mathcal{V} = x \int \mathcal{U} \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right), \tag{31}$$

care se obţine uşor, ţinînd seama de (27) şi va avea următoarele expresii :

a) *în cazul bordurilor de atac subsonice* $\left(l < \frac{1}{B}\right)$:

$$\mathcal{F} = \frac{q}{l^2} \sqrt{L^2 - X^2} - \frac{K}{\pi} \left[(2c - X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(L - X)(L + 2c)}{2L(2c - X)}} + \right.$$
$$\left. + (2c + X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(L + X)(L + 2c)}{2L(2c + X)}} \right] + \frac{\mathrm{i}K}{2} \sqrt{X^2 - 4c^2}; \tag{32}$$

b) *în cazul bordurilor de atac supersonice* $\left(l > \frac{1}{B}\right)$:

$$\mathcal{F} = \frac{Q}{\pi}(2l - X)\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L-X)}} + \frac{Q}{\pi}(2l+X)\arccos\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L+X)}} - \frac{Q}{\pi}\sqrt{X^2-4c^2}\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}^2X^2)(L^2-4c^2)}{(L^2-X^2)(1-4\mathcal{B}^2c^2)}} - \frac{K}{\pi}(2c-X)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c-X)}} - \frac{K}{\pi}(2c+X)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c+X)}} + \frac{iK}{2}\sqrt{X^2-4c^2}. \tag{33}$$

Determinarea vitezei axiale de perturbație pentru sistemul aripă-fuzelaj alungit. Pornind de la expresiile deduse mai sus pentru potențialul mișcării în planul $x_1 = \text{const}$ și ținînd seama că în cazul fuzelajului alungit raza c este acum o funcție de x_1(14), vom putea deduce, printr-o simplă derivare a potențialului în raport cu x_1, viteza axială de perturbație u^* din mișcarea cvasiconică:

$$u^* = \frac{\partial\Phi^*}{\partial x_1} = \operatorname{Re}\left[\mathcal{U} + x_1\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x_1}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial c}\right], \tag{34}$$

unde $\mathcal{U}$ reprezintă funcția vitezei axiale dedusă mai sus pentru mișcarea conică și are expresiile (20) și (24), în care de asemenea acum c este o funcție de x_1.

Utilizînd expresiile (20), (24), (32), (33), în care constantele care intervin sînt deja determinate, vom obține pentru viteza axială de perturbație în jurul sistemului cvasiconic considerat următoarele expresii:

a) *în cazul bordurilor de atac subsonice* $\left(l < \frac{1}{B}\right)$:

$$u^* = \operatorname{Re}\left\{ q\frac{1+\frac{c^4}{l^4}-2\frac{c^4}{l^2x^2}}{\sqrt{l^2-x^2}\sqrt{1-\frac{c^4}{l^2x^2}}} - \frac{2Kc}{\pi}\left(1-\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L-X)(L+2c)}{2L(2c-X)}} - \frac{2Kc}{\pi}\left(1+\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L+X)(L+2c)}{2L(2c+X)}} - \frac{iKc^2}{x} + x_1\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x_1}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial c}\right\}, \tag{35}$$

unde

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c} = -\frac{q}{l^2}\sqrt{\frac{l^2-x^2}{1-\frac{c^4}{l^2x^2}}}\left[\frac{2c^3}{l^2x^2} - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial c}\left(1-\frac{c^4}{l^2x^2}\right)\right] -$$

$$-\frac{K}{\pi}\left[\frac{2-B^2cx\left(1+\frac{c}{x}\right)}{1-B^2c^2}\left(1-\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L-X)(L+2c)}{2L(2c-X)}} + \right.$$

$$+\frac{2+B^2cx\left(1-\frac{c}{x}\right)}{1-B^2c^2}\left(1+\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L+X)(L+2c)}{2L(2c+X)}} - \tag{36}$$

$$\left. -2\frac{\sqrt{(l^2-x^2)\left(1-\frac{c^4}{l^2x^2}\right)}}{l\left(1+\frac{c^2}{l^2}\right)} + \frac{c}{2x}\frac{2-B^2(x^2+c^2)}{1-B^2c^2}\right],$$

în care $\dfrac{\partial q}{\partial c}$ se obține ușor prin derivarea expresiei (22′);

b) *în cazul bordurilor de atac supersonice* $\left(l > \dfrac{1}{B}\right)$:

$$u^* = \operatorname{Re}\left\{\frac{2Q}{\pi}\left(l-\frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L-X)}} + \right.$$

$$+\frac{2Q}{\pi}\left(l+\frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L+X)}} +$$

$$+\frac{2Qc^2}{\pi x}\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}^2X^2)(L^2-4c^2)}{(L^2-X^2)(1-4\mathcal{B}^2c^2)}} -$$

$$-\frac{2Kc}{\pi}\left(1-\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c-X)}} - \tag{37}$$

$$-\frac{2Kc}{\pi}\left(1+\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2B(2c+X)}} -$$

$$\left. -\frac{\mathrm{i}Kc^2}{x} + x_1\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x_1}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c}\right\},$$

unde

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c} = -\frac{2Q}{\pi}\left\{\frac{c}{x}\left[\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L-X)}} - \right.\right.$$

$$-\arccos\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L+X)}} - \arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}^2X^2)(L^2-4c^2)}{(L^2-X^2)(1-4\mathcal{B}^2c^2}}\left.\right] -$$

$$\left.-\frac{2c}{L}\,\frac{B^2c^2}{1-B^4c^4}\sqrt{\frac{B^2l^2-1}{1-\frac{B^2c^4}{l^2}}}\sqrt{(1-B^2x^2)\left(1-\frac{B^2c^4}{x^2}\right)}\right\} -$$

$$-\frac{K}{\pi}\left\{\frac{2-B^2cx\left(1+\frac{c}{x}\right)}{1-B^2c^2}\left(1-\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c-X)}} + \right. \tag{38}$$

$$+\frac{2+B^2cx\left(1-\frac{c}{x}\right)}{1-B^2c^2}\left(1+\frac{c}{x}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2B(2c+X)}} -$$

$$\left.-2\,\frac{\sqrt{(1-B^2x^2)\left(1-\frac{B^2c^4}{x^2}\right)}}{1+B^2c^2} + \frac{ic}{2x}\,\frac{2-B^2(x^2+c^2)}{1-B^2c^2}\right\}.$$

La extragerea părţii reale din aceste relaţii vom ţine seama că pe fuzelaj şi pe aripă avem, respectiv,

$$x = c\,e^{i\theta} \quad , \qquad \operatorname{Re} x = y \tag{39}$$

Dacă fuzelajul are o formă parabolică definită prin relaţia (15), atunci în (35) şi (37) va trebui să introducem

$$x_1\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x_1} = -\nu x_1 . \tag{40}$$

3. CAZUL FUZELAJULUI ALUNGIT IZOLAT

Un caz particular interesant, mai ales prin aceea că se obţine o soluţie simplă dedusă din expresia generală, îl constituie fuzelajul izolat avînd o formă alungită definită prin relaţia (14), a cărui axă să presupunem că are incidenţa α faţă de direcţia curentului neperturbat U_∞.

Urmînd aceeaşi cale ca mai sus, va trebui în primul rînd să determinăm potenţialul din mişcarea conică în jurul conului izolat cu vîrful în O şi avînd ca directrice secţiunea din planul $x_1 = \text{const}$.

Expresiile vitezei axiale de perturbaţie şi a potenţialului în cazul scurgerii în jurul conului izolat a cărui axă are incidenţa α faţă de direcţia

curentului neperturbat U_∞ se obţin cu uşurinţă din relaţiile (20) şi (32), făcînd $\alpha_0 = \alpha$ şi $l = c$. Procedînd în acest mod se obţin respectiv relaţiile

$$u = \operatorname{Re} \mathcal{U} = \operatorname{Re} \mathrm{i}A \frac{c^2}{x^2} = -2A\, c \sin\theta, \tag{41}$$

$$\mathcal{F} = -\frac{\mathrm{i}A}{2}\left(x - \frac{c^2}{x}\right). \tag{41'}$$

Constanta A se determină din relaţiile (27) şi din condiţiile la limită pe fuzelaj :

$$\operatorname{Re}\int_{\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}c} \frac{\sqrt{1 - B^2x^2}}{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}\mathcal{U} = -\alpha U_\infty. \tag{42}$$

Efectuînd calculele, vom obţine pentru A expresia

$$A = \frac{2\alpha U_\infty}{\sqrt{1 + B^2c^2} + B^2c^2 \operatorname{arg\,sh}\dfrac{1}{Bc}}. \tag{43}$$

Revenind acum la cazul fuzelajului izolat de formă cvasiconică, vom obţine următoarea expresie pentru viteza axială de perturbaţie

$$u^* = Ac\left[1 + \frac{x_1}{c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x_1}\left(1 + \frac{c}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}c}\right)\right]\sin\theta, \tag{44}$$

unde constanta A este dată de expresia (43), în care însă c este acum funcţie de x_1 şi unde deci

$$\frac{c}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}c} = -2\left[1 - \frac{\sqrt{1 + B^2c^2}}{\sqrt{1 + B^2c^2} + B^2c^2 \operatorname{arg\,sh}\dfrac{1}{Bc}}\right]. \tag{45}$$

Dacă considerăm pentru fuzelaj o formă parabolică definită prin relaţia (15), vom obţine pentru viteza axială de perturbaţie expresia

$$u^* = Ac\left[1 - \frac{\nu x_1}{1 - \nu x_1}\left(1 + \frac{c}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}c}\right)\right]\sin\theta. \tag{46}$$

În acest mod, metoda stabilită pentru studiul sistemului aripă-fuzelaj în mişcarea cvasiconică a fost particularizată cu uşurinţă la studiul fuzelajului alungit izolat, obţinîndu-se o expresie simplă pentru viteza axială de perturbaţie. De altfel, rezultatele obţinute pentru acest caz particular sînt în bună concordanţă cu cele obţinute prin metodele clasice elaborate pentru studiul corpurilor de revoluţie în regim supersonic, ca de exemplu metoda surselor.

Primită la redacţie la 23 ianuarie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*, Bucureşti, Editura tehnică, 1956.
2. M. M. Munk, *Elements of the wing section theory and of the wing theory*, NACA Report 191, 1924.
3. R. T. Jones, *Properties of low-aspect-ratio pointed wings at speeds below and above the speed of sound*, NACA Technical Note 1032, 1946. De asemenea NACA Report 835, 1946.
4. G. N. Ward, *Supersonic flow past slender pointed bodies*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., *2*, 75—97 (1949).
5. M. A. Heaslet, H. Lomax, J. R. Spreiter, *Linearized compressible flow theory for sonic flight speeds*, NACA Report 956, 1950.
6. J. R. Spreiter, *The aerodynamic forces on slender plane-and cruciform- wing and body combinations*, NACA Report 962, 1950.
7. M. A. Heaslet, H. Lomax, *The calculation of pressure on slender airplane in subsonic and supersonic flow*, NACA Technical Note 2900, 1953.
8. W. R. Sears (editor), *General Theory of High Speed*, Princeton University Press, New Jersey, 1954.
9. E. Carafoli, D. Mateescu, *Mouvement oscillatoire harmonique du système aile-fuselage conique en régime supersonique*, Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée, *2* (1960).
12. E. Carafoli, *Sur la théorie des ailes à bords d'attaque courbes en courant supersonique*, L'Aerotecnica, *3* (1966), Associazione Italiana di Aerotecnica, Roma.

UNELE ASPECTE ALE SCURGERII LICHIDELOR COMPRESIBILE PRIN MEDII POROASE

de TEODOR OROVEANU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

532

Lucrarea are ca scop studiul scurgerii unui lichid compresibil printr-un mediu poros cu permeabilitatea şi porozitatea variabile. Condiţiile iniţiale şi la limită considerate conduc la patru cazuri particulare. Utilizarea metodei separării variabilelor revine de fiecare dată la rezolvarea unei probleme Sturm-Liouville. În acest scop se întrebuinţează un procedeu aproximativ care constă în aplicarea metodei WKB puţin modificată, ceea ce permite determinarea valorilor proprii cu o precizie mai mare. Comparaţia cu unele soluţii exacte cunoscute arată că procedeul utilizat conduce la rezultate foarte satisfăcătoare.

1. *Introducere.* Studiul scurgerii lichidelor compresibile prin medii poroase neomogene cu permeabilitatea şi porozitatea funcţii de punct întîmpină dificultăţi matematice foarte mari atunci cînd se urmăreşte găsirea unor soluţii exacte cu caracter general. Situaţia devine mai complicată datorită faptului că între variaţia permeabilităţii şi aceea a porozităţii nu există nici o legătură

Din acest motiv, cei care au cercetat pînă în prezent problema au căutat soluţii exacte în anumite cazuri particulare, corespunzătoare la legi date de variaţia permeabilităţii. Astfel, Z. B. Heirov şi G. P. Guseinov [4] au considerat cazul în care scurgerea este unidimensională, iar legea de variaţie a permeabilităţii este de forma unui binom la o putere oarecare. G. B. Golubev [2] a studiat, la rîndul său, cazul în care rădăcina pătrată a permeabilităţii este o funcţie armonică. Tot Z. B. Heirov [5] s-a ocupat de scurgerea unidimensională în ipoteza că permeabilitatea variază după o lege exponenţială. Mai recent, I. A. Nasrullaev [8] a reluat problema studiată anterior de Z. B. Heirov şi G. P. Guseinov.

Publicată şi în Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. appl. (în limba franceză), **12**, *3* (1967).

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 25 NR. 3 P. 669–688 BUCUREŞTI 1967

La rîndul său, A. Houpeurt [6] a studiat posibilitatea de a găsi soluţii exacte prin separarea variabilelor în cazul scurgerii unidimensionale; atunci atît permeabilitatea, cît şi porozitatea sînt funcţii de variabilă spaţială. Concluziile în ceea ce priveşte posibilităţile de rezolvare pe această cale nu sînt încurajatoare, deoarece se ajunge sau la necesitatea de a se rezolva o ecuaţie diferenţială neliniară de ordinul trei, sau la aceea de a se impune o relaţie între permeabilitate şi porozitate.

Cu mai mult timp în urmă am dat o soluţie aproximativă pentru scurgerea plan-radială în ipoteza că permeabilitatea şi porozitatea sînt puţin variabile, astfel ca să fie posibilă utilizarea unor aproximaţii [9].

În cele ce urmează ne vom mărgini la cazul scurgerii liniare, admiţînd că presiunea satisface ecuaţia diferenţială

$$k\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}+\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x_1}\frac{\partial p}{\partial x_1}=\beta_l\,\mu\,m\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{1}$$

m şi k fiind de asemenea funcţii numai de variabila x_1.

Pentru această ecuaţie vom considera cîteva probleme, pe care vom căuta să le rezolvăm fără a impune de la început anumite legi particulare de variaţie a porozităţii sau permeabilităţii.

2. *Alimentare cu presiune constantă la distanţă finită.* Să considerăm un mediu poros de lungime l care se află în momentul iniţial ($t = 0$) în echilibru la presiunea constantă p_c.

Vom admite că la $x_1 = l$ presiunea rămîne egală cu p_c pentru orice $t > 0$, iar la $x_1 = 0$ putem avea două situaţii, şi anume fie o presiune constantă p_s ($p_s < p_c$), fie un debit constant Q_s. Ajungem în felul acesta la două probleme pe care le vom nota sintetic $p_c - p_s$ şi $p_c - Q_s$, utilizînd terminologia introdusă de A. Houpeurt [7] în studiul problemelor similare pentru scurgerea prin medii poroase omogene.

Problema $p_c - p_s$. Din cele ce precedă rezultă că această problemă revine la găsirea soluţiei ecuaţiei (1), care satisface condiţia iniţială

$$t = 0,\ p = p_c \tag{2}$$

şi condiţiile la limită

$$x_1 = 0,\ p = p_s;\ x_1 = l,\ p = p_c. \tag{3}$$

Presiunile p_c şi p_s fiind constante, putem introduce funcţia

$$\overline{p}=\frac{p-p_s}{p_c-p_s}, \tag{4}$$

care este soluţia unei ecuaţii de aceeaşi formă cu (1), şi anume

$$k\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial x_1^2}+\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x_1}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1}=\beta_l\,\mu\,m\frac{\partial \overline{p}}{\partial t}. \tag{5}$$

Pentru funcţia $\overline{p}$, condiţia iniţială este

$$t = 0,\ \overline{p} = 1, \tag{6}$$

în timp ce condiţiile la limită iau forma

$$x_1 = 0,\ \overline{p} = 0;\ x_1 = l,\ \overline{p} = 1. \tag{7}$$

Mai departe introducem funcţia

$$\varpi = \overline{p} - \frac{1}{I_0}\int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}x_1}{k}, \tag{8}$$

unde

$$I_0 = \int_0^l \frac{\mathrm{d}x_1}{k}. \tag{9}$$

Deoarece

$$\overline{p}^{(0)} = \frac{1}{I_0}\int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}x_1}{k} \tag{10}$$

este o soluţie a ecuaţiei (5), funcţia $\varpi(x_1, t)$ satisface aceeaşi ecuaţie, şi anume

$$k\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x_1^2} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x_1}\frac{\partial \varpi}{\partial x_1} = \beta_l\, \mu\, m \frac{\partial \varpi}{\partial t}, \tag{11}$$

cu condiţia iniţială

$$t = 0,\ \varpi = 1 - \frac{1}{I_0}\int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}x_1}{k} \tag{12}$$

şi condiţiile la limită

$$x_1 = 0,\ \varpi = 0\ \ x_1 = l,\ \varpi = 0. \tag{13}$$

Pentru soluţiile sub formă de produs

$$\varpi_n = T_n(t)\, X_{1n}(x_1), \tag{14}$$

separarea variabilelor în (11) conduce la ecuaţiile

$$\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha_n}{\beta_l \mu} T_n = 0 \tag{15}$$

şi

$$k\frac{\mathrm{d}^2 X_{1n}}{\mathrm{d}x_1^2} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x_1}\frac{\mathrm{d}X_{1n}}{\mathrm{d}x_1} + \alpha_n m\, X_{1n} = 0, \tag{16}$$

α_n fiind constanta de separare.

Prima dintre aceste ecuaţii se rezolvă cu uşurinţă şi are soluţia

$$T_n = C_n\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_n}{\beta_l \mu} t}, \tag{17}$$

C_n fiind o constantă arbitrară.

Pentru a doua ecuaţie, care se mai poate scrie sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}\left(k\frac{\mathrm{d}X_{1n}}{\mathrm{d}x_1}\right) + \alpha_n m\, X_{1n} = 0, \tag{18}$$

condițiile la limită sînt

$$x_1 = 0,\ X_{1n} = 0;\ x_1 = l,\ X_{1n} = 0 \tag{19}$$

și ne găsim, prin urmare, în fața unui caz particular al problemei Sturm-Liouville.

Pentru a găsi pe o cale simplă funcțiile proprii și valorile proprii corespunzătoare, vom utiliza un procedeu aproximativ [3] pe care l-am aplicat și în studiul altor probleme [10].

Astfel, dacă în (18) facem schimbarea de funcție și de variabilă

$$H_n = k^{\frac{1}{2}} X_{1n}, \qquad \zeta_1 = \frac{x_1}{l}, \tag{20}$$

această ecuație devine

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_n}{\mathrm{d}\zeta_1^2} + \left(\alpha_n l^2 \frac{m}{k} - \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{d}^2 k^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}\zeta_1^2}\right) H_n = 0, \tag{21}$$

cu condițiile la limită

$$\zeta_1 = 0,\ H_n = 0;\ \zeta_1 = 1,\ H_n = 0. \tag{22}$$

Deoarece funcțiile $k(\zeta_1)$ și $m(\zeta_1)$ sînt pozitive în $[0, 1]$, putem pune

$$\frac{m}{k} = \beta^2(\zeta_1). \tag{23}$$

Dacă mai introducem notațiile

$$\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{d}^2 k^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}\zeta_1^2} = \gamma(\zeta_1) \tag{24}$$

și

$$\varkappa_n^2 = \alpha_n l^2, \tag{25}$$

ecuația (21) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_n}{\mathrm{d}\zeta_1^2} + (\varkappa_n^2 \beta^2 - \gamma) H_n = 0. \tag{26}$$

În această ecuație facem schimbarea de funcție

$$H_n = \mathrm{e}^{\int_0^{\zeta_1} v(\zeta_1)\,\mathrm{d}\zeta_1}, \tag{27}$$

care ne dă

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta_1} + v^2 + \varkappa_n^2 \beta^2 - \gamma = 0, \tag{28}$$

ecuație de tip Riccati. Procedeul aproximativ de determinare a valorilor proprii pe care îl vom utiliza se bazează pe aplicarea metodei Wentzel-

Brillouin-Kramers (prescurtat WKB), în care schimbarea de funcţie este

$$H = \mathrm{e}^{\varkappa_n \int_0^{\zeta} u\,(\zeta_1)\,\mathrm{d}\zeta_1} \tag{29}$$

şi conduce la ecuaţia

$$\varkappa_n \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta_1} + \varkappa_n^2 u^2 + \varkappa_n^2 \beta^2 - \gamma = 0, \tag{30}$$

tot de tipul Riccati. Pentru această ecuaţie se consideră soluţia formală

$$u = \sum_{s=0}^{\infty} \varkappa_n^{-s} u_s (\zeta_1) \tag{31}$$

şi, după înlocuirea în (30) şi egalarea cu zero a coeficienţilor acelorași puteri ale lui $\varkappa_n$ rezultă

$$u_0 = \pm \beta, \; u_1 = -\frac{u_0'}{2u_0}, \; u_2 = \frac{\gamma - u_1' - u_1^2}{2u_0} \tag{32}$$

şi în general

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2u_0}\left(u_n' + \sum_{r=1}^{n} u_r\, u_{n+1-r}\right), \tag{33}$$

cu $n \geqslant 2$.

Dacă ne limităm la a doua aproximaţie ($n = 1$) şi ţinem seama de relaţia evidentă dintre funcţiile $u(\zeta_1)$ şi $v(\zeta_1)$, găsim

$$v = \pm \mathrm{i}\,\varkappa_n \beta - \frac{1}{2\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\zeta_1} = \pm \mathrm{i}\,\varkappa_n \beta - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,(\ln \beta)}{\mathrm{d}\zeta_1}, \tag{34}$$

ceea ce ne dă

$$H_n = A_n \beta^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\,\varkappa_n \int_0^{\zeta_1} \beta\,\mathrm{d}\zeta_1}, \tag{35}$$

A_n fiind o constantă arbitrară.

Pentru a satisface prima condiţie la limită (22), vom considera soluţia

$$H_n = A_n \beta^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\varkappa_n \int_0^{\zeta_1} \beta \mathrm{d}\zeta_1\right). \tag{36}$$

A doua condiţie la limită ne permite să calculăm valorile proprii care rezultă din relaţia

$$\sin\left(\varkappa_n \int_0^1 \beta \mathrm{d}\,\zeta_1\right) = 0, \tag{37}$$

respectiv

$$\varkappa_n = \frac{(n+1)\,\pi}{\int_0^1 \beta \,\mathrm{d}\,\zeta_1}. \tag{38}$$

Dacă revenim la ecuaţia (18), avem deci

$$X_{1n} = A_n\,(km)^{-\frac{1}{4}} \sin\left[\frac{(n+1)\,\pi}{\int_0^l \beta\,\mathrm{d}x_1}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right] \tag{39}$$

şi

$$\alpha_n = \frac{(n+1)^2\,\pi^2}{\left(\int_0^l \sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right)^2}. \tag{40}$$

Aşadar, soluţia aproximativă a ecuaţiei (11) este

$$\varpi = (km)^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_n}{\beta_l \mu}\, t} \sin\left[\frac{(n+1)\,\pi}{\int_0^l \sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right] \tag{41}$$

şi satisface condiţiile la limită (13). Determinarea constantelor D_n se face impunînd soluţiei (41) să satisfacă şi condiţia iniţială (12). Punînd $t = 0$ în (41), obţinem deci

$$(km)^{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{1}{I_0}\int_0^{x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left[\frac{(n+1)\,\pi}{\int_0^l \sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right] \tag{42}$$

şi dacă dezvoltăm în serie Fourier primul membru al acestei relaţii, găsim prin identificare coeficienţii D_n. Calculul se efectuează mai uşor dacă utilizăm schimbarea de variabilă

$$\xi = \frac{1}{I}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1, \quad I = \frac{1}{\pi}\int_0^l \sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1, \tag{43}$$

care ne dă

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left[\frac{(n+1)\,\pi}{\int_0^l \sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right] = \sum_{q=1}^{\infty} D_q \sin q\,\xi, \tag{44}$$

cu $q = n + 1$, aşa cum se poate constata imediat. Această schimbare de variabilă trebuie făcută, bineînţeles, şi în primul membru al relaţiei (42).

Presupunînd că am determinat coeficienţii D_n, soluţia aproximativă a problemei propuse este

$$\overline{p} = \frac{1}{I_0}\int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}x_1}{k} + (km)^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_n}{\beta_l \mu} t} \sin\left[\frac{(n+1)\,\pi}{\int_0^l \sqrt{\frac{\overline{m}}{k}}\,\mathrm{d}x_1} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{\overline{m}}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right]. \quad (45)$$

Valorile proprii obţinute pot fi ameliorate dacă utilizăm, ca în [3], cîtul lui Rayleigh. Să considerăm astfel cea mai mică rădăcină a ecuaţiei (37), pe care o notăm cu $\varkappa_0^{(0)}$, şi funcţia (36) corespunzătoare notată cu $H_0^{(0)}$. Această funcţie nu este o soluţie exactă a ecuaţiei (26), respectiv (21), dar satisface riguros condiţiile la limită (22). Cîtul lui Rayleigh, care este funcţionala

$$-\frac{\int_0^1 H_0^{(0)} \left(\frac{\mathrm{d}^2 H_0^{(0)}}{\mathrm{d}\zeta_1^2} - \gamma H_0^{(0)}\right) \mathrm{d}\zeta_1}{\int_0^1 \beta^2 (H_0^{(0)})^2 \,\mathrm{d}\zeta_1}, \quad (46)$$

reprezintă o margine superioară pentru cea mai mică valoare proprie a ecuaţiei considerate. Deoarece $H_0^{(0)}$ conţine prima aproximaţie $\varkappa_0^{(0)}$ a acestei valori proprii, vom obţine deci o a doua aproximaţie, notată cu $\varkappa_0^{(1)}$ din expresia

$$(\varkappa_0^{(1)})^2 = \frac{\int_0^1 H_0^{(0)} \left(\frac{\mathrm{d}^2 H_0^{(0)}}{\mathrm{d}\zeta_1^2} - \gamma H_0^{(0)}\right) \mathrm{d}\zeta_1}{\int_0^1 \beta^2 (H_0^{(0)})\,\mathrm{d}\zeta_1}. \quad (47)$$

Dacă utilizăm expresia (36) pentru funcţia $H_0^{(0)}$ găsim după calcule simple

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_0^{(0)}}{\mathrm{d}\zeta_1^2} = A_0 \left[\beta^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^2 \beta^{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}\zeta_1^2} - (\varkappa_0^{(0)})^2 \beta^2\right] H_0^{(0)}, \quad (48)$$

astfel că (47) devine

$$(\varkappa_0^{(1)})^2 = (\varkappa_0^{(0)})^2 - \frac{\int_0^1 \left(\beta^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^2 \beta^{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}\zeta_1^2} - \gamma\right) (H_0^{(0)})^2 \,\mathrm{d}\zeta_1}{\int_0^1 \beta^2 (H_0^{(0)})^2 \,\mathrm{d}\zeta_1}. \quad (49)$$

Tot astfel dacă notăm cu $\varkappa_r^{(0)}$ ($r \neq 0$, întreg şi pozitiv) o rădăcină oarecare a ecuaţiei (37) şi cu $H_r^{(0)}$ funcţia (36) corespunzătoare, funcţionala

$$-\frac{\int_0^1 H_r^{(0)} \left(\frac{\mathrm{d}^2 H_r^{(0)}}{\mathrm{d}\zeta_1^2} - \gamma H_r^{(0)}\right) \mathrm{d}\zeta_1}{\int_0^1 \beta^2 (H_r^{(0)})^2 \,\mathrm{d}\zeta_1} \quad (50)$$

reprezintă o margine superioară pentru valoarea proprie de indice r, dacă funcţiile $H_0^{(0)}$, $H_1^{(0)}$, ..., $H_r^{(0)}$ satisfac condiţiile generalizate de ortogonalitate

$$\int_0^1 \beta^2 H_r^{(0)} H_0^{(0)} \, d\zeta_1 = \int_0^1 \beta^2 H_r^{(0)} H_1^{(0)} \, d\zeta_1 = \ldots = \int_0^1 \beta^2 H_r^{(0)} H_{r-1}^{(0)} \, d\zeta_1 = 0. \tag{51}$$

Se constată cu uşurinţă că aceste condiţii sînt satisfăcute de funcţiile (36) şi dacă repetăm calculul anterior, găsim

$$(\varkappa_r^{(1)})^2 = (\varkappa_r^{(0)})^2 - \frac{\int_0^1 \left(\beta^{\frac{1}{2}} \frac{d^2 \beta^{-\frac{1}{2}}}{d\zeta_1^2} - \gamma \right) (H_r^{(0)})^2 \, d\zeta_1}{\int_0^1 \beta^2 (H_0^{(0)})^2 d\zeta_1}. \tag{52}$$

În continuare vom da un exemplu pentru care luăm

$$m = m_0 \left(1 - \nu \frac{x_1}{l}\right)^{2\gamma_1}, \; k = k^{(0)} \left(1 - \nu \frac{x_1}{l}\right)^{\gamma_2}, \tag{53}$$

ν, γ_1 şi γ_2 fiind constante ($0 < \nu < 1$).

Ecuaţia (18) devine

$$\frac{d}{dx_1} \left[\left(1 - \nu \frac{x_1}{l}\right)^{\gamma_2} \frac{dX_{1n}}{dx_1} \right] + \alpha_n \frac{m_0}{k^{(0)}} \left(1 - \nu \frac{x_1}{l}\right)^{2\gamma_1} X_{1n} = 0 \tag{54}$$

şi admite o soluţie exactă [1]; pentru a putea face o comparaţie simplă ne vom limita la cazul particular în care avem

$$\gamma_2 = 2(\gamma_1 + 1). \tag{55}$$

Schimbarea de funcţie şi de variabilă (20) ia forma

$$H_n = (k^{(0)})^{\frac{1}{2}} (1 - \nu \zeta_1)^{\gamma_1 + 1} X_{1n}, \; \zeta_1 = \frac{x_1}{l} \tag{56}$$

şi conduce la ecuaţia

$$\frac{d^2 H_n}{d\zeta_1^2} + \left[\alpha_n l^2 \frac{m_0}{k^{(0)}} - \nu^2 \gamma_1 (\gamma_1 + 1) \right] (1 - \nu \zeta_1)^{-2} H_n = 0. \tag{57}$$

În continuare prin schimbarea de funcţie (27) ajungem la ecuaţia

$$\frac{dv}{d\zeta_1} + v^2 + \left[\alpha_n l^2 \frac{m_0}{k^{(0)}} - \nu^2 \gamma_1 (\gamma_1 + 1) \right] (1 - \nu \zeta_1)^2 = 0 \tag{58}$$

şi, aplicînd metoda WKB, obţinem

$$v = \pm i \varkappa_n \sqrt{\frac{m_0}{k^{(0)}}} (1 - \nu \zeta)^{-1} - \frac{\nu}{2} (1 - \nu \zeta)^{-1}. \tag{59}$$

Aşadar, funcţia H_n adecvată condiţiilor la limită este

$$H_n = - A_n \left(\frac{m_0}{k^{(0)}}\right)^{-\frac{1}{4}} (1 - \nu\zeta_1)^{\frac{1}{2}} \sin\left[\frac{\varkappa_n}{\nu}\sqrt{\frac{m_0}{k^{(0)}}}\ln(1 - \nu\zeta_1)\right], \quad (60)$$

cu

$$\varkappa_n = - \frac{\nu(n+1)\pi}{\sqrt{\frac{m_0}{k^{(0)}}}\ln(1-\nu)}, \quad (61)$$

ceea ce ne dă

$$H_n = A_n \left(\frac{m_0}{k^{(0)}}\right)^{-\frac{1}{4}} (1 - \nu\zeta_1)^{\frac{1}{2}} \sin\left[(n+1)\pi\frac{\ln(1-\nu\zeta_1)}{\ln(1-\nu)}\right]. \quad (62)$$

Dacă revenim la ecuaţia (18), avem deci

$$X_{1n} = A_n (k^{(0)} m_0)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \nu\frac{x_1}{l}\right)^{-\gamma_1 - \frac{1}{2}} \sin\left[(n+1)\,\pi\frac{\ln\left(1-\nu\frac{x_1}{l}\right)}{\ln(1-\nu)}\right] \quad (63)$$

şi

$$\alpha_n = \frac{\nu^2 (n+1)^2 \pi^2}{l^2 \frac{m_0}{k^{(0)}}\,[\ln(1-\nu)]^2}. \quad (64)$$

Soluţia exactă a ecuaţiei (54) care satisface condiţiile la limită (19) este

$$X_{1n} = - E_n \left(1 - \nu\frac{x_1}{l}\right)^{-\gamma_1 - \frac{1}{2}} \sin\left[s_n \ln\left(1 - \nu\frac{x_1}{l}\right)\right], \quad (65)$$

cu

$$s_n = \sqrt{\frac{m_0}{k^{(0)}}\frac{\alpha_n l^2}{\nu^2} - \left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad (66)$$

iar valorile proprii au expresia

$$\alpha_n = \frac{\nu^2 (n+1)^2 \pi^2}{l^2 \frac{m_0}{k^{(0)}}\,[\ln(1-\nu)]^2} + \frac{\nu^2}{l^2 \frac{m_0}{k^{(0)}}}\left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right). \quad (67)$$

Pentru un exemplu de calcul vom lua $\gamma_1 = -\frac{3}{2}$ şi $\nu = \frac{1}{4}$ ceea ce ne dă

$$m = m_0 \left(1 - \frac{x_1}{4l}\right)^{-3}, \quad k = k^{(0)} \left(1 - \frac{x_1}{4l}\right)^{-1}, \quad (68)$$

iar (63) devine

$$X_{1n} = A_n \left(k^{(0)} m_0\right)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x_1}{4l}\right) \sin\left[(n+1)\,\pi \frac{\ln\left(1 - \frac{x_1}{4l}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}\right]. \tag{69}$$

În acelaşi timp, avem din (64)

$$l^2 \frac{m_0}{k^{(0)}} \alpha_n = \frac{1}{16} \frac{(n+1)^2 \pi^2}{\left[\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2} \tag{70}$$

şi soluţia (45) se scrie

$$\overline{p} = \frac{8}{7} \frac{x_1}{l} \left(1 - \frac{x_1}{8l}\right) +$$

$$+ \left(k^{(0)} m_0\right)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x_1}{l}\right) \sum_{n=0}^{\infty} D_n \, e^{-\frac{\alpha_n}{\beta_l \mu} t} \sin\left[(n+1)\,\pi \frac{\ln\left(1 - \frac{x_1}{4l}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}\right]. \tag{71}$$

Pentru determinarea constantelor D_n procedăm aşa cum am indicat mai înainte. Din (43) rezultă

$$\xi_1 = \pi \frac{\ln\left(1 - \frac{x_1}{4l}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \tag{72}$$

şi, prin urmare,

$$\frac{x_1}{l} = 4\left[1 - e^{\frac{\xi_1}{\pi} \ln\left(\frac{3}{4}\right)}\right]. \tag{73}$$

Avem, de asemenea, după cîteva calcule simple

$$(km)^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{I_0} \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{k}\right) = \frac{\left(k^{(0)} m_0\right)^{\frac{1}{4}}}{7} \left[16\, e^{\frac{\xi_1}{\pi} \ln\left(\frac{3}{4}\right)} - 9\, e^{-\frac{\xi_1}{\pi} \ln\left(\frac{3}{4}\right)}\right], \tag{74}$$

după ce ţinem seama şi de (73). Funcţiile $\sin q\xi_1$ formînd un sistem ortogonal în intervalul $[0, \pi]$, putem dezvolta funcţia (74) în serie Fourier după acest sistem. Coeficienţii D_q din (44) au, prin urmare, expresia

$$D_q = 2 \left(k^{(0)} m_0\right)^{\frac{1}{4}} \frac{q\pi}{q^2\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2}, \tag{75}$$

de unde rezultă

$$D_n = 2\,(k^{(0)}\,m_0)^{\frac{1}{4}}\,\frac{(n+1)\,\pi}{(n+1)^2\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2} \tag{76}$$

şi (71) devine în cele din urmă

$$\overline{p} = \frac{8}{7}\,\frac{x_1}{l}\left(1 - \frac{x_1}{8l}\right) +$$

$$+ 2\left(1 - \frac{x_1}{4l}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\,\pi}{(n+1)^2\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2}\,e^{-\frac{\alpha_n}{\beta_l\mu}\,t}\,\sin\left[(n+1)\pi\,\frac{\ln\left(1 - \frac{x_1}{4l}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}\right], \tag{77}$$

unde pentru simplificarea scrierii nu am mai introdus în factorul exponenţial expresia (70) a lui α_n.

Corectarea valorilor proprii se face cu ajutorul procedeului indicat mai înainte. Pentru a aplica deci formula (49), vom observa că avem

$$\beta = \left(\frac{m_0}{k^{(0)}}\right)^{\frac{1}{2}}(1 - \nu\,\zeta_1)^{-1} \tag{78}$$

şi

$$H_0 = A_0\left(\frac{m_0}{k^{(0)}}\right)^{-\frac{1}{4}}(1 - \nu\,\zeta_1)^{\frac{1}{2}}\,\sin\left[\pi\,\frac{\ln(1 - \nu\,\zeta_1)}{\ln\,(1 - \nu)}\right], \tag{79}$$

precum şi

$$\gamma = \nu^2\,\gamma_1\,(\gamma_1 + 1)\;(1 - \nu\,\zeta_1)^{-2}. \tag{80}$$

După un calcul simplu, formula (49) ne dă

$$\alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(0)} + \frac{\nu^2}{l^2\,\frac{m_0}{k^{(0)}}}\left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right)^2 \tag{81}$$

dacă ţinem seama de (25) şi notăm cu $\alpha_0^{(0)}$ cea mai mică valoare proprie în prima aproximaţie, obţinută din (64) cu $n = 0$.

Tot astfel, pentru corectarea celorlalte valori proprii, din aplicarea formulei (52) rezultă

$$\alpha_r^{(1)} = \alpha_r^{(0)} + \frac{\nu^2}{l^2\,\frac{m_0}{k^{(0)}}}\left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\right)^2, \tag{82}$$

cu $r = 1, 2, 3, \ldots$; $\alpha_r^{(0)}$ se găsește din (64) cu $n = r$. Se constată imediat că valorile proprii astfel corectate coincid cu cele exacte date de formula (67).

Cu valorile particulare alese pentru γ_1 și ν avem

$$l^2 \frac{m_0}{k^{(0)}} \alpha_n = \frac{1}{16} \frac{(n+1)^2\pi^2}{\left[\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2} + \frac{1}{16}, \tag{83}$$

unde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Debitul se calculează din formula

$$Q_s = S \frac{k^{(0)}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)_{x_1 = 0}, \tag{84}$$

în care S este aria secțiunii transversale a mediului poros. Această formulă se mai poate scrie

$$Q_s = S \frac{k^{(0)}}{\mu} (p_c - p_s) \left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1}\right)_{x_1 = 0} \tag{85}$$

și, după efectuarea calculelor, cu ajutorul expresiei (77) a lui $\overline{p}$ găsim

$$Q_s = S \frac{k^{(0)}}{\mu} \frac{p_c - p_s}{l} \left\{ \frac{8}{7} - \frac{1}{2\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2\pi^2}{(n+1)^2\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2} e^{-\frac{\alpha_n}{\beta_l \mu} t} \right\}. \tag{86}$$

Atunci cînd timpul devine foarte mare, debitul tinde către valoarea constantă

$$Q_s^{(c)} = \frac{8}{7} S \frac{k^{(0)}}{\mu} \frac{p_c - p_s}{l}. \tag{87}$$

Această valoare corespunde regimului staționar ; într-adevăr, pentru acest caz avem formula

$$Q_s^{(c)} = \frac{S}{\mu} \frac{p_c - p_s}{\int_0^l \frac{dx_1}{k}} \tag{88}$$

și, dacă introducem pentru k expresia (53), regăsim valoarea (87) a debitului.

Calculele numerice au fost efectuate cu valorile

$$k^{(0)} = 0{,}2\ D, \quad m = 0{,}2, \quad l = 1.000\ \text{m},$$

$$\beta_l = 5 \cdot 10^{-5}\ 1/\text{at}, \qquad \mu = 1\ \text{cP}.$$

În tabela 1 sînt trecute valorile funcției $\overline{p}$, calculate cu formula (77) pentru mai multe valori ale raportului $\frac{x_1}{l}$ și la cîteva valori ale timpului.

Pentru comparație au fost trecute și valorile corespunzătoare regimului staționar, care, teoretic, sînt atinse atunci cînd timpul devine infinit.

Tabela 1

$\frac{x_1}{l}$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1
$t = 10^4$s	0	0,4029	0,8901	0,9968	0,9981	0,9992	1
$t = 5 \times 10^4$s	0	0,2005	0,5521	0,8008	0,9294	0,9859	1
$t = 10^5$s	0	0,1507	0,4285	0,6613	0,8295	0,9507	1
$t = \infty$	0	0,1129	0,3300	0,5389	0,7300	0,9129	1

Din examinarea acestor rezultate se constată că la $t = 10^4$ s variația presiunii este foarte accentuată în apropiere de $\frac{x_1}{l} = 0$, în timp ce pentru $\frac{x_1}{l} > 0{,}5$ diferența față de presiunea inițială este practic nulă. În schimb, la $t = 10^5$ s distribuția presiunii este apropiată de aceea corespunzătoare regimului staționar, ceea ce înseamnă că din punct de vedere practic, în exemplul studiat, acest regim se atinge destul de repede.

Plecînd de la formula (86), am calculat și valorile debitului adimensional

$$\overline{Q}_s = \frac{Q_s}{S \frac{k^{(0)}}{\mu} \frac{p_c - p_s}{l}} = \frac{8}{7} - \frac{1}{2 \ln\left(\frac{3}{4}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2 \pi^2}{(n+1)^2 \pi^2 + \left[\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2} e^{-\frac{\alpha_n}{\beta_1 \mu} t} \tag{89}$$

pentru aceleași valori ale timpului ca mai sus. Rezultatele sînt date în tabela 2, unde a fost trecută și valoarea debitului adimensional care corespunde regimului staționar ($t = \infty$). Această valoare rezultă imediat din formula (87).

Tabela 2

t, s	10^4	5.10^4	10^5	∞
$\overline{Q}$	4,2614	2,0529	1,5343	1,1428

Se observă din examinarea valorilor obținute că debitul scade destul de repede, apropiindu-se de acela corespunzător regimului staționar. La $t = 10^5$ s diferența este însă încă destul de mare, debitul în acest moment fiind cu 34,25% mai mare decît debitul pentru $t = \infty$.

Exemplul numeric tratat corespunde la o variație foarte accentuată a porozității, așa cum se poate constata din (68), în timp ce permeabilitatea are o variație mult mai redusă, situație care, din punct de vedere practic, poate să apară mai puțin obișnuită. Prin aceste calcule am urmărit însă să dăm numai o ilustrare a modului de aplicare a metodei propuse, fără a ne lega de anumite date concrete.

Problema $p_c - Q_s$. Debitul constant Q_s are expresia

$$Q_s = S \frac{k^{(0)}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)_{x_1 = 0}, \tag{90}$$

$k^{(0)}$ fiind valoarea permeabilității la $x_1 = 0$. Dacă introducem de data aceasta funcția

$$\overline{p} = \frac{p_c - p}{p_c - p_s}, \tag{91}$$

unde p_s este presiunea constantă la $x_1 = 0$ corespunzătoare regimului staționar, necesară pentru obținerea debitului constant Q_s, avem

$$Q_s = - S \frac{k^{(0)}}{\mu} (p_c - p_s) \left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} \right)_{x_1 = 0}. \tag{92}$$

Prin urmare, condițiile la limită ale problemei sînt

$$x_1 = 0, \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} = - \frac{1}{l}; \quad x_1 = l, \ \overline{p} = 0, \tag{93}$$

în timp ce condiția inițială devine

$$t = 0, \qquad \overline{p} = 0. \tag{94}$$

Cu schimbarea de variabilă

$$y_1 = l - x_1, \tag{95}$$

care lasă neschimbată ecuația (5), condițiile la limită precedente iau forma

$$y_1 = 0, \ \overline{p} = 0; \ y_1 = l, \frac{\partial \overline{p}}{\partial y_1} = \frac{1}{l}. \tag{96}$$

Mai departe introducem funcția

$$\varpi = \overline{p} - \frac{k^{(0)}}{l} \int_0^{y_1} \frac{dy_1}{k}, \tag{97}$$

ținînd seama de faptul că integrala din această expresie este o soluție a ecuației (5).

Funcția $\varpi (y_1, t)$ satisface tot ecuația (11), care își păstrează forma cu schimbarea de variabilă (95), cu condiția inițială

$$t = 0, \qquad \varpi = - \frac{k^{(0)}}{l} \int_0^{y_1} \frac{dy_1}{k} \tag{98}$$

și condițiile la limită

$$y_1 = 0, \ \varpi = 0; \ y_1 = l, \frac{\partial \varpi}{\partial y_1} = 0. \tag{99}$$

Prin aplicarea metodei de separare a variabilelor, care conduce la soluții de forma (14), ajungem din nou la ecuațiile (15) și (16). Pentru funcția de timp rămîne deci valabilă expresia (17), iar ecuația (18) trebuie rezolvată cu condițiile la limită

$$y_1 = 0,\ X_n = 0;\ y_1 = l,\ \frac{\mathrm{d}X_{1n}}{\mathrm{d}y_1} = 0, \tag{100}$$

ceea ce înseamnă că am ajuns din nou la un caz particular al problemei Sturm-Liouville.

Dacă utilizăm și de data aceasta schimbarea de funcție și de variabilă

$$H_n = k^{\frac{1}{2}} X_{1n},\ \zeta_1 = \frac{y_1}{l} \tag{101}$$

și aplicăm ca mai înainte metoda WKB, funcția H trebuie să satisfacă, la rîndul ei, condițiile

$$\zeta_1 = 0,\ H_n = 0;\ \zeta_1 = 1, \frac{1}{H_n}\frac{\mathrm{d}H_n}{\mathrm{d}\zeta_1} + k^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}k^{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}\zeta_1} = 0. \tag{102}$$

Se constată că expresia (36) a funcției H_n satisface prima dintre aceste condiții, în timp ce a doua condiție devine

$$\varkappa_n \operatorname{cotg}\left(\varkappa_n \int_0^1 \beta \mathrm{d}\,\zeta_1\right) = \left[\frac{1}{2\beta}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\zeta_1} + \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\zeta_1}\right)\right]_{\zeta_1 = 1} \tag{103}$$

și servește la calculul valorilor proprii.

Revenind la funcția X_{1n}, avem deci

$$X_{1n} = A_n (km)^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{y_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}y_1\right) \tag{104}$$

și

$$\sqrt{\alpha_n}\operatorname{cotg}\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{l}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}y_1\right) = \left[\sqrt{\frac{k}{m}}(km)^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}(km)^{-\frac{1}{4}}}{\mathrm{d}y_1}\right]_{y_1 = l}, \tag{105}$$

ceea ce ne dă

$$\varpi = (km)^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_n}{\beta_l \mu} t} \sin\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{y_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}y_1\right). \tag{106}$$

Constantele D_n se determină din condiția inițială (98), care ia forma

$$\frac{k^{(0)}}{l}(km)^{\frac{1}{4}}\int_0^{y_1}\frac{\mathrm{d}y_1}{k} = -\sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{y_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}y_1\right). \tag{107}$$

Dacă dezvoltăm în serie Fourier primul membru al acestei relații, coeficienții D_n rezultă prin identificare. Schimbarea de variabilă

$$\xi_1 = \frac{1}{I}\int_0^{y_1} \sqrt{\frac{m}{k}}\,dy_1, \quad I = \frac{1}{\pi}\int_0^{l} \sqrt{\frac{m}{k}}\,dy_1 \tag{108}$$

ușurează calculele, ca și în cazul precedent.

Ajungem astfel la soluția aproximativă a problemei

$$\overline{p} = \frac{k^{(0)}}{l}\int_0^{y_1} \frac{dy_1}{k} + (km)^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n\, e^{-\frac{\alpha_n}{\beta_l \mu} t} \sin\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{y_1} \sqrt{\frac{m}{k}}\,dy_1\right), \tag{109}$$

în care se poate reveni la variabila inițială. Valorile proprii aproximative pot fi corectate cu ajutorul procedeului indicat mai înainte.

Debitul Q_s fiind dat, presiunea rezultă din relația

$$p = p_c - \frac{\mu l Q_s}{S k^{(0)}}\overline{p}, \tag{110}$$

în care $\overline{p}$ se înlocuiește cu expresia precedentă. Revenirea la variabila inițială x_1 nu prezintă dificultăți.

3. *Debit nul la distanță finită.* În această categorie de probleme vom admite de asemenea că mediul poros de lungime finită l se află în momentul inițial ($t = 0$) în echilibru la presiunea constantă p_c. Extremitatea $x_1 = l$ este ermetic închisă, debitul fiind acolo nul pentru orice $t \geqslant 0$, în timp ce la $x_1 = 0$ putem avea pentru $t > 0$ fie o presiune constantă p_s, fie un debit constant Q_s. Ajungem astfel la două probleme, pe care le vom nota cu $Q_{co} - p_s$, respectiv $Q_{co} - Q_s$.

Problema $Q_{co} - p_s$. Presiunea p_s fiind constantă, putem utiliza funcția $\overline{p}$, definită prin (4). Această funcție trebuie să fie o soluție a ecuației (5), cu condiția inițială

$$t = 0, \quad \overline{p} = 1 \tag{111}$$

și condițiile la limită

$$x_1 = 0,\ \overline{p} = 0;\ x_1 = l, \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} = 0. \tag{112}$$

Dacă aplicăm și de data aceasta metoda separării variabilelor, căutînd soluții particulare sub forma unui produs dintre o funcție de timpul t și o altă funcție de variabila spațială x_1, observăm imediat că funcția de timp rămîne tot (17), în timp ce funcția de variabilă x_1, pe care o notăm cu X_{1n}, este o soluție a ecuației (18), cu condițiile

$$x_1 = 0,\ X_{1n} = 0;\ x_1 = l, \frac{dX_{1n}}{dx_1} = 0. \tag{113}$$

Această funcție are deci aceeași formă cu funcția a cărei expresie este (104), cu singura deosebire că variabila y_1 care apare acolo trebuie înlocuită cu x_1. Avem deci

$$X_{1n} = A_n (km)^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{x_1} \sqrt{\frac{m}{k}}\,dx_1\right), \tag{114}$$

cu valorile proprii α_n rezultînd din formula (105), în care de asemenea punem în loc de y_1 variabila x_1.

Prin urmare, soluția problemei este de forma

$$\overline{p} = (km)^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \, e^{-\frac{\alpha_n}{\beta_l \mu} t} \sin\left(\sqrt{\alpha_n} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{m}{k}} \, dx_1\right), \tag{115}$$

constantele D_n rezultînd din condiția inițială (111), care se scrie

$$(km)^{\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left(\sqrt{\alpha_n} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{m}{k}} \, dx_1\right) \tag{116}$$

sau

$$(km)^{\frac{1}{4}} = \sum_{q=1}^{\infty} D_q \sin (I \sqrt{\alpha_n} \xi_1), \tag{117}$$

cu $q = n + 1$ dacă introducem schimbarea de variabilă (43).

Pentru corectarea valorilor proprii este utilizabil tot procedeul pe care l-am indicat mai înainte.

Debitul are de data aceasta expresia

$$Q_s = S \frac{k^{(0)}}{\mu} (p_c - p_s) \left[(km)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m}{k}}\right]_{x_1=0} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sqrt{\alpha_n} \, e^{-\frac{\alpha_n}{\beta_l \mu} t} \tag{118}$$

și tinde către zero atunci cînd timpul crește foarte mult, deoarece, la rîndul ei, presiunea din mediul poros tinde să se uniformizeze.

Problema $Q_{co} - Q_s$. În soluționarea acestei probleme vom utiliza funcția $\overline{p}$ definită prin (91), presiunea avînd semnificația pe care i-am dat-o acolo. Condiția inițială este deci

$$t = 0, \quad \overline{p} = 0, \tag{119}$$

iar condițiile la limită iau forma

$$x_1 = 0, \quad \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} = -\frac{1}{l}; \quad x_1 = l, \quad \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} = 0. \tag{120}$$

Dacă introducem acum funcția

$$\varpi = \overline{p} + \frac{k^{(0)}}{l \int_0^l m \, dx_1} \int_0^{x_1} \frac{\int_{x_1}^{l} m \, dx_1}{k} dx_1 - \frac{k^{(0)}}{l \beta_l \mu \int_0^l m \, dx_1} t, \tag{121}$$

se constată cu ușurință că aceasta satisface ecuația (11), cu condițiile la limită

$$x_1 = 0, \quad \frac{\partial \varpi}{\partial x_1} = 0; \quad x_1 = l, \quad \frac{\partial \varpi}{\partial x_1} = 0, \tag{122}$$

$k^{(0)}$ fiind valoarea permeabilității care corespunde la $x_1 = 0$.

Aplicînd şi de data aceasta metoda separării variabilelor, găsim pentru funcţia de timp expresia (17), în timp ce funcţia X_{1n} de variabilă x_1 este o soluţie a ecuaţiei (18), cu condiţiile la limită

$$x_1 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}X_{1n}}{\mathrm{d}x_1} = 0; \qquad x_1 = l, \frac{\mathrm{d}X_{1n}}{\mathrm{d}x_1} = 0. \tag{123}$$

Ne aflăm din nou în faţa unui caz particular al problemei Sturm-Liouville, pentru a cărui rezolvare vom recurge la calea utilizată mai înainte.

Astfel, pentru funcţia H_n trebuie să luăm de data aceasta expresia

$$H_n = \beta^{-\frac{1}{2}}\left[A \sin\left(\varkappa_n \int_0^{\zeta_1} \beta \,\mathrm{d}\zeta_1\right) + B \cos\left(\varkappa_n \int_0^{\zeta_1} \beta \,\mathrm{d}\zeta_1\right)\right] \tag{124}$$

şi, revenind la funcţia X_{1n}, obţinem

$$X_{1n} = (km)^{-\frac{1}{4}}\left[A_n \sin\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right) + B_n \cos\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right)\right]. \tag{125}$$

Prima condiţie la limită (123) ne dă o relaţie între constantele A_n şi B_n, şi anume

$$B_n = -\,\delta_0 \sqrt{\alpha_n}\, A_n, \tag{126}$$

unde am pus

$$\delta_0 = \left[\frac{\sqrt{\frac{m}{k}}\,(km)^{-\frac{1}{4}}}{\frac{\mathrm{d}\,(km)^{-\frac{1}{4}}}{\mathrm{d}x_1}}\right]_{x_1=0}. \tag{127}$$

Valorile proprii rezultă din a doua condiţie la limită (123), care devine

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{l}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right) = \frac{(\delta_0 - \delta_l)\sqrt{\alpha_n}}{1 + \delta_0\,\delta_l\,\alpha_n}, \tag{128}$$

cu notaţia

$$\delta_l = \left[\frac{\sqrt{\frac{m}{k}}\,(km)^{-\frac{1}{4}}}{\frac{\mathrm{d}\,(km)^{-\frac{1}{4}}}{\mathrm{d}x_1}}\right]_{x_1=l}. \tag{129}$$

Soluția aproximativă a problemei se scrie deci

$$\overline{p} = \frac{k^{(0)}}{l\,\beta_l\,\mu\int_0^l m\,\mathrm{d}x_1}\,t - \frac{k^{(0)}}{l\int_0^l m\,\mathrm{d}x_1}\int_0^{x_1}\frac{\int_{x_1}^l m\,\mathrm{d}x_1}{k}\,\mathrm{d}x_1 +$$

$$+ (km)^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty} D_n\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_n}{\beta_l\mu}t}\left[\sin\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right) - \right. \tag{130}$$

$$\left. - \delta_0\sqrt{\alpha_n}\cos\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right)\right]$$

și, deoarece debitul Q_s este dat, presiunea rezultă dintr-o relație de aceeași formă cu (110).

Din condiția inițială (119) obținem

$$(km)^{\frac{1}{4}}\,\frac{k^{(0)}}{l\int_0^l m\mathrm{d}x_1}\int_0^{x_1}\frac{\int_{x_1}^l m\mathrm{d}x_1}{k}\,\mathrm{d}x_1 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\left[\sin\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right) - \right.$$

$$\left. - \delta_0\sqrt{\alpha_n}\cos\left(\sqrt{\alpha_n}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{d}x_1\right)\right] \tag{131}$$

și constantele D_n pot fi determinate dacă dezvoltăm în serie Fourier primul membru al acestei relații. Schimbarea de variabilă (43) ușurează și în acest caz calculele. Sistemul $\sin(I\sqrt{\alpha_n}\,\xi_1) - \delta_0\sqrt{\alpha_n}\cos(I\sqrt{\alpha_n}\,\xi_1)$ este ortogonal în $[0, \pi]$ și, prin urmare, dezvoltarea în serie Fourier este posibilă și pentru membrul drept al relației (131), coeficienții calculîndu-se cu ajutorul formulelor cunoscute.

Valorile proprii aproximative obținute cu ajutorul formulei (128) pot fi corectate și de data aceasta prin procedeul utilizat mai înainte.

4. *Concluzii.* Problemele de curgere a lichidelor compresibile prin medii poroase neomogene au fost puțin studiate pînă în prezent, soluțiile existente referindu-se la cazuri cu totul particulare. Metoda propusă are avantajul că rezolvă problemele de scurgere liniară sub aspectul general, permițînd considerarea unor legi oarecare de variație a permeabilității și porozității. Condițiile de natură matematică pe care trebuie să le satisfacă aceste legi sînt perfect compatibile cu aspectul fizic al problemelor. Metoda este aproximativă, dar procedeul de corectare a valorilor proprii, a cărui aplicare este simplă, permite să se obțină un grad înalt de precizie.

Pe lîngă interesul teoretic, rezultatele au și unul practic, deoarece permit să se pună în evidență influența variației porozității și permeabilității în cele mai diverse condiții. Singura limitare o constituie geometria simplă a sistemului de scurgere considerat, dar, pe de o parte, apar uneori situații practice foarte apropiate, iar pe de altă parte indicațiile obținute au un caracter calitativ general.

Primită la redacție la 27 decembrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. A. L. Bisplinghoff, H. Ashley, R. L. Halfman, *Aeroelasticity*, Cambridge, Addison-Wesley Publishing Company, 1955, p. 431—434.
2. Г. Б. Голубев, *К определению функции давления в неоднородных по проницаемости пластах*. Ученые записки Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина, *121*, *5* (1961).
3. W. J. Goodey, *The Approximate Calculation of Eigen-values for Certain Second Order Linear Differential Equations*, Journal of the Royal Aeronautical Society, **65**, 605 (1961).
4. З. Б. Хейров, Г. П. Гусейнов, *Решение некоторых задач неустановившихся фильтраций в пластах с переменной проницаемостью*. Ученые записки, Ажербайджанский Государственный университет им. С. М. Кирова *6*, (1957).
5. З. Б. Хейров, *Об одной задаче теории фильтрации жидкости в неоднородной среде*. Ученые записки, Азербайджанский государственный университет им. С. М. Кирова, *2*, (1962)
6. A. Houpeurt, *Possibilités de résolution analytique des problèmes d'écoulements liquides dans les milieux poreux à caractéristiques variables*, Revue de l'Institut Français du Pétrole et Annales des combustibles liquides, **XVI**, 4—5 (1959).
7. — *Eléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux*, Société des Editions Techniques, Paris, 1957, p. 48—50.
8. И. А. Насруллаев, *Вопросы движения упругой жидкости в упругом пласте при переменных проницаемости и мощности*. Труды АзНИИ по добыче нефти, **XУ**, 57—70 (1965).
9. T. Oroveanu, *O soluţie aproximativă pentru curgerea plan-radială a unui lichid compresibil printr-un mediu poros neomogen*, Lucrările Institutului de petrol, gaze şi geologie din Bucureşti, IV, 1958.
10. — *Applications d'un procédé approximatif de détermination des valeurs propres dans le problème de Sturm-Liouville*, Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée, **9**, *2* (1964).

ASUPRA STRATULUI-LIMITĂ NESTAȚIONAR DIN APROPIEREA UNUI DISC CARE SE ROTEȘTE ÎN JURUL UNEI AXE

de ION POP

În lucrare, se integrează prin serii ecuațiile stratului-limită nestaționar din apropierea unui disc, considerînd că viteza la suprafața exterioară a stratului-limită și viteza de rotație a discului sînt de forma $\lambda r(e^{\Omega t})^n$, respectiv $r\Omega(e^{\Omega t})^m$. Soluția problemei depinde de parametrul $k = \frac{\lambda}{\Omega}$. Se studiază două cazuri $n = m$ și $n = 2m$. Pentru $k = 0$ se obține soluția problemei din lucrarea [1].

1. INTRODUCERE

După cum se știe, soluții exacte ale ecuațiilor lui Navier-Stokes, se pot obține numai pentru un număr restrîns de cazuri particulare de mișcare a fluidelor vîscoase și incompresibile. Una dintre problemele în care aceste ecuații se pot rezolva exact este problema lui Karman (1921), referitoare la rotația uniformă a unui disc infinit de mare, într-un lichid vîscos și incompresibil, a cărui soluție numerică a fost dată de Cochran în 1934.

Problema lui Karman a fost generalizată pentru cazul cînd discul începe să se rotească din starea de repaus cu o viteză unghiulară variabilă în timp. Astfel, Rozin [1] a studiat formarea stratului-limită în apropierea unui disc, care se rotește în planul său cu viteza unghiulară

$$\omega(t) = \Omega t^n \text{ și } \omega(t) = \Omega e^{mt} (n, m > 0 \text{ și } \Omega = \text{const.}),$$

iar Nigam [2] a studiat cazul rotației uniforme ($n = 0$).

Deoarece mișcarea din vecinătatea punctului critic al unui corp de rotație care se translatează de-a lungul axei sale de simetrie și în

acelaşi timp se roteşte în jurul ei (Illingworth [3]) este aceeaşi ca şi mişcarea nestaţionară a unui fluid vîscos şi incompresibil spre un disc care se roteşte în planul său, s-a încercat să se dea ultimei probleme o rezolvare independentă de prima. Astfel, Wadhwa [4] a rezolvat această problemă pentru cazul cînd viteza de rotaţie a discului este proporţională cu t^n $(n \geqslant 0)$.

În această notă vom integra ecuaţiile stratului-limită nestaţionar din apropierea unui disc care se roteşte în planul său, presupunînd că viteza la suprafaţa exterioară a stratului-limită şi viteza de rotaţie a discului au formele

$$u_1 = \lambda r\,(e^{\Omega t})^n \quad \text{şi} \quad v_1 = r\Omega\,(e^{\Omega t})^m.$$

Soluţia problemei va depinde de parametrul $k = \frac{\lambda}{\Omega}$. Dacă în soluţiile ce se obţin luăm $k = 0$, dăm peste rezultatul din lucrarea [1], rezultatul nostru fiind în acest fel generalizarea cazului doi din [1].

Se arată că soluţia problemei este posibilă dacă $2m-n$ este un multiplu de n. Se discută două cazuri $n = m$ şi $n = 2m$.

2. ECUAŢIILE MIŞCĂRII

Să considerăm un disc de rază infinit de mare, care începe să se rotească în planul său $(z = 0)$ în jurul axei $r = 0$ (fig. 1), din starea de repaus, într-un lichid vîscos şi incompresibil cu o viteză unghiulară variabilă în timp.

Ecuaţiile stratului-limită nestaţionar în coordonate cilindrice au forma [5]

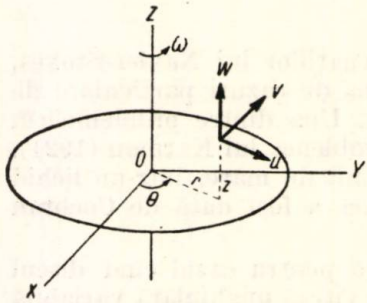


Fig. 1. – Discul şi axele de coordonate.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \qquad (1)$$

cu următoarele condiţii iniţiale şi la limită:

$$\left.\begin{array}{ll} u = v = w = 0, & \text{pentru } t \leqslant 0 \text{ şi pentru orice } z, \\ u = w = 0,\ v = v_1 = r\Omega\,(e^{\Omega t})^m & \text{pentru } z = 0 \\ u = u_1 = \lambda r\,(e^{\Omega t})^n,\ v = 0 & \text{pentru } z \to \infty \end{array}\right\} \text{şi pentru } t > 0, \qquad (2)$$

unde u, v şi w sînt componentele vitezei în direcţia radială, circulară respectiv axială, iar λ o constantă.

Distribuția presiunii pentru $z \to \infty$ este

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial r} = \lambda r (e^{\Omega t})^n [\Omega n + \lambda (e^{\Omega t})^n]. \tag{3}$$

Introducem următoarele mărimi adimensionale:

$$u = r\Omega U(Z, I),\ v = r\Omega V(Z, T),\ w = \sqrt{\nu\Omega}\, W(Z, T),$$

$$p = -\frac{\rho}{2}\lambda r^2 e^{nT}[\Omega n + \lambda e^{nT}] + \rho\nu\Omega P(Z, T), \tag{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}\, R,\ z = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}\, Z,\ t = \frac{T}{\Omega},\ k = \frac{\lambda}{\Omega}.$$

Substituind relațiile (4) în ecuațiile (1) și (2), obținem următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial T} + W\frac{\partial U}{\partial Z} + U^2 - V^2 = k e^{nT}[n + k e^{nT}] + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2},\\
&\frac{\partial V}{\partial T} + W\frac{\partial V}{\partial Z} + 2UV = \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2},\\
&\frac{\partial W}{\partial T} + W\frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2},\\
&2U + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

cu condițiile la limită

$$\begin{aligned}
&U = W = 0, \quad V = e^{mT} && \text{pentru } Z = 0,\\
&U = k e^{nT}, \quad V = 0 && \text{pentru } Z \to \infty.
\end{aligned} \tag{6}$$

Pentru integrarea sistemului de ecuații (5) cu condițiile la limită (6) căutăm soluții de forma

$$\begin{aligned}
U &= e^{nT}[f_0'(\eta) + e^{nT} f_1'(\eta) + e^{2nT} f_2'(\eta) + \dots],\\
V &= e^{mT}[g_0(\eta) + e^{nT} g_1(\eta) + e^{2nT} g_2(\eta) + \dots],\\
W &= -4e^{nT}[f_0(\eta) + e^{nT} f_1(\eta) + e^{2nT} f_2(\eta) + \dots],\\
P &= 2e^{nT}[h_0(\eta) + e^{nT} h_1(\eta) + e^{2nT} h_2(\eta) + \dots],
\end{aligned} \tag{7}$$

unde $\eta = \frac{1}{2}Z$. Funcțiile f_i, g_i și h_i satisfac condițiile

$$\left.\begin{aligned}
&f_0(\eta) = f_0'(\eta) = f_i(\eta) = f_i'(\eta) = 0\\
&g_0(\eta) = 1,\ g_i(\eta) = 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{pentru } \eta = 0, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}
&f_0'(\eta) = k,\ f_i'(\eta) = 0\\
&g_0(\eta) = g_i(\eta) = 0
\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}&\text{pentru } \eta \to \infty,\\ &i = 1, 2, 3, \dots\end{aligned} \tag{9}$$

Înlocuind relaţiile (7) în ecuaţiile (5), obţinem sistemul

$$[nf_0' + 2nf_1' e^{nT} + \ldots] + e^{nT}[f_0'^2 - 2f_0 f_1' + e^{nT}(2f_0' f_1' - 2f_0 f_1' - 2f_0'' f_1) + \ldots] -$$

$$- e^{(2m-n)T}[g_0^2 + 2g_0 g_1 e^{nT} + \ldots] = kn + k^2 e^{nT} + \frac{1}{4}(f_0''' + f_1''' e^{nT} + \ldots),$$

$$[mg_0 + (m+n) g_1 e^{nT} + \ldots] + 2 e^{nT}[f_0' g_0 - f_0 g_0' + \tag{10}$$

$$e^{nT}(f_0' g_1 + f_1' g_0 - f_0 g_1' - f_1 g_0') + \ldots] = \frac{1}{4}(g_0'' + g_1'' e^{nT} + \ldots),$$

$$[nf_0 + 2n f_1 e^{nT} + \ldots] - 2e^{nT}[f_0 f_0' + e^{nT}(f_0 f_1' + f_1 f_0') + \ldots] =$$

$$= \frac{1}{4}[h_0' + f_0'' + e^{nT}(h_1' + f_1'') + \ldots].$$

Se observă că soluţia sistemului (10) este posibilă dacă $2m - n$ este multiplu de n.

3. SOLUŢIA PENTRU CAZUL $n = m$

Făcînd în ecuaţiile (10) $n = m$ şi egalînd coeficienţii aceloraşi puteri ai lui e^{nT}, obţinem următoarele sisteme de ecuaţii ordinare pentru primele două aproximaţii :

$$\left.\begin{aligned} &f_0''' - 4nf_0' = -4kn, \\ &g_0'' - 4ng_0 = 0, \\ &h_0' = -f_0'' + 4nf_0; \end{aligned}\right\} \quad (11) \qquad \left.\begin{aligned} &f_1''' - 8nf_1' = -4k^2 + 4(f_0'^2 - 2f_0 f_0'' - g_0^2), \\ &g_1'' - 8g_1 = 8(f_0' g_0 - f_0 g_0'), \\ &h_1'' = -f_1'' + 8(nf_1 - f_0 f_0'), \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

cu condiţiile la limită

$$\left.\begin{aligned} &f_0(\eta) = f_0'(\eta) = f_1(\eta) = f_1'(\eta) = 0 \\ &g_0(\eta) = 1,\ g_1(\eta) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{pentru } \eta = 0, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &f_0'(\eta) = k,\ f_1'(\eta) = 0 \\ &g_0(\eta) = 0,\ g_1(\eta) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{pentru } \eta \to \infty. \tag{14}$$

Soluţiile sistemelor (11) şi (12) cu condiţiile la limită (13) şi (14) în cazul $n = 1$ sînt

$$f_0' = k(1 - e^{-2\eta}),$$

$$f_0 = \frac{k}{2}[e^{-2\eta} - 1] + k\eta, \tag{15}$$

$$g_0 = e^{-2\eta},$$

$$h_0 - h_0(0) = 2k\eta(\eta - 1)$$

și

$$f_1' = \frac{1+9k^2}{2}\,e^{-2\sqrt{2}\eta} - \frac{1+k^2}{2}\,e^{-4\eta} + 4k^2(\eta-1)\,e^{-2\eta},$$

$$f_1 = -\frac{1+9k^2}{4\sqrt{2}}\,e^{-2\sqrt{2}\eta} + \frac{1+k^2}{8}\,e^{-4\eta} + k^2(1-2\eta)\,e^{-2\eta} + \frac{(\sqrt{2}-1)(1+9k^2)}{8},$$

$$g_1 = 4k\left[(1-\eta)\,e^{-2\eta} - e^{-2\sqrt{2}\eta}\right], \tag{16}$$

$$h_1 - h_1(0) = \frac{1+k^2}{4}\,e^{-4\eta} - k^2\left[4e^{-2\eta} - e^{-4\eta} + 4\eta^2\right] +$$

$$+ \left[\sqrt{2} - 1 + k^2(9\sqrt{2}-5)\right]\eta - \frac{1+13k^2}{4}.$$

Dacă în relațiile (15) și (16) facem $k = 0$, găsim rezultatul obținut de Rozin [1]. Reprezentarea grafică a soluțiilor (15) pentru diferite valori ale parametrului k este prezentată în figurile 2—5.

Presupunînd că raza discului este egală cu a, atunci momentul forțelor de frecare, în ipoteza că se neglijează efectele ce iau naștere pentru $r = a$, este dat de formula:

$$M = 4\pi\mu\int_0^a r^2\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0} dr = -\pi\mu a^4\omega\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}\left[1 + 2k(3-2\sqrt{2})\,e^{nt} + \ldots\right]. \tag{17}$$

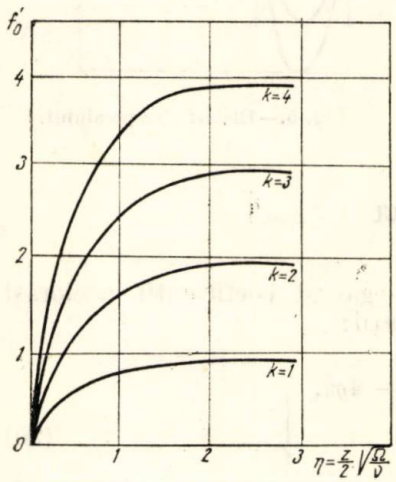


Fig. 2.—Distribuția vitezei radiale.

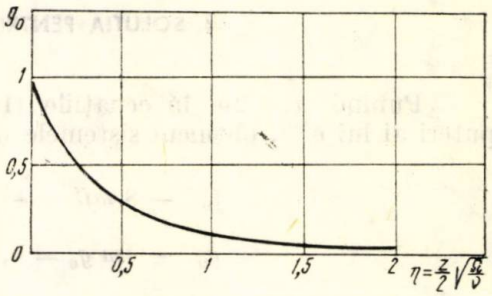


Fig. 3.—Distribuția vitezei circulare.

Introducînd, așa cum se obișnuiește, coeficientul adimensional C_{mf} al momentului de frecare, avem

$$C_{mf} = \frac{|M|}{1/2\,\pi\rho a^5\omega^2} = \frac{2}{\sqrt{Re\,e^{nt}}}\left[1 + 2k(3-2\sqrt{2})\,e^{nt} + \ldots\right], \tag{18}$$

unde $\mathcal{R}e = \frac{a^2\omega}{\nu}$ este numărul lui Reynolds. Luînd în (17) şi (18) $k = 0$, obţinem formulele:

$$M = -\pi a^4 \mu \omega \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}, \text{ respectiv } C_{mf} = \frac{2}{\sqrt{\mathcal{R}e\, e^{\Omega t}}}. \tag{19}$$

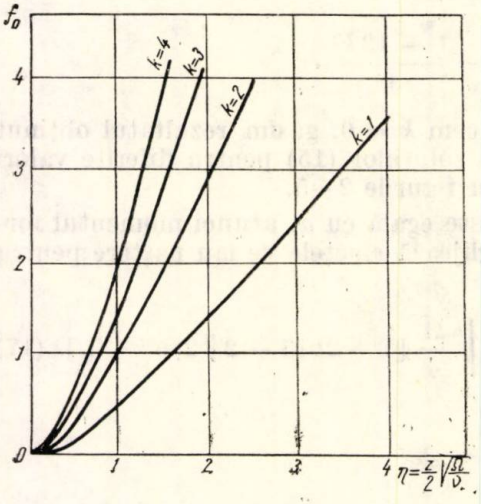


Fig. 4.—Distribuţia vitezei axiale.

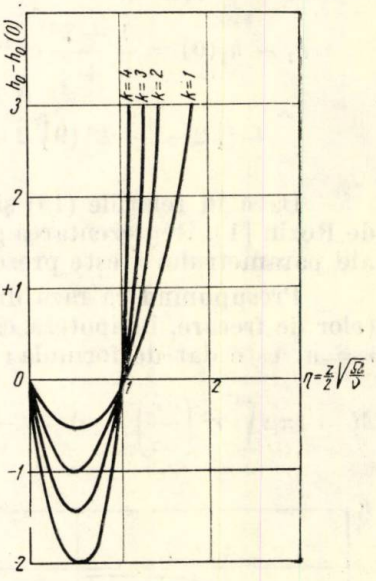


Fig. 5.—Distribuţia presiunii.

4. SOLUŢIA PENTRU CAZUL $n = 2m$

Punînd $n = 2m$ în ecuaţiile (10) şi egalînd coeficienţii aceloraşi puteri ai lui e^{2mT}, obţinem sistemele de ecuaţii:

$$\left.\begin{aligned} f_0''' - 8mf_0' &= -8km - 4g_0^2, \\ g_0'' - 4m\, g_0 &= 0, \\ h_0' &= -f_0'' + 8mf_0; \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1''' - 16mf_1' &= -4k^2 + 4(f_0'^2 - 2f_0f_0'' - 2g_0g_1), \\ g_1'' - 12\, g_1 &= 8(f_0'g_0 - f_0g_0'), \\ h_1' &= -f_1'' + 8(2mf_1 - f_0f_0'). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Vom rezolva sistemele de ecuații (20) și (21) cu condițiile la limită (13) și (14) în cazul cînd $m = 1$ și $k = 0$. Astfel avem

$$f_0' = \frac{1}{2}\left[e^{-2\sqrt{2}\eta} - e^{-4\eta}\right],$$

$$f_0 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{-4\eta} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2\sqrt{2}\eta}\right] + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right), \tag{22}$$

$$g_0 = e^{-2\eta},$$

$$h_0 - h_0(0) = \frac{1}{4}\left[e^{-4\eta} - 1\right] + (\sqrt{2} - 1)\eta$$

și

$$f_1' = \frac{72\sqrt{2} + 14\sqrt{3} - 127}{504}e^{-4\eta} - \frac{1}{16}e^{-4\sqrt{2}\eta} + \frac{4 - \sqrt{2}}{56}e^{-2(2+\sqrt{2})\eta} +$$

$$+ \frac{2 - \sqrt{2}}{8}e^{-2\sqrt{2}\eta} - \frac{1}{144}e^{-8\eta} - \frac{1}{12\sqrt{3}},$$

$$g_1 = \frac{1}{12}\left[e^{-2\sqrt{3}\eta} - e^{-6\eta}\right] + \frac{\sqrt{2-1}}{4}\left[e^{-2(1+\sqrt{2})\eta} - e^{-2\eta}\right], \tag{23}$$

$$h_1 - h_1(0) = -\frac{3}{32\sqrt{2}}e^{-4\sqrt{2}\eta} + \frac{2 - \sqrt{2}}{4}e^{-2(2+\sqrt{2})\eta} + \frac{2 - \sqrt{2}}{4}e^{-2\sqrt{2}\eta} -$$

$$- \frac{33}{576}e^{-8\eta} - \frac{\sqrt{2-1}}{8}e^{-4\eta} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\eta^2 +$$

$$+ \frac{513\sqrt{2} + 56\sqrt{3} - 659}{504}\eta + \frac{129\sqrt{2} - 205}{192}.$$

Se observă că pentru $k = 0$ soluția sistemului (11) și (12) coincide cu (22) și cu cea din [1].

Primită la redacție la 17 ianuarie 1966
unele completări la 28 februarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Л. А. Розин, *Развитие ламинарного пограничного слоя около бесконечного диска и шара, вращающихся вокруг оси*, Известия Акад. наук СССР, серия Механика и машиностроение, 1960, вып. 4.
2. S. D. Nigam, *Rotation of an infinite plane lamina boundary layer growth*, Quart. Appl. Math. 1951, **IV, V.**, *9*, Nr. 1.
3. К. Иллингворт, *Нарастание пограничного слоя на осесимметричном теле, движущемся вдоль своей оси с вращением вокруг нее* (при спине), Механика вып. **I**, 1955.
4. Y. D. Wadhwa, *Unsteady stagnation flow towards a rotating lamina*, Journal of science and Engineering Research, **VII**, *2*, 259–266 (1963).
5. Г. К. Лайцянский, *Ламинарный пограничный слой*, Физ-Матгиз, 1962.

ASUPRA BAZELOR FIZICE ALE PROCESELOR DE FRECARE ŞI UNGERE. III. UNGEREA SEMIFLUIDĂ

de AL. NICA
Institutul de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

621.89

Se prezintă concepţiile moderne privind ungerea semifluidă, dîndu-se şi unele relaţii cantitative pentru stabilirea parametrilor caracteristici. Aspectele legate de interacţiunea metal-lubrifiant sînt de asemenea trecute în revistă, scoţîndu-se în evidenţă importanţa apariţiei compuşilor de reacţie solizi. Se specifică totodată posibilitatea ungerii cu straturi extrem de subţiri de lubrifiant, efectele elastohidrodinamice permiţînd evitarea contactelor metalice în domenii foarte largi de variaţie a parametrilor funcţionali. Totodată se menţionează efectul aditivilor de extremă presiune şi temperatură, precum şi efectul procesului de alunecare asupra materialului suprafeţelor în frecare.
Ca aplicaţii se menţionează posibilitatea preluării sarcinilor foarte mari în condiţiile ungerii semifluide, precum şi realizarea rodajului chimic.

Consideraţiile făcute asupra frecării uscate au scos în evidenţă uzura rapidă care poate avea loc în aceste condiţii, rezultînd astfel necesitatea separării suprafeţelor în frecare cu ajutorul unui strat lubrifiant. Nu întotdeauna se poate realiza însă un film continuu de lubrifiant care să asigure separarea completă a suprafeţelor ; în acest caz ungerea capătă un caracter mixt, existînd atît contacte directe între suprafeţe, cît şi porţiuni ale suprafeţelor separate prin lubrifiant.

După cum predomină caracteristicile ungerii fluide sau a contactelor directe între suprafeţe, acest tip de ungere la limită capătă denumirea de semifluidă sau semiuscată ori, în fine, mixtă. Este de menţionat de altfel faptul că aceste denumiri diferă adesea de la un cercetător la altul, definindu-se uneori ungerea mixtă drept o combinaţie între ungerea hidro-

dinamică şi cea limită, ultima caracterizîndu-se prin preluarea sarcinii de către contactele directe [18].

Indiferent de denumire, ungerea semifluidă este recunoscută ca apărînd sub o formă sau alta (mai apropiată de ungerea hidrodinamică sau mai apropiată de contactele directe metal pe metal) în nenumărate ansambluri şi organe de maşini în mişcare. Astfel, chiar în cazul lagărelor funcţionînd în regim hidrodinamic, pornirile şi opririle sau schimbările de sens conduc în mod inevitabil la apariţia ungerii semifluide; de asemenea suprafeţele în frecare ale pistoanelor şi segmenţilor, sistemul patină-glisieră, ghidajul maşinilor-unelte lucrează de obicei în condiţii de ungere semifluidă. Aceste condiţii sînt de asemenea prezente în cazul roţilor dinţate, mai ales al celor hipoide, al lagărelor cu rostogolire şi în numeroase procese de prelucrare a metalelor. În fine, la lagărele unse fără presiune, cu cantităţi reduse de lubrifiant (prin picurare, cu fitil, lagăre poroase impregnate etc.), pot apărea de asemenea caracteristicile ungerii semifluide. Ungerea semifluidă poate apărea şi în cazul rodajului majorităţii pieselor şi organelor de maşini cu mişcare relativă, deoarece vîrfurile asperităţilor nerodate pot străpunge filmul de lubrifiant dintre suprafeţe.

Din această enumerare reiese importanţa deosebită pe care o prezintă cunoaşterea mecanismului de producere a ungerii semifluide şi explică atenţia care i se acordă de către cercetători.

Trebuie de la început menţionat faptul că frecarea uscată în sensul strict al cuvîntului este foarte greu de obţinut şi că numai în condiţii de laborator sever controlate este posibilă obţinerea ei; este de specificat cu acest prilej că ceea ce se denumeşte de obicei în tehnică prin „frecare uscată" nu este de fapt decît o formă la limită a frecării semifluide, deoarece, chiar în lipsa unui strat de lubrifiant oricît de subţire, impurităţile care sînt întotdeauna prezente între suprafeţele în frecare (oxizi, aer, vapori de apă etc.), vor asuma într-o măsură rolul stratului laubrifiant.

a. MECANISMUL FIZIC AL UNGERII SEMIFLUIDE

Lucrările lui Hardy [4] au constituit punctul de plecare al concepţiilor moderne privind ungerea semifluidă; într-adevăr, Hardy a constatat că frecarea semifluidă nu depinde numai de natura chimică a lubrifiantului, ci şi de natura suprafeţelor în mişcare. Experienţele realizate cu numeroşi acizi graşi, parafine şi alcooli pe diverse suprafeţe au scos în evidenţă rolul pe care îl joacă în fenomenele de frecare semifluidă natura chimică a lubrifiantului, numărul atomilor de carbon din molecula lubrifiantului şi natura chimică a suprafeţelor. Aceste observaţii l-au determinat pe Hardy să emită ipoteza că fenomenele de frecare în aceste condiţii depind de cîmpurile de forţă a suprafeţelor, moleculele lubrifiantului fiind adsorbite fizic şi orientate faţă de suprafeţele solide, formînd astfel un cîmp uniform monomolecular, capabil să suporte sarcina cu care suprafeţele sînt apăsate reciproc (fig. 1).

Deoarece grupele polare ale lubrifiantului aderă la suprafaţa metalică, rezultă că alunecarea va avea loc între straturile formate din gru-

pele nepolare şi eficienţa unui lubrifiant pentru condiţii de ungere semifluide va fi exprimată de măsura în care acest film este capabil să neutralizeze cîmpurile de forţă ale suprafeţelor metalice. Este evident că acest efect depinde de polaritatea moleculelor de lubrifiant şi de lungimea catenei sale. În felul acesta, Hardy a putut explica dependenţa liniară pe care a observat-o între frecare şi greutatea moleculară a lubrifiantului (pentru fiecare clasă de lubrifianţi) în sensul că frecarea era cu atît mai redusă, cu cît greutatea moleculară a lubrifiantului, respectiv lungimea catenei sale, era mai mare. Această teorie a căpătat de altfel o confirmare indirectă prin lucrările lui Trillat, Bragg şi Müller, care au demonstrat cu ajutorul razelor X existenţa filmului de lubrifiant orientat pe suprafaţa metalică, şi de asemenea prin studiile de difracţie electronică [4].

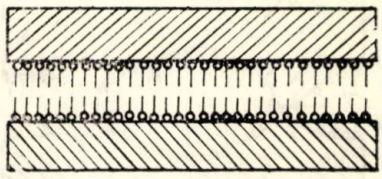


Fig. 1

Totuşi, complexul de fenomene constatat în cazul ungerii semifluide demonstrează că teoria lui Hardy constituie o simplificare exagerată: astfel, chiar în cazul celor mai buni lubrifianţi la limită şi a unor sarcini extrem de reduse, se constată urme de uzură a suprafeţelor în mişcare. Analiza electrografică a suprafeţelor şi studiile cu trasori radioactivi au scos în evidenţă urmele contactelor metalice prin filmul lubrifiant; la unele metale aceste efecte au putut fi observate cu ajutorul microscopului electronic pentru sarcini extrem de mici, inferioare unui gram [4]. Mai mult, se poate constata că nu întotdeauna se asigură o ungere satisfăcătoare de către un film monomolecular al unor compuşi polari cu catene lungi; de exemplu, alcoolii lichizi, foarte polari, deci puternic adsorbiţi de către suprafeţele metalice, nu constituie totuşi buni lubrifianţi la limită.

În fine, deşi frecarea variază invers proporţional cu lungimea catenei, nu devine neglijabilă pentru moleculele cele mai lungi, ci atinge o valoare-limită sub care nu mai coboară. Reiese că frecarea în condiţiile unei ungeri semifluide nu este o simplă alunecare relativă a straturilor monomoleculare de lubrifiant.

Ca şi în cazul frecării uscate, trebuie remarcat faptul că stadiul actual al cunoştinţelor în domeniul frecării semifluide nu permite încă elaborarea unei teorii cantitative absolut satisfăcătoare aplicabilă cazurilor obişnuite, practice, dată fiind complexitatea fenomenelor. Este cert însă că o astfel de teorie trebuie să ia în consideraţie adeziunea metalică care are loc prin filmul de lubrifiant. Se poate face o tentativă în acest sens, extinzîndu-se teoria elaborată pentru suprafeţele fără ungere, cu luarea în consideraţie a separării parţiale a suprafeţelor datorită lubrifiantului.

Într-adevăr, la suprafeţele metalice separate printr-un strat de fluid se vor înregistra deformaţii plastice pînă cînd se va forma o suprafaţă de sprijin suficient de mare pentru a prelua sarcina, iar lubrifiantul va rămîne între suprafeţe sub forma unui film, supus la presiuni importante

Presiunile nu vor fi uniforme şi acolo unde au valorile cele mai mari se produc ruperi ale filmului, rezultatul fiind adeziunea dintre porţiunile de metal care vin în contact (fig. 2).

Dacă viteza de alunecare este mare, acest efect va fi favorizat şi de încălzirile locale importante care rezultă. În consecinţă, forţa totală de frecare în cazul ungerii semifluide va consta din forţa necesară pentru ruperea acestor suduri şi din frecările în stratul de lubrifiant, fiind astfel posibilă exprimarea sa [4] sub forma

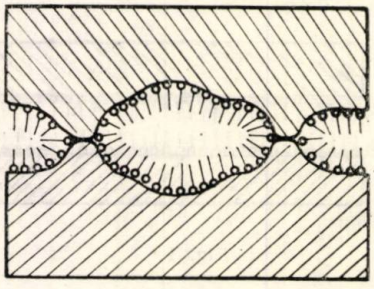


Fig. 2

$$F = A\,[\alpha\,\tau_m + (1-\alpha)\tau_l], \qquad (1)$$

în care A este suprafaţa de sprijin a sarcinii, α coeficientul care exprimă cota-parte din suprafaţa de sprijin revenind contactelor metalice directe, τ_m rezistenţa la forfecare a sudurilor metalice, iar τ_l rezistenţa la forfecare a lubrifiantului.

În cazul prezenţei unui bun lubrifiant, suprafaţa ocupată de joncţiunile metalice poate fi foarte redusă, dar dacă aceste suduri sînt puternice rezistenţa opusă la înaintare în comparaţie cu aceea datorată lubrifiantului atinge valori importante. Aceste contacte metal pe metal schiţate în figura 2, spre deosebire de figura 1 care exprimă schema simplificată a lui Hardy, sînt responsabile în cazul frecării semifluide nu numai pentru o parte din frecare, ci şi pentru uzura şi deteriorarea suprafeţelor.

Reiese că rolul principal al lubrifiantului este în acest caz să reducă pe cît posibil contactele metalice directe, prin crearea unui film greu de pătuns şi cu o rezistenţă la forfecare redusă pentru a păstra frecările la un nivel minim. Dacă lubrifiantul are proprietăţile chimice necesare, el poate intra în reacţie cu suprafeţele metalice, iar compuşii rezultaţi pot micşora frecările, fiind foarte aderenţi faţă de suprafeţele de sprijin, reducîndu-se astfel şi mai mult contactele metalice directe (se va specifica mai departe importanţa acestui aspect). În plus, lubrifianţii utilizaţi pentru acest gen de ungere trebuie să prezinte o puternică adeziune laterală între lanţurile de hidrocarburi. Astfel se explică, de exemplu, de ce alcoolii cu catene lungi, deşi foarte polari, cu o puternică aderare pe suprafeţele metalice, au un efect lubrifiant mai slab decît parafinele în stare solidă; acestea, la rîndul lor, în stare topită, deci cu adeziunea laterală mult redusă, prezintă proprietăţi lubrifiante scăzute. Pe de altă parte, săpunurile metalice au o puternică adeziune laterală şi un punct de înmuiere ridicat, calităţile lor lubrifiante fiind astfel sporite.

Trebuie remarcat totodată faptul că săpunurile metalice pot avea proprietăţi de viscozitate favorabile formării unui strat lubrifiant suficient de gros pentru a separa suprafeţele în mişcare atunci cînd vitezele de deplasare sînt importante, rezultînd o ungere cvasihidrodinamică, efect semnalat de Beeck, Givens şi Smith [4].

Considerîndu-se relaţia (1), stabilită de Bowden şi Tabor pentru forţa de frecare în cazul ungerii semifluide, se fac diverse încercări de

stabilire pe cale experimentală a valorilor α şi τ_l din relaţia care rezultă imediat din (1), exprimînd coeficientul de frecare f în acest caz :

$$f = \frac{1}{p}[\alpha\tau_m + (1-\alpha)\,\tau_l], \tag{2}$$

p fiind rezistenţa la curgere a metalului. Procedeul utilizat recent de Tamai şi Rightmire a constat din măsurarea frecărilor la o maşină de tip disc rotitor cu ac în cazul mai multor stări de puritate a aceloraşi suprafeţe [19].

Din relaţia (2), pusă sub forma

$$f = \alpha f_m + (1-\alpha) f_l, \tag{3}$$

în care $f_m = \frac{\tau_m}{p}$ şi $f_l = \frac{\tau_l}{p}$, se pot deduce valorile α şi f_l din sistemele de ecuaţii construite cu ajutorul valorilor f şi f_m măsurate sau cunoscute.

Astfel, în cazul unei soluţii de 0,001% acid palmitic în cetan, s-au găsit valorile

$$\left.\begin{aligned} 0{,}53 &= 2{,}5\ \alpha + (1-\alpha) f_l \quad \text{pentru suprafeţe fără oxizi,} \\ 0{,}25 &= 1{,}0\ \alpha + (1-\alpha) f_l \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{uşor oxidate,} \\ 0{,}12 &= 0{,}3\ \alpha + (1-\alpha) f_l \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{oxidate.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Indiferent de ecuaţiile alese, rezultă valorile $\alpha = 0{,}18$ şi $f_l = 0{,}079$. Tamai şi Rightmire consideră astfel că valabilitatea ecuaţiei (2) este demonstrată în acest caz, deşi variaţia coeficientului de frecare f este cuprinsă între limite destul de largi. În figura 3 sînt redate rezultatele obţinute pentru diferite concentraţii de acid palmitic în cetan, făcîndu-se totodată o comparaţie cu unele determinări anterioare (Rabinowicz şi Tabor, 1951).

Comparînd rezultatele obţinute în cazul utilizării unui film subţire de lubrifiant cu cele obţinute în cazul ungerii cu lubrifiant abundent, autorii au constatat apariţia sistematică a unor valori mai mari pentru f_l, deci şi pentru τ_l în acest ultim caz. Pentru explicarea acestui fenomen s-a emis ipoteza unui efect marginal, care, în cazul existenţei lubrifiantului într-un film continuu între asperităţi, ar antrena frecări suplimentare. Diferenţele mari rezultate pentru valorile coeficientului de frecare nu au primit încă o explicaţie definitivă, unii cercetători (Rabinowicz) găsind justificare în mărirea suprafeţei reale de contact, în timp ce alţi cercetători susţin că extinderea stratului de oxid poate antrena o modificare a rezistenţei la forfecare [19].

Vinogradov şi colaboratorii lui, analizînd acţiunea lubrifianţilor în procesele de ungere semifluidă, subliniază faptul că trebuie avute în vedere nu numai proprietăţile lor de adsorbţie la interfaţa metal-lubrifiant, ci şi modificările chimice ale suprafeţelor [20].

Cercetătorii sînt de altfel aproape unanimi în ultimul timp în a recunoaşte faptul că eficacitatea lubrifianţilor la limită se află în raport direct cu posibilitatea lor de a reacţiona cu suprafeţele metalice cu care vin în contact, formînd compuşi solizi. Totodată, posibilitatea conservării

efectelor hidrodinamice în condiţii deosebit de grele (sarcini foarte mari la viteze relative foarte reduse) a fost demonstrată, printre alţii, de Archard şi Kirk, explicaţia constînd în efectele deformaţiilor elastice ale asperităţilor, care permit evitarea contactelor metalice chiar atunci cînd filmul lubrifiant este extrem de subţire, confirmîndu-se importanţa forfecărilor în filmul lubrifiant. Cu toate că se află deocamdată într-o fază incipientă, elastohidrodinamica cunoaşte o dezvoltare rapidă (Dowson, Cameron, van Battum şi alţii), deschizînd noi perspective aspectelor legate de realizarea ungerii hidrodinamice chiar în condiţiile unor încărcări extreme şi a unor filme de lubrifiant extrem de subţiri.

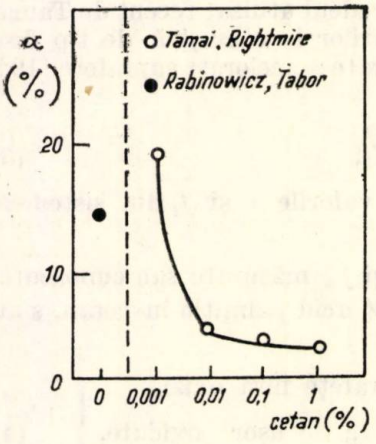


Fig. 3

O demonstraţie simplă a existenţei şi eficacităţii straturilor de lubrifiant extrem de subţiri, eventual monomoleculare, se poate realiza picurînd, de exemplu, stearat de calciu pe apă curată ; acesta se răspîndeşte rapid pe suprafaţa apei, pînă cînd stratul nu depăşeşte grosimea unei molecule. Moleculele se orientează cu lanţurile lungi perpendicular pe suprafaţa apei. Acest film monomolecular poate fi captat pe o placă de sticlă foarte netedă şi, prin frecare cu o altă placă de sticlă asemănătoare, se constată valori reduse ale coeficientului de frecare, datorită existenţei stratului lubrifiant monomolecular. Se poate constata totodată că acest strat lubrifiant extrem de subţire poate fi îndepărtat cu multă uşurinţă.

Uzura descreşte de altfel cu numărul straturilor de lubrifiant, verificîndu-se constatarea deja făcută conform căreia lubrifianţii cu molecule lungi prezintă o mai bună comportare în condiţiile ungerii semifluide.

b. APLICAŢII

Explicarea unor particularităţi ale proceselor de ungere semifluidă au condus la numeroase procedee şi metode de micşorare a frecărilor în unele situaţii în care ungerea cu lubrifiant în straturi groase nu este posibilă. Astfel, lubrificaţia la presiuni (temperaturi) extreme a devenit posibilă în condiţii acceptabile pentru aplicaţiile tehnice, datorită utilizării în lubrifianţi a aditivilor pe bază de clor, sulf sau fosfor ; deşi compuşii respectivi sînt stabili, ei reacţionează cu suprafeţele metalice încălzite datorită frecărilor, dînd compuşi metalici solizi de clor, sulf sau fosfor, cu o rezistenţă superioară la presiuni şi temperaturi ridicate [21].

Efectul corosiv al unor compuşi chimici asupra asperităţilor în condiţiile temperaturii ridicate rezultate din frecări a condus la apariţia aşanumitului „rodaj chimic", care permite să se realizeze corecţiile necesare în micro- şi macrogeometria suprafeţelor cu mişcări relative într-un timp

mult mai scurt, şi cu rezultate mult mai bune decît în cazul rodajului mecanic obişnuit. Astfel, utilizarea lecitinei ca aditiv în uleiuri conduce la dispariţia vîrfurilor asperităţilor ca rezultat al reacţiilor chimice la nivelul contactelor metalice, obţinîndu-se într-un timp scurt suprafeţe cu bune calităţi antifricţiune [22].

De altfel cercetări atente asupra unor aditivi pe bază de fosfor (lecitină şi tricrezil fosfat) au condus la concluzia că aceştia, pe lîngă posibilitatea preluării unor sarcini mai mari faţă de cazul cînd se utilizează cei pe bază de sulf, permit şi refacerea suprafeţelor gripate [23].

În cazul unor operaţii de prelucrare a metalelor, de exemplu în cazul trefilării, importante reduceri a frecărilor, cu posibilitatea unor creşteri corespunzătoare a gradului de prelucrare la o singură trecere, se obţin prin procedee care permit crearea unor rezerve de lubrifiant la suprafaţa metalului, de exemplu prin bombardarea cu alice sau prin procese de fosfatare. Lubrifiantul folosit trebuie să prezinte bune proprietăţi de ungere la limită, deoarece în aceste condiţii este forţat între sculă şi piesa de prelucrat; se utilizează de obicei adaosuri de 5% acid oleic în ulei mineral sau stearatul de sodiu (Rowe).

Un domeniu interesant de preocupări atît din punctul de vedere a cunoaşterii mai aprofundate a mecanismului ungerii semifluide, cît şi din punctul de vedere a selecţionării corecte a materialelor pentru suprafeţele în frecare îl constituie stabilirea corelaţiilor dintre structura materialelor suprafeţelor şi comportarea la alunecare şi uzură.

S-au studiat astfel din acest punct de vedere lagăre din aliaje de aluminiu (un aliaj de aluminiu 96% cu 3,5% stibiu şi un aliaj de aluminiu 91% cu 5,6% staniu), stabilindu-se, de exemplu, că primul tip de aliaj, cu incluziuni dure, a avut o comportare mai bună din punctul de vedere al rezistenţei la uzură, în afară de cazul cînd lubrifiantul a conţinut impurităţi în cantităţi mari, caz în care al doilea aliaj, cu incluziuni moi, a prezentat o uzură mai redusă [24].

Încercări în condiţii de laborator au fost efectuate de asemenea asupra unor suprafeţe plane sau circulare de lagăre, acoperite cu un strat subţire de staniu [25]; s-a pus în evidenţă faptul că în procesul de alunecare apar modificări ale microgeometriei şi de structură a materialului, condiţiile de adsorbţie a lubrifiantului şi deci rezistenţa peliculei lubrifiante putîndu-se modifica în timp.

Primită la redacţie la 24 mai 1966

BIBLIOGRAFIE

18. A. Dobry, *The Transition Between Boundary, Mixed, and Hydrodynamic Lubrication*, Wear, **7**, *3* (1964).

19. Y. Tamai, B. G. Rightmire, *Mechanism of Boundary Lubrication and the Edge Effect*, Transactions of the ASME — Journal of Basic Engineering, **87**, Series D, *3* (1965).

20. G. Vinogradov, I. V. Korepova, Y. Y. Podolsky, N. T. Pavlovskaya, *Effect of Oxidation on the Boundary Friction of Steel in Hydrocarbon Media and Critical Friction Duties Under Which Cold and Hot Seizure (or Welding) Develop*, Transactions of the ASME — Journal of Basic Engineering, **87**, Series D, *3* (1965).
21. P. H. Molyneux, *Application of Additives to Industrial Lubricants*, Scientific Lubrication, **15**, *3* (1963).
22. Olga Biță, I. Dincă, *Date noi în tehnica rodării motoarelor cu ardere internă*, St. cerc. mec. apl. **XII**, *5* (1961).
23. Olga Biță, I. Dincă, *Comportarea la sarcini ridicate a unor aditivi pe bază de fosfor*, St. cerc. mec. apl. **XII**, *5* (1962).
24. Gh. Vasilca, Al. Nica, Olga Biță, I. Dincă, *Unele aspecte ale influenței tipului de structură asupra comportării la alunecare și uzură la două aliaje de aluminiu*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *6* (1963).
25. Gh. Vasilca, *Unele influențe ale procesului de alunecare asupra suprafețelor metalice. I. Suprafețe stanate*, St. cerc. mec. apl. **22**, *3* (1966).

ASUPRA FOLOSIRII RĂŞINILOR EPOXIDICE ÎN FOTOELASTICITATE *

de MÎNDRU ILIE şi HUIDU TEODOR
Laboratorul de fotoelasticitate al Facultăţii de matematică-mecanică, Universitatea Bucureşti

539.4 : 678.6

S-a studiat întărirea răşinii epoxidice Dinox 110, de fabricaţie românească, cu anhidridă maleică şi posibilitatea folosirii acestor răşini pentru construcţia modelelor de studiu în fotoelasticitate. S-a studiat dependenţa modulului de elasticitate E şi a valorii benzii materialului în funcţie de cantitatea de agent de întărire. Proprietăţile optime optice-mecanice s-au găsit pentru o compoziţie de 30 g de anhidridă maleică la 100 g de răşină. Din studiul fluajului optic pentru mai multe compoziţii s-a găsit că viteza minimă de fluaj o prezintă aceeaşi compoziţie. Din compararea datelor experimentale găsite pentru răşina Dinox 110 (întărită cu anhidridă maleică) cu produsele similare din străinătate s-a demonstrat că aceasta se poate utiliza cu rezultate satisfăcătoare în studiul problemelor de fotoelasticitate.

O dată cu dezvoltarea ştiinţei şi tehnicii, în ultima vreme o dezvoltare mare au cunoscut şi metodele experimentale moderne de studiu a tensiunilor. Dintre acestea foarte mult s-au dezvoltat metodele optice, şi în special fotoelasticitatea, iar în cadrul acesteia metodele de obţinere a materialelor transparente şi optic sensibile necesare studiilor prin metoda fotoelasticităţii.

Se poate afirma că problema materialului necesar studiilor de fotoelasticitate este de o mare importanţă pentru această metodă de cercetare a tensiunilor, fapt care explică preocuparea intensă a cercetătorilor din acest domeniu pentru perfecţionarea metodelor de obţinere a materialelor respective care să posede proprietăţile necesare utilizării lor ca modele.

* Prezentată la conferinţa de mecanică, Bucureşti, septembrie 1965

Cîteva preocupări mai noi în producerea acestor materiale sînt oglindite în lucrările [2]—[6]. Fiecare dintre autorii citați au căutat fie să găsească noi materiale, fie să îmbunătățească pe cele existente.

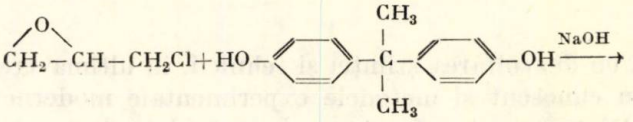
Cele mai utilizate în fotoelasticitate sînt rășinile epoxidice, iar în legătură cu acestea deosebirea dintre diferiții cercetători apare în problema întăritorului folosit (anhidride acide, amine etc.), a concentrației de întăritor, a regimului termic, cît și a timpului de întărire. Cercetătorii din fiecare țară au căutat să folosească rășini din producție indigenă. Și în țara noastră au existat unele preocupări în acest sens. În lucrarea [8] este prezentat un studiu privind întărirea rășinii Dinox F 110 cu anhidridă ftalică. Cu toate acestea, constatăm că în studiile de fotoelasticitate a diferitelor laboratoare din țara noastră se folosesc mai mult sau aproape în exclusivitate rășini epoxidice denumite Araldite B și Araldite D, cu întărire la cald și respectiv la rece, procurate din import.

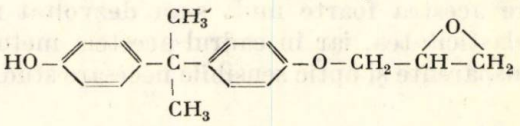
Întrucît la încercările făcute în laboratorul de fotoelasticitate al Facultății de matematică și mecanică de la Universitatea din București s-au întîmpinat greutăți la întărirea rășinilor Dinox (produs al fabricii „Getica" din București) cu anhidridă ftalică s-au mai încercat și alți întăritori. Astfel, întărirea cu anhidridă maleică este mai ușor de realizat.

După cum se va vedea din cuprinsul lucrării de față, calitatea rășinii romînești întărită cu anhidridă maleică nu diferă sensibil de materialele preparate în alte țări (vezi tabela 1).

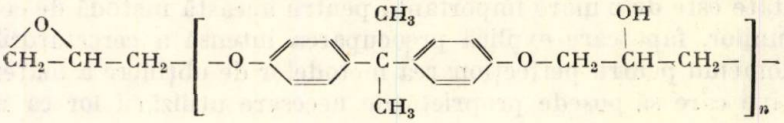
Rășinile epoxidice se obțin prin reacția de condensare dintre substanțe ce conțin grupa epoxi și fenoli polihidroxilici. Substanțele purtătoare ale grupei epoxi și care se folosesc în sinteza rășinii epoxidice sînt în special epiclorhidrina, diglicidil eterul, butadien-dioxidul, iar ca fenoli polihidroxilici se folosesc : rezorcina, pirogalolul, difenilol-propanul (dianul), difenilolmetanul etc. Prin combinarea acestor materii prime se obține o mare varietate de rășini epoxidice cu calități diferite.

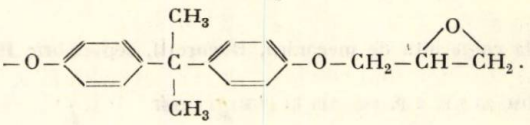
Rășinile epoxidice cele mai răspîndite, din care face parte și rășina Dinox 110, se obțin din reacția dintre epiclorhidrină și difenilol-propan, în mediu alcalin :





Formula generală a unei astfel de rășini se poate scrie :





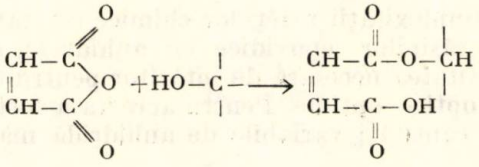
În funcție de raportul de amestecare a celor doi reactanți se pot obține rășini cu mase moleculare diferite care determină proprietățile mecanice ale rășinii obținute. Cele cu masă moleculară mică sînt lichide la temperatura ordinară, iar cu creșterea masei moleculare rășinile devin solide.

Grupele epoxi prezente la capetele lanțului sînt capabile să reacționeze cu aminele, acizii organici, anhidridele acide și fenolii polihidroxilici ducînd la formarea unei structuri tridimensionale, rezultînd un produs insolubil, infuzibil și cu proprietăți mecanice remarcabile. Acest proces poartă denumirea de întărire.

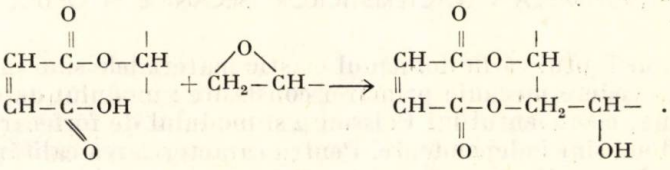
La întărirea rășinilor epoxidice cu anhidride sînt posibile mai multe reacții paralele.

Astfel, cu anhidrida maleică au loc reacțiile :

1. Reacția cu grupa hidroxil :



2. Reacția grupei carboxil formate cu grupa epoxi :



Pe lîngă aceste reacții principale mai au loc : esterificarea grupelor carboxilice formate cu grupele hidroxi, hidroliza esterului format etc.

Alegerea întăritorului utilizat se face în funcție de fluiditatea rășinii, de proprietățile cerute rășinii întărite și de regimul termic la care are loc întărirea.

PROCESUL DE ÎNTĂRIRE A RĂȘINII DINOX

În prezenta lucrare s-a studiat întărirea rășinii Dinox 110 cu anhidridă maleică. Pentru desfășurarea procesului de întărire a rășinilor epoxidice cu anhidride acide, literatura de specialitate indică două metode : încălzirea separată a celor două componente și amestecarea în stare lichidă, iar a doua cale este încălzirea rășinii pînă la fluidizare și adăugarea anhidridei sub formă de praf, însoțită de o amestecare puternică. Prima variantă are avantajul că se obține un amestec omogen care se degazează foarte ușor, însă la această temperatură anhidridele sublimează puternic.

Pentru întărirea rășinii Dinox am folosit prima metodă. Rășina a fost încălzită într-un vas metalic cu pereții groși la 140°C, într-un termostat, peste care s-a adăugat anhidridă maleică sub formă lichidă, topită într-un vas închis. După agitare energică timp de 10—15 min, amestecul a fost turnat în forma de turnare pregătită și încălzită la aceeași temperatură

ca și rășina. Deoarece anhidrida maleică este destul de iritantă în special pentru ochi, trebuie ca turnarea să se facă sub nișă sau în camere bine aerisite. După turnare temperatura s-a stabilit la 140°C și probele au fost menținute la această temperatură timp de 5h, apoi a început scăderea treptată a temperaturii cu o viteză de 5°C/h pînă la temperatura camerei. Pentru detensionarea plăcilor obținute s-a folosit următorul regim termic : încălzirea treptată a plăcilor, așezate pe o suprafață perfect plană, cu o viteză de 10°C/h pînă la 140°C, menținerea la această temperatură timp de 3 h, apoi scăderea temperaturii cu 5—10°C/h. În acest mod s-au obținut plăci destul de omogene.

Formele folosite au fost pregătite în prealabil, pentru a evita lipirea rășinii, prin formarea unei pelicule de lac siliconic. Pentru aceasta formele au fost tratate la rece cu o soluție diluată de ulei siliconic în benzină ușoară și apoi încălzite timp de 2 h la 200°C.

Din cauza complexității reacțiilor chimice (arătate anterior) care se petrec la întărirea rășinilor epoxidice cu anhidride, este greu de determinat teoretic cantitatea necesară de întăritor pentru a obține caracteristicile mecanice și optice optime. Pentru aceasta a fost necesar să se studieze întărirea cu cantități variabile de anhidridă maleică.

DETERMINAREA CARACTERISTICILOR MECANICE ȘI OPTICE

Este știut faptul că în domeniul elastic materialele sînt caracterizate din punct de vedere mecanic prin trei constante : modulul de elasticitate E a lui Young, coeficientul lui Poisson μ și modulul de forfecare G, dintre care numai două sînt independente. Pentru caracterizarea calității materialelor folosite în fotoelasticitate este suficientă cunoașterea modulului E. Acesta a fost determinat prin metoda încovoierii unei bare ca în figura 1 și calculat după formula

$$E = \frac{P l^3}{4 b f h^3} \text{ [kg/cm}^2\text{]}, \quad (1)$$

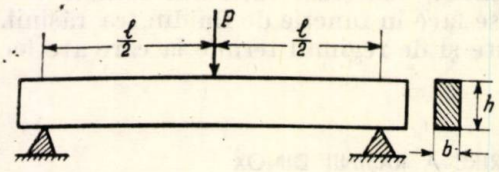


Fig. 1.—Schema metodei de determinare a modulului de elasticitate.

în care

P este sarcina aplicată, în kg,

f — săgeata maximă, în cm,

iar celelalte mărimi corespund notațiilor din fig. 1 cu următoarele valori : $l = 7{,}6$ cm ; $b = 0{,}5$ cm și $h = 1$ cm.

Pentru materiale optic sensibile se folosesc de obicei următoarele mărimi ce caracterizează calitățile tenso-optice :

$$\sigma_0 = \frac{\lambda}{C e} \quad (2)$$

$$\sigma_0^{(1,0)} = \sigma_0 \cdot e = \frac{\lambda}{C} \text{ sau } C = \frac{\lambda}{\sigma_0^{(1,0)}} \quad (3)$$

în care

λ este lungimea de undă a luminii monocromatice folosite,
e — grosimea modelului,
C — constanta optică de tensiune caracteristică materialului folosit,
σ_0 — valoarea benzii modelului,
$\sigma_0^{(1,0)}$ — valoarea benzii materialului, obținută pentru grosimea modelului de 1,0 cm.

Mărimea $\sigma_0^{(1,0)}$ este o constantă fundamentală caracteristică cu ajutorul căreia se poate găsi valoarea benzii pentru modele de diferite grosimi.

Pentru determinarea valorii $\sigma_0^{(1,0)}$ s-a folosit metoda discului circular comprimat diametral. Valoarea lui $\sigma_0^{(1,0)}$ s-a calculat cu formula

$$\sigma_0^{(1,0)} = \frac{8P}{\pi Dm}\left[\frac{\text{kg}}{\text{benzi. cm}}\right], \tag{4}$$

în care

P este sarcina aplicată, în kg,
D — diametrul discului, în cm,
m — ordinul benzii în centrul discului.

S-au folosit discuri cu diametrul de 4 cm.

Deoarece materialele folosite prezintă fluaj optic, adică mărirea numărului de benzi (izocromate) în timp, pentru o sarcină constantă, s-a aflat mărimea acestuia prin determinarea variației ordinului de bandă în centrul discului cu ajutorul unui compensator Senarmonte. Valorile benzii materialului la diferite timpuri de la încărcare s-au calculat cu relația (4).

Deoarece analiza separată a modulului de elasticitate E și a constantei optice de tensiune nu caracterizează în suficientă măsură calitatea unui material fotoelastic, s-a definit coeficientul optico-mecanic de calitate prin relația

$$K_{MO} = \frac{E}{\sigma_0^{(1,0)}} \cdot 10^{-3} \ [\text{benzi.cm}^{-1}]. \tag{5}$$

REZULTATE EXPERIMENTALE

În figura 2 s-au reprezentat valorile modulului de elasticitate E în funcție de cantitatea de anhidridă maleică (valorile reprezentate sînt calculate după o solicitare de 30 min).

Se constată că modulul de elasticitate atinge o valoare maximă pentru o compoziție de 30 g de anhidridă maleică și 100 g de rășină. Peste această compoziție valoarea modulului de elasticitate scade foarte mult.

Valorile benzii materialului $\sigma_0^{(1,0)}$ în funcție de cantitatea de agent de întărire s-au reprezentat în figura 3 : curba continuă pentru valorile la încărcarea instantanee, iar curba întreruptă pentru valorile după 30 min de la încărcare. Pentru aceeași compoziție de 30 g de anhidridă și 100 g de rășină se găsește valoarea minimă a lui $\sigma_0^{(1,0)}$, ceea ce corespunde valorii optime a materialului.

Una dintre proprietăţile necesare unui material fotoelastic este aceea de a prezenta un fluaj optic cît mai slab. Pentru aceasta s-a studiat fluajul optic în funcţie de cantitatea de agent întăritor (fig. 4).

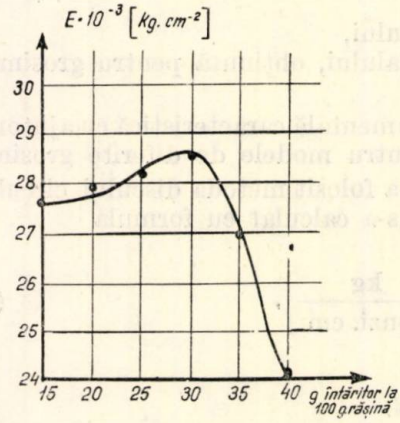


Fig. 2.—Variaţia modulului de elasticitate cu compoziţia amestecului.

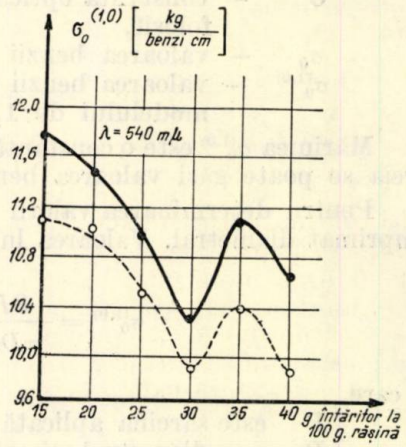


Fig. 3.—Variaţia valorii benzii materialului cu compoziţia amestecului.

Pentru toate probele se constată un fluaj mai accentuat în primele 30 min de la solicitare, apoi viteza de fluaj optic scade şi devine aproape constantă (funcţie liniară de timp). Cunoaşterea acestei comportări este deosebit de necesară pentru folosirea practică a materialului. Din figura 4 se constată că materialele au o viteză de fluaj în porţiunea de variaţie liniară funcţie de cantitatea de întăritor indicată pe fiecare curbă (vezi fig. 4). Aceasta permite să se tragă concluzia că compoziţia optimă este de 25—30 de

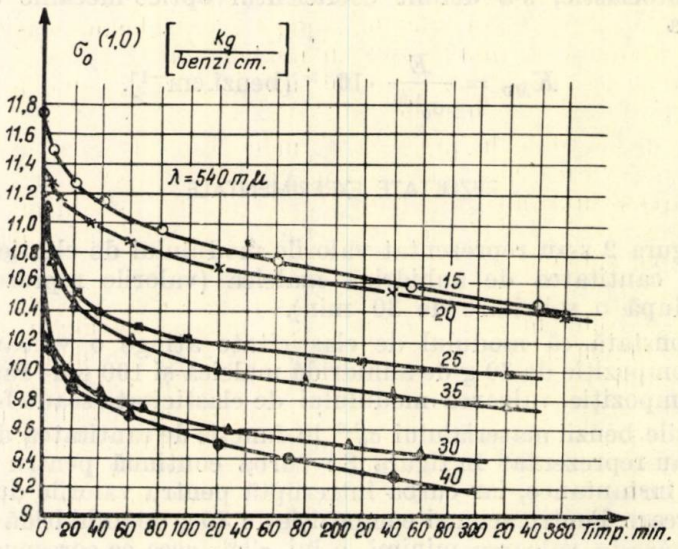


Fig. 4.—Curbele de fluaj optic pentru amestecuri cu compoziţie variabilă.

părți întăritor. De asemenea se recomandă ca determinările experimentale pe modele confecționate din aceste materiale să se facă după cel puțin 30 min de la solicitarea modelului, cînd fluajul scade apreciabil și viteza devine aproximativ constantă.

DISCUȚIA REZULTATELOR

Reprezentînd coeficientul optic-mecanic de calitate K_{MO} definit prin relația (5), rezultă graficul din figura 5 (curba continuă). Din acesta se trage concluzia că prin întărirea rășinii Dinox 110 cu anhidridă maleică se obține un material cu proprietăți fotoelastice optime pentru un amestec de 30 g de anhidridă maleică și 100 g de rășină, corespunzătoare maximului de pe curbă.

Pe lîngă coeficientul de calitate maxim, aceeași compoziție prezintă și viteză minimă de fluaj optic, definită prin $\frac{d\sigma_0^{(1,0)}}{dt}$, după cum se arată în figura 5 (curba întreruptă). De asemenea aceste rășini prezintă o bună proporționalitate între valoarea benzii materialului $\sigma_0^{(1,0)}$ și sarcină pînă la 100 kg/cm².

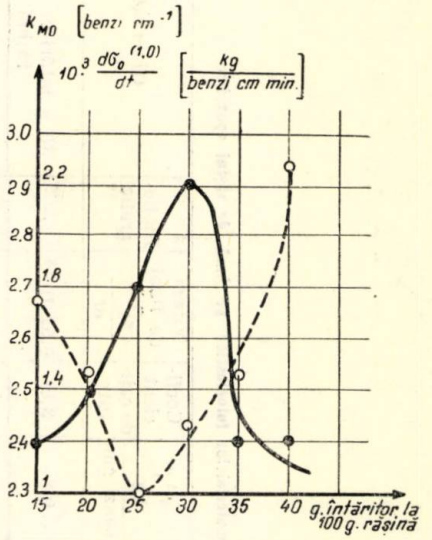


Fig. 5.—Variația coeficientului de calitate K_{MO} și a vitezei de fluaj optic cu compoziția amestecului.

Pe lîngă caracteristicile arătate anterior, rășinile epoxidice întărite cu anhidridă maleică prezintă o bună transparență, deși rășina inițială are o colorație roșiatică slabă, care se transmite și probelor întărite. Aceste materiale se prelucrează foarte ușor în modele, nu sînt casante; se pot prelucra chiar și la viteze mai mari de tăiere cu mașini-unelte și se pot realiza detalii destul de fine ale modelelor.

Efectul de margine la prelucrarea mecanică este comparabil cu al altor rășini și se micșorează după aproximativ 12 ore, iar efectul de margine ce apare în timp (îmbătrînire) este foarte slab în primele 3—4 zile de la prelucrarea modelului, ceea ce este suficient în general pentru efectuarea experiențelor.

Din comparația caracteristicilor mecanice, optice și a coeficientului de calitate cu ale altor materiale fotoelastice pe bază de rășini epoxidice, prezentate în tabela 1, se poate trage concluzia că rășina Dinox 110, întărită cu anhidridă maleică, constituie un material similar cu cele mai bune materiale folosite în străinătate. Fluajul optic nu a putut fi comparat pentru toate rășinile prezentate din cauza lipsei datelor experimentale. Viteza de fluaj optic pentru rășinile Araldite B (cu întărire la cald) și Araldite D (cu întărire la rece) au fost determinate de autori în aceleași condiții ca și restul probelor.

Primită la redacție la 4 octombrie 1965

Tabela 1

Date comparative asupra proprietăților mecanice, optice și de fluaj ale materialelor fotoelastice pe bază de rășini epoxidice

Rășina	Întăritorul	Firma producătoare	E kg/cm²	$\sigma_0^{(1,0)}$ kg/benzi.cm	Coeficient de calitate	Viteza de fluaj $\frac{\sigma_0^{(1,0)}}{dt}$	Bibliografie	Observații
Araldite B*)	Härter 901	CIBA	$3,0.10^4$	9,8	3,06	$0,52.10^{-3}$	—	30 g întăritor la 100 g rășină
Araldite D*)	Härter 951	CIBA	$2,45.10^4$	12,8	1,9	$4,6.10^{-3}$	—	idem
Dinox 110F	Anhidridă ftalică	ICECHÍM	$3,3.10^4$	10,4	3,15	—	8	idem
Epoxi XC	Anhidridă maleică și ftalică 1 : 1	CEHOSLOVACA	$3,1.10^4$	11	2,75	—	6	Prezintă fluaj necalculat
Rășina 3 40	Anhidridă ftalică	МИХМ-ИМАШ URSS	$3,5.10^4$	10,5	2,9	—	5	—
Dinox 110	Anhidridă maleică	GETICA ROMÂNIA	$2,85.10^4$	9,7	2,9	$1,1.10^{-3}$	—	30 g anhidridă la 100 g rășină

*) Determinări făcute de autori.

BIBLIOGRAFIE

1. G. S. Petrov, A. N. Levin, *Rășini termoreactive*, București, Edit. tehnică, 1962.
2. H. Lee, K. Neville, *Epoxy resins*, New York, Mc. Graw Hill, 1957.
3. M. M. Leven, *Proceedings of the International Symposium held at Illinois Institute of Technology*, Chicago, October 1961, Pergamon Press, 1963, p. 145.
4. G. Haberland, Ch. Pidde, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule fur Architektur und Bauwesen Weimar*, **11**, *2*, 127 (1964).
5. *** *Polearisationovo—opticeskii metod isledovania napreajenii*, Izd. Len. Univ., 1960, p. 151—173.
6. *** *Polearisaționovo-opticeskii metod isledovania napreajenii*, Izd. „Nauka", Moscova 1965, p. 36—44 și 54—60.
7. *** *Isledovania po uprugosti i plasticinosti*, sbornik 2, Izd. Len. Univ., 1963, p. 153—166.
8. M. Arcan, F. Stoenescu, R. Mihail, St. cerc. mec. apl., **VIII**, *4* (1957).

RECENZII

AUGUSTIN PETRE, *Teoria aeroelasticității. Statica*, București, Edit. Academiei, 1966, 675 p.

Studiul problemelor aeroelastice a căpătat în ultimul timp o actualitate din ce în ce mai mare pe scară internațională.

Lucrarea amintită mai sus cuprinde studiul principalelor fenomene aeroelastice statice cunoscute, precum și o serie de contribuții originale ale autorului în acest domeniu.

Față de literatura de specialitate existentă, în afară de unele aspecte matematice și a unor noi metode de calcul introduse, extinderea acestei discipline a fost efectuată în două direcții.

O primă direcție urmează modul existent de a privi fenomenele aeroelastice. Astfel, fenomenele aeroelastice cunoscute pînă în prezent privesc mișcarea de translație a suprafețelor portante. În prezenta lucrare studiul este extins pentru suprafețe portante în rotație și rototranslație, adăugînd la această generalizare efectul forțelor centrifuge, termoelastice etc. De asemenea, în general, structura de rezistență a suprafețelor portante este aproximată ca bară. În lucrare, studiul fenomenelor aeroelastice este extins și pentru cazuri mai largi de aproximație a structurilor suprafețelor portante, cum sînt barele cu pereți subțiri.

O a doua direcție este pusă în evidență pornind nu de la interacțiunea dintre portanță și forțele elastice, ci prin considerarea efectului rezistenței la înaintare și a complexului portanță-rezistență la înaintare. Luarea în considerare a efectului rezistenței la înaintare permite cuplarea efectului deformațiilor de răsucire cu cele de încovoiere, astfel încît valorile critice obținute pentru aceste noi fenomene sînt în multe cazuri mai periculoase decît cele cunoscute.

În cuprinsul lucrării au fost dezvoltate în capitolele introductive probleme privind aspectul matematic, calculul forțelor elastice, termoelastice sau aerodinamice care intervin.

După un prim capitol introductiv, în care se prezintă obiectul aeroelasticității, o descriere sumară a principalelor fenomene aeroelastice și un scurt istoric, se tratează problema valorilor proprii în aeroelasticitate.

Capitolul următor privește calculul deformațiilor structurilor elastice, pornind de la ecuațiile de deformație date sub formă de ecuații diferențiale, integrale sau sub formă de sisteme liniare. Următoarele două capitole privesc calculul forțelor aerodinamice și efectul temperaturilor înalte.

În continuare, fiecare capitol cuprinde cîte un fenomen aeroelastic. Astfel, în capitolul VI se tratează fenomenul de divergență. Este descrisă pentru început divergența la răsucire datorită portanței. Se prezintă cazurile care permit o soluționare închisă, precum și metodele aproximative posibile pentru acest caz. Studiul divergenței este extins în cazul suprafețelor portante în mișcare de rotație și rototranslație, luînd în considerare efectul forțelor

centrifuge, efectul temperaturii, precum și în cazul aproximării suprafeței portante ca bară cu pereți subțiri.

Se prezintă în continuare cazurile de divergență produse de portanță prin încovoiere sau încovoiere și răsucire.

Efectul rezistenței la înaintare și fenomenul de divergență produs sînt descrise în continuare. Se prezintă de asemenea cazul cel mai general de divergență, produs de complexul portanță-rezistență la înaintare. Sînt date aici și metodele de calcul necesare pentru soluționarea ecuațiilor integrodiferențiale care intervin, precum și soluționarea concretă pentru acest fenomen. Este de remarcat că domeniul de stabilitate este serios redus de către noile fenomene care se produc ținînd seama de rezistența la înaintare.

În capitolul VII este descris fenomenul de repartiție aeroelastică a portanței. Se prezintă pentru început fenomenele produse de portanță datorite deformațiilor de răcire. Sînt prezentate cazurile care permit soluționări închise, precum și metode aproximative de calcul. Fenomenul este studiat în continuare pentru suprafețe portante în mișcare de rotație și rototranslație. Efectul tensiunilor axiale care influențează fenomenul este introdus prin restrîngerile de deplanare produse de răsucire, efectele forțelor centrifuge etc.

După studiul fenomenelor de repartiție produse datorită portanței și deformațiilor de încovoiere și răsucire este prezentat fenomenul cel mai general, în care se consideră complexul portanță-rezistență la înaintare. Sînt prezentate diferite metode de calcul pentru aceste noi fenomene ce se obțin, iar rezultatele sînt date sub formă de tabele și de diagrame.

A treia categorie de fenomene aeroelastice descrise privesc suprafețele de comandă. Fenomenele considerate sînt atenuarea, anularea și inversarea efectului comenzilor. Aceste fenomene sînt studiate prezentînd metode închise și aproximative atît pentru sisteme plane, cît și pentru sisteme în spațiu. Astfel sînt studiate fenomenele produse de portanță ca urmare a solicitării de răsucire, a solicitării combinate de încovoiere și răsucire și, în final, cazul general al fenomenelor produse de complexul portanță-rezistență la înaintare ca urmare a solicitărilor combinate de încovoiere laterală și răsucire.

Viteza critică de anulare a efectului comenzilor și aprecierea atenuării sau accentuării acestor efecte sînt date în toate cazurile descrise. Se remarcă și aici importanța fenomenului produs prin intermediul rezistenței la înaintare.

Ultima categorie de fenomene aeroelastice, descrise în capitolul IX, sînt cele care privesc stabilitatea statică longitudinală a avionului. Este studiată diminuarea stabilității, ținînd seama atît de efectul deformațiilor datorite portanței, cît și de efectul acestor deformații datorite complexului portanță-rezistență la înaintare.

Lucrarea, în ansamblu, reprezintă o contribuție valoroasă a autorului în domeniul teoriei aeroelasticității.

Liviu Librescu

ST. I. GHEORGHIȚĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*. Edit. Academiei, București, 1966, 582 pag. + 140 fig.

Studiul scurgerii fluidelor prin medii poroase a cunoscut de cîtva timp o dezvoltare rapidă, datorită, desigur, posibilităților de aplicare a rezultatelor teoretice în mai multe domenii ale științei și tehnicii. Numărul tratatelor în care autorii au încercat să dea o imagine de ansamblu a acestei ramuri a mecanicii fluidelor este destul de restrîns, fapt care este de altfel explicabil dacă ne gîndim la amploarea materialului bibliografic care ar trebui pre-

zentat. Din acest motiv, specialiştii s-au orientat în timpul din urmă spre elaborarea unor monografii referitoare la unul sau la mai multe aspecte ale problemei generale a scurgerii fluidelor prin medii poroase. Literatura ştiinţifică şi tehnică în limba română posedă cîteva lucrări de acest gen, la care se adaugă acum cartea despre care vorbim. Trebuie să spunem însă de la început că nu este vorba de o monografie propriu-zisă, ci de prezentarea principalelor metode matematice care se întrebuinţează de obicei în studiul scurgerii fluidelor prin medii poroase. Autorul, care lucrează de destul de multă vreme în acest domeniu, a reţinut un anumit număr dintre aceste metode, pe care le-a expus cu ajutorul mai multor exemple alese din diferitele capitole ale hidrogazodinamicii subterane.

Utilizarea cărţii este uşurată prin existenţa unui capitol introductiv consacrat ecuaţiilor scurgerii fluidelor prin medii poroase, în care sînt trecute în revistă destul de concis bazele matematice ale teoriei.

Capitolul al doilea conţine o prezentare a cîtorva metode utilizate în studiul scurgerilor plane ale lichidelor incompresibile. Instrumentul matematic este acela binecunoscut al teoriei funcţiilor de variabilă complexă, cele mai multe metode comportînd utilizarea reprezentării conforme. Semnalăm de asemenea expunerea destul de scurtă referitoare la metodele de studiu pentru scurgerile rapide.

Capitolul următor este dedicat scurgerilor cu suprafaţă liberă, care conduc la probleme în general mai complicate. Din punct de vedere matematic, metodele matematice sînt destul de asemănătoare cu cele din capitolul precedent. Este vorba tot de a se găsi soluţiile anumitor probleme la limită cu ajutorul mijloacelor furnizate de teoria funcţiilor de variabilă complexă şi mai ales cu ajutorul reprezentărilor conforme.

Capitolul al patrulea conţine studiul scurgerilor prin mediile poroase neomogene. Este vorba în primul rînd de mediile poroase compuse din mai multe porţiuni adiacente, a căror permeabilitate este constantă, dar diferă de la una la alta.

Studiul scurgerilor în spaţiul cu trei dimensiuni face obiectul unui alt capitol. Problemele de acest gen sînt în general dificile, dar autorul dă o privire destul de completă asupra soluţiilor cunoscute pînă în prezent.

Capitolul al şaselea este consacrat scurgerilor nepermanente. Semnalăm printre problemele tratate studiul soluţiilor exacte şi aproximative ale ecuaţiei lui Boussinesq, cîteva cazuri de scurgeri liniare sau radiale ale lichidelor compresibile în care intervin şi forţele de inerţie şi, în sfîrşit, unele aplicaţii ale metodei numite a relaţiilor integrale.

Ultimul capitol conţine cîteva consideraţii asupra scurgerii fluidelor neomogene. Autorul s-a mărginit la studiul scurgerii fluidelor imiscibile în ipoteza dezlocuirii complete a unui fluid de către celălalt. Sînt date şi unele consideraţii asupra stabilităţii suprafeţei de contact dintre cele două fluide. Acest capitol ar fi putut fi mai dezvoltat, dar acest fapt nu diminuează interesul cărţii în general.

Fiecare capitol este însoţit de o revistă bibliografică foarte bogată, care permite cititorului să aprofundeze anumite probleme prezentate în carte.

Punctul de vedere adoptat de autor este bine justificat, deoarece a permis realizarea unei expuneri sistematice, care conţine, cu cîteva excepţii, principalele metode matematice utilizate în studiul scurgerii fluidelor omogene prin mediile poroase. În acest mod, cel care doreşte să se iniţieze în aceste probleme găseşte în carte o călăuză competentă şi de bună calitate, în timp ce pentru specialist sugestiile pentru noi cercetări nu lipsesc. Expunerea este făcută la un nivel matematic corespunzător, fără nici o concesiune lipsei de rigoare, dar rămîne clară şi accesibilă. Contribuţiile personale ale autorului şi ale colaboratorilor săi la dezvoltarea unor probleme teoretice sau a aplicaţiilor sînt amintite pe larg. Dacă s-ar fi acordat aceeaşi atenţie lucrărilor altor cercetători din ţara noastră, s-ar fi pus, poate, mai bine în evidenţă contribuţia şcolii româneşti la domeniul care face obiectul cărţii. În orice caz,

nimic esențial nu lipsește, ceea ce se poate spune de altfel și despre bibliografia referitoare la lucrările străine.

Considerăm că această carte completează în mod fericit sursele importante de documentare în acest domeniu atît pentru specialiștii cu diferite orientări, cît și pentru cei care doresc să ia cunoștință cu una dintre ramurile mecanicii fluidelor a cărei dezvoltare a fost atît de bogată în noutăți în ultimul timp.

T. Oroveanu

L. M. MILNE THOMSON, *Theoretical Aerodynamics* (Aerodinamica teoretică), ed. a 4-a revizuită și lărgită, Macmillan Editor, St. Martin's Press, New York, 1966, 430 p.

În această lucrare, autorul, de mare prestigiu și renume mondial, tratează despre mișcările fluide în jurul aripilor de avion și a forțelor aerodinamice care acționează asupra întregului avion ca rezultat al acestei mișcări.

Utilizînd cu multă competență metodele matematice curente de calcul diferențial, calculul vectorial și funcțiile de variabilă complexă, lucrarea se remarcă printr-o deosebită claritate a expunerii atît în ceea ce privește explicarea fenomenului fizic, cît și în privința dezvoltărilor matematice corespunzătoare.

Împărțită în 21 de capitole, lucrarea debutează cu o parte introductivă, cuprinzînd considerațiile generale necesare dezvoltărilor ulterioare (cap. I și II). Avînd de asemenea un caracter recapitulativ, ultimul capitol (XXI) conține o succintă trecere în revistă a elementelor de calcul vectorial cu aplicații la mecanica fluidelor.

Capitolele III—VIII tratează problema mișcării bidimensionale (mișcări irotaționale, mișcări cu vîrtejuri, scurgerea în jurul profilelor etc.). În ceea ce privește studiul profilelor aerodinamice, este de remarcat faptul că autorul tratează toate tipurile cunoscute de profile, atît profilele Jukovsky, cît și profilele terminate cu un diedru (profile Kármán-Trefftz, von Mises), precum și cele cu bord de fugă rotunjit (profile Carafoli). Se remarcă de asemenea în această parte a lucrării „cea de-a doua teoremă a cercului", introdusă pentru prima dată în această ediție.

Un alt grup de capitole (IX—XIV) se referă la studiul aripilor de anvergură finită în regim subsonic incompresibil, ultimele două capitole din acest grup fiind cu referire specială la studiul elicelor și la corecțiile de tunel.

Problema scurgerii subsonice compresibile și a scurgerii supersonice în jurul aripilor face obiectul capitolelor XV—XVII și capătă o dezvoltare mai mare în această ediție față de edițiile precedente.

În sfîrșit, ultimul grup de capitole (XVIII—XX) se ocupă de problemele de zbor ale avionului luat ca ansamblu.

Este de remarcat că lucrarea cuprinde în total un număr de circa 400 de exerciții, în majoritatea lor compuse special pentru o mai bună înțelegere a problemelor tratate.

Prin expunerea sa clară și concisă și prin stilul elegant, prin acoperirea unui larg domeniu de probleme, pentru rezolvarea cărora sînt utilizate metodele cele mai adecvate fiecărui caz în parte, cartea lui L. M. Milne Thomson constituie o lucrare de bază pentru profesorii, cercetătorii, inginerii, matematicienii și studenții care se ocupă de aerodinamică sau de domeniile înrudite.

Fiind deosebit de valoroasă, ceea ce se confirmă şi prin faptul că se găseşte la cea de-a patra ediţie, această carte va fi, desigur, pe masa de lucru a fiecărui specialist din domeniul aerodinamicii.

Dan Mateescu şi *Adriana Năstase*

Dr. ing. habil. ERNST R. G. ECKERT, *Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch*, Berlin, Springer Verlag, ed. a 3-a, 1966, XII + 310 pag., 177 fig.

Această lucrare tratează din punct de vedere ştiinţific şi tehnic problemele de bază ale transportului căldurii şi materiei prin difuzie, convecţie şi radiaţie. Sînt examinate soluţiile conducţiei staţionare şi instaţionare, cu exemple şi aplicaţii numerice. Diferitele forme ale coeficientului de transfer de căldură prin convecţie în stratul-limită laminar, turbulent şi în zona de desprindere, ca şi elemente de convecţie liberă, sînt de asemenea ilustrate prin exemple particulare. Radiaţia este prezentată sub forma coeficienţilor de emisie ai diferitelor corpuri, precum şi a legilor radiaţiei, dar în acelaşi timp se examinează problema interacţiunii radiaţiilor emise de corpuri cu temperaturi diferite.

Difuzia moleculară, transportul materiei la scară molară şi analogia cu transportul căldurii sînt aplicate studiului aerului umed, amestecului a două faze etc. Sînt prezentate interesante analogii electrice pentru calculul diferiţilor coeficienţi de transport. Cu toate că această lucrare are o înaltă ţinută ştiinţifică, ea este în acelaşi timp extrem de utilă inginerilor şi studenţilor atît prin numeroasele exemple tratate, cît şi prin tabelele cu date practice şi prin abordarea cazurilor de interes tehnic primordial.

Şt. N. Săvulescu

W. D. BIGGS, *The mechanical behaviour of engineering materials* (Comportarea materialelor în construcţia de maşini), Londra, Pergamon, 1965.

Progresul rapid al tehnicii moderne în domeniul construcţiei de maşini impune încadrarea proprietăţilor fizico-mecanice ale materialelor folosite în construcţii în legi teoretice care să fie cît mai corespunzătoare fenomenelor reale.

Evoluţia tehnicii a demonstrat că în acest domeniu condiţiile de proiectare se îmbunătăţesc continuu, pe măsură ce cunoaşterea proprietăţilor materialelor capătă un conţinut mai mare atît cantitativ, cît şi ca adîncime în analiza fenomenelor.

Studiul asupra proprietăţilor materialelor este efectuat prin prisma structurii la nivel atomic. Lucrarea este împărţită pe capitole, tratînd despre structură, eterogenitate, solide elastice, abaterile de la elasticitatea ideală, plasticitate, rupere, încercări de tracţiune şi duritate, experienţe de curgere, oboseală şi impact.

Ultimul capitol este rezervat alegerii materialelor de construcţie.

În ansamblu, prezentarea materialelor este efectuată în mod original, în sensul că autorul a inclus armonios date referitoare la constituţia şi la proprietăţile materialelor, pe care le completează cu unele prescripţii, rezultate ale experimentării de laborator.

Pentru fiecare capitol este indicată o prețioasă bibliografie de specialitate, care dă cititorului posibilitatea aprofundării problemei expuse în domeniul respectiv.

Cele 33 de probleme propuse spre rezolvare care încheie expunerea oferă posibilitatea exersării și aplicării în mod creator a teoriilor redate în secțiunile cărții.

Lucrarea de față înlesnește o mai bună cunoaștere a proprietăților mecanice ale materialelor ce se folosesc în construcția de mașini. Abordînd cele mai noi aspecte ale domeniilor studiate, cartea reprezintă o valoroasă contribuție la literatura de specialitate.

I. Mitrică

G. N. SAVIN, T. V. PUTIATA și B. N. FRADLIN, *Ocerki razvitiia mehaniki* (Schițe ale dezvoltării mecanicii), Kiev, Naukova Dumka, 1964, 376 p.

Monografia conține în principal o expunere amănunțită a activității științifice remarcabile desfășurată de către Piotr Vasilievici Voroneț (1871—1923) în domeniile mecanicii sistemelor materiale neolonome, dinamicii și cinematicii sistemelor olonome și al mecanicii cerești. Alcătuirea monografiei este motivată de către autori prin faptul că lucrările de mare valoare științifică ale lui P. V. Voroneț, elaborate într-un interval de peste 20 de ani și publicate în revistele de mic tiraj ale Universităților din Kiev și din Simferopol, sînt, din păcate, foarte puțin cunoscute de către specialiștii din U.R.S.S. și de cei din afara hotarelor ei.

În cadrul monografiei sînt expuse trei categorii de probleme în care contribuției lui P. V. Voroneț este necesar să i se restabilească prioritatea în știință. Sînt expuse în cadrul fiecărei categorii de probleme scurte schițe cu caracter istoric pentru a fixa locul lucrărilor lui P. V. Voroneț și apoi detaliat sînt prezentate rezultatele principale conținute în aceste lucrări. În expunerea schițelor istorice se subliniază contribuția originală a savanților ruși și sovietici din acest domeniu. În încheierea acestor schițe se face o actualizare a problemelor tratate, indicîndu-se domeniile cele mai noi, teoretice și aplicative, care s-au dezvoltat pe fundamentele puse în ultima parte a secolului al XIX-lea și începutul secolului al XX-lea.

Monografia conține pentru fiecare dintre cele trei părți ale sale cîte o foarte bogată bibliografie (în total sînt citate 1 219 titluri de lucrări), care poate prezenta un interes de sine stătător pentru specialiștii de mecanică a sistemelor materiale nedeformabile. În cadrul acestei bibliografii sînt citate și un mare număr de lucrări ale omului de știință român acad. Gh. Vrănceanu.

Monografia se adresează specialiștilor în mecanica rațională, cadrelor didactice și cercetătorilor din domeniul istoriei matematicii și mecanicii, precum și studenților din universități și din institute tehnice cu profil de mecanică.

D. Drăghicescu

H. L. GARABEDIAN (editat de), *Approximation of functions* (Aproximarea funcțiilor), Amsterdam-Londra-New York, Elsevier Publishing Company, 1965, X + 220 p.

Între 31 august și 2 septembrie 1964 a avut loc la Warren, Michigan, S.U.A., un simpozion asupra aproximației funcțiilor, ținut sub auspiciile laboratoarelor de cercetare ale

firmei „General Motors"; acesta este al optulea simpozium ținut începînd din 1957 sub auspiciile acestui laborator.

Lucrarea cuprinde 13 articole, dedicate unor probleme importante din domeniul aproximației funcțiilor, probleme privite într-un spirit modern; este interesant din acest punct de vedere să menționăm în special algoritmele de calcul pentru mașinile digitale. Aceste mașini au lărgit foarte mult orizontul cercetărilor: cercetătorilor nu le mai este teamă să se ocupe de probleme pentru care teoria este cunoscută, dar practica este dificilă; ei se ocupă apoi și de probleme pentru care teoria este necunoscută, dar practica poate să fie posibilă. În felul acesta se stabilește o nouă concepție privind aproximațiile.

J. L. Walsh se ocupă de convergența șirurilor de funcții raționale de cea mai bună aproximație cu poluri libere. A. Sard utilizează spațiile Hilbert, iar R. C. Buck aplică dualitatea în teoria aproximației.

Teoreme de incluziune pentru distanța minimă în aproximarea rațională a lui Cebîșiov cu mai multe variabile sînt tratate de L. Collatz. P. Fox, A. A. Goldstein și G. Lastman se ocupă de aproximarea rațională pe rețele finite de puncte.

Metoda fazelor pentru aproximarea polinomială este considerată de E. L. Stiefel. M. Golomb tratează aproximarea liniară optimală și aproape optimală. Aproximarea cu funcții raționale generalizate este prezentată de E. W. Cheney și aproximația neliniară de J. R. Rice. F. L. Bauer se ocupă de șiruri de transformări neliniare. Interpolarea polinomială pe porțiuni a făcut obiectul cercetărilor lui G. Birkhoff și C. R. De Boor.

Menționăm de asemenea interesantul articol de sinteză al lui P. J. Davis privind teoriile de aproximație în primele două decade de mașini electronice. Pe de altă parte, G. G. Lorentz a prezentat literatura sovietică în domeniul teoriei aproximației între anii 1958 și 1964.

Lucrările publicate sînt scrise la un înalt nivel teoretic; totuși caracterul lor aplicativ și interesul pregnant practic care stă la baza lor ies în evidență, rezultatele obținute fiind de o importanță deosebită.

Cartea prezintă interes atît pentru cercetătorii din domeniul științelor naturii, cît și pentru cercetătorii din domeniul științelor tehnice.

P. P. Teodorescu

L. S. D. MORLEY, *Skew plates and structures* (Plăci și structuri oblice), Oxford—Londra—New York—Paris, Pergamon Press, 1963, XII + 128 p.

Această lucrare a apărut sub nr. 5 în seria de monografii de aeronautică și astronautică, editată de Th. von Kármán și H. L. Dryden, grupa I: „Mecanica solidelor și structurilor". Ea este destinată unor elemente de construcție și unor structuri mai complexe care apar atît în construcțiile de avioane, cît și la alte tipuri de construcție, de exemplu plăcile oblice pentru poduri. Problema este foarte actuală și în ultimul timp s-au făcut studii din ce în ce mai numeroase în această direcție. Menționăm că și în țara noastră există un grup de cercetare la Cluj care se ocupă cu studiul dalelor oblice.

Cartea cuprinde trei capitole, o anexă privitoare la placa încastrată în formă de paralelogram, încărcată cu o sarcină uniform distribuită, o bibliografie de circa 100 de titluri și două anexe (de nume și de titluri).

Capitolul I este destinat prezentării stării plane de tensiune în coordonate carteziene ortogonale, coordonate carteziene oblice și coordonate polare. Se dau ecuațiile generale cu caracter geometric și mecanic și se prezintă soluțiile cu ajutorul seriilor trigonometrice pentru grinzile-pereți în formă de paralelogram.

Încovoierea plăcilor plane se studiază în coordonate carteziene oblice și în coordonate polare în capitolul II. Se dau rezultate generale și se prezintă diferite metode de aproximare a condițiilor la limită. Menționăm în special utilizarea metodei diferențelor finite (studiile lui Favre). Problemele de stabilitate sînt de asemenea luate în considerare. O atenție specială este acordată comportării plăcii la colțuri.

În capitolul III se face o analiză a structurilor casetate oblice. Se consideră mai ales cazul unei încărcări cu momente de încovoiere și răsucire constante.

Lucrarea este scrisă foarte sistematic și clar ; ea poate fi folosită cu succes în cercetarea științifică în această direcție.

P. P. Teodorescu

TELEMACO VAN LANGENDONCK, *Charneiras plásticas em lajes de edificios* (Articulații plastice în plăcile de construcții civile), São Paolo, Associaçao Brasileira de Cimento Portland, 1966, 81 p. + 33 fig.

În lucrare se studiază capacitatea de rezistență a plăcilor de beton armat triunghiulare sau patrulatere cu diferite condiții de rezemare pe contur, folosindu-se în acest scop teoria liniilor de rupere.

În prima parte sînt prezentate elemente cu caracter general referitoare la : definirea noțiunilor de izotropie, anizotropie și ortotropie pentru plăci, schimbarea direcțiilor de armare, bifurcarea liniilor de rupere în zonele de colț ale plăcilor, realizarea consumului minim de armătură, cazul în care armăturile de pe cele două direcții nu sînt perpendiculare între ele.

Partea a doua cuprinde studiul plăcilor dreptunghiulare solicitate de sarcini uniform distribuite pe toată suprafața lor sau de sarcini liniare transmise plăcilor printr-unul sau prin mai multe ziduri. Se examinează diferite moduri de distribuire a armăturii în cîmp și pe reazeme, precum și cazul în care armătura nu este paralelă cu laturile. În final este prezentat calculul unui planșeu alcătuit din patru plăci dreptunghiulare.

Comportarea în domeniul plastic a plăcilor paralelogramice face obiectul părții a treia a lucrării. Studiul este efectuat pentru cazurile în care armătura are una dintre următoarele particularități : este paralelă cu laturile plăcilor, are direcții diferite de cele ale laturilor plăcilor sau barele de oțel de pe o direcție sînt perpendiculare pe latura lungă a plăcilor. În încheiere se prezintă un exemplu de calcul.

Partea a patra se ocupă cu plăcile trapezoidale. După ce se tratează cazul general al plăcii cu patru laturi de formă neregulată, se fac particularizările necesare pentru a se ajunge la plăcile în formă de trapez isoscel și de trapez dreptunghi. În final se prezintă calculul unei plăci în formă de trapez dreptunghi.

În ultima parte a lucrării sînt studiate plăcile triunghiulare. Sînt luate în considerație următoarele moduri de rezemare : încastrare pe tot conturul, încastrare pe două laturi, cea de-a treia latură fiind liberă, și încastrare pe o latură, celelalte două laturi fiind libere. În continuare se dau trei exemple de calcul.

Materialul cuprins în acest volum este util cercetătorilor și inginerilor specializați în proiectarea construcțiilor civile și industriale.

Valeriu Petcu

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expune stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române sau străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriloı, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculeloı spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidromecanica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul „16 Februarie".

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 25, nr. 4 1967

SUMAR

STUDII Pag.

OCTAVIAN POPA, Contribuţii la calculul reţelelor de profile cu ajutorul metodei singularităţilor 725

D. IONESCU, Studiul teoretic şi experimental al scurgerii turbulente dintre doi cilindri coaxiali, cilindrul interior fiind rotitor 747

D. SOCOLESCU, Asupra mişcării subsonice în jurul unui cilindru eliptic 763

A. PETRE, Divergenţa hidroelastică datorită portanţei în cazul aripilor subacvatice . . 777

T. HACKER, Restabilirea rapidă a incidenţei avionului în cazul mişcărilor de bază nestaţionare 783

V. N. CONSTANTINESCU şi S. GĂLETUŞE, Asupra posibilităţilor de folosire a legilor universale de viteze la studiul lubrificaţiei turbulente 797

V. PETCU şi S. MINEA, Calculul plastic al plăcilor inelare de beton armat solicitate de încărcări uniform distribuite 821

S. RĂUTU, Consideraţii asupra calculului structurilor static nedeterminate 839

GH. BUZDUGAN, M. BLUMENFELD, L. STOICESCU şi L. FETCU, Vibraţiile transversale libere ale grinzii pe două reazeme elastice lungi 853

A. PAVEL, Contribuţii şi precizări la calculul rezervoarelor cilindrice verticale cu capac autoportant fără moment 863

R. C. BOGDAN şi T. V. HUNCKER, Mecanisme pentalatere şi patrulatere articulate cu unele cazuri particulare ale acestora 895

FL. DUDIŢĂ, Vibraţii torsionale autoparametrice în transmisiile mecanice cu articulaţii cardanice 917

RECENZII 939

Cerc. Mec. Apl., Tom. 25, Nr. 4, p. 723–944, Bucureşti, 1967

STUDII SI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

CONTRIBUȚII LA CALCULUL REȚELELOR DE PROFILE CU AJUTORUL METODEI SINGULARITĂȚILOR[1])

de OCTAVIAN POPA
Institutul politehnic Timișoara

532

Pornind de la teoria ecuațiilor integrale singulare enunțată de N. I. Mushelișvili se construiesc două reprezentări integrale ale vitezei induse în exteriorul rețelei de profile, considerînd cunoscut fie saltul fie media limitelor laterale ale vitezei induse. În primul caz soluția se obține prin prelungirea analitică a vitezei induse reprezentate prin formula integrală Cauchy-de unde rezultă o dezvoltare în serie a saltului în raport cu distribuția de grosime — iar în al doilea caz prin rezolvarea unei probleme Hilbert neomogene. În continuare se stabilesc formulele de inversiune corespunzătoare ecuațiilor integrale singulare ale saltului precum și expresiile integrale ale circulației vitezei asociate acestora.

1. INTRODUCERE

Metoda care, în scopul determinării mișcării potențiale în jurul unui sistem de obstacole oarecare, folosește reprezentarea cîmpului de viteze induse $w(z)$ cu ajutorul unei integrale de tip Cauchy pe contur deschis poartă numele de metodă a singularităților. Viteza indusă astfel definită aparține clasei de funcții olomorfe pe porțiuni.

În cazul mișcării potențiale în jurul rețelelor de plăci curbate și de grosime nulă, se ajunge în mod firesc la reprezentarea cîmpului de viteze cu ajutorul unei integrale de tip Cauchy pe contur deschis. În acest caz, conturul deschis coincide cu placa, iar densitatea integralei de tip Cauchy depinde numai de curbura plăcii și de saltul componentei tangențiale a vitezei induse în lungul plăcii, saltul componentei normale fiind în mod necesar nul. Dată fiind periodicitatea rețelei, viteza indusă va aparține clasei de funcții periodice și olomorfe pe porțiuni. În continuare, această viteză indusă se va nota prin $w_s(z)$.

Mișcarea potențială în jurul unei rețele de profile de grosime și curbură arbitrară conduce la reprezentarea cîmpului de viteze induse cu ajutorul

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée" **12**, *4* (1967) în limba engleză).

formulei integrale Cauchy. Viteza indusă astfel definită, notată în continuare prin $w(z)$, aparține clasei de funcții olomorfe și periodice. În acest caz, determinarea mișcării potențiale se face în mod riguros prin metoda ecuațiilor integrale.

În cazul rețelelor de profile de grosime redusă, putem aproxima cîmpul de viteze induse cu ajutorul unei funcții periodice și olomorfe pe porțiuni. Această aproximație conduce la substituirea metodei ecuațiilor integrale prin metoda singularităților, mult mai simplă și mai expeditivă decît prima.

În cele ce urmează, folosind teoria ecuațiilor integrale singulare enunțată de N. I. Mushelișvili [1], precum și rezultatele obținute în cadrul unor lucrări anterioare [2], [3], se va construi o metodă de reprezentare a cîmpului de viteze induse, cu ajutorul unei integrale de tip Cauchy, în cazul rețelelor de profile de grosime și curbură finită : rețele de profile cu bordul de fugă ascuțit și rețele de profile Carafoli. Se va construi de asemenea o metodă de reprezentare a cîmpului de viteze induse pornind de la media limitelor laterale ale vitezei induse în lungul scheletului profilului, ceea ce va permite stabilirea unor noi formule de inversiune. În continuare se va soluționa problema mișcării potențiale în jurul rețelelor de profile în ipoteza intrării fără șoc, ipoteză mult folosită în dimensionarea rețelelor de profile, și se vor determina relațiile de convertire a distribuțiilor de viteze tangențiale de pe scheletul profilului pe conturul său și invers.

2. VITEZA INDUSĂ $w(z) = v_x - iv_y$

Să considerăm mișcarea permanentă a unui fluid ideal și incompresibil în jurul unei rețele plane de profile de contur C și de perioadă $\omega = te^{i\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)}$. În acest caz, $w(z) = v_x - iv_y$, viteza complexă indusă, va

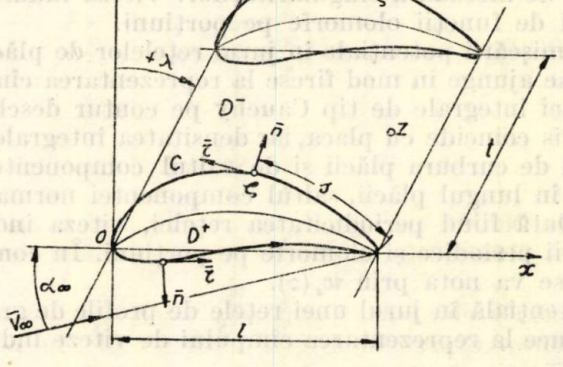


Fig. 1

fi o funcție olomorfă și periodică pe domeniul D^-, exterior rețelei de profile, și nulă pe D^+, domeniul interior profilelor de contur C (fig. 1).

Astfel, pentru $z \in D^-$, viteza indusă poate fi reprezentată cu ajutorul integralei lui Cauchy:

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C K(\zeta, z; t, \lambda)\, w(\zeta)\, d\zeta;\ z \in D^-,\ \zeta \in C, \tag{2.1}$$

integrarea efectuîndu-se în sens pozitiv (cel care lasă domeniul D^+ la stînga) și unde funcția periodică $K(\zeta, z; t, \lambda)$ are următoarea expresie:

$$K(\zeta, z; t, \lambda) = \frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \operatorname{cth}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}(\zeta - z)\right]. \tag{2.2}$$

Pe conturul C, viteza indusă are următoarea limită:

$$\lim_{z \in D^- \to \zeta_0 \in C} w(z) = w(\zeta_0) = -\frac{1}{\pi i}\int_C K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)\, w(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.3}$$

În punctul $\zeta = \zeta_0$ nucleul $K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)$ are un pol simplu și integrala din (2.2) va fi singulară. Ea există însă în sensul valorii principale după Cauchy, deoarece $w(z)$ verifică condiția Hölder cu exponent $0 < \mu \leqslant 1$ pentru orice pereche de puncte $\zeta, \zeta_0 \in C$:

$$|w(\zeta) - w(\zeta_0)| \leqslant A\,|\zeta - \zeta_0|^{\mu},$$

unde A este o constantă arbitrară.

Deoarece

$$\lim_{x \to \pm\infty} K(\zeta, z; t, \lambda) = \mp \frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \tag{2.4}$$

și deoarece circulația Γ, considerată pozitivă în sens orar, are prin definiție expresia

$$\Gamma = -\int_C w(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.5}$$

vitezele asimptotice

$$\lim_{x \to \pm\infty} w(z) = w(\pm\infty), \tag{2.6}$$

determinate prin trecerea la limită a integralei (2.1), vor avea următoarele valori:

$$w(\pm\infty) = \mp \frac{\Gamma}{2t} e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)}. \tag{2.7}$$

3. VITEZA INDUSĂ $w_s(z) = v_{sx} - iv_{sy}$, PRELUNGIREA ANALITICĂ A VITEZEI INDUSE $w(z)$. EXPRESIA DENSITĂȚII $\varphi(\zeta)$

Ne propunem prelungirea analitică a vitezei induse $w(z)$ în interiorul profilului de contur C pînă în dreptul scheletului său S. Prin scheletul S vom înțelege linia medie a grosimii profilului. Introducînd funcția de grosime

$$\zeta_g = y_g(\zeta)\, e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}, \tag{3.1}$$

unde prin $2y_0$ înțelegem grosimea profilului în punctul $\zeta \in S$, măsurată după normala la schelet, iar prin θ unghiul cuprins între tangenta pozitivă la schelet și axa Ox, deci

$$\theta = \arg \frac{d\zeta}{ds} = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}; \quad (\zeta = x + iy) \in S, \tag{3.2}$$

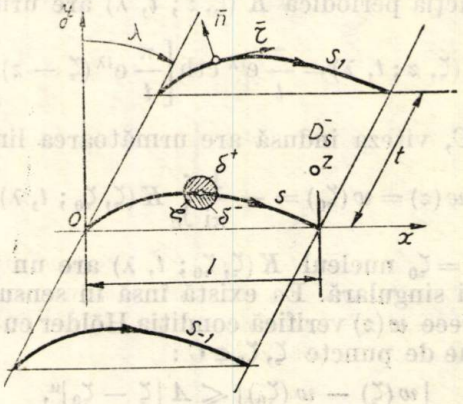


Fig. 2

s fiind abscisa curbilinie a scheletului, fiecărui punct $\zeta \in S$ i se pot asocia două puncte simetrice în raport cu scheletul S: $\zeta^+ \in \sigma^+$ și $\zeta^- \in \sigma^-$, unde arcul σ^+ aparține extradosului și arcul σ^- intradosului profilului, astfel încît sînt valabile următoarele egalități:

$$\zeta^{\pm} = \zeta \pm \zeta_0. \tag{3.3}$$

Arcele $\sigma^{\pm}$, delimitate de S pe C, au extremitățile comune cu scheletul ($\zeta = 0, l$). Domeniul exterior rețelei de schelete S îl vom nota prin D_s^- (fig. 2). Viteza indusă $w_s(z)$, prelungirea analitică a funcției $w(z)$ pînă în dreptul lui S, este definită pe D_s^- și se identifică cu $w(z)$ pe $D^- \cup C$, inclusiv punctul de la infinit, deci

$$\left.\begin{aligned} &w(z) = w_s(z); \; z \in D^- \cup C, \\ &w(\pm\infty) = w_s(\pm\infty). \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Astfel, funcția de viteze $w_s(z)$ poate fi interpretată ca o funcție olomorfă pe porțiuni, definită pe D_s^- și avînd mulțimea infinită a scheletelor (rețeaua de schelete) drept linie de salt. Notînd prin $\varphi(\zeta)$ densitatea încă necunoscută, $w_s(z)$ se va putea exprima cu ajutorul unei integrale de tip Cauchy

$$w_s(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l K(\zeta, z; t, \lambda)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta; \; z \in D_s^-, \; \zeta \in S, \tag{3.5}$$

unde funcția $K(\zeta, z; t, \lambda)$ are expresia (2.2) și unde limitele $\zeta = 0, l$ sînt extremitățile scheletului S.

Prin cîteva transformări succesive, integrala (2.1) poate fi adusă la forma (3.5), determinîndu-se astfel și expresia necunoscută a densității $\varphi(\zeta)$ [2].

Într-adevăr, pornind de la integrala (2.1) și exprimînd-o sub forma unei sume de două integrale luate de-a lungul arcelor σ^+ și σ^-, amîndouă parcurse în sensul pozitiv de parcurs acceptat pentru S (de la $\zeta = 0$ la $\zeta = l$), și ținînd seama de faptul că $w_s(z) = w(z)$ pentru $z \in C \cup D^-$, vom obține

$$w_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma^+} K(\zeta^+, z; t, \lambda)\, w(\zeta^+)\, d\zeta^+ - \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma^-} K(\zeta^-, z; t, \lambda)\, w(\zeta^-)\, d\zeta^-.$$

Efectuînd schimbarea de variabilă (3.3), integralele în lungul arcelor σ^+ și σ^- se transformă într-o integrală unică de-a lungul scheletului S:

$$w_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^l \left\{ K(\zeta^+, z; t, \lambda)\, w^+(\zeta)\frac{d\zeta^+}{d\zeta} - K(\zeta^-, z; t, \lambda)\, w^-(\zeta)\frac{d\zeta^-}{d\zeta} \right\} d\zeta,$$

unde pentru vitezele induse în lungul arcelor $\sigma^\pm$ s-a folosit notația

$$w^\pm(\zeta) = w(\zeta^\pm);\ \zeta^\pm \in \sigma^\pm,\ \zeta \in S. \tag{3.6}$$

Dezvoltînd în serie geometrică în raport cu ζ_g, vom obține

$$K(\zeta^\pm, z; t, \lambda) = K(\zeta, z; t, \lambda) + K_{g1}(\zeta, z; t, \lambda) \mp K_{g2}(\zeta, z; t, \lambda),$$

unde

$$K(\zeta, z; t, \lambda) = \frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \operatorname{cth}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}(\zeta - z)\right],$$

$$K_{g1}(\zeta, z; t, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\zeta_g^{2j}(\zeta)}{(\zeta - z + int\, e^{-i\lambda})^{2j+1}},$$

$$K_{g2}(\zeta, z; t, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[\zeta_g(\zeta)]^{2j-1}}{(\zeta - z + int\, e^{-i\lambda})^{2j}}.$$

În continuare se va dovedi utilă folosirea următoarelor funcții:

$$S(\zeta) = w^+(\zeta)\frac{d\zeta^+}{d\zeta} - w^-(\zeta)\frac{d\zeta^-}{d\zeta}, \tag{3.7}$$

$$D(\zeta) = w^+(\zeta)\frac{d\zeta^+}{d\zeta} + w^-(\zeta)\frac{d\zeta^-}{d\zeta}. \tag{3.8}$$

Ținînd seama de faptul că seriile K_{g1} și K_{g2} sînt uniform convergente în raport cu j sau, cu n, rezultă posibilitatea integrării termen cu termen și posibilitatea inversării operației de sumare cu operația de integrare. Uzînd de aceste proprietăți și ținînd seama de faptul că funcțiile

$$[\zeta_g(\zeta)]^{2j} \cdot S(\zeta),$$

$$[\zeta_g(\zeta)]^{(2j-1)} \cdot D(\zeta) \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

sînt continue împreună cu derivatele lor pînă la ordinul $2j$, respectiv $(2j-1)$, și satisfac condiția Hölder pentru orice pereche de puncte aparținînd scheletului S, ceea ce permite stabilirea următoarelor egalități:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^l \frac{[\zeta_g(\zeta)]^{2j}\cdot S(\zeta)}{(\zeta - z + int\,e^{-i\lambda})^{2j+1}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^l \frac{1}{(2j)!}\frac{d^{2j}}{d\zeta^{2j}}[\zeta_g^{2j}\,S]\frac{d\zeta}{\zeta - z + int\,e^{-i\lambda}},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^l \frac{[\zeta_g(\zeta)]^{2j-1}\cdot D(\zeta)}{(\zeta - z + int\,e^{-i\lambda})^{2j}}\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^l \frac{1}{(2j-1)!}\frac{d^{2j-1}}{d\zeta^{2j-1}}[\zeta_g^{2j-1}\cdot D(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta - z + int\,e^{-i\lambda}},$$

rezultă în cele din urmă.

$$w_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^l K(\zeta, z; t, \lambda)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta; \quad z\in D_s^-,\ \zeta\in S, \tag{3.9}$$

unde funcția $K(\zeta, z; t, \lambda)$ are expresia (2.2), iar densitatea $\varphi(\zeta)$ are următoarea dezvoltare în serie

$$\varphi(\zeta) = S(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{d^{2n}}{d\zeta^{2n}}[\zeta_g^{2n}(\zeta)\cdot S(\zeta)] -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}\frac{d^{2n-1}}{d\zeta^{2n-1}}[\zeta_g^{2n-1}(\zeta)\cdot D(\zeta)]. \tag{3.10}$$

Sub această formă, expresia densității ilustrează destul de clar influența grosimii profilului și a distribuției acestei grosimi. În cazul grosimii nule, dezvoltarea (3.10) se va limita la primul termen. Se observă, de asemenea, că expresia de mai sus a densității depinde, prin intermediul funcțiilor $S(\zeta)$ și $D(\zeta)$, de valorile pe care viteza indusă le ia în lungul conturului profilului, respectiv pe arcele $\sigma^{\pm}$.

Deoarece densitatea $\varphi(\zeta)$ satisface condiția Hölder cu exponent $0 < \mu \leqslant 1$ și cu o constantă arbitrară A

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| \leqslant A\,|\zeta - \zeta_0|^{\mu}, \tag{3.11}$$

rezultă posibilitatea determinării următoarelor limite laterale:

$$\lim_{z\in\delta^{\pm}\to\zeta_0\in S} w_s(z) = w_s^{\pm}(\zeta_0), \tag{3.12}$$

unde, conform figurii 2, prin δ^+ vom înțelege vecinătatea stîngă, iar prin δ^- vecinătatea dreaptă a punctului $\zeta_0\in S$.

Aplicînd formulele Plemelj integralei de tip Cauchy (3.9), se vor obține următoarele expresii pentru limitele laterale (3.12):

$$w_s^{\pm}(\zeta_0) = \pm\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0) + w_s(\zeta_0), \tag{3.13}$$

unde $w_s(\zeta_0)$ reprezintă media limitelor laterale (3.13) și are expresia

$$w_s(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^l K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)\varphi(\zeta)\,d\zeta. \tag{3.14}$$

Făcînd suma și diferența limitelor laterale (3.13), se obține, pe de o parte, dublul mediei $w_s(\zeta_0)$, pe care convenim a o nota prin $g(\zeta_0)$:

$$w_s^+(\zeta_0) + w_s^-(\zeta_0) = g(\zeta_0), \tag{3.15}$$

iar pe de altă parte saltul funcției $w_s(z)$ de-a lungul lui S, ceea ce reprezintă tocmai densitatea integralei de tip Cauchy (3.9), care, spre deosebire de (3.10), se exprimă de astă dată în funcție de limitele laterale ale vitezei induse $w_s(z)$:

$$w_s^+(\zeta_0) - w_s^-(\zeta_0) = \varphi(\zeta_0). \tag{3.16}$$

Conform ipotezei (3.4) și ținînd seama de limitele (2.4), determinînd limita integralei (3.9) pentru $x \to \pm\infty$, rezultă că pentru a putea avea

$$\lim_{x \to \pm\infty} w_s(z) = w_s(\pm\infty) = \mp \frac{\Gamma}{2t} e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)} \tag{3.17}$$

în mod necesar circulația Γ va avea expresia

$$\Gamma = \int_0^t \varphi(\zeta)\, d\zeta. \tag{3.18}$$

4. EXPRIMAREA VITEZEI INDUSE $w_s(z)$ CU AJUTORUL UNEI INTEGRALE DE TIP CAUCHY AVÎND DENSITATEA FUNCȚIE DE SUMA LIMITELOR LATERALE $g(\zeta)$

Ecuația integrală de tip Cauchy (3.9) poate fi considerată ca soluție a următoarei probleme la limită : să se determine o funcție olomorfă pe porțiuni $w_s(z)$, definită pe domeniul D_s^- și avînd la infinit limitele (3.17) atunci cînd este dat saltul (3.16).

Saltul $\varphi(\zeta)$ este în mod evident o funcție periodică, definită pe S, și satisface condiția Hölder pentru orice pereche de puncte aparținînd conturului deschis S, mai puțin, poate, extremitățile acestuia, unde poate deveni infinită, dar de ordin mai mic decît unitatea.

În cele ce urmează vom determina aceeași funcție de viteze $w_s(z)$, olomorfă și periodică pe D_s^-, avînd la infinit limite constante și distincte (3.17), considerînd cunoscut nu saltul $\varphi(\zeta)$, ci suma limitelor laterale $g(\zeta)$, deci cu următoarea condiție la limită pe S :

$$w_s^+(\zeta) + w_s^-(\zeta) = g(\zeta); \quad \zeta \in S, \tag{4.1}$$

unde $g(\zeta)$ este o funcție de punct, dată pe S și diferită de zero pe S, satisfăcînd condiția Hölder pentru orice pereche de puncte aparținînd lui S. Această problemă poartă numele de problema Hilbert neomogenă.

Problema Hilbert omogenă, asociată problemei neomogene de mai sus, va fi de forma

$$\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta) + \overset{\circ}{w}_s^-(\zeta) = 0; \quad \zeta \in S. \tag{4.2}$$

După cum este cunoscut [1], soluția generală a problemei Hilbert neomogene se dobîndește prin însumarea unei soluții particulare a pro-

blemei neomogene (4.1), $[w_s(z)]_p$, la soluția generală a problemei omogene (4.2), $[\overset{\circ}{w}_s(z)]_g$, deci

$$w_s(z) = [\overset{\circ}{w}_s(z)]_g + [w_s(z)]_p. \tag{4.3}$$

În vederea determinării soluției generale a problemei omogene vom logaritma condiția la limită (4.2), dînd în acest fel peste problema la limită care cere determinarea unei funcții olomorfe pe porțiuni atunci cînd este dat saltul. Astfel

$$[\ln \overset{\circ}{w}_s(\zeta)]^+ - [\ln \overset{\circ}{w}_s(\zeta)]^- = \ln(-1)$$

sau, deoarece $e^{i\pi} = -1$,

$$[\ln \overset{\circ}{w}_s(\zeta)]^+ - [\ln \overset{\circ}{w}_s(\zeta)]^- = i\pi. \tag{4.4}$$

Soluția acestei probleme, în conformitate cu cele arătate mai sus, este oferită de o integrală de tip Cauchy cu densitatea $i\pi$, deci

$$\ln \overset{\circ}{w}_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^l (i\pi)\, K(\zeta, z; t, \lambda)\, d\zeta, \tag{4.5}$$

unde funcția periodică $K(\zeta, z; t, \lambda)$ are expresia (2.2).

Deoarece mai putem scrie

$$\ln \overset{\circ}{w}_s(z) = \frac{1}{2}\int_0^l d \ln \operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}(\zeta - z)\right],$$

prin integrare vom obține soluția canonică a problemei omogene (4.2):

$$\overset{\circ}{w}_s(z) = \sqrt{\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}(z-l)\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda} z\right]}}. \tag{4.6}$$

Observăm că s-a obținut o soluție pentru care ambele extremități ale conturului S sînt nesingulare: în $z = 0$, soluția este nemărginită, dar de ordin mai mic decît unitatea, iar în dreptul extremității $z = l$ este nulă. Comportarea soluției (4.6) în dreptul extremităților satisface cerințele fizice ale problemei: posibilitatea ocolirii bordului de atac al plăcii S solicită o soluție care devine nemărginită în acest punct, iar satisfacerea condiției Jukovski la bordul de fugă al plăcii S (bordul de fugă punct de impact) impune anularea soluției în acest punct.

Oprindu-ne la această soluție, amintim doar că, după clasificarea enunțată de N. I. Mushelișvili [1], problema omogenă (4.2) conduce la un număr total de 2^m soluții, m fiind numărul extremităților nesingulare; în cazul nostru, $m = 2$, deci $2^2 = 4$ soluții. Celelalte soluții obținute prin procedeul folosit în [3] se deduc din soluția [4.6] și sînt de forma următoare:

$$\overset{\circ}{\widetilde{w}}_s(z) = [\overset{\circ}{w}_s(z)]^{-1}, \tag{4.7}$$

soluție asociată soluției (4.6) cu rolul extremităților schimbat,

$$\overset{1}{w}_s(z) = \overset{\circ}{w}_s(z) \cdot \left(\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}(z-l)\right]\right)^{-1}, \tag{4.8}$$

soluție nemărginită în dreptul ambelor extremități, și

$$\bar{w}_s^{-1}(z) = \overset{\circ}{w}_s(z) \cdot \operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda} z\right], \tag{4.9}$$

soluție mărginită, mai precis nulă, în dreptul ambelor extremități.

La infinit, soluția (4.6) are limite finite și distincte :

$$\lim_{z \to \pm\infty} \overset{\circ}{w}_s(z) = \overset{\circ}{w}_s(\pm\infty) = e^{\mp\left[\frac{\pi}{2t} e^{i\lambda} l\right]} \tag{4.10}$$

sau

$$\overset{\circ}{w}_s(\pm\infty) = \operatorname{ch}\left[\frac{\pi}{2t} e^{i\lambda} l\right] \mp \operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{2t} e^{i\lambda} l\right]. \tag{4.11}$$

De aici rezultă comportarea la infinit și a celorlalte soluții : (4.7) are limitele inversate față de (4.6), (4.8) este nulă, iar (4.9) este nemărginită.

Limitele la stînga și la dreapta ale soluției (4.6) se obțin pornind de la (4.5) prin aplicarea formulelor Plemelj. Astfel,

$$[\ln \overset{\circ}{w}_s(\zeta_0)]^{\pm} = \pm \frac{1}{2}(i\pi) + \frac{1}{2}\int_0^l K(\zeta, \zeta_0 ; t, \lambda)\, d\zeta,$$

ținînd sema în continuare de faptul că integrala de mai sus există în sensul valorii principale după Cauchy, fiind egală cu

$$\int_0^l K(\zeta, \zeta_0 ; t, \lambda)\, d\zeta = \ln \frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}(\zeta_0 - l)\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \zeta_0\right]} + i\pi ; \tag{4.12}$$

rezultă

$$[\ln \overset{\circ}{w}_s(\zeta_0)]^{+} = \ln e^{i\pi} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}(\zeta_0 - l)\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \zeta_0\right]}},$$

$$[\ln \overset{\circ}{w}_s(\zeta_0)]^{-} = \ln \sqrt{\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}(\zeta_0 - l)\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \zeta_0\right]}}$$

și, în cele din urmă,

$$\overset{\circ}{w}_s^{\pm}(\zeta_0) = \mp \sqrt{\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}(\zeta_0 - l)\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \zeta_0\right]}}. \tag{4.13}$$

Limitele celorlalte soluții se obțin pornind de la aceasta.

Deoarece soluția (4.6) îndeplinește la extremități condițiile fizice ale problemei iar la infinit este constantă, soluția generală a problemei neomogene (4.2) se obține prin înmulțirea soluției (4.6) cu o constantă complexă, deci

$$[\overset{\circ}{w}_s(z)]_g = C\,\overset{\circ}{w}_s(z). \tag{4.14}$$

Valoarea acestei constante se va determina cerînd soluției generale a problemei neomogene (4.1) să aibă la infinit limitele (3.17) impuse prin ipoteză.

Soluția particulară a problemei neomogene (4.1) se obține, ca mai sus, prin reducerea problemei la limită la determinarea unei funcții atunci cînd este dat saltul.

Astfel, deoarece conform (4.1) putem scrie

$$w_s^+(\zeta_0) = (-1)\,w_s^-(\zeta_0) + g(\zeta_0)$$

și deoarece din (4.13) rezultă:

$$\frac{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta_0)}{\overset{\circ}{w}_s^-(\zeta_0)} = -1,$$

vom putea scrie în continuare

$$w_s^+(\zeta_0) = \frac{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta_0)}{w_s^-(\zeta_0)}\,w_s^-(\zeta_0) + g(\zeta_0),$$

de unde, după împărțirea cu $\overset{\circ}{w}_s^+$, obținem forma căutată a condiției la limită

$$\left[\frac{w_s(\zeta_0)}{\overset{\circ}{w}_s(\zeta_0)}\right]^+ - \left[\frac{w_s(\zeta_0)}{\overset{\circ}{w}_s(\zeta_0)}\right]^- = \frac{g(\zeta_0)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta_0)}.$$

Soluția acestei probleme este de forma

$$\frac{w_s(z)}{\overset{\circ}{w}_s(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)}\,K(\zeta, z;\, t,\, \lambda)\,d\zeta,$$

de unde rezultă în cele din urmă soluția particulară a problemei Hilbert neomogene (4.1):

$$[w_s(z)]_p = \frac{\overset{\circ}{w}_s(z)}{2\pi i}\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)}\,K(\zeta, z;\, t,\, \lambda)\,d\zeta. \tag{4.15}$$

Adunînd la această soluție soluția generală (4.14) a problemei omogene (4.2), se obține soluția generală a problemei Hilbert neomogene:

$$w_s(z) = \frac{\overset{\circ}{w}_s(z)}{2\pi i}\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)}\,K(\zeta, z;\, t,\, \lambda)\,d\zeta + C\,\overset{\circ}{w}_s(z). \tag{4.16}$$

Constanta C se determină cerînd, conform ipotezei, realizarea următoarei condiții la infinit :

$$w_s(+\infty) + w_s(-\infty) = 0. \tag{4.17}$$

Pe de altă parte, tot din (3.17) rezultă

$$w_s(+\infty) - w_s(-\infty) = -\frac{\Gamma}{t} e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)}, \tag{4.18}$$

ceea ce va conduce la o expresie integrală pentru circulația Γ.

Efectuînd calculele necesare, vom obține pentru constanta C expresia

$$C = -\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2t} e^{i\lambda} l\right] \frac{e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)}}{2t} \int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)} d\zeta, \tag{4.19}$$

iar pentru circulația Γ

$$\Gamma = \frac{1}{\operatorname{ch}\left[\frac{\pi}{2t} e^{i\lambda} l\right]} \int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)} d\zeta. \tag{4.20}$$

Înlocuind valoarea găsită pentru constanta C în (4.16), se obține, în sfîrșit, valoarea căutată a vitezei induse $w_s(z)$:

$$w_s(z) = \frac{\overset{\circ}{w}_s(z)}{2\pi i} \int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)} \{K(\zeta, z; t, \lambda) - k\} d\zeta, \tag{4.21}$$

unde funcția k este o constantă complexă, avînd următoarea expresie :

$$k = \frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2t} e^{i\lambda} l\right]. \tag{4.22}$$

În cazul profilului izolat vom considera $t \to \infty$. Astfel, ținînd seama de faptul că

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}(\zeta_0 - l)\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \zeta_0\right]}} = \sqrt{\frac{\zeta_0 - l}{\zeta_0}}, \tag{4.23}$$

$$\lim_{t\to\infty} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda) = \frac{1}{\zeta - \zeta_0}, \tag{4.24}$$

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{ch}\left[\frac{\pi}{2t} e^{i\lambda} l\right] = 1, \tag{4.25}$$

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2t} e^{i\lambda} l\right] = 0, \tag{4.26}$$

calculînd limitele expresiilor (4.21) și (4.20), vom obține viteza indusă și circulația corespunzătoare aceluiași profil, dar funcționînd izolat:

$$w_s(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{z-l}{z}}\int_0^l g(\zeta)\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-l}}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}, \tag{4.27}$$

$$\Gamma = -\int_0^l g(\zeta)\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-l}}\,d\zeta. \tag{4.28}$$

Prin aplicarea formulelor Plemelj ecuației (4.21), obținem limitele laterale

$$w_s^+(\zeta_0) = \frac{1}{2}g(\zeta_0) + \frac{\overset{\circ}{w}{}_s^+(\zeta_0)}{2\pi i}\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}{}_s^+(\zeta)}\{K(\zeta,\zeta_0;t,\lambda)-k\}\,d\zeta, \tag{4.29}$$

$$w_s^-(\zeta_0) = \frac{1}{2}g(\zeta_0) - \frac{\overset{\circ}{w}{}_s^+(\zeta_0)}{2\pi i}\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}{}_s^+(\zeta)}\{K(\zeta,\zeta_0;t,\lambda)-k\}\,d\zeta. \tag{4.30}$$

Făcînd suma și diferența acestor limite, obținem, pe de o parte, o verificare a condiției la limită (4.1):

$$w_s^+(\zeta_0) + w_s^-(\zeta_0) = g(\zeta_0), \tag{4.31}$$

iar pe de altă parte o nouă expresie a saltului:

$$\varphi(\zeta_0) = w_s^+(\zeta_0) - w_s^-(\zeta_0) = \frac{\overset{\circ}{w}{}_s^+(\zeta_0)}{\pi i}\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}{}_s^+(\zeta)}\{K(\zeta,\zeta_0;t,\lambda)-k\}\,d\zeta. \tag{4.32}$$

Ultimul rezultat, obținut într-o lucrare anterioară [3], prezintă deosebit interes, fiind formula de inversiune a ecuației integrale (3.14).

Pentru $t \to \infty$, obținem generalizarea formulei de inversiune dată de A. Betz în cazul profilului izolat [4]:

$$\varphi(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i}\sqrt{\frac{\zeta_0-l}{\zeta_0}}\int_0^l g(\zeta)\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-l}}\,\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}. \tag{4.33}$$

Pentru cazul particular al rețelelor de plăci drepte cu unghiul de instalare $\lambda = 0°$ sau $90°$, formula de inversiune (4.32) ne conduce la formulele de inversiune stabilite de J. Dörr [5], [6], K. Nickel [7] și I. L. Popescu [8].

5. VITEZA INDUSĂ ÎN CAZUL REȚELELOR DE PROFILE CARAFOLI. FORMULA DE INVERSIUNE CORESPUNZĂTOARE

În cazul rețelelor de profile Carafoli, profile cu bordul de fugă rotunjit [9], [10], [11], rezultatele obținute în capitolul 3 sînt în întregime valabile. Cele determinate în capitolul 4 vor trebuie modificate datorită schimbării structurii densității $\varphi(\zeta)$. Într-adevăr, din (3.10), dezvoltarea în serie a densității $\varphi(\zeta)$, rezultă că în cazul rețelelor de profile Carafoli, din pricina bordului de fugă rotunjit, densitatea $\varphi(\zeta)$ va fi nemărginită la ambele extremități ale scheletului S, spre deosebire de cazul precedent,

unde densitatea era nulă la bordul de fugă al scheletului S. Rezultatele obținute în cadrul capitolului 4 pot fi adaptate noii împrejurări, alegînd o soluție convenabilă din cadrul celor patru soluții obținute pentru problema Hilbert omogenă (4.2). Alegînd pentru problema Hilbert omogenă soluția asociată (4.7), iar pentru problema Hilbert neomogenă aceeași soluție particulară ca mai înainte (4.15), în conformitate cu (4.3) soluția generală a problemei propuse va fi de forma următoare :

$$w_s(z) = \frac{\overset{\circ}{w}_s(z)}{2\pi i}\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)} K(\zeta, z; t, \lambda)\,d\zeta + C\,\overset{\circ}{w}_s(z). \tag{5.1}$$

Observăm faptul că soluția stabilită îndeplinește condițiile de nemărginire, de ordin mai mic decît unitatea, în dreptul ambelor extremități nesingulare ale conturului deschis S. În ceea ce privește constanta complexă C, ea va fi determinată întocmai ca mai înainte, cerînd realizarea la infinit a condiției (4.17). Tot așa, din condiția (4.18) se obține valoarea corespunzătoare a circulației Γ în jurul profilului Carafoli dispus în rețea. Efectuînd calculele necesare, vom obține următoarele rezultate :

$$C = -\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2t}\,e^{i\lambda}l\right]\cdot\frac{e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)}}{2t}\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)}\,d\zeta, \tag{5.2}$$

$$\Gamma = \frac{\operatorname{ch}\left[\frac{\pi}{t}\,e^{i\lambda}l\right]}{\operatorname{ch}\left[\frac{\pi}{2t}\,e^{i\lambda}l\right]}\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)}\,d\zeta. \tag{5.3}$$

Limitele laterale, determinate cu ajutorul formulelor Plemelj, vor avea următoarea expresie :

$$w_s^+(\zeta_0) = \frac{1}{2}g(\zeta_0) + \frac{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta_0)}{2\pi i}\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)\,d\zeta + \frac{C}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta_0)}, \tag{5.4}$$

$$w_s^-(\zeta_0) = \frac{1}{2}g(\zeta_0) - \frac{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta_0)}{2\pi i}\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)\,d\zeta - \frac{C}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta_0)}. \tag{5.5}$$

Făcînd suma lor, obținem o verificare a condiției la limită (4.1). Diferența limitelor laterale ne va conduce la o nouă formulă de inversiune a ecuației integrale (3.14) pentru cazul cînd densitatea este nemărginită și în dreptul bordului de fugă al profilului, deci o formulă de inversiune specifică rețelelor de profile Carafoli :

$$\varphi(\zeta_0) = \frac{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta_0)}{\pi i}\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)\,d\zeta + \frac{2C}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta_0)}. \tag{5.6}$$

În cazul profilului izolat, deci pentru $t \to \infty$, viteza indusă $w_s(z)$, circulația Γ în jurul profilului izolat și formula de inversiune vor dobîndi aceeași formă ca (4.27), (4.28) și (4.33).

6. VITEZA INDUSĂ ÎN IPOTEZA INTRĂRII FĂRĂ ŞOC FORMULA DE INVERSIUNE CORESPUNZĂTOARE

Ipoteza intrării fără şoc, întîlnită în cazul reţelelor de profile subţiri, mai precis de grosime nulă (plăci curbate), consideră mişcarea în jurul reţelei de profile sub un anumit unghi de incidenţă, astfel încît bordul de atac al profilului să fie punct de impact. În acest caz, funcţia $e^{i\theta}\,\varphi(\zeta)$ este pur reală, deoarece vom considera placa de grosime nulă, iar densitatea $\varphi(\zeta)$ se va anula atît la bordul de fugă al plăcii, conform ipotezei Jukovski, cît şi la bordul de atac, conform ipotezei intrării fără şoc. În cazul reţelelor de profile groase, ipoteza intrării fără şoc se formulează cerînd anularea părţii reale a funcţiei $e^{i\theta}\,\varphi(\zeta)$ în dreptul bordului de atac al profilului, partea imaginară fiind în mod necesar nemărginită, dar de un ordin mai mic decît unitatea. În cele ce urmează ne vom limita la reţelele de plăci curbate.

Expresia căutată a vitezei induse se va deduce din expresia generală (4.21), punînd condiţia ca viteza indusă, definită de această relaţie, să se anuleze în dreptul bordului de atac al plăcii, deci pentru $\zeta = 0$. De aici va rezulta necesitatea realizării următoarei condiţii :

$$\int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)}\, K(\zeta, 0\,;\, t,\, \lambda)\, d\zeta = k \int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)}\, d\zeta, \tag{6.1}$$

unde k este constanta complexă definită de (4.22). Deoarece suma limitelor laterale $g(\zeta)$ este funcţie de unghiul de incidenţă α_∞, condiţia de mai sus ne oferă posibilitatea determinării unghiului de incidenţă corespunzător scurgerii cu intrare fără şoc.

Ţinînd seama de condiţia (6.1), viteza indusă definită de relaţia (4.21) va dobîndi forma următoare :

$$w_s(z) = \frac{\overset{\circ}{w}_s(z)}{2\pi i} \int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)} [K(\zeta, z_0\,;\, t,\, \lambda) - K(\zeta, 0\,;\, t,\, \lambda)]\, d\zeta, \tag{6.2}$$

ceea ce reprezintă tocmai expresia căutată a vitezei induse în cazul particular al scurgerii cu intrare fără şoc.

Calculînd limitele la infinit, vom obţine

$$w_s(\pm\infty) = \mp e^{\mp\left[\frac{\pi}{2l} e^{i\lambda} l\right]} \frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)} \left\{1 \pm \operatorname{cth}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}\zeta\right]\right\} d\zeta. \tag{6.3}$$

Ţinînd seama de condiţia (6.1), suma limitelor (6.3) va fi nulă, respectîndu-se condiţiile iniţiale (3.17). Ţinînd seama de aceleaşi condiţii, rezultă posibilitatea determinării circulaţiei Γ în jurul profilului dispus în reţea în ipoteza intrării fără şoc. Astfel, respectînd condiţia (4.18) şi ţinînd seama de limitele (6.3), rezultă pentru circulaţie următoarea expresie :

$$\Gamma = 2 \operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{2t} e^{i\lambda} l\right] \int_0^l \frac{g(\zeta)}{i\,\overset{\circ}{w}_s^+(\zeta)} \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}\zeta\right) - \operatorname{cth}\left(\frac{\pi}{2t} e^{i\lambda} l\right)\right] d\zeta. \tag{6.4}$$

Particularizînd această relație pentru cazul profilului izolat, se obține circulația în jurul profilului izolat în ipoteza intrării fără șoc.

$$\Gamma = \int_0^l g(\zeta) \frac{2\zeta - l}{\sqrt{\zeta(l-\zeta)}} \, d\zeta, \tag{6.5}$$

Aplicînd vitezei (6.2) formulele Plemelj, obținem limitele laterale ale vitezei induse :

$$w_s^{\pm}(\zeta_0) = \frac{1}{2} g(\zeta_0) \pm \frac{\overset{\circ}{w}{}_s^{+}(\zeta_0)}{2\pi i} \int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}{}_s^{+}(\zeta)} [K(\zeta, \zeta_0 ; t, \lambda) - K(\zeta, 0 ; t, \lambda)] \, d\zeta. \tag{6.6}$$

Făcînd suma limitelor, obținem o verificare a condiției la limită (4.1). Diferența acestor limite ne va conduce la formula de inversiune căutată :

$$\varphi(\zeta_0) = \frac{\overset{\circ}{w}{}_s^{+}(\zeta_0)}{\pi i} \int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}{}_s^{+}(\zeta)} [K(\zeta, \zeta_0 ; t, \lambda) - K(\zeta, 0 ; t, \lambda)] \, d\zeta. \tag{6.7}$$

7. INTERPRETAREA FIZICĂ A DENSITĂȚII

Deoarece densitatea $\varphi(\zeta)$, conform definiției, ne oferă saltul vitezelor induse în lungul scheletului S, ea poate fi asimilată cu o distribuție de surse $q(\zeta)$ și de vîrtejuri $\gamma(\zeta)$ în lungul scheletului S. Conform definiției enunțate în cadrul unei lucrări anterioare [2], distribuția de vîrtejuri și de surse se poate obține prin determinarea următoarei limite :

$$\gamma(\zeta)^{-} iq(\zeta) = - \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\int_{\Delta C} w(\zeta) \, d\zeta}{\Delta s} ; \quad \zeta \in C, \tag{7.1}$$

unde, conform figurii 3, prin ΔC vom înțelege conturul închis al unui tronson de profil (parcurs în sens antiorar), prin $\Delta s \in S$, elementul de arc delimitat de pereții laterali ai tronsonului ΔC, iar prin $w(\zeta)$ viteza indusă pe conturul C al profilului de grosime finită.

Deoarece pentru $z \in C$ avem condiția

$$w(z) = w_s(z)$$

și deoarece $w_s(z)$ este olomorfă pe D_s^{-}, iar tăietura ΔC_s, corespunzătoare arcului Δs, se obține prin deformarea continuă a conturului ΔC fără a părăsi domeniul D_s^{-}, rezultă că vom putea scrie următorul șir de egalități :

$$\int_{\Delta C} w(\zeta) \, d\zeta = \int_{\Delta C_s} w_s(\zeta) \, d\zeta = \int_{\zeta}^{\zeta + \Delta\zeta} [w_s^{-}(\zeta) - w_s^{+}(\zeta)] \, d\zeta.$$

Înlocuind în (7.1) şi determinînd limita , vom obţine

$$\gamma(\zeta) - \mathrm{i}\, q(\zeta) = [w_s^+(\zeta) - w_s^-(\zeta)]\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}s};$$

în continuare, deoarece

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

$$w_s^+(\zeta) - w_s^-(\zeta) = \varphi(\zeta),$$

rezultă în cele din urmă expresia căutată a densităţii în funcţie de distribuţiile $\gamma(\zeta)$ şi $q(\zeta)$:

$$\gamma(\zeta) - \mathrm{i}\, q(\zeta) = \varphi(\zeta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{7.2}$$

De aici rezultă că proiecţia densităţii $\varphi(\zeta)$ după direcţia tangentei la scheletul S ne oferă distribuţia de vîrtejuri $\gamma(\zeta)$, iar proiecţia după normala la schelet distribuţia de surse $q(\zeta)$.

Astfel, distribuţia de vîrtejuri realizează discontinuitatea componentelor tangenţiale ale vitezelor induse în lungul scheletului S, iar distribuţia de surse discontinuitatea componentelor normale ale vitezei induse în lungul scheletului S.

În conformitate cu definiţia circulaţiei (3.19) rezultă

$$\int_S \gamma(s)\, \mathrm{d}s = \Gamma, \tag{7.3}$$

$$\int_S q(s)\, \mathrm{d}s = 0. \tag{7.4}$$

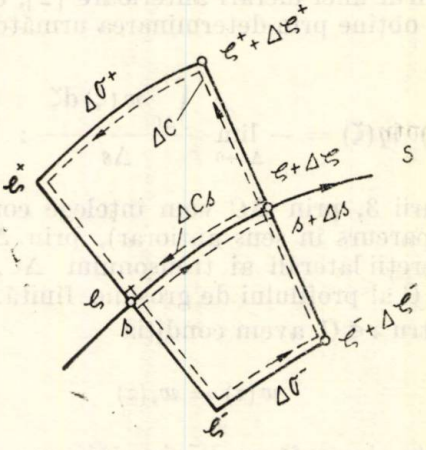


Fig. 3

Deci integrala distribuţiei de vîrtejuri în lungul scheletului S n oferă circulaţia în jurul profilului, iar integrala distribuţiei de surse în lungul scheletului este în mod necesar nulă. Condiţia (7.4) este cunoscut sub numele de condiţia de închidere.

Vom considera acum dezvoltarea în serie a densității $\varphi(\zeta)$. Deoarece la extremitățile scheletului S funcția de grosime ζ_g este nulă, în mod evident vom avea îndeplinite următoarele condiții:

$$\int_0^l \frac{d^n}{d\zeta^n}[S\zeta_g^n]\,d\zeta = 0; \quad \int_0^l \frac{d^n}{d\zeta^n}[D\zeta_g^n]\,d\zeta = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

de unde rezultă că circulația Γ se obține prin integrarea primului termen al dezvoltării în serie a densității $\varphi(\zeta)$:

$$\Gamma = \int_0^l \varphi(\zeta)\,d\zeta = \int_0^l S(\zeta)\,d\zeta. \tag{7.5}$$

Introducînd următoarea notație pentru diferența vitezelor induse în punctele $\zeta^{\pm} \in C$ simetrice în raport cu $\zeta \in S$:

$$w^+(\zeta) - w^-(\zeta) = \Phi(\zeta) \tag{7.6}$$

și următoarea notație pentru suma acelorași viteze:

$$w^+(\zeta) + w^-(\zeta) = G(\zeta), \tag{7.7}$$

ținînd seama de relațiile (3.3), din care rezultă că

$$\frac{d\zeta^{\pm}}{d\zeta} = 1 \pm \frac{d\zeta_g}{d\zeta} = 1 \pm \left(-y_g\frac{d\theta}{ds} + i\frac{dy_g}{ds}\right), \tag{7.8}$$

funcțiile $S(\zeta)$ și $D(\zeta)$, definite de relațiile (3.7) și (3.8), pot fi exprimate în felul următor:

$$S(\zeta) = \Phi(\zeta) - G(\zeta)\left[y_g\frac{d\theta}{ds} - i\frac{dy_g}{ds}\right], \tag{7.9}$$

$$D(\zeta) = G(\zeta) - \Phi(\zeta)\left[y_g\frac{d\theta}{ds} - i\frac{dy_g}{ds}\right]. \tag{7.10}$$

Notînd în continuare

$$S(\zeta)\,e^{i\theta} = S_t - iS_n, \tag{7.11}$$

$$\Phi(\zeta)\,e^{i\theta} = \Phi_t - i\Phi_n, \tag{7.12}$$

$$G(\zeta)\,e^{i\theta} = G_t - iG_n, \tag{7.13}$$

și ținînd seama de (7.5), vom obține o altă expresie pentru circulația Γ:

$$\Gamma = \int_S \left(\Phi_t - G_t y_g\frac{d\theta}{ds} + G_n\frac{dy_g}{ds}\right)ds$$

și o altă expresie a condiției de închidere (7.4):

$$\int_S \left(\Phi_n + G_t\frac{dy_g}{ds} + G_n y_g\frac{d\theta}{ds}\right)ds = 0.$$

Ecuațiile (7.14) și (7.15) prezintă interes în problemele privind determinarea conturului profilului dispus în rețea atunci cînd se pornește de la o distribuție de viteze cunoscută.

8. O DEZVOLTARE ÎN SERIE A VITEZEI INDUSE PE CONTURUL C

Pornim de la expresia vitezei induse (4.21), pe care o vom folosi pentru a exprima viteza indusă $w_s(z)$ în punctele $\zeta^{\pm} \in C$, simetrice în raport cu $\zeta \in S$.

Deoarece pe conturul C este satisfăcută condiția (3.4), rezultă

$$w_s(\zeta^{\pm}) = w^{\pm}(\zeta); \quad \zeta \in S.$$

Ținînd seama de această egalitate, expresia vitezei induse (4.21) se poate scrie în forma

$$w^{\pm}(\zeta_0) = \frac{\overset{\circ}{w}_s(\zeta_0^{\pm})}{2\pi i} \int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^{\pm}(\zeta)} \{K(\zeta, \zeta_0^{\pm}; t, \lambda) - k\} \, d\zeta, \tag{8.1}$$

unde k este o constantă complexă oferită de (4.22), iar nucleul K are expresia

$$K(\zeta, \zeta_0^{\pm}; t, \lambda) = \frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \operatorname{cth}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}(\zeta - \zeta_0 \mp \zeta_g)\right].$$

Pentru valorile mici ale funcției de grosime ζ_g, nucleul K poate fi dezvoltat în următoarea serie de puteri în raport cu ζ_g:

$$K(\zeta, \zeta_0^{\pm}; t, \lambda) = K_0 \pm \frac{\zeta_{g0}}{1!} K_0' + \frac{\zeta_{g0}^2}{2!} K_0'' \pm \frac{\zeta_{g0}^3}{3!} K_0''' + \ldots, \tag{8.2}$$

unde

$$K_0 = K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda); \quad \zeta_{g0} = \zeta_g(\zeta_0).$$

În continuare, observînd formula de inversiune (4.32), rezultă următoarele egalități:

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^{+}(\zeta)} [K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda) - k] \, d\zeta = \frac{\varphi(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^{+}(\zeta)}, \tag{8.3}$$

$$\frac{1}{\pi i} \frac{d^n}{d\zeta_0^n} \int_0^l \frac{g(\zeta)}{\overset{\circ}{w}_s^{+}(\zeta)} K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda) \, d\zeta = \frac{d^n}{d\zeta_0^n} \left[\frac{\varphi(\zeta_0)}{\overset{\circ}{w}_s^{+}(\zeta_0)}\right], \tag{8.4}$$

ultima egalitate ținînd seama de faptul că funcția complexă k este o constantă.

Înlocuind în expresia vitezei induse (8.1) dezvoltarea în serie a nucleului conform (8.2), integrînd și ținînd seama de (8.3) și (8.4), obținem în cele din urmă expresia căutată a vitezei induse, sub forma unei serii în raport cu funcția de grosime ζ_g:

$$w^{\pm}(\zeta_0) = \frac{\overset{\circ}{w}_s(\zeta_0^{\pm})}{2} \left\{\frac{\varphi(\zeta_0)}{\overset{\circ}{w}_s^{+}(\zeta_0)} \pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_{g0}^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-1}}{d\zeta_0^{2n-1}} \left[\frac{\varphi}{\overset{\circ}{w}_s^{+}}\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_{g0}^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{d\zeta_0^{2n}} \left[\frac{\varphi}{\overset{\circ}{w}_s^{+}}\right]\right\}. \tag{8.5}$$

Dezvoltarea obținută este utilă în cazul determinării parametrilor geometrici ai unei rețele de profile cînd se consideră distribuția de viteze dată.

9. O RELAȚIE ÎNTRE DISTRIBUȚIA VITEZELOR INDUSE PE CONTURUL PROFILULUI ȘI DISTRIBUȚIA DE VITEZE INDUSE PE SCHELETUL SĂU

Pornim de la (3.10), dezvoltarea în serie a densității $\varphi(\zeta)$. Vom considera grosimea profilului destul de redusă, astfel încît, reținînd numai primii doi termeni ai dezvoltării (3.10), aproximația obținută să fie mulțumitoare, deci

$$\varphi(\zeta) = S(\zeta) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}[D(\zeta)\,\zeta_g(\zeta)]. \tag{9.1}$$

Exprimînd densitatea în funcție de $\gamma(\zeta)$ și $q(\zeta)$, conform relației (7.2) și înmulțind cu $\mathrm{e}^{i\theta}$, obținem

$$\gamma(\zeta) - \mathrm{i}q(\zeta) = S(\zeta)\,\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[y_g(\zeta)\,\mathrm{e}^{i\theta}D(\zeta)]. \tag{9.2}$$

Ținînd seama, în continuare, de expresiile funcțiilor $S(\zeta)$ și $D(\zeta)$ oferite de relațiile (3.7) și (3.9) și introducînd următoarele notații:

$$S(\zeta)\,\mathrm{e}^{i\theta} = S_t - \mathrm{i}\,S_n, \tag{9.3}$$

$$D(\zeta)\,\mathrm{e}^{i\theta} = D_t - \mathrm{i}D_n, \tag{9.4}$$

unde, după cîteva calcule simple rezultă

$$S_t = v_t^+\frac{\mathrm{d}\sigma^+}{\mathrm{d}s} - v_t^-\frac{\mathrm{d}\sigma^-}{\mathrm{d}s}, \tag{9.5}$$

$$S_n = v_n^+\frac{\mathrm{d}\sigma^+}{\mathrm{d}s} - v_n^-\frac{\mathrm{d}\sigma^-}{\mathrm{d}s}, \tag{9.6}$$

$$D_t = v_t^+\frac{\mathrm{d}\sigma^+}{\mathrm{d}s} + v_t^-\frac{\mathrm{d}\sigma^-}{\mathrm{d}s}, \tag{9.7}$$

$$D_n = v_n^+\frac{\mathrm{d}\sigma^+}{\mathrm{d}s} + v_n^-\frac{\mathrm{d}\sigma^-}{\mathrm{d}s}, \tag{9.8}$$

după înlocuirea dezvoltărilor (9.3) și (9.4) în (9.2), după efectuarea derivatei și după separarea părților reale și imaginare, vor rezulta expresiile funcțiilor $\gamma(\zeta)$ și $q(\zeta)$:

$$\gamma = S_t - y_g\frac{\mathrm{d}D_n}{\mathrm{d}s} - D_n\frac{\mathrm{d}y_g}{\mathrm{d}s}, \tag{9.9}$$

$$q = S_n + y_g\frac{\mathrm{d}D_t}{\mathrm{d}s} + D_t\frac{\mathrm{d}y_g}{\mathrm{d}s}. \tag{9.10}$$

Funcțiile S_n și D_n pot fi determinate din condițiile la limită pe conturul C al profilului și pe scheletul S al acestuia. Astfel, din condiția la limită pe S

$$\operatorname{Im}\{[w_s(\zeta) + V_\infty e^{-i\alpha_\infty}] e^{i\theta}\}_s = 0, \tag{9.11}$$

rezultă

$$v_{sn}^{\pm} = V_\infty \sin(\theta - \alpha_\infty). \tag{9.12}$$

Însumînd, se obține

$$v_{sn}^{+} + v_{sn}^{-} = 2v_{sn} = 2V_\infty \sin(\theta - \alpha_\infty). \tag{9.13}$$

Condiția la limită pe conturul C este de forma

$$\operatorname{Im}\{[w^{\pm}(\zeta) + V_\infty e^{-i\alpha_\infty}] e^{i\theta^{\pm}}\}_c = 0, \tag{9.14}$$

de unde rezultă expresia componentelor normale ale vitezei induse pe conturul C:

$$v_n^{\pm} = V_\infty \sin(\theta^{\pm} - \alpha_\infty). \tag{9.15}$$

Scriind ultimul rezultat sub forma

$$v_n^{\pm} = V_\infty [\sin(\theta^{\pm} - \theta)\cos(\theta - \alpha_\infty) + \cos(\theta^{\pm} - \theta)\sin(\theta - \alpha_\infty)]$$

și ținînd seama de faptul că

$$\cos(\theta^{\pm} - \theta)\frac{d\sigma^{\pm}}{ds} = \operatorname{Re}\left\{\frac{d\zeta^{\pm}}{d\zeta}\right\} = 1 \mp y_g \frac{d\theta}{ds},$$

$$\sin(\theta^{\pm} - \theta)\frac{d\sigma^{\pm}}{ds} = \operatorname{Im}\left\{\frac{d\zeta^{\pm}}{d\zeta}\right\} = \pm \frac{dy_g}{ds},$$

rezultă

$$v_n^{\pm}\frac{d\sigma^{\pm}}{ds} = \pm V_\infty \frac{dy_g}{ds}\cos(\theta - \alpha_\infty) + V_\infty \sin(\theta - \alpha_\infty) \mp V_\infty y_g \frac{d\theta}{ds}\sin(\theta - \alpha_\infty). \tag{9.16}$$

Făcînd suma și diferența produsului de mai sus, se obțin componentele D_n și S_n:

$$D_n = 2V_\infty \sin(\theta - \alpha_\infty), \tag{9.17}$$

$$S_n = 2V_\infty\left[\frac{dy_g}{ds}\cos(\theta - \alpha_\infty) - y_g\frac{d\theta}{ds}\sin(\theta - \alpha_\infty)\right]. \tag{9.18}$$

Comparînd (9.17) cu (9.13), rezultă

$$D_n = 2v_{sn}. \tag{9.19}$$

Ultimul rezultat ne îndreptățește a considera valabilă și egalitatea

$$D_t = 2v_{st}. \tag{9.20}$$

Înlocuind în expresia (9.10) expresia componentei D_t dată de (9.20) și expresia componentei S_n dată de (9.18) și, în virtutea grosimii reduse a profilului, neglijînd termenul care conține funcția y_g, expresia distribuției de surse dobîndește următoarea formă :

$$q(\zeta) = 2V_\infty \frac{\mathrm{d}yg}{\mathrm{d}s}\left[\cos(\theta - \alpha_\infty) + \frac{v_{st}}{V_\infty}\right]. \tag{9.21}$$

Pentru a determina o relație de convertire a vitezelor induse de pe schelet pe conturul profilului, vom porni de la relațiile (9.5) și (9.8), care ne vor conduce la următoarele egalități utile :

$$2v_t^{\pm} \frac{\mathrm{d}\sigma^{\pm}}{\mathrm{d}s} = D_t \pm S_t. \tag{9.22}$$

Făcînd următoarele înlocuiri :

$$S_t = \gamma + y_g \frac{\mathrm{d}D_n}{\mathrm{d}s} + D_n \frac{\mathrm{d}y_g}{\mathrm{d}s},$$

$$D_t = 2v_{st},$$

$$\frac{\mathrm{d}D_n}{\mathrm{d}s} = 2V_\infty \cos(\theta - \alpha_\infty) \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s},$$

expresia (9.22) ne va conduce, în cele din urmă la formula de convertire pe care ne-am propus s-o determinăm :

$$v_t^{\pm} = \frac{v_{st} \pm \left[\frac{\gamma}{2} + V_\infty y_g \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \cos(\theta - \alpha_\infty) + V_\infty \sin(\theta - \alpha_\infty) \frac{\mathrm{d}y_g}{\mathrm{d}s}\right]}{\frac{\mathrm{d}\sigma^{\pm}}{\mathrm{d}s}}. \tag{9.23}$$

Ultimul rezultat conduce, prin particularizare, la formula de convertire a vitezelor pe care o propune F. Riegels în cazul profilului izolat [12].

Primită la redacție la 28 iunie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. N. J. Muskhelishvili, *Singular Integral Equation*, Groningen 1953.
2. O. Popa, *Asupra mișcării potențiale în jurul rețelelor de profile Carafoli*, Comunicările Conferinței de mașini hidraulice din septembrie, Timișoara, II (1964).
3. — *Formula de inversiune a integralei de tip Cauchy prin care se definește cîmpul de viteze în exteriorul rețelelor de profile subțiri*, Comunicările Conferinței de mașini hidraulice din septembrie, Timișoara, II (1964).
4. A. Betz, *Beiträge zur Tragflügeltheorie*, Diss. Göttingen 1919.

5. J. Dörr, *Strenge Lösung der Integralgleichung für die Strömung durch ein senkrechtes Flügelgitter*, Ing. — Archiv 1951.
6. — *Über swei mit der Tragflügeltheorie in Zusammenhang stehende Integralgleichungen*, Ing.-Archiv 1952.
7. K. Nickel, Zusatz zu J. Dörr : *Strenge Lösung der Integralgleichung für ein Flügelgitter*, Ing.-Archiv 1952.
8. I. L. Popescu, *Asupra mișcării nepermanente a unui fluid într-o rețea de profile*, Acad. R.P.R., Buletin Științific, Secția de Științe Matematice și Fizice, **IX**, 1 (1957).
9. E. Carafoli, *Méthode générale pour le tracé des profils d'aviation*, C.R.A.S. de Paris, **185**, Paris (1927).
10. — *Sur les profils aérodynamiques de forme générale* C. R. A. S. de Paris, **185**, Paris (1927).
11. E. Carafoli, *Aerodinamica*, București, Edit. tehnică, 1951.
12. F. Riegels, *Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen*, Ing.-Archiv 1948, 1949, 1950.

STUDIUL TEORETIC ŞI EXPERIMENTAL AL SCURGERII TURBULENTE DINTRE DOI CILINDRI COAXIALI, CILINDRUL INTERIOR FIIND ROTITOR*)

de D. IONESCU
Institutul agronomic Timişoara

În lucrare se examinează influenţa mişcării de rotaţie a cilindrului interior asupra stratului-limită dinamic şi termic din apropierea sa. În prima parte sînt deduse ecuaţiile stratului-limită, iar în partea a doua se prezintă un studiu experimental pentru două cazuri: 1) cilindrul interior staţionar şi 2) cilindrul interior rotitor. Comparînd rezultatele obţinute, se stabileşte influenţa mişcării de rotaţie a cilindrului interior asupra coeficientului de frecare local, asupra numărului Stanton local şi asupra distribuţiei vitezei şi temperaturii în stratul-limită.

NOTAŢII ŞI SIMBOLURI

a — coeficientul de difuziune termică;
b — lăţimea inelului;
C_{fz} — coeficientul de frecare local în direcţie axială;
$C_{f\varphi}$ — coeficientul de frecare local în direcţie tangenţială;
C_p — căldura specifică a aerului la presiune constantă;
d_1 — diametrul cilindrului interior;
d_2 — diametrul cilindrului exterior;
p — presiunea locală momentană;
$\overline{p}$ — presiunea medie locală;
r — raza;
r, φ, z — coordonatele în sistemul cilindric;
r_1 — raza cilindrului interior;
r_2 — raza cilindrului exterior;
r_5 — raza la marginea stratului-limită;

*) Prezentată la Conferinţa de Mecanică, Bucureşti, septembrie 1965.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 25 NR. 4, P. 747–762, BUCUREŞTI 1967

$\overline{V}_r, \overline{V}_\varphi, \overline{V}_z$ — vitezele medii (în timp) în direcţiile r, φ, z;
V'_r, V'_φ, V'_z — vitezele pulsatorii în direcţiile r, φ, z;
$\overline{V}_{zs}$ — viteza medie locală la marginea stratului-limită în direcţie axială;
$\overline{V}_{\varphi s}$ — viteza medie locală la marginea stratului-limită în direcţie tangenţială;
L — lungimea inelului;
Q — debitul de transfer de căldură de la cilindrul interior la aerul din inel;
Re — numărul lui Reynolds;
$\overline{St}$ — numărul lui Stanton;
$\overline{T}$ — temperatura medie (în timp) locală;
T' — temperatura pulsatorie;
$\overline{T}_s$ — temperatura la marginea stratului-limită termic;
Ta — numărul lui *Taylor*;
γ — greutatea specifică a aerului;
δ_z — grosimea geometrică a stratului-limită al vitezelor axiale;
δ_φ — grosimea geometrică a stratului-limită al vitezelor tangenţiale;
δ_z^* — grosimea de împingere în direcţia axială;
δ_z^{**} — grosimea pierderilor de impuls în direcţie axială;
δ_φ^{**} — grosimea pierderilor de impuls în direcţie tangenţială;
δ_c — grosimea de convecţie;
η — viscozitatea dinamică a aerului;
ν — viscozitatea cinematică a aerului;
λ — coeficientul de conducţie termică;
ρ — densitatea;
$\tau_r, \tau_\varphi, \tau_z$ — eforturile tangenţiale în direcţiile r, φ, z.

1. INTRODUCERE

Cercetări asupra mişcării fluidelor în jurul corpurilor care se rotesc au apărut încă la sfîrşitul veacului trecut. Problema scurgerii fluidelor şi a transferului de căldură în spaţii formate de cilindri rotitori s-a impus din necesitatea elaborării metodelor de răcire a maşinilor electrice rotative.

O cercetare sumară a literaturii arată că pînă în prezent s-au întreprins un număr mare de lucrări în acest domeniu, însă practic nici una nu a rezolvat problema în toată complexitatea ei.

G. I. Taylor [1], în 1923, a analizat stabilitatea mişcării fluidului între cilindri rotitori fără curent axial. În cazul rotaţiei cilindrilor într-o singură direcţie, pierderea stabilităţii se manifestă prin formarea unui curent secundar, staţionar, în formă de perechi de vîrtejuri, care se rotesc în sensuri opuse, ocupînd tot spaţiul dintre cilindri. Viteza de rotaţie la care curentul laminar din inel dispare şi apar vîrtejurile Taylor a fost denumită viteză de rotaţie critică.

J. W. Lewis [2], în 1927, a confirmat rezultatele lui Taylor. El a observat că, o dată ce vîrtejurile Taylor sînt formate, acestea se menţin

chiar dacă viteza de rotație este apoi redusă treptat la valori mai mici decît viteza critică la care au apărut.

Sh. I. Pai [3], în 1943, a examinat curentul de aer din inelul format de cilindrul interior rotitor și cilindrul exterior staționar. Rezultatele au arătat că în curentul de aer au fost prezente atît mișcarea dezordonată a turbulenții, cît și vîrtejurile Taylor. De asemenea s-a observat că vîrtejurile sînt deformate, dar pot exista pînă la turații, care depășesc de cîteva sute de ori viteza critică a lui Taylor.

J. Kay și C. Elgar [4], în 1958, au întreprins o cercetare detaliată asupra felurilor de curenți care apar în spațiul dintre doi cilindri, avînd cilindrul interior rotitor și cilindrul exterior staționar. Kay și Elgar au observat că pierderea stabilității laminare se caracterizează printr-un număr adimensional $Ta = r_m^{1/2} \cdot b^{3/2} \cdot \omega/\nu$, care a fost numit numărul lui Taylor. Rezultatele au arătat că există patru feluri de curenți pentru un cîmp mare de numere Reynolds și Taylor : 1) curent laminar pur, 2) curent laminar plus vîrtejuri Taylor, 3) curent turbulent pur, 4) curent turbulent plus vîrtejuri Taylor.

C. Gazeley [5], în 1958, a examinat curentul de aer și transferul de căldură în inelul format de cilindrul interior rotitor, încălzit, și cilindrul exterior, staționar, răcit. Măsurătorile au fost întreprinse pentru diferite viteze de rotație, diferiți curenți de aer axiali și diferite configurații ale suprafețelor cilindrilor.

S. I. Bjorklund și M. W. Kays [6], în 1959, au studiat transferul de căldură de la cilindri concentrici rotitori fără curent de aer axial. Rezultatele experimentale au arătat că schimbul de căldură poate apărea sub trei regimuri de curent : 1) la viteză periferică joasă, în care domină curentul laminar; 2) la viteză periferică a cilindrului peste o valoare critică, precizată și teoretic, în care se găsește curent cu vîrtejuri; 3) la viteze și mai mari, în care este prezentă mișcarea turbulentă.

Lucrarea de față prezintă o nouă cercetare menită să studieze mișcarea aerului și transferul de căldură în spațiul dintre doi cilindri, avînd cilindrul interior rotitor și cilindrul exterior staționar. Problema propusă o constituie stratul-limită turbulent, dinamic și termic din apropierea cilindrului interior, cu scopul de a da informații asupra influenței mișcării de rotație a acestuia asupra stratului-limită. Studiul s-a făcut în cazul unui inel relativ lung (1,5 m) cu pereți netezi, pentru a elimina, pe cît posibil, influențele „intrării" și rugozității, prezente în mod normal la mașinile electrice rotative, simplificînd astfel problema și, așa destul de complexă.

2. ECUAȚIILE STRATULUI-LIMITĂ

În cazul lucrării de față, mișcarea fluidului are loc pe suprafețe cilindrice, de aceea este mult mai natural să se folosească ecuațiile de mișcare și ecuația transferului de căldură în sistemul de coordonate cilindric.

După cum este cunoscut, în stratul-limită fluidul trebuie considerat vîscos și, prin urmare, mișcarea lui poate fi studiată cu ajutorul ecuațiilor

diferențiale ale mișcării medii, care în cazul simetriei axiale și al absenței forțelor de masă, pentru un fluid incompresibil, sînt

$$\overline{V}_r\frac{\partial\overline{V}_r}{\partial r}+\overline{V}_z\frac{\partial\overline{V}_r}{\partial z}-\frac{\overline{V}_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial r}-\frac{\partial\overline{V_r'^2}}{\partial r}-\frac{\partial\overline{V_r'V_z'}}{\partial z}-\frac{\overline{V_r'^2}}{r}+$$
$$+\frac{\overline{V_\varphi'^2}}{r}+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{V}_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{V}_r}{\partial r}+\frac{\partial^2\overline{V}_r}{\partial z^2}-\frac{\overline{V}_r}{r^2}\right), \tag{1}$$

$$\overline{V}_r\frac{\partial\overline{V}_\varphi}{\partial r}+\overline{V}_z\frac{\partial\overline{V}_\varphi}{\partial z}+\frac{\overline{V}_r\overline{V}_\varphi}{r}=-\frac{\partial\overline{V_r'V_\varphi'}}{\partial r}+\frac{\partial\overline{V_\varphi'V_z'}}{\partial z}-2\frac{\overline{V_r'V_\varphi'}}{r}+$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{V}_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{V}_\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\overline{V}_\varphi}{\partial z^2}-\frac{\overline{V}_\varphi}{r^2}\right), \tag{1'}$$

$$\overline{V}_r\frac{\partial\overline{V}_z}{\partial r}+\overline{V}_z\frac{\partial\overline{V}_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}-\frac{\partial\overline{V_r'V_z'}}{\partial r}-\frac{\partial\overline{V_z'^2}}{\partial z}-\frac{\overline{V_r'V_z'}}{r}+$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{V}_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{V}_z}{\partial r}+\frac{\partial^2\overline{V}_z}{\partial z^2}\right). \tag{1''}$$

La acestea se alătură ecuația continuității pentru valori medii:

$$\frac{\partial\overline{V}_r}{\partial r}+\frac{\overline{V}_r}{r}+\frac{\partial\overline{V}_z}{\partial z}=0. \tag{2}$$

Pentru componentele tensiunii de frecare în mișcare turbulentă a unui fluid, putem scrie

$$\tau_{r\varphi}=\eta r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overline{V}_\varphi}{r}\right)-\rho\,\overline{V_r'V_\varphi'}, \tag{3}$$

$$\tau_{\varphi z}=\eta\frac{\partial\overline{V}_\varphi}{\partial z}-\rho\,\overline{V_\varphi'V_z'}, \tag{3'}$$

$$\tau_{zr}=\eta\left(\frac{\partial\overline{V}_r}{\partial z}+\frac{\partial\overline{V}_z}{\partial r}\right)-\rho\,\overline{V_r'V_z'}. \tag{3''}$$

Ecuația diferențială a transferului mediu de căldură în aceleași condiții ca mai sus este

$$\overline{V}_r\frac{\partial\overline{T}}{\partial r}+\overline{V}_z\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}=-\frac{\overline{V_r'T'}}{r}-\frac{\partial\overline{V_r'T'}}{\partial r}-\frac{\partial\overline{V_z'T'}}{\partial z}+$$
$$+a\left(\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{T}}{\partial r}+\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial z^2}\right). \tag{4}$$

Deoarece în stratul-limită variațiile vitezei și temperaturii în direcție radială sînt mult mai mari decît în direcție axială, se poate considera

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}=0. \tag{5}$$

Presiunea în interiorul stratului-limită este invariabilă de-a lungul normalei la conturul corpului, fiind egală cu presiunea exercitată asupra limitei exterioare a stratului-limită în locul examinat; de aceea putem scrie

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial r} = 0. \tag{6}$$

a) Ecuația stratului-limită al vitezelor axiale

Să considerăm ecuația (1''), pe care o înmulțim cu r și îi adăugăm ecuația continuității (2) înmulțită cu $r\,\overline{V}_z$. Ținînd seama de expresia (5), după restrîngerea derivatelor se obține

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,\overline{V}_r\,\overline{V}_z) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,\overline{V}_z^2) = -\frac{1}{\rho} r \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r}(r\,\overline{V'_r V'_z}) - \\ - r\frac{\partial \overline{V'^2_z}}{\partial z} + \nu \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \overline{V}_z}{\partial r}\right).$$

Integrăm această ecuație de la peretele cilindrului interior ($r = r_1$) pînă la marginea stratului-limită ($r = r_s$) :

$$[r\,\overline{V}_r\,\overline{V}_z]_{r_1}^{r_s} + \int_{r_1}^{r_s} \frac{\partial}{\partial z}(r\,\overline{V}_z^2)\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{\rho}\int_{r_1}^{r_s} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} r\,\mathrm{d}r - \\ - \int_{r_1}^{r_s} \frac{\partial \overline{V'^2_z}}{\partial z} r\,\mathrm{d}r + \left[r\,\overline{V'_r V'_z} + \nu r \frac{\partial \overline{V}_z}{\partial r}\right]_{r_1}^{r_s}. \tag{7}$$

Deoarece în această lucrare este evidentă inegalitatea $\overline{V}_r \ll \overline{V}_z$, primul termen din ecuația (7) poate fi considerat zero; de asemenea expresia (3'') a tensiunii de frecare se reduce la

$$\tau_z = \rho\left(-\overline{V'_r V'_z} + \nu \frac{\partial \overline{V}_z}{\partial r}\right). \tag{8}$$

Ținînd seama că la marginea stratului-limită $\tau_{zs} = 0$, pe baza celor arătate mai sus, ecuația (7) ia forma

$$\frac{1}{\rho} r_1\,\tau_{1z} = -\int_{r_1}^{r_s} \frac{\partial}{\partial z}(r\,\overline{V}_z)\,\mathrm{d}r - \frac{1}{\rho}\int_{r_1}^{r_s} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} r\,\mathrm{d}r - \int_{r_1}^{r_s} \frac{\partial \overline{V'^2_z}}{\partial z} r\,\mathrm{d}r. \tag{9}$$

Din teoria lui Bernoulli aplicată la marginea exterioară a stratului-limită se deduce

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\overline{p}_s}{\mathrm{d}z} = \overline{V}_{zs}\frac{\mathrm{d}\overline{V}_{zs}}{\mathrm{d}z} + \overline{V}_{\varphi s}\frac{\mathrm{d}\overline{V}_{\varphi s}}{\mathrm{d}z} \tag{10}$$

(s-a putut scrie derivata totală în locul celei parțiale pe baza expresiei (6)).

În continuare vom defini :

Grosimea geometrică a stratului -limită în direcția axială :

$$\delta_z = r_s - r_1 ; \tag{11}$$

— grosimea de împingere sau grosimea de eliminare în direcție axială :

$$\delta_z^* = \frac{1}{r_1 \bar{V}_{zs}} \int_{r_1}^{r_s} \bar{V}_z (\bar{V}_{zs} - \bar{V}_z) \, r \, dr, \tag{12}$$

— grosimea pierderilor de impuls în direcție axială :

$$\delta_z^{**} = \frac{1}{r_1 \bar{V}_{zs}^2} \int_{r_1}^{r_s} \bar{V}_z (\bar{V}_{zs} - \bar{V}_z) \, r \, dr. \tag{13}$$

Considerăm ultimul termen din ecuația (9) egal cu zero ; pe baza expresiilor (10) — (13), aceasta ia forma finală

$$\frac{\tau_{1z}}{\rho \bar{V}_{zs}^2} = \frac{d\delta_z^{**}}{dz} + (2 + H) \frac{\delta_z^{**}}{\bar{V}_{zs}} \frac{d\bar{V}_{rs}}{dz} + \frac{r_s^2 - r_1^2}{2 r_1} \frac{\bar{V}_{\varphi 1}}{\bar{V}_{zs}^2} \frac{d\bar{V}_{\varphi s}}{dz_s}, \tag{14}$$

în care s-a notat prin $H = \delta_z^*/\delta_z^{**}$ raportul grosimilor.

Ecuația (14) descrie mărimea stratului-limită al vitezelor axiale, cu gradient de presiune în direcție axială. Se poate observa că, exceptînd ultimul termen, această ecuație este identică cu binecunoscuta ecuație a stratului-limită a lui Kármán. Ultimul termen reprezintă contribuția vitezei tangențiale la mărimea stratului-limită.

Dacă cilindrul interior este staționar ($\bar{V}_\varphi = 0$), ecuația stratului limită cu gradient de presiune în direcție axială se deduce imediat :

$$\frac{\tau_{1z}}{\rho \bar{V}_{zs}^2} = \frac{d\delta_z^{**}}{dz} + (2 + H) \frac{\delta_z^{**}}{\bar{V}_{zs}} \frac{d\bar{V}_{zs}}{dz}. \tag{15}$$

Dacă lipsește atît viteza tangențială, cît și gradientul de presiune, ecuația stratului-limită se simplifică mai mult :

$$\frac{\tau_{1z}}{\rho \bar{V}_{zs}^2} = \frac{d\delta_z^{**}}{dz}. \tag{16}$$

b) Ecuația stratului-limită al vitezelor tangențiale

Această ecuație se obține prin integrarea ecuației (1′), pe care o multiplicăm cu r^2 și îi adăugăm ecuația continuității (2) multiplicată cu $r^2 \bar{V}_\varphi$; ținînd seama de expresia (5), după restrîngerea derivatelor se obține

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \bar{V}_r \bar{V}_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(r^2 \bar{V}_\varphi \bar{V}_z) = - \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \overline{V_r' V_\varphi'}) - \frac{\partial}{\partial z}(r^2 \overline{V_\varphi' V_z'}) +$$

$$+ \nu \left[r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{V}_\varphi}{r} \right) \right].$$

Integrăm această ecuaţie de la $r = r_1$ la $r = r_s$:

$$[r^2 \overline{V}_r \overline{V}_\varphi]_{r_1}^{r_s} + \int_{r_1}^{r_s} \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \overline{V}_\varphi \overline{V}_z)\, dr = \left[r^2 \left\{ - \overline{V'_r V'_\varphi} + \partial\, r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\overline{V}_\varphi}{r} \right) \right\} \right]_{r_1}^{r_s} -$$

$$- \int_{r_1}^{r_s} \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \overline{V'_\varphi V'_z})\, dr.$$

Deoarece $\overline{V}_r \ll \overline{V}_\varphi$, primul termen din ecuaţia de mai sus poate fi neglijat, şi aceasta devine

$$\int_{r_1}^{r_s} \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \overline{V}_\varphi \overline{V}_z)\, dr = - \frac{1}{\rho} r_1 \tau_{1\varphi} - \int_{r_1}^{r_s} \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \overline{V'_\varphi V'_z})\, dr, \tag{17}$$

în care s-a ţinut seama de expresia (3') şi de faptul că la marginea exterioară a stratului-limită $\tau_{\varphi s} = 0$.

Definim grosimea pierderilor de impuls în direcţie tangenţială:

$$\delta_\varphi^{**} = \frac{1}{(r_1 \overline{V}_{\varphi 1})(r_s \overline{V}_{zs})} \int_{r_1}^{r_s} \overline{V}_z (r_1 \overline{V}_{\varphi 1} - r \overline{V}_\varphi)\, dr. \tag{18}$$

Neglijînd ultimul termen, cu expresia (18) ecuaţia (17) ia forma

$$\frac{r_1 \tau_{1\varphi}}{\rho r_s \overline{V}_{zs} \overline{V}_{\varphi 1}} = \frac{d\delta_\varphi^{**}}{dz} + \frac{1}{\overline{V}_{zs}} \cdot \frac{d\overline{V}_{zs}}{dz} \delta_\varphi^{**}, \tag{19}$$

care reprezintă ecuaţia integrală a vitezelor tangenţiale.

c) Ecuaţia stratului-limită termic

Să considerăm ecuaţia (4), pe care o vom înmulţi cu r şi îi adăugăm ecuaţia continuităţii (2) înmulţită cu $r\overline{T}$; ţinînd seama de expresia (5), după restrîngerea derivatelor, se obţine

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \overline{V}_r \overline{T}) + \frac{\partial}{\partial z} (r \overline{V}_z \overline{T}) = - \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{V'_r T'}) - \frac{\partial}{\partial z} (r \overline{V'_z T'}) + \tag{20}$$

$$+ a \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \overline{T}}{\partial r} \right).$$

Integrînd această ecuaţie de la $r = r_1$, la $r = r_s$ şi considerînd $\overline{V}_r = 0$, rezultă

$$\int_{r_1}^{r_s} \frac{\partial}{\partial z} (r \overline{V}_z \overline{T})\, dr = \left[r \left(a \frac{\partial \overline{T}}{\partial r} - \overline{V'_r T'} \right) \right]_{r_1}^{r_s} - \int_{r_1}^{r_s} \frac{\partial}{\partial z} (r \overline{V'_z T'})\, dr.$$

Transferul de căldură în direcţie radială este suma contribuţiei moleculare şi turbulente, adică:

$$Q = \lambda \frac{\partial \overline{T}}{\partial r} - \rho C_p \overline{V'_r T'}. \tag{21}$$

Definim ca grosime de convecție expresia:

$$\delta_c = \frac{1}{r\,\overline{V}_{zs}(\overline{T}_1 - \overline{T}_0)} \int_{r_1}^{r_s} \overline{V}_{zs}(\overline{T} - \overline{T}_0)\, r\, dr, \tag{22}$$

în care $\overline{T}_0$ este temperatura aerului înainte de a intra în spațiul dintre cilindri.

Mărimea δ_c caracterizează cîmpul de convecție termic și are dimensiunea unei lungimi.

Ținînd seama de relațiile (21) și (22) și neglijind ultimul termen, ecuația (20) poate fi scrisă

$$\frac{d\delta_c}{dz} + \frac{1}{\overline{V}_{zs}} \frac{d\overline{V}_{zs}}{dz} \delta_c = St, \tag{23}$$

în care s-a notat prin

$$St = \frac{Q}{\rho\, C_p\, \overline{V}_{zs}(T - \overline{T}_0)}$$

valoarea locală a numărului Stanton — un coeficient de căldură convectiv.

În general, valoarea termenului al doilea din primul membru al ecuației (23) este mică, și de aceea în mod obișnuit se neglijează; în acest caz, ecuația stratului-limită termic ia forma

$$\frac{d\delta_c}{dz} = St. \tag{24}$$

3. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ

Instalația experimentală a fost astfel concepută, încît să permită măsurători ale vitezei și temperaturii în stratul-limită din apropierea cilindrului interior.

Schema instalației este prezentată în figura 1. Elementul principal îl constituie doi cilindri coaxiali încălziți la aceeași temperatură. Aerul de răcire este aspirat prin orificii, site și o gaură în formă de clopot în spațiul dintre cilindri și de aici, după ce trece printr-un dispozitiv de măsurat debitul, este refulat de un ventilator în atmosferă.

Cilindrul interior a fost construit din două tuburi concentrice de aluminiu, montate pe un arbore de oțel prin intermediu unui con la intrare și unui disc la ieșire. Pentru încălzirea cilindrului, pe tubul interior a fost bobinată o rezistență electrică în formă de panglică; izolația electrică între tub și rezistența electrică s-a făcut printr-un strat subțire de mică. Peste acesta s-a tras un al doilea tub, iar spațiul dintre ele s-a umplut cu șamotă. Capetele rezistenței electrice s-au scos, prin două canale practicate pe arbore, la două inele la care prin perii s-a făcut alimentarea de la rețeaua electrică.

După montarea cilindrului cu arborele, acest ansamblu rotitor în întregime s-a introdus în strung și la turație a fost echilibrat.

Pe o generatoare a cilindrului interior s-au aplicat suprafeței cinci termocuple cupru-constantan la distanță de 200 mm unul față de altul.

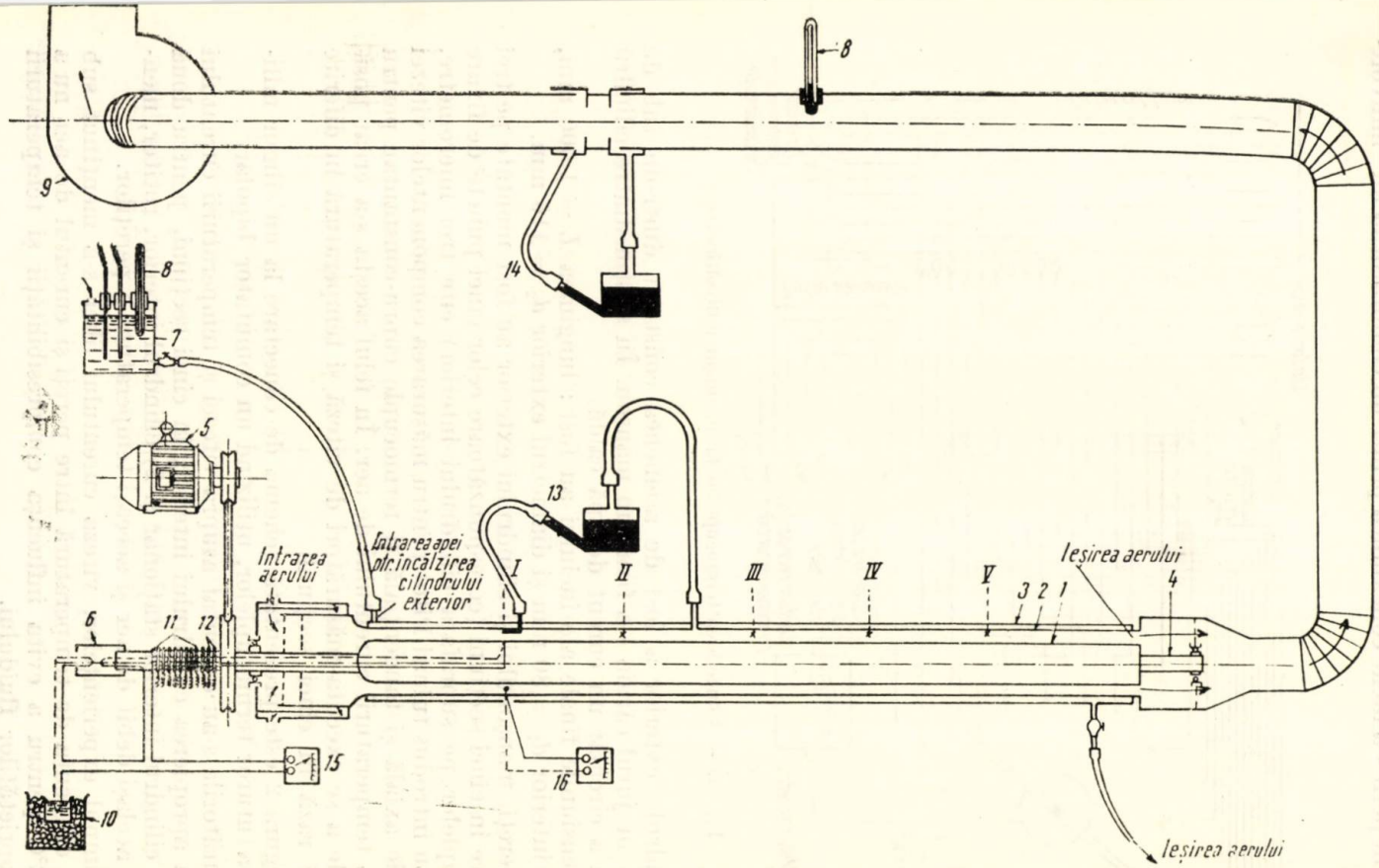


Fig. 1. — Schema instalației experimentale :

1 — cilindrul interior; *2* — cilindrul exterior, *3* — Manșonul cilindrului exterior- *4* — arbore; *5* motor pentru antrenarea cilindrului interior; *6* termostat pentru lipiturile de compensație; *7* — vas pentru încălzirea apei; *8* — termometru; *9* — ventilator; *10* vas cu gheață; *11* — inele cu perii colectoare pentru termocuple; *12* — inele cu perii pentru încălzirea cilindrului interior; *13* — măsurarea vitezei locale; *14* — măsurarea debitului prin diafragmă; *15* — măsurarea temperaturii peretelui cilindrului interior; *16* — măsurarea temperaturii curentului de aer; *I, II, III, IV, V* — secțiunile în care s-au executat măsurătorile.

Cablurile termocuplelor s-au scos la zece inele montate la un capăt al arborelui şi prin perii s-a făcut conexiunea printr-un comutator la un milivoltmetru.

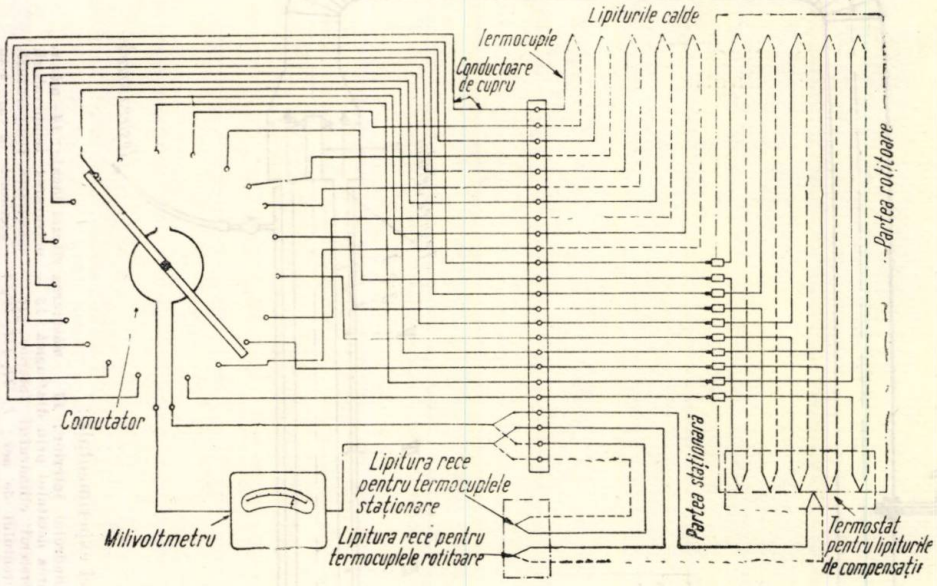


Fig. 2. — Conectarea termocuplelor la un singur milivoltmetru.

Cilindrul exterior a fost de asemenea construit dintr-un tub de aluminiu, în jurul căruia s-a fixat un manşon. În spaţiu dintre cilindru şi manşon a circulat un curent de apă caldă.

Dimensiunile finale ale inelului au fost : lungimea $L = 1\,500$ mm, diametrul interior $d_1 = 80$ mm şi diametrul exterior $d_2 = 116$ mm.

În pereţii manşonului şi cilindrului exterior au fost montate pe trei generatoare în cinci secţiuni (corespunzătoare celor cinci puncte de fixare a termocuplelor pe suprafaţa cilindrului interior) cîte trei micrometre, în care s-au introdus tuburi Pitot pentru măsurarea componentelor vitezei în direcţiile axială şi tangenţială şi termocuple cupru-constantan pentru măsurarea temperaturii curentului de aer. În felul acesta s-a creat posibilitatea de a se executa măsurători de viteză şi temperatură în diferite puncte pe rază în cinci secţiuni.

În figura 2 este prezentată schema de conectare la un singur milivoltmetru a tuturor termocuplelor, utilizînd un comutator bipolar.

Măsurătorile s-au executat asupra vitezei şi temperaturii curentului de aer din apropierea cilindrului interior, în cinci secţiuni, pentru două cazuri : 1) cilindrul interior staţionar şi 2) cilindrul interior, rotitor, menţinîndu-se acelaşi debit de aer şi aceeaşi temperatură a pereţilor.

În timpul experienţelor, viteza curentului liber s-a menţinut sub 9 m/s, iar diferenţa de temperatură între pereţi şi curentul de aer nu a depăşit 32°C pentru a evita influenţa compresibilităţii şi temperaturii asupra proprietăţilor fluidului.

4. REZULTATE EXPERIMENTALE

A. CILINDRUL INTERIOR STAȚIONAR

a) *Stratul-limită al vitezelor.* În urma măsurătorilor executate s-a constatat că viteza V_s la marginea stratului-limită și grosimea stratului-limită cresc asimptotic în lungul cilindrului.

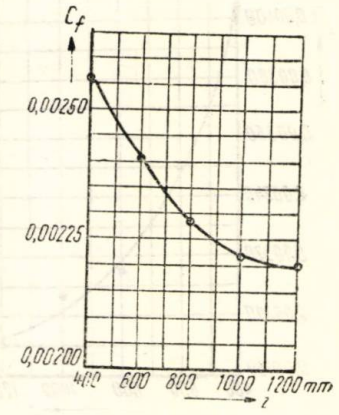


Fig. 3. — Coeficientul de frecare local C_f de-a lungul cilindrului interior staționar.

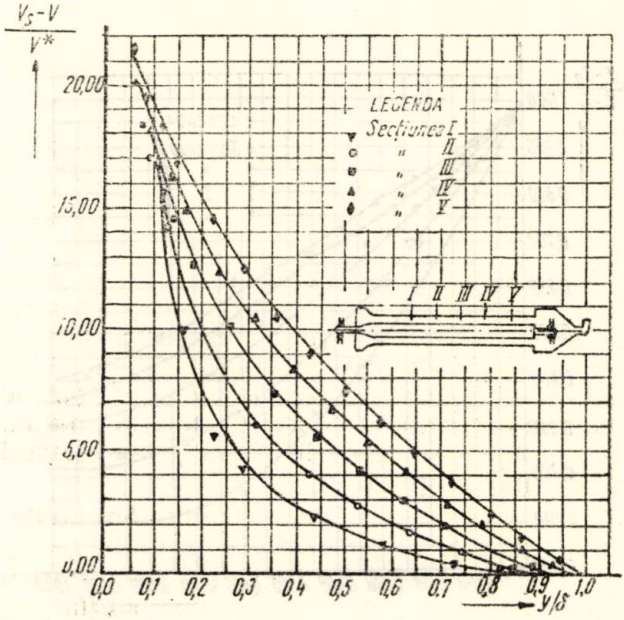


Fig. 4. — Distribuția vitezei axiale în stratul-limită; cilindrul interior staționar.

Coeficientul de frecare C_f a fost estimat în cinci secțiuni pe baza măsurătorilor și a ecuației (15), folosind și relația binecunoscută $C_f = \tau_1 \Big/ \frac{\rho}{2} \bar{V}_i^2$. În figura 3 este prezentată variația coeficientului de

frecare C_f de-a lungul cilindrului. Valorile obținute sînt în întregime rezonabile. Mai mult, descreșterea lui C_f în direcția curentului se comportă exact ca în cazul stratului-limită al unui curent de aer care se scurge pe o placă încălzită, fără gradient de presiune în direcția curentului [7].

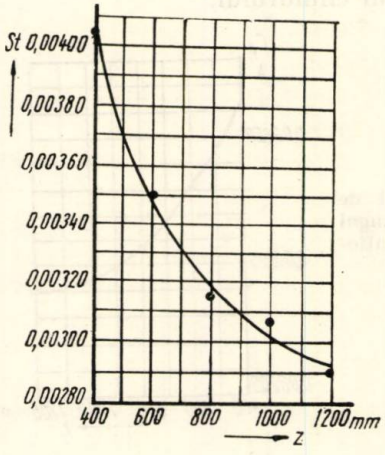


Fig. 5. — Numărul Stanton local de-a lungul cilindrului interior staționar.

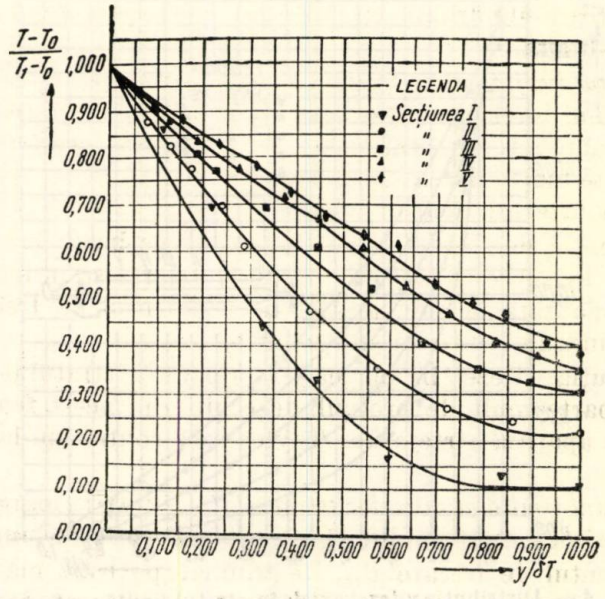


Fig. 6. — Distribuția temperaturii în stratul-limită, cilindrul interior staționar.

Distribuția vitezei în partea exterioară a stratului-limită s-a reprezentat printr-o curbă universală pentru toate numerele Reynolds $V_s - V / V^* = f(y/\delta)$. Examinînd graficul din figura 4, rezultă clar că stratul-

limită în prima secțiune este departe de a fi în echilibru, însă de la prima secțiune pînă la secțiunea a cincea se apropie treptat de echilibru, rezultat confirmat și de experiențele lui H. Yeh [8]. Instabilitatea mai accentuată în primele secțiuni poate fi explicată și prin influența secțiunii de intrare, deși s-au luat unele măsuri în acest scop prin dirijarea curentului prin canale și site înainte de a intra în spațiul inelar.

b) *Stratul-limită termic.* Măsurătorile executate asupra temperaturii în curentul de aer arată că temperatura la marginea stratului-limită termic își grosimea stratului-limită termic cresc de-a lungul cilindrului fără ca aceasta din urmă să atingă marginea stratului-limită dinamic.

Numărul Stanton local, determinat pe baza măsurătorilor și a ecuației (25), descrește în direcția curentului în mod asemănător coeficientului de frecare local C_f (fig. 5).

Profilele temperaturii medii, prezentate sub formă adimensională, pentru cinci secțiuni (fig. 6) arată că nu există nici o asemănare între ele, dar se observă totuși o tendință către o formă limită.

B. CILINDRUL INTERIOR ROTITOR

Prin rotirea cilindrului interior apar schimbări importante în aspectul stratului-limită.

a) *Stratul-limită al vitezelor axiale.* Grosimea stratului-limită în cazul cilindrului interior rotitor este mai mare în toate secțiunile față de cazul cilindrului interior staționar; de asemenea, creșterea sa în lungul cilindrului este foarte accentuată, ajungînd ca în ultima secțiune să ocupe aproape jumătate din spațiul inelar.

Coeficientul de frecare local C_{fz}, dedus pe baza măsurătorilor și a ecuației (14) (fig. 7), este mai mic, iar descreșterea sa în lungul cilindrului este mai pronunțată în comparație cu coeficientul de frecare C_f corespunzător cilindrului interior staționar.

Distribuția vitezei în partea exterioară a stratului-limită (fig. 8) se apropie foarte mult de profilul de echilibru; acest fenomen poate fi explicat prin apariția vîrtejurilor Taylor care contribuie la uniformizarea curentului.

b) *Stratul-limită al vitezelor tangențiale.* Viteza la marginea stratului-limită și grosimea stratului-limită cresc asimptotic în lungul cilindrului.

Coeficientul de frecare $C_{f\varphi}$, determinat pe baza măsurătorilor și a ecuației (19), descrește într-un mod foarte pronunțat de-a lungul cilindrului interior (fig. 9).

Partea exterioară a stratului-limită, reprezentată sub forma momentului vitezei tangențiale în funcție de rază (fig. 10), arată că acesta în prima secțiune este departe de a fi echilibru, însă se apropie treptat de echilibru pînă la secțiunea a cincea.

c) *Stratul-limită termic.* Temperatura $\overline{T}_s$ la marginea stratului-limită termic și grosimea stratului-limită termic cresc de-a lungul cilindrului interior staționar.

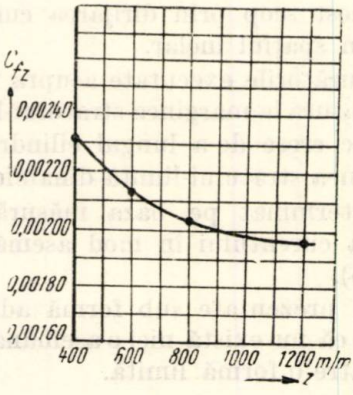


Fig. 7. — Coeficientul de frecare local C_{fz} de-a lungul cilindrului interior rotitor.

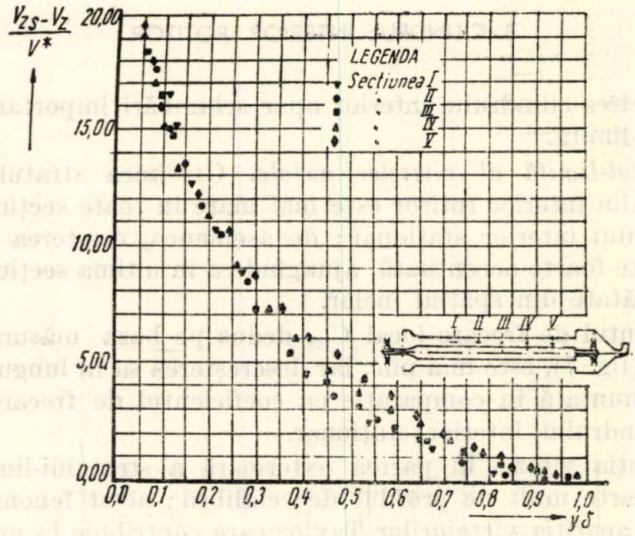
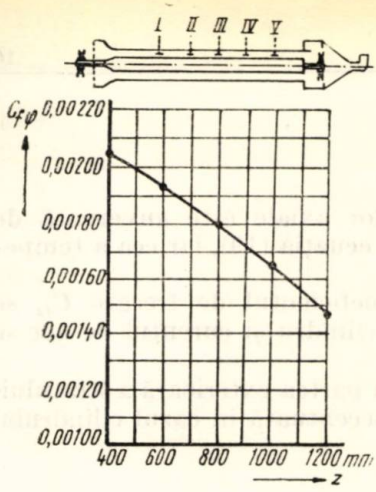


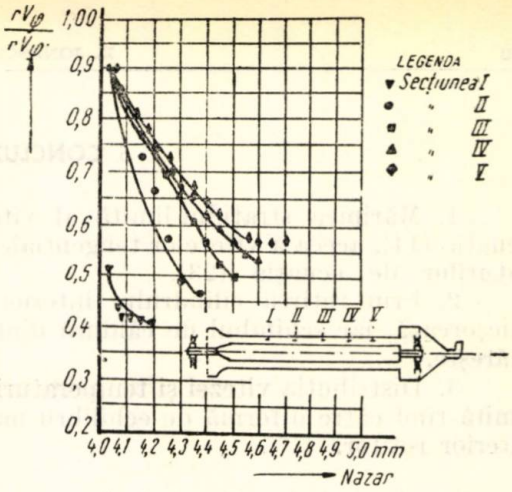
Fig. 8. — Distribuția vitezei axiale în stratul-limită, cilindrul interior rotitor.

Numărul Stanton local are valori mai mici dacă cilindrul interior este rotitor în comparație cu valorile corespunzătoare cilindrului interior staționar (fig. 11). Descreșterea numărului Stanton în lungul cilindrului este mai accentuată în primele secțiuni, după care acest coeficient își păstrează o valoare aproape constantă.

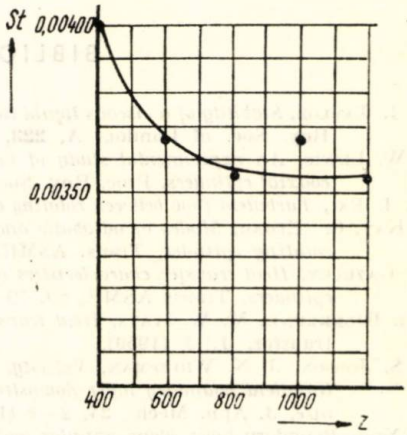
Profilele temperaturii medii (fig. 12) nu prezintă o asemănare între ele, dar există totuși o tendință către o formă limită într-un mod mai pronunțat decît în cazul cilindrului interior staționar.



9



10



11

Fig. 9. — Coeficientul de frecare local $C_{f\varphi}$ de-a lungul cilindrului interior.

Fig. 10. — Distribuția vitezei tangențiale în stratul-limită.

Fig. 11. — Numărul Stanton local de-a lungul cilindrului interior rotitor.

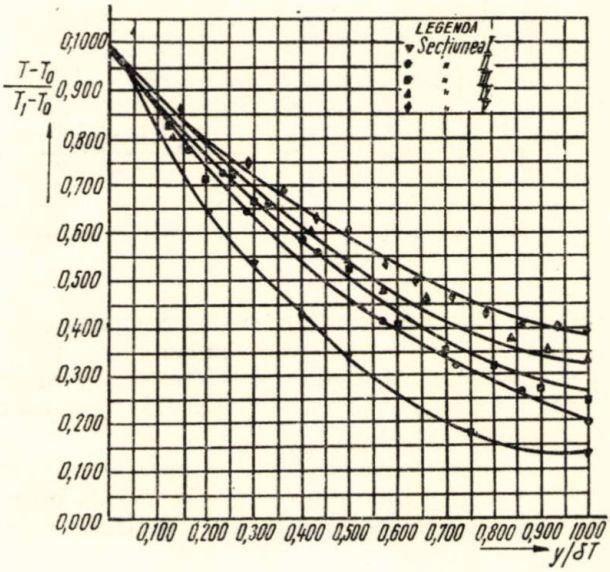


Fig. 12. — Distribuția temperaturii în stratul-limită, cilindrul interior rotitor.

5. CONCLUZII

1. Mărimea stratului-limită al vitezelor axiale este guvernată de ecuația (14), aceea a vitezelor tengențiale de ecuația (19), iar cea a temperaturilor de ecuația (23).

2. Prin rotirea cilindrului interior, coeficientul de frecare C_{fz} se micșorează, iar schimbul de căldură dintre cilindru și curentul de aer se mărește.

3. Distribuția vitezei și temperaturii în partea exterioară a stratului-limită tind către o formă de echilibru mai accentuată în cazul cilindrului interior rotitor.

Primită la redacție la 14 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. G. I. Taylor, *Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders*, Phil. Trans Roy. Soc. of London, **A**, **223**, 289 (1923).
2. J. W. Lewis, *An experimental study of the motion of viscous liquid contained between two coaxial cylinders*, Proc. Roy. Soc. of London, **A**, **117**, 388—407 (1957).
3. Sh. I. Pai, *Turbulent flow between rotating cylinders*, NACA TN 892, March 1943.
4. J. Kay, C. Elgar, *Modes of adiabatic and diabatic fluid flow in an annulus with an inner rotating cylinder*, Trans. ASME, **80**, 753—763 (1958).
5. C. Gazeley, *Heat transfer characteristics of the rotational and axial flow between concentric cylinders*, Transş ASME, 80, 79—89 (1958).
6. S. I. Bjorklund, M. W. Kays, *Heat transfer between concentric rotating cylinders*, J. Heat transfer, **1**, *3* (1959).
7. D. S. Johson, J. N. Whippman, *Velocity, temperature and heat-transfer measurements in a turbulent boundary layer downstream of a stepwise discontinuity in wall temperature*, J. App. Mech., **24**, 2—8 (1957).
8. H. Yeh, *Boundary layer along annular walls in a swirling flow*, Trans. ASME, **80**, 767—774 (1958).

ASUPRA MIŞCĂRII SUBSONICE ÎN JURUL UNUI CILINDRU ELIPTIC [1])

de D. SOCOLESCU
Universitatea din Bucureşti

533

În prima parte a lucrării se studiază cu ajutorul metodei aproximative directe a lui Imaï-Lamla-C. Iacob mişcarea subsonică cu circulaţie în jurul unui cilindru eliptic. Formulele obţinute se simplifică mult în cazul absenţei circulaţiei. În partea a doua se reia studiul aceleiaşi mişcări fără circulaţie folosind cele trei variante ale metodei hodografice aproximative a lui Ciaplîghin (varianta Ciaplîghin-Demtchenko, varianta Kármán-Tsien şi varianta C. Iacob). Ultima parte conţine un studiu comparat al rezultatelor obţinute folosind cele două metode.

INTRODUCERE

Mişcarea subsonică a unui fluid perfect, compresibil, în jurul unui cilindru eliptic a făcut obiectul a numeroase cercetări. Pentru determinarea acestei mişcări s-au folosit metode de aproximaţie directe, care folosesc ca variabile coordonatele planului fizic al mişcării, şi metode de aproximaţie hodografice, care utilizează ca variabile coordonatele planului hodografic. Mişcarea subsonică în jurul unui cilindru eliptic a fost studiată de Hooker, Kaplan, Caius Iacob [2], H.S.Tsien [5], Imaï şi Aihara [6] etc.

Recent, I. Filimon [7] a reluat studiul mişcării în jurul cilindrului eliptic, obţinînd o serie de rezultate interesante. În această lucrare vom reexamina şi trata unitar mişcarea în jurul unui cilindru eliptic prin metoda lui Ciaplîghin, aşa cum a fost ea dezvoltată în [1] şi prin metoda aproximativă directă a lui Imaï [3], Lamla [4] şi Caius Iacob [1]. În încheiere vom compara rezultatele obţinute prin cele două metode de aproximaţie.

---

[2]) Prezentată la Conferinţa de mecanică, Bucureşti, septembrie 1965

I. METODA HODOGRAFICĂ APROXIMATIVĂ A LUI CIAPLÎGHIN

1. CONSIDERAȚII GENERALE

În metoda lui Ciaplîghin se înlocuiește mișcarea fluidului real, supus legii adiabatice

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma},$$

prin mișcarea unui fluid fictiv, supus unei legi liniare:

$$p = C\,\frac{1}{\rho} + C', \tag{1.1}$$

unde C și C' sînt constante arbitrare.

Această aproximație conduce în ultimă instanță la o corespondență între mișcarea fluidă compresibilă din planul (Z) și o mișcare fluidă incompresibilă din planul (z). Notînd potențialul complex al mișcării incompresibile cu $f(z)$, corespondența planelor fizice va fi dată de

$$\mathrm{d}Z = C_1\,dz + C_2\,\overline{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2}\,dz, \tag{1.2}$$

unde C_1 și C_2 sînt constante care depind de alegerea lui C, C'. Dacă considerăm în planul incompresibil o elipsă, mișcarea în planul compresibil va avea loc în jurul unei cvasielipse, a cărei ecuație se deduce din ecuația elipsei cu ajutorul relației (1.2).

Relația între V, modulul vitezei complexe în planul (Z), și V^0, modulul vitezei în planul (z), va fi de forma

$$\frac{1}{V} = \frac{C_1}{V^{(0)}} + C_2\,V^{(0)}. \tag{1.3}$$

Alegerea coeficienților C_1, C_2 a condus la considerarea a trei variante:

— varianta Ciaplîghin-Demtchenko, care aproximează curba adiabatică prin tangenta la curbă în punctul de viteză nulă;

— varianta Kármán-Tsien, care aproximează curba adiabatică prin tangenta la curbă în punctul de viteză $V = V_\infty$ — viteza la infinit;

— varianta Caius Iacob, care aproximează curba adiabatică printr-o coardă dusă prin punctele de viteză $V = 0, V = V_\infty$.

Dacă notăm cu c_0 viteza sunetului în punctul de viteză nulă, iar cu c_1 viteza sunetului la infinit, atunci numărul lui Mach va fi dat de relația

$$M_1 = \frac{V_\infty}{c_1}, \tag{1.4}$$

iar numărul lui Ciaplîghin de relația

$$M_0 = \frac{V_\infty}{c_0}. \tag{1,4'}$$

Cele două numere se găsesc în relațiile

$$M_0^2 = \frac{M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \quad ; \quad M_1^2 = \frac{M_0^2}{1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2}. \tag{1.5}$$

Dacă în planul (z) vom alege axa Ox paralelă cu viteza la infinit V_∞, vom putea exprima coeficienții C_1 și C_2 în funcție de numerele Mach sau Ciaplîghin și de V_∞ în fiecare dintre cele trei variante, astfel:

— varianta Ciaplîghin-Demtchenko:

$$C_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + M_0^2}),$$
$$C_2 = \frac{1}{2V_\infty}(1 - \sqrt{1 + M_0^2}); \tag{1.6}$$

— varianta Kármán-Tsien:

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}}\right),$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}}\right); \tag{1.7}$$

— varianta Caius Iacob

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}\right],$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}\right]. \tag{1.8}$$

Din motive de simetrie vom nota

$$C_1' = C_1,$$
$$C_2' = C_2 V_\infty^2. \tag{1.9}$$

2. DETERMINAREA VITEZELOR CRITICE PE CILINDRUL ELIPTIC

Fie în planul (z) o mișcare incompresibilă, perturbată de un obstacol eliptic dat de ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{1.10}$$

Pentru a determina mișcarea în jurul acestei elipse, vom reprezenta conform exteriorul elipsei pe exteriorul unui cerc din planul (ζ).

Distingem două cazuri, după cum $a \gtrless b$. Să notăm $c^2 = \varepsilon (a^2 - b^2)$, unde $\varepsilon = \pm 1$. În acest caz, reprezentările conforme sînt date de

$$z = \frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \qquad a > b, \tag{1.11}$$

$$z = \frac{c}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) \qquad a < b, \tag{1.11'}$$

iar relația de legătură între semiaxele elipsei și raza cercului este dată de

$$R = \sqrt{\varepsilon \frac{a+b}{a-b}}. \tag{1.12}$$

Să considerăm cazul $a > b$ și să notăm $b = ka$. Rezultă deci $k < 1$ și relația (1.12) devine

$$R = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}. \tag{1.12'}$$

Distribuția de viteze pe profilul eliptic va fi dată de

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} = V_\infty \left(1 - \frac{R^2 - 1}{\zeta^2 - 1}\right). \tag{1.13}$$

În punctele de viteză maximă vom avea relația

$$V_{\max}^{(0)} = (k+1)\, V_\infty. \tag{1.14}$$

Din relațiile (1.3), (1.9) și (1.14) rezultă

$$\frac{V_{\max}}{V_\infty} = \frac{1+k}{C_1' + (1+k)^2\, C_2'}. \tag{1.15}$$

Vom da mai jos o tabelă în care prezentăm valorile obținute pentru $\frac{V_{\max}}{V_\infty}$ în cele trei variante, pentru valori particulare ale lui k și pentru $M_1 = 0{,}4$:

	Variantele		
	Ciaplîghin-Demtchenko	Kármán-Tsien	Caius Iacob
$k = 0{,}2$	1,21997	1,22337	1,2226
$k = 0{,}3$	1,33423	1,3419	1,3376
$k = 0{,}4$	1,4518	1,4630	1,4588
$k = 0{,}6$	1,6989	1,7211	1,7087
$k = 0{,}8$	1,9643	2,0040	1,9810

4. DETERMINAREA NUMĂRULUI MACH CRITIC

În mişcarea subsonică avem relaţia

$$V_{max}^2 = c^2 = c_0^2 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_{max}^2}{c_0^2}\right). \tag{1.16}$$

Din relaţiile (1.15) şi (1.16) rezultă pentru determinarea numărului Ciaplîghin critic ecuaţia

$$M_0 (1 + k) \sqrt{2 (\gamma + 1)} = 2 [C_1' + (1 + k)^2 C_2']. \tag{1.17}$$

Ţinînd seama de a doua relaţie (1.5), calculăm valorile numărului Mach critic. Dacă particularizăm coeficienţii C_1' şi C_2' conform variantelor studiate, se obţin ecuaţiile pentru determinarea numărului Ciaplîghin critic după cum urmează :

— varianta Ciaplîghin-Demtchenko :

$$[2 (\gamma + 1) - \beta^2] M_0^2 - 2 \alpha \sqrt{2 (\gamma + 1)} M_0 + 4 = 0,$$

unde am notat

$$\alpha = k + \frac{1}{k} \quad , \quad \beta = k - \frac{1}{k}.$$

Rezultă

$$M_0 = \frac{\alpha \sqrt{2 (\gamma + 1)} - \beta \sqrt{2 (\gamma + 3)}}{2 (\gamma + 1) - \beta^2}.$$

Calculînd pentru diferite valori ale lui k, obţinem

$$k = 0{,}2 ; \; M_0 = 0{,}7209 ; \; 0{,}7610 < M_1 < 0{,}7611,$$

$$k = 0{,}3 ; \; M_0 = 0{,}6543 ; \; 0{,}6846 < M_1 < 0{,}6847,$$

$$k = 0{,}4 ; \; M_0 = 0{,}5996 ; \; 0{,}6186 < M_1 < 0{,}6187,$$

$$k = 0{,}6 ; \; M_0 = 0{,}5156 ; \; 0{,}5291 < M_1 < 0{,}5292,$$

$$k = 0{,}8 ; \; M_0 = 0{,}4517 ; \; 0{,}46118 < M_1 < 0{,}46119 ;$$

— varianta Kármán-Tsien :

$$(\gamma + 1)^2 M_0^4 - \alpha (\gamma + 1) \sqrt{2 (\gamma + 1)} M_0^3 + \beta^2 M_0^2 + 2 \alpha \sqrt{2 (\gamma + 1)} M_0 - 4 = 0.$$

Particularizînd pe k, vom obține soluțiile

$k = 0{,}2$; $0{,}6894 < M_0 < 0{,}6895$; $0{,}7262 < M_1 < 0{,}7263$,

$k = 0{,}3$; $0{,}6312 < M_0 < 0{,}6313$; $0{,}6593 < M_1 < 0{,}6594$,

$k = 0{,}4$; $0{,}5731 < M_0 < 0{,}5732$; $0{,}5931 < M_1 < 0{,}5932$,

$k = 0{,}6$; $0{,}4995 < M_0 < 0{,}4996$; $0{,}5124 < M_1 < 0{,}5125$,

$k = 0{,}8$; $0{,}4396 < M_0 < 0{,}4397$; $0{,}4483 < M_1 < 0{,}4484$;

— varianta Caius Iacob :

$$\frac{\beta\gamma}{8} M_0^4 + \frac{\beta}{2} M_0^2 + \sqrt{2(\gamma+1)}\, M_0 - (\alpha - \beta) = 0.$$

Pentru aceleași valori particulare ale lui k obținem

$k = 0{,}2$; $0{,}7051 < M_0 < 0{,}7052$; $0{,}7435 < M_1 < 0{,}7436$,

$k = 0{,}3$; $0{,}6421 < M_0 < 0{,}6422$; $0{,}6707 < M_1 < 0{,}6708$,

$k = 0{,}4$; $0{,}5902 < M_0 < 0{,}5903$; $0{,}6121 < M_1 < 0{,}6122$,

$k = 0{,}6$; $0{,}5079 < M_0 < 0{,}5080$; $0{,}5215 < M_1 < 0{,}5216$,

$k = 0{,}8$; $0{,}4440 < M_0 < 0{,}4441$; $0{,}4530 < M_1 < 0{,}4531$.

II. METODA APROXIMATIVĂ DIRECTĂ A LUI I. IMAI ȘI LAMLA

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Să considerăm variabila complexă $z = x + iy$ și conjugata sa armonică $\bar{z} = x - iy$. În aceste condiții, potențialul complex $f = \varphi + i\psi$, respectiv $\bar{f} = \varphi - i\psi$, devine funcție de variabilele $z, \bar{z}$ și vom putea scrie [1]

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = k \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{k} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \tag{2.1}$$

unde

$$k = \frac{1 - \dfrac{\rho}{\rho_0}}{1 + \dfrac{\rho}{\rho_0}}, \tag{2.2}$$

cu ρ dată de legea homentropică

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V^2}{c_0^2}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \tag{2.3}$$

Se observă că numai una dintre relațiile (2.1) prezintă interes, cealaltă obținîndu-se prin conjugare.

Dezvoltînd pe k după puterile lui M_0^2 şi folosind (2.2), obţinem

$$k = \frac{V^2}{4V_\infty^2} M_0^2 + \frac{\gamma - 1}{16} \frac{V^4}{V_\infty^4} M_0^4 + O(M_0^6). \tag{2.4}$$

Vom avea

$$V^2 = (u - iv)(u + iv) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right). \tag{2.5}$$

Vom lucra prin metoda aproximaţiilor succesive şi atunci vom avea relaţiile

$$\begin{aligned} f(z, \bar{z}) &= f_0(z, \bar{z}) + M_0^2 f_1(z, \bar{z}) + M_0^4 f_2(z, \bar{z}) + \dots, \\ \bar{f}(z, \bar{z}) &= \bar{f}_0(z, \bar{z}) + M_0^2 \bar{f}_1(z, \bar{z}) + M_0^4 \bar{f}_2(z, \bar{z}) + \dots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Din relaţiile (2.1), (2.4), (2.5) şi (2.6), prin identificare, rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial \bar{z}} &= 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{4V_\infty} \frac{df_0}{dz} \left(\overline{\frac{df_0}{dz}}\right)^2, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{4V_\infty^2} \frac{df_0}{dz} \overline{\frac{df_0}{dz}} \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{4V_\infty^2} \overline{\frac{df_0}{dz}} \left[\overline{\frac{df_0}{dz}} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial z}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{df_0}{dz} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{\gamma - 1}{4V_\infty^2} \left(\frac{df_0}{dz} \overline{\frac{df_0}{dz}}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Din studiul relaţiilor (2.7) rezultă că $f_0 = f_0(z)$ reprezintă potenţialul complex al mişcării incompresibile.

Celelalte două relaţii prin integrare dau

$$f_1(z, \bar{z}) = \frac{1}{4V_\infty^2} \frac{df_0}{dz} \overline{\int \left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz} + \frac{1}{4} g(z), \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} f_2(z, \bar{z}) = \frac{1}{16V_\infty^2} &\left[\frac{1}{2} \frac{d^2 f_0}{dz^2} \left(\overline{\int \left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz}\right) + (\gamma + 1) \left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 \overline{\int \left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz} + \right. \\ &+ \frac{df_0}{dz} \left(\overline{\frac{df_0}{dz}}\right)^2 \int \left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz \Big] + \frac{1}{16V_\infty^2} \left[\frac{dg}{dz} \overline{\int \left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz} + \right. \\ &\left. + 2 \frac{df_0}{dz} \int \frac{df_0}{dz} \frac{dg}{dz} dz\right] + h(z), \end{aligned}$$

unde $g(z)$, $h(z)$ sînt funcţii olomorfe de z în planul mişcării şi care urmează să fie determinate prin condiţiile la limită ale problemei [1].

Datorită dificultăţilor de calcul, ne vom limita la determinarea primelor două aproximaţii.

Aproximația în M_0^2 o vom calcula în cazul general al mișcării circulatorii, viteza neperturbată fiind de forma

$$w_\infty = V_\infty \, e^{-i\alpha}.$$

Este de remarcat faptul că circulația va rămîne nedeterminată.

Datorită existenței circulației, pentru a distruge multiformitatea termenului $\int \left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz$, vom alege pe $g(z)$ de forma

$$g(z) = -\frac{2\overline{w}_\infty}{V_\infty^2} [f_0 + G(z)] \frac{df_0}{dz} + H(z). \tag{2.9}$$

La mari distanțe, $G(z)$, respectiv $H(z)$, vor avea dezvoltările

$$\begin{aligned} G(z) &= g_{-1} z + g_0 + \frac{g_1}{z} + \dots, \\ H(z) &= h_{-1} z + h_0 + \frac{h_1}{z} + \dots \end{aligned} \tag{2.10}$$

Totodată vom avea de îndeplinit condițiile

$$\begin{aligned} &\psi - \text{uniform}, \\ &\psi|_C = 0, \\ &u - iv|_\infty = w_\infty, \end{aligned} \tag{2.11}$$

unde C este frontiera elipsei și valoarea lui w_∞ este dată. Din (2.10) și (2.11) rezultă că avem h_1 real, iar

$$h_{-1} = w_\infty + 2g_{-1}$$

Să introducem $F_1(z)$ potențialul complex al mișcării incompresibile în jurul cilindrului eliptic, avînd viteza neperturbată h_{-1} și circulația h_1.

Vom considera în plus că

$$\operatorname{Im} \{F_1(z)\}_C = 0.$$

Rezultă că funcția

$$H_1(z) = H(z) - F_1(z)$$

este olomorfă în domeniul mișcării și avem

$$\operatorname{Im} \{H_1(z)\}_C = \operatorname{Im} \{H(z)\}_C = -\frac{1}{V_\infty^2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{df_0}{dz} N(z, \bar{z}) \right\}_C, \tag{2.12}$$

unde

$$N(z, \bar{z}) = \int_{z_0}^{z} \left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz - 2\overline{w}_\infty [f_0(z) + G(z)].$$

2. DETERMINAREA PRIMEI APROXIMAȚII

Pentru simplificare vom reprezenta conform exteriorul elipsei din planul (z) pe exteriorul unui cerc din planul (ζ) prin relația (1.10).

După cum $a \leqslant b$, vom avea reprezentările conforme corespunzătoare date de relațiile (1.11).

Inversînd relația (1.11) și punînd condiția ca punctului $z = a$ să-i corespundă $\zeta = R$, vom obține

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}\right). \tag{2.13}$$

În aceste condiții vom avea

$$f_0(\zeta) = \frac{w_\infty c}{2}\zeta + \frac{\overline{w}_\infty R^2 c}{2\zeta} + \frac{k_0}{2\pi i}\log \zeta. \tag{2.14}$$

3. DETERMINAREA CELEI DE-A DOUA APROXIMAȚII

Cu ajutorul relației (2.14) să calculăm

$$\int_{z_0}^{z}\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz = \frac{w_\infty^2 c}{2}\zeta + \frac{\overline{w}_\infty R^4 c}{2\zeta} + (\overline{w}_\infty R^2 - w_\infty)^2 \frac{c}{4}\ln\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} -$$

$$- \frac{k_0^2}{4\pi^2 c}\ln\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} + \frac{k_0 w_\infty}{2\pi i}\ln\frac{c}{2}(\zeta^2 - 1) + \frac{k_0 \overline{w}_\infty R^2}{2\pi i}\ln\frac{2\zeta^2}{c(\zeta^2 - 1)}\Bigg|_{\zeta_0}^{\zeta}.$$

Vom alege punctul ζ_0, de altfel arbitrar, ca fiind punctul vitezei maxime pe profil, $\zeta_0 = Ri$.

Pe circumferința $|\zeta| = R$ vom avea

$$\overline{N(z, \bar{z})_\Gamma} = -\frac{w_\infty^2 c}{2}\zeta + \frac{R^2 c}{2\zeta}[w_\infty^2 R^2 - 2V_\infty^2] +$$

$$+ (\overline{w}_\infty^2 R^2 - w_\infty)^2 \frac{c}{4}\ln\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} - \frac{k_0^2}{4\pi^2 c}\ln\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} + \frac{k_0 w_\infty}{2\pi i}\ln\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2} +$$

$$+ \frac{k_0 \overline{w}_\infty R^2}{2\pi i}\ln\frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1} + \frac{k_0 \overline{w}_\infty R^2}{2\pi i}\ln\frac{2}{c} + \frac{k_0 w_\infty}{2\pi i}\ln\frac{c}{2} -$$

$$- \frac{k_0 w_\infty}{\pi i}\ln R^2 - \int\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz\Bigg|_{\zeta=\zeta_0} - 2 w_\infty \overline{G\left(\frac{R^2}{\zeta}\right)}. \tag{2.16}$$

Vom alege pe $G(\zeta)$ astfel încît $N(z, \bar{z})_\Gamma$ să reprezinte valoarea pe conturul $|\zeta| = R$ a unei funcții olomorfe în domeniul mișcării:

$$\overline{G\left(\frac{R^2}{\zeta}\right)} = -\frac{1}{2w_\infty}\int\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz\Bigg|_{\zeta=\zeta_0} - \frac{w_\infty c}{4}\zeta,$$

ceea ce ne dă

$$G(\zeta) = -\frac{1}{2\overline{w}_\infty}\int\overline{\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2 dz}\Big|_{\zeta=\zeta_0} - \frac{\overline{w}_\infty C}{4}\frac{R^2}{\zeta}. \tag{2.17}$$

Va trebui acum rezolvată o problemă Dirichlet:

$$\operatorname{Im}\{H_1(z)\}_\Gamma = \frac{1}{V_\infty^2}\operatorname{Im}\left\{\overline{\frac{df_0}{dz}N(z,\bar{z})}\right\}_\Gamma$$

sau

$$\operatorname{Im}\{H_1(z)\}_\Gamma = \frac{1}{V_\infty^2}\operatorname{Im}\left\{\left(\overline{w}_\infty\frac{R^4}{R^4-\zeta^2} - w_\infty\frac{R^2\zeta^2}{R^4-\zeta^2} - \right.\right.$$

$$\left.-\frac{k_0}{\pi c i}\frac{R^2\zeta}{R^4-\zeta^2}\right)\left[\frac{R^2 c}{2\zeta}(\overline{w}_\infty^2 R^2 - 2V_\infty^2) + (\overline{w}_\infty R^2 - w_\infty)^2\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{c}{4}\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \frac{k_0^2}{4\pi^2 c}\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} + \frac{k_0 w_\infty}{2\pi i}\ln\frac{c(\zeta^2-1)}{2\zeta^2} +$$

$$\left.\left.+\frac{k_0\overline{w}_\infty R^2}{2\pi i}\ln\frac{2\zeta^2}{c(\zeta^2-1)} - \frac{k_0 w_\infty}{\pi i}\ln R^2\right]\right\}. \tag{2.18}$$

Astfel vom obține

$$V_\infty H_1(\zeta) = \frac{w_\infty R^4 c}{2\zeta}(\overline{w}_\infty^2 R^2 - 2V_\infty^2) + w_\infty R^2(\overline{w}_\infty R^2 - w_\infty)^2\frac{c}{4}\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} -$$

$$-\frac{k_0 w_\infty R^2}{4\pi^2 c}\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} + \frac{k_0 w_\infty^2 R^2}{2\pi i}\ln\frac{c(\zeta^2-1)}{2\zeta^2} +$$

$$+\frac{k_0 V_\infty^2 R^4}{2\pi i}\ln\frac{2\zeta^2}{c(\zeta^2-1)} - \frac{k_0 w_\infty^2 R^2}{\pi i}\ln R^2 -$$

$$-\frac{R^2 c(w_\infty R^2 - \overline{w}_\infty)(\overline{w}_\infty^2 R^2 - 2V_\infty)}{2\zeta} - \frac{R^4 k_0 c(w_\infty^2 R^2 - 2V_\infty^2)\zeta^2}{2\pi c i(\zeta^2-1)} -$$

$$-\left[\frac{(w_\infty R^2 - \overline{w}_\infty)(\overline{w}_\infty R^2 - w_\infty)^2 R^2 c}{4} - \frac{k_0^2(w_\infty R^2 - \overline{w}_\infty)R}{4\pi^2 c}\right]\times$$

$$\times\frac{\zeta}{\zeta^2-1}\ln\frac{R^2-1}{R^2+1} - \frac{k_0 R^2}{\pi c i}\left[(\overline{w}_\infty R^2 - w_\infty)\frac{c}{4} - \frac{k_0^2}{4\pi^2 c}\right]\times$$

$$\times\frac{\zeta}{R^4-\zeta^2}\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \frac{k_0 R^4}{\pi c i}\left[(\overline{w}_\infty R^2 - w_\infty)^2\frac{c}{4} - \frac{k_0^2}{4\pi^2 c}\right]\frac{1}{\zeta^2-R^4}\ln\frac{R^2-1}{R^2+1} -$$

$$-\frac{k_0}{\pi c i}\left[(w_\infty R^2-\overline{w}_\infty)^2\frac{c}{4}-\frac{k_0^2}{4\pi^2 c}\right]\frac{\zeta^2}{\zeta^2-1}\ln\frac{R^2-1}{R^2+1}-\frac{k_0 R^4(w_\infty-\overline{w}_\infty R^2)}{2\pi i\,(R^4-\zeta^2)}\times$$

$$\times(w_\infty R^2-\overline{w}_\infty)\ln\frac{c\,(R^4-1)}{2R^4}-\frac{k_0\,(\overline{w}_\infty-w_\infty R^2)\,\zeta^2}{2\pi i\,(\zeta^2-1)}\times$$

$$\times(\overline{w}_\infty R^2-w_\infty)\ln\frac{c\,(R^4-1)}{2R^4}-\frac{k_0^2}{2\pi^2 c}(w_\infty-\overline{w}_\infty R^2)\,R^2\times$$

$$\times\frac{\zeta}{R^4-\zeta^2}\ln\frac{c(\zeta^2-1)}{2\zeta^2}+\frac{k_0^2\,\overline{w}_\infty\zeta\ln R^2}{\pi^2 c\,(\zeta^2-1)}+\frac{k_0\,\overline{w}_\infty}{\pi i}(\overline{w}_\infty R^2-w_\infty)\ln R^2\frac{\zeta^2}{\zeta^2-1}+$$

$$+\frac{k_0^2}{2\pi^2 c}(w_\infty-\overline{w}_\infty R^2)\,R^2\frac{\zeta}{\zeta^2-R^4}\ln\frac{c\,(R^4-1)}{2R^4}-$$

$$-\frac{k_0^2}{2\pi^2 c}(\overline{w}_\infty-w_\infty R^2)\frac{\zeta}{\zeta^2-1}\ln\frac{c\,(R^4-1)}{2R^4}+$$

$$+\frac{(\overline{w}_\infty^2 R^2-2V_\infty^2)\,(w_\infty R^2-\overline{w}_\infty)\,c\zeta}{2(\zeta^2-1)\,R}. \tag{2.19}$$

Pentru a obține $H(z)$, vom mai adăuga $F_1(z)$, reprezentînd potențialul complex incompresibil al mișcării în jurul cilindrului eliptic:

$$F_1(z)=\frac{w_\infty c}{2}\zeta+\frac{\overline{w}_\infty R^2 c}{2\zeta}+\frac{k_0}{2\pi i}\log\frac{\zeta}{R}. \tag{2.20}$$

Se observă că am ales funcția $F_1(z)$ astfel încît să avem

$$\operatorname{Im}\{F_1(z)\}_C=0.$$

Vom considera acum mișcarea fluidă compresibilă în cazul absenței circulației și a unei viteze la infinit paralele cu axa Ox. Vom obține în acest caz

$$H(z)=\frac{V_\infty c}{2}\left[\frac{R^2(R^2-1)}{\zeta}+\zeta+\frac{R^2(R^2-1)^2}{2}\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1}-\right.$$

$$-\frac{R^2(R^2-1)^3}{2}\frac{\zeta}{\zeta^2-R^4}\ln\frac{R^2-1}{R^2+1}+\frac{(R^2-1)^3}{2}\frac{\zeta}{\zeta^2-1}\ln\frac{R^2-1}{R^2+1}+$$

$$\left.+\frac{R^4(R^2-1)^3}{2}\frac{1}{\zeta^2-R^4}\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1}+\frac{(R^2-1)(R^2-2)}{\zeta^2-1}\zeta\right]. \tag{2.21}$$

Din (2.8), (2.14) și din (2.15), (2.21) rezultă $f_1(z,\bar{z})$.

4. DETERMINAREA VITEZEI MAXIME DE PROFIL

Din (2.5), (2.14) şi din expresia lui $f_1(z, \bar{z})$ rezultă

$$V_{max} = V_\infty (1 + k) + M_0^2 V_\infty \frac{1 + k}{8} \left[\frac{4k(1 - k - k^2)}{1 - k} + \frac{4k^4}{(1 - k)^2} \ln k + \right.$$

$$\left. + \frac{4k^3}{(1 - k)^2} \sqrt{1 - k^2} \arcsin \sqrt{1 - k^2} \right]. \qquad (2.23)$$

În tabela de mai jos sînt prezentate valorile pentru $\frac{V_{max}}{V_\infty}$ în cîteva cazuri particulare, pe care le comparăm cu cele obţinute în prima parte ($M_0 = 0{,}4$) :

Aproximaţii succesive		Variantele		
		Ciaplîghin	Kármán	Caius Iacob
a) $k = 0{,}2$	1,2195	1,21997	1,22337	1,2226
b) $k = 0{,}3$	1,3316	1,33423	1,3419	1,3376
c) $k = 0{,}4$	1,4465	1,4518	1,4630	1,4588
d) $k = 0{,}6$	1,6829	1,6989	1,7211	1,7087
e) $k = 0{,}8$	1,9291	1,9643	2,0040	1,9810

5. CALCULUL NUMERELOR MACH CRITICE

Ştim că în mişcarea subsonică

$$V_{max}^2 = c^2 = c_0^2 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_{max}^2}{c_0^2} \right). \qquad (2.24)$$

Relaţiile (2.23) şi (2.24) conduc la următoarele ecuaţii :

a) $k = 0{,}2$:

$$0{,}1216495\, M_0^3 + 1{,}2\, M_0 - 0{,}91192 = 0. \qquad (2.25)$$

Singura soluţie convenabilă satisface inegalitatea

$$0{,}7221 < M_0 < 0{,}7222,$$

respectiv

$$0{,}7636 < M_1 < 0{,}7637 ;$$

b) $k = 0{,}3$:

$$0{,}197459\, M_0^3 + 1{,}3\, M_0 - 0{,}91192 = 0. \qquad (2.26)$$

Singura soluţie convenabilă satisface inegalitatea

$$0{,}6590 < M_0 < 0{,}6591,$$

respectiv

$$0{,}6900 < M_1 < 0{,}6901;$$

c) $k = 0{,}4$:

$$0{,}29065694\ M_0^3 + 1{,}4\ M_0 - 0{,}91192 = 0. \tag{2.27}$$

Singura soluţie convenabilă satisface inegalitatea

$$0{,}6054 < M_0 < 0{,}6055,$$

respectiv

$$0{,}6291 < M_1 < 0{,}6292;$$

d) $k = 0{,}6$:

$$0{,}518491\ M_0^3 + 1{,}6\ M_0 - 0{,}91192 = 0. \tag{2.28}$$

Singura soluţie convenabilă satisface inegalitatea

$$0{,}5234 < M_0 < 0{,}5235,$$

respectiv

$$0{,}5385 < M_1 < 0{,}5386;$$

e) $k = 0{,}8$:

$$0{,}806906\ M_0^3 + 1{,}8\ M_0 - 0{,}91192 = 0. \tag{2.29}$$

Singura soluţie convenabilă satisface inegalitatea

$$0{,}4623 < M_0 < 0{,}4624,$$

respectiv

$$0{,}4845 < M_1 < 0{,}4846.$$

III. CONCLUZII

Studiind vitezele maxime pe un profil eliptic prin metoda aproximativă directă Imaï-Lamla-C. Iacob şi, respectiv, pe un profil cvasieliptic prin cele trei variante ale metodei hodografice a lui Ciaplîghin, se observă că în cazul $k < 1$ rezultatele obţinute prin metoda aproximaţiilor succesive sînt mai mici decît cele obţinute prin fiecare dintre cele trei variante.

Din studiul numerelor Mach critice rezultă că metoda aproximaţiilor succesive conduce, în cazul $k < 1$, la rezultate mai mari decît în variantele metodei hodografice a lui Ciaplîghin.

Primită la redacţie la 14 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iacob, *Introd. Math. à la Méc. des Fluides*,. ...
2. — *Portugaliae Math*, — *Lisbonne*, *1*, 246 (1939)
3. I. Imaï, *Proc. Of. Phys. Math.*, Japan *24*, 120—129 (1942)
4. E. Lamla, *Luftfahrtforschung*, *19*, 358—362 (1942)
5. H. S. Tsien, Journal of Aeronaut. Sci. 6, 399—407 (1939)
6. Imaï — Sihara, *Aeronaut.* Res. Tokyo, 194 (1940)
7. I. Filimon, Buletinul Ştiinţific al Acad. R.P.R., Math.-Phys. *9*, 433—499 (1957)

DIVERGENȚA HIDROELASTICĂ DATORITĂ PORTANȚEI ÎN CAZUL ARIPILOR SUBACVATICE*)

de A. PETRE
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

539.3

Se consideră cazul aripilor subacvatice rezemate la capete. Datorită deformațiilor elastice a suportului acestor aripi, a deformațiilor elastice a aripii în sine sau a combinării celor două situații, poate apărea o nestabilitate la răsucire a ansamblului, care poate conduce la ruperea aripii considerate.
Fenomenul de divergență hidroelastică corespunzător este studiat în cele trei cazuri posibile funcție de deformații, calculîndu-se viteza critică la care se poate produce acest fenomen.

Se consideră o suprafață portantă fixată la ambele capete. Atît suprafața portantă, cît și reazemele acesteia se consideră deformabile, permițînd rotiri elastice în sensul variației de incidență a profilului. Se presupune că în situația inițială așezarea suprafeței portante este astfel încît liniile de curent ale lichidului sînt cuprinse în planul de portanță nulă. Neglijînd efectul rezistenței la înaintare, suprafața portantă în această situație nu va fi solicitată.

Se presupune o deformație elastică inițială a suprafeței portante în sensul creșterii incidenței. Deoarece portanța care ia naștere are o linie de acțiune care în general nu coincide cu axa elastică a suprafeței portante sau a reazemelor, se produce un moment care, funcție de viteza fluidului, poate fi mai mic, egal sau mai mare decît cel necesar pentru a produce deformația inițială. Funcție de valorile acestei viteze, suprafața portantă poate fi în echilibru stabil, indiferent sau nestabil. Viteza-limită de stabilitate, respectiv viteza pentru care echilibrul elastic în prezența forțelor hidrodinamice este indiferent, se va denumi viteză critică de

*) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. — Mécanique Appliquée" **12**, 4 (1967) (în limba engleză).

divergență. La această viteză, ansamblul suprafețelor portante se va comporta ca și cum și-ar fi pierdut complet rigiditatea la răsucire, astfel încît orice solicitare suplimentară la răsucire va produce deformații indefinite.

Portanța hidrodinamică pentru unitatea de lungime de suprafață portantă se va scrie sub forma

$$qc \frac{dC_z}{di}(\varphi + i_0),$$

unde

$q = \frac{\rho}{2} V^2$ este presiunea dinamică,

c — coarda profilului,

i_0 — incidența datorită deformației elastice a reazemelor,

C_z — coeficient unitar de portanță, proporțional cu incidența pentru valori mici ale acesteia.

Ecuația diferențială de răsucire a suprafeței portante în ipoteza unei rigidități aproximativ constante a acesteia se va scrie

$$GI_d \frac{d^2\varphi}{dx^2} = - qce \frac{dC_z}{di}(\varphi + i_0). \tag{1}$$

Aici e reprezintă distanța dintre centrul de presiune și centrul elastic, iar φ deformația suprafeței portante în secțiunea considerată ca urmare răsucirii.

Notînd

$$\frac{qce}{GI_d} \frac{dC_z}{di} = a^2, \tag{2}$$

această ecuație devine

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + a^2\varphi = - a^2 i_0. \tag{3}$$

Soluția ecuației va fi

$$\varphi = A \sin ax + B \cos ax - i_0. \tag{4}$$

Cele două constante de integrare A și B se vor determina utilizînd condiții la limită. Pentru unul dintre capetele suprafeței portante considerat origine pentru axa Ox, se va scrie că unghiul de deformație φ este nul, respectiv

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ \varphi &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

de unde rezultă

$$B = i_0. \tag{6}$$

Punînd aceeași condiție pentru celălalt capăt al suprafeței portante, respectiv pentru

$$x = l,$$

se obține

$$\begin{aligned} x &= l, \\ \varphi &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

de unde rezultă

$$A = \frac{1 - \cos al}{\sin al} i_0, \tag{8}$$

astfel încît soluția (4) se va scrie

$$\varphi = \left[\frac{1 - \cos al}{\sin al} \sin ax + \cos ax - 1 \right] i_0,$$

respectiv după cîteva transformări elementare se obține

$$\varphi = \left[\frac{\sin ax + \sin a(l - x)}{\sin al} - 1 \right] i_0. \tag{9}$$

Notînd cu k constanta elastică la răsucire a celor două reazeme, ecuația de echilibru indiferent pentru ansamblul suprafață portantă-reazeme se va scrie

$$k i_0 = \int_0^l qce \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i} (i_0 + \varphi) \, \mathrm{d}x, \tag{10}$$

respectiv

$$k = qce_1 \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i} \int_0^l \frac{\sin ax + \sin a(l - x)}{\sin al} \mathrm{d}x. \tag{11}$$

Aici e_1 reprezintă distanța dintre linia centrelor de presiune și axa elastică a reazemelor.

Integrînd și ținînd seama de (2), această relație devine

$$\frac{kl}{GI_d} \frac{e}{e_1} = 2al \frac{1 - \cos al}{\sin al}, \tag{12}$$

condiție din care se determină presiunea dinamică q de divergență, respectiv viteza critică de divergență.

Ca aplicații se vor considera cazurile în care prezintă deformații elastice fie suprafața portantă, fie numai suportul acesteia. În primul caz se va lua $k \to \infty$ sau $e_1 = 0$. Condiția (12) devine

$$\frac{\sin al}{al(1 - \cos al)} = 0, \tag{13}$$

de unde rezultă

$$al = \pi, 2\pi, \ldots, n\pi, \ldots, \tag{14}$$

obţinîndu-se astfel

$$q_{\text{Div.}} = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \frac{GI_d}{ce \dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}, \tag{15}$$

Tabela 1

α	al_{Div}
0,0	0,000
0,1	0,010
0,2	0,040
0,4	0,162
0,6	0,373
0,8	0,677
1,0	1,09
1,2	1,64
1,4	2,36
1,6	3,30
1,8	4,54
2,0	6,23
2,2	8,63
2,4	12,3
2,6	18,7
2,8	32,5
3,0	84,6
π	∞

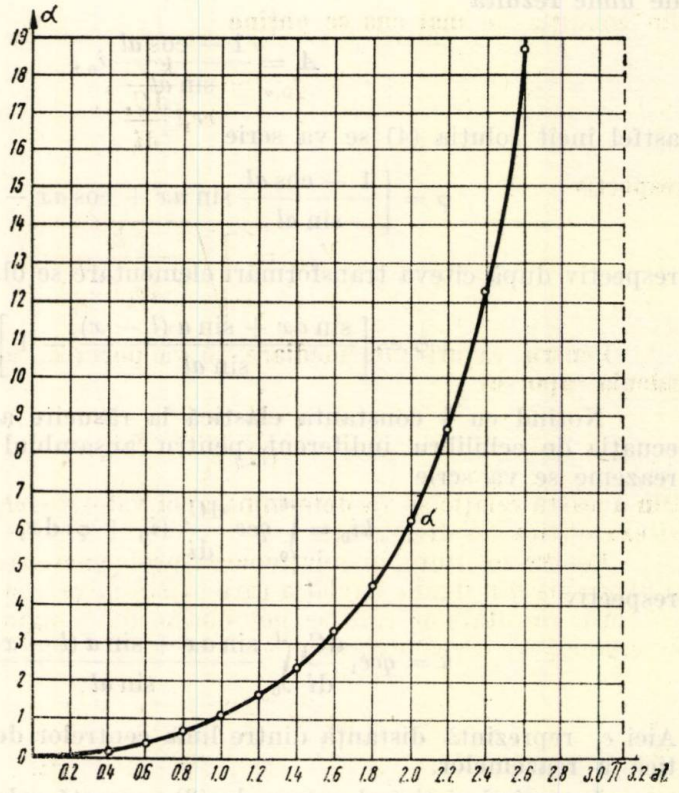


Fig. 1

respectiv

$$V_{\text{Div.}} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{GI_d}{\dfrac{\rho}{2} ce \dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}}. \tag{16}$$

Pentru cazul în care deformaţiile suprafeţei portante se consideră mici faţă de deformaţiile reazemelor, se va considera

$$GI_d \to \infty.$$

Această valoare, introdusă în condiția (12), conduce la

$$k = qce_1 l \frac{dC_z}{di} 2 \frac{1 - \cos al}{al \sin al}. \tag{17}$$

Deoarece

$$al \to 0$$

$$\frac{1 - \cos al}{al \sin al} = \frac{1}{2} \text{ pentru } al \to 0, \tag{18}$$

din condiția de mai sus se obține

$$q_{Div} = \frac{k}{ce_1 l \frac{dC_z}{di}}, \tag{19}$$

respectiv

$$V_{Div} = \sqrt{\frac{k}{\frac{\rho}{2} ec_1 l \frac{dC_z}{di}}}. \tag{20}$$

Pentru cazuri intermediare se va porni de la relația (12) și se va calcula raportul

$$\frac{kl}{GI_d} \frac{e}{e_1} = \alpha. \tag{21}$$

Din această relație se va determina apoi valoarea al_{Div}, din care se deduce viteza critică de divergență.

Pentru ușurință, în soluționarea problemei este calculată în tabela 1 și diagrama din figura 1 relația care există între α și al_{Div} cu condiția (12). Conform rezultatelor care se pot obține din diagramă, viteza critică de divergență va avea expresia

$$V_{Div} = \frac{al_{Div}}{l} \sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2} ce \frac{dC_z}{di}}} \tag{22}$$

și se poate ușor observa că valoarea acestei viteze este mai mică decît cea care se obține pentru reazeme rigide și suprafață portantă elastică.

Primită la redacție la 15 ianuarie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. Bisplinghoff L. Raymond, Ashley Holt, Halfman Robert, *Aeroelasticity* Massachusetts, 1955, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
2. Petre Augustin, *Teoria Aeroelasticității-Statica*, București, Edit. Academiei, 1966.

RESTABILIREA RAPIDĂ A INCIDENȚEI AVIONULUI ÎN CAZUL MIȘCĂRILOR DE BAZĂ NESTAȚIONARE*)

de T. HACKER
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

533 : 531.1

Se demonstrează cu ajutorul metodei funcției lui Leapunov că, în condiții de zbor normale, stabilitatea în jurul axei transversale a aparatului nu este o proprietate exclusivă a zborului uniform, ci și a evoluțiilor nestaționare. Astfel se consideră ca mișcări de bază (programate) zborul cu viteză variabilă și evoluțiile cu puternice variații de altitudine. Se schițează la sfîrșit un procedeu de evaluare a vitezei de amortizare a perturbației incidenței.

1. PRECIZAREA CONȚINUTULUI UNOR NOȚIUNI FUNDAMENTALE

Această precizare devine necesară prin însăși problema studiată, care diferă de cea considerată în teoria convențională a stabilității dinamice a avionului. Astfel, de exemplu, întrucît aceasta din urmă consideră doar stabilitatea zborului uniform orizontal, noțiunii de mișcare de bază sau neperturbată i se substituie aceea de mișcare staționară, iar celei de mișcare perturbată aceea de mișcare tranzitorie nestaționară și așa mai departe.

Prin *mișcare de bază* (sau *neperturbată*) se va înțelege mișcarea ideală corespunzătoare — cu aproximația neglijării parametrilor considerați neesențiali — programului de zbor în condiții de referință date. Programul de zbor reprezintă un ansamblu de legi prescrise coordonatelor dinamice esențiale ale sistemului, aceste legi putînd fi date sub diferite forme : de la descrierea calitativă a succesiunii evoluțiilor de executat pînă la exprimarea lor matematică. În această lucrare se vor considera mișcările

*) Comunicată la sesiunea generală științifică cu ocazia Centenarului Academiei Republicii Socialiste România, septembrie 1966.

de bază corespunzătoare unor legi de variaţie date ale vitezei, respectiv ale altitudinii de zbor.

Mişcarea de bază este compatibilă cu caracteristicile aparatului de zbor şi ale mediului în care are loc evoluţia. Cu toate acestea, mişcarea efectivă a aparatului, în general, diferă de cea de bază, deoarece a) condiţiile de zbor diferă, practic, totdeauna de cele de referinţă (standard) şi b), chiar în ipoteza coincidenţei acestora, programul nu poate fi realizat decît aproximativ.

Cauzele care induc abaterea zborului efectiv faţă de mişcarea de bază vor fi denumite *perturbaţii*, iar mişcarea efectivă a aparatului de zbor *mişcare perturbată.*

Prin *stabilitate* se va înţelege o proprietate a mişcării de bază de a menţine în vecinătatea ei mişcările perturbate ale aparatului de zbor. Deci, în cazul zborului stabil, mişcarea perturbată este alcătuită dintr-o serie de mişcări aleatorii vecine cu cea de bază şi aproximînd-o pe aceasta. Deci ceea ce rămîne esenţial într-o evoluţie este mişcarea de bază.

O componentă a programului de zbor o constituie legea de variaţie a incidenţei. Astfel zborului orizontal uniform îi corespunde incidenţa constantă, punerii în viteză o anumită lege determinată de descreştere a incidenţei sau de creştere a acesteia în cazul zborului frînat orizontal. Orice perturbaţie induce, în general, o modificare a variaţiei efective a mărimii incidenţei. Prin *restabilirea incidenţei* se va înţelege racordarea variaţiei efective la legea corespunzătoare programului de zbor dat.

Se va recurge la modelul matematic clasic al mişcării perturbate, constînd dintr-un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare ale cărui variabile sînt variaţiile induse de perturbaţie ale coordonatelor esenţiale ale sistemului. Mişcării de bază îi corespunde soluţia banală. Noţiunea de stabilitate va fi cea în sensul lui Leapunov.

2. SISTEMUL DE ECUAŢII CONSIDERAT. IPOTEZE

Se presupune că printr-o lege adecvată a mişcării comenzilor se asigură, în condiţii standard, îndeplinirea întocmai a programului de zbor. Această lege constituie programul de bază al comenzilor. De fapt programul de bază al comenzilor nu poate fi realizat riguros, ci doar aproximat. Abaterile faţă de programul de bază al comenzilor apar ca perturbaţii, şi în cele ce urmează vor fi tratate ca atare, fiind asimilate cu cele provenind din turbulenţa atmosferică, mici disimetrii în funcţionarea motoarelor, deplasări de masă în interiorul aparatului etc. În general, în practica de zbor, peste comenzile corespunzînd programului se suprapun, în cazul zborului perturbat, comenzile de corecţie, menite să provoace sau să accelereze amortizarea efectului perturbaţiilor. În cele ce urmează se va folosi fie o schemă analogă cu cea a comenzilor blocate pentru mişcările de bază uniforme, presupunîndu-se comenzile de corecţie identic nule, fie schema mişcărilor parţial comandate, corespunzătoare presupunerii că prin acţionarea comenzilor se asigură o margine superioară

suficient de mică unei părţi a variabilelor dinamice (a celor *constrînse* sau *controlate*).

Pentru simplificare se admite, ca de obicei, că aparatul de zbor este un corp rigid simetric, iar perturbaţiile se consideră suficient de mici pentru a se putea recurge la aproximaţia liniară. Mişcările de bază se vor considera rectilinii, valorile neperturbate ale unghiurilor de derapare, de înclinare laterală şi de azimut fiind nule.Cu aceste ipoteze, sistemul de primă aproximaţie a mişcării perturbate se separă în două grupuri independente, reprezentînd, respectiv, mişcarea longitudinală (simetrică) şi cea laterală (asimetrică) ale avionului. Se admite de asemenea pentru simplificare că masa, momentele de inerţie în raport cu axele unui sistem de referinţă legat de corpul aparatului şi centrajul au în timpul evoluţiei considerate o variaţie neglijabilă. Atît în cazul vitezei neperturbate variabile, cît şi în acela al variaţiei înălţimii de zbor se va neglija deviaţia indusă de perturbaţie a altitudinii. La cercetarea efectului variaţiei de altitudine asupra caracteristicilor mişcării perturbate longitudinale rapide, această neglijare se poate justifica în felul următor. Se vor considera evoluţii de-a lungul unor traiectorii mult diferite de cele orizontale, în particular verticale (picaj vertical şi urcare verticală). Pentru acestea, variaţia înălţimii de zbor indusă de o perturbaţie este mică în comparaţie cu cea corespunzătoare însăşi mişcării de bază şi, implicit, forţele de perturbaţie sînt neglijabile în comparaţie cu variaţia forţelor exterioare corespunzătoare mişcării de bază. Neglijarea încetează a fi justificată la zboruri pe traiectorii cu pantă mică sau nulă, cînd, după cum se ştie [1], forţele exterioare induse de perturbaţia înălţimii de zbor devin comparabile cu cele determinate de abaterile celorlalţi parametri cinematici (viteză, incidenţă etc.) în raport cu valorile lor neperturbate. Dar şi în acest din urmă caz deviaţia indusă a altitudinii afectează sensibil doar mişcarea fugoidă.

Prin urmare, altitudinea nu va apărea în modelul matematic care urmează a fi folosit drept variabilă dinamică, ci doar ca parametru al sistemului — prin intermediul densităţii atmosferice şi al vitezei locale a sunetului — împreună cu parametrii cinematici ai aparatului de zbor, caracterizînd mişcarea lui de bază (viteza de zbor neperturbată, incidenţa neperturbată etc.).

Ca şi în cazul mişcării de bază uniforme — şi, pentru acelaşi motiv, legat de inerţia relativ mare a aparatului de zbor — deviaţiile induse ale variabilelor care descriu mişcarea centrului de greutate se dezvoltă încet şi au tot timpul o variaţie suficient de lentă. Aceasta permite folosirea oricăreia dintre următoarele două scheme simplificate.

a) Prin extinderea pentru o primă scurtă etapă a mişcării perturbate a ipotezei clasice $\Delta u = 0$[1]) asupra cazului mişcărilor de bază nestaţionare (ceea ce revine la presupunerea că mişcarea perturbată afectînd incidenţa şi, într-o anumită măsură, viteza unghiulară de tangaj se consumă, practic într-un interval de timp în care deviaţia indusă a vitezei de

[1]) Pentru simbolurile care nu se definesc în text vezi lista notaţiilor.

zbor rămîne neglijabilă), sistemul de ecuaţii al mişcării perturbate longitudinale poate fi scris pentru această primă etapă sub forma

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Delta\alpha}{\mathrm{d}t} &= -a\Delta\alpha + \Delta\hat{q}, \\ \frac{\mathrm{d}\Delta\hat{q}}{\mathrm{d}t} &= -b\Delta\alpha - c\Delta\hat{q}, \\ \frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} &= \Delta\hat{q}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

unde

$$a = \frac{1}{2\mu_0}\sigma u\,(C_{L_\alpha} + C_D) + \hat{g}\,\frac{\sin\gamma}{u} + \frac{1}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

$$b = \frac{1}{2i_B}\sigma u^2\left\{-C_{m_\alpha} + C_{m_{\dot{\alpha}}}\left[\frac{1}{2\mu_0}\sigma u\,(C_{L_\alpha} + C_D) + \hat{g}\,\frac{\sin\gamma}{u} + \frac{1}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right]\right\},$$

$$c = -\frac{1}{2i_B}\sigma u^2\,(C_{m_q} + C_{m_{\dot{\alpha}}}).$$

Dacă soluţia $\Delta\alpha = 0$, $\Delta\hat{q} = 0$, corespunzătoare mişcării de bază a sistemului de primă aproximaţie format din primele două ecuaţii, este uniform asimptotic stabilă, atunci, presupunînd că şi părţile neliniare depind numai de variabilele dinamice $\Delta\alpha$ şi $\Delta\hat{q}$, sistemul neliniar respectiv va admite şi el soluţie banală uniform asimptotic stabilă, conform teoremei de stabilitate după primă aproximaţie. Deci sistemul va fi uniform asimptotic stabil în raport cu variabilele $\Delta\alpha$ şi $\Delta\hat{q}$ şi uniform stabil în raport cu $\Delta\theta$.

b) Considerînd mişcarea longitudinală parţial comandată prin constrîngerea variabilelor Δu şi $\Delta\theta$, se obţine drept sistem auxiliar sistemul format din primele două ecuaţii (2.1). Stabilitatea asimptotică uniformă a soluţiei $\Delta\alpha = 0$, $\Delta\hat{q} = 0$ va implica stabilitatea uniformă în raport cu $\Delta\alpha$ şi $\Delta\hat{q}$ a sistemului parţial comandat; iar dacă în plus comenzile sînt suficient de eficiente pentru a asigura $\Delta u \to 0$ şi $\Delta\theta \to 0$ (practic într-un timp suficient de scurt), stabilitatea asimptotică uniformă a soluţiei banale a sistemului auxiliar în $\Delta\alpha$ şi $\Delta\hat{q}$ va atrage după sine stabilitatea asimptotică uniformă a mişcării de bază parţial comandate.

Deci pentru o schemă sau alta prezintă interes considerarea sistemului primelor două ecuaţii (2.1), pe care-l vom transcrie, pentru prescurtare, sub forma

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -ax + y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -bx - cy, \end{aligned} \tag{2.2}$$

cu $x = \Delta\alpha$, $y = \Delta\hat{q}$.

Pentru cercetarea stabilității în raport cu incidența în cazul vitezei de zbor variabile și în acela al altitudinii variabile, se admit în continuare unele ipoteze compatibile cu situațiile normale de zbor.

Influența variației vitezei de zbor va fi studiată pentru zborul orizontal ($\gamma = 0$, $\sigma = \text{const}$), în presupunerea că viteza de zbor neperturbată $u(t)$ satisface pe toată semiaxa $t \geqslant 0$ următoarele condiții:

a) $$0 < u_1 \leqslant u(t) \leqslant u_2, \quad u_1 = \text{const}, \quad u_2 = \text{const}, \tag{2.3}$$

b) $$\left|\frac{du}{dt}\right| < K, \quad \left|\frac{d^2u}{dt^2}\right| < L, \quad K = \text{const}, \quad L = \text{const}, \tag{2.4}$$

c) $$\lim_{t\to\infty} \frac{du}{dt} = 0, \tag{2.5}$$

d) derivata a doua, $\dfrac{d^2u}{dt^2}$, este uniform continuă.

Inegalitățile (2.3) revin, evident, la existența unei viteze maxime și a uneia minime, proprii oricărui aparat de zbor.

Relațiile (2.4) exprimă de asemenea realități fizice evidente, și anume că valorile forțelor exterioare în direcția tangentei la traiectorie și aceea a variației acestora în timp sînt mărginite. Condițiile b — d în ansamblu sînt îndeplinite, de exemplu, dacă evoluția nestaționară — oricare ar fi ea în etapele anterioare — tinde pînă la urmă către o mișcare uniformă.

La ipotezele privind viteza de zbor se adaugă următoarele relative la caracteristicile aerodinamice și constuctive ale aparatului: coeficientul de rezistență la înaintare și derivatele aerodinamice satisfac relațiile

$$\begin{gathered} 0 < C_D^{(1)} \leqslant C_D \leqslant C_D^{(2)}, \quad 0 < C_{L_\alpha}^{(1)} \leqslant C_{L_\alpha} \leqslant C_{L_\alpha}^{(2)}, \quad C_{m_\alpha}^{(1)} \leqslant C_{m_\alpha} \leqslant C_{m_\alpha}^{(2)} < 0, \\ C_{m_q}^{(1)} \leqslant C_{m_q} \leqslant C_{m_q}^{(2)} < 0, \quad C_{m_{\dot\alpha}}^{(1)} \leqslant C_{m_{\dot\alpha}} \leqslant C_{m_{\dot\alpha}}^{2} < 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

și au derivatele în raport cu t mărginite în modul, tinzînd către zero pentru $t \to \infty$ sau, în particular, identic nule; în plus, au loc inegalitățile

$$C_{L_\alpha} > -2\mu \frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} + \varepsilon_1, \tag{2.7}$$

$$-C_{m_\alpha} > -C_{m_{\dot\alpha}}\left[\frac{1}{2\mu}(C_{L_\alpha} + C_D) + \frac{1}{u}\frac{du}{dt}\right] + \varepsilon_2, \tag{2.7'}$$

unde ε_1 și ε_2 sînt constante pozitive.

Aceste relații sînt satisfăcute în situații de zbor normale pentru toate construcțiile curente static stabile în orice regim. Afirmația va fi justificată prin următorul exemplu numeric tipic. Se consideră un avion caracterizat prin următoarele date constructive ([2], p. 223):

— greutatea în zbor, presupusă constantă: $mg = 6\,900$ kgf
— aria suprafeței portante $S = 21{,}7$ m^2
— lungimea corzii de referință $\bar{c} = 1{,}95$ m
— viteza de zbor maximă $V_{\max} = 286$ m/s
— viteza de zbor minimă $V_{\min} = 78{,}75$ m/s.

Avionul zboară cu viteză variabilă pe o traiectorie rectilinie orizontală la o altitudine de 2 000 m, căreia îi corespunde, conform datelor atmosferei standard, o masă specifică a aerului $\rho \cong 0{,}1027$ kgf. s^2/m^4. Rezultă:

— masa redusă a aparatului $\mu = 324$;

— momentul de inerție adimensional (în raport cu axa Oy) $i_B = 1\,186$;

— unitatea de timp aerodinamic, raportată la viteza maximă $[t] = 3{,}41 \times 10^{-3}$ s.

Să presupunem că vitezelor instantanee de 78,75 (viteza minimă), 124, 248 și 286 m/s (viteza maximă) le corespund caracteristicile aerodinamice instantanee din tabela 1.

Tabela 1

V(m/s)	78,74 ($= V_{min}$)	124	248	286 ($= V_{max}$)
$u = V/V_{max}$	$u_1 = 0{,}275$	0,433	0,866	$u_2 = 1{,}000$
C_D	0,1	0,027	0,020	0,073
C_{L_α}	4,56	4,56	5,12	4,30
C_{m_α}	−0,500	− 0,488	− 0,340	− 0,746
C_{m_q}	−23,6	−23,6	−23,6	−23,6
$C_{m_{\dot\alpha}}$	−11,8 / − 4,3	−11,8 / −4,3	−11,8 / −4,3	−11,8 / −4,3
$\lvert j_{max} \rvert$ pentru (2.7) — (i)	4,57 g	11,3 g	51 g	57 g
$\lvert j_{max} \rvert$ pentru (2.7) — (ii)	83 g / 256 g	127 g / 396 g	155 g / 526 g	484 g / 1440 g

Coeficientul de amortizare longitudinală C_{m_q} a fost luat același în cele patru momente ale zborului; de asemenea și valoarea derivatei de rotație $C_{m_{\dot\alpha}}$ pentru care s-au considerat două alternative. Ultimele două linii ale tabelei reprezintă limita maximă aproximativă a valorii accelerației (j_{max}), exprimată în multipli de g (accelerația gravitației), pentru care ipotezele (2.7) rămîn valabile. Rezultatele sînt concludente. Inegalitatea (2.7) este satisfăcută în zbor accelerat ($du/dt > 0$) oricare ar fi valoarea accelerației, iar pentru zbor încetinit ($du/dt < 0$), dacă valoarea decelerației nu depășește de 4,57 ori accelerația gravitației pentru

$V = V_{min}$, pînă la de 57 de ori valoarea lui g pentru $V = V_{max}$. Pentru ca inegalitatea (2.7′) să nu fie satisfăcută, este necesar ca în zbor accelerat accelerația să depășească de la 83 g (pentru $V = V_{min}$ și $C_{m_{\dot\alpha}} = -11{,}8$) pînă la 484 g(pentru $V = V_{max}$ și $C_{m_{\dot\alpha}} = -11{,}8$), respectiv de la 256 g (pentru $V = 0{,}433\ V_{max}$, $C_{m_{\dot\alpha}} = -4{,}3$) pînă la de 1 440 de ori accelerația gravitației (pentru $V = V_{max}$ [2]), $C_{m_{\dot\alpha}} = -4{,}3$), valori mult superioare accelerațiilor normale de zbor.

Pentru cazul altitudinii de zbor variabile, ipotezele de mai sus privind viteza neperturbată u se completează cu următoarele privind parametrul σ:

$$0 < \sigma_1 \leqslant \sigma(t) \leqslant \sigma_2, \quad t \geqslant 0, \tag{2.8}$$

cu σ_1 și σ_2 constante ($\sigma_2 = 1$);

$$\left|\frac{d\sigma}{dt}\right| < N, \quad \left|\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right| < P, \quad N = \text{const}, \quad P = \text{const}, \tag{2.9}$$

ultima relație implicînd continuitatea uniformă pe semiaxă a derivatei a doua $d^2\sigma/dt^2$. Relațiile (2.7) se înlocuiesc prin

$$\begin{aligned} C_{L_\alpha} + C_D &> -\frac{2\mu_0}{\sigma u^2}\left(\hat g \sin\gamma + \frac{du}{dt}\right) + \varepsilon_1, \\ -C_{m_\alpha} &> -C_{m_{\dot\alpha}}\left[\frac{\sigma u}{2\mu_0}(C_{L_\alpha} + C_D) - \hat g\frac{\sin\gamma}{u} - \frac{1}{u}\frac{du}{dt}\right] + \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{2.10}$$

cu ε_1 și ε_2 constante pozitive oricît de mici, sau prin condițiile acoperitoare

$$\begin{aligned} C_{L_\alpha} + C_D &> \frac{2\mu_0(\hat g + K)}{\sigma_1 u_1^2} + \varepsilon_1, \\ -C_{m_\alpha} &> -C_{m_{\dot\alpha}}\left[\frac{\sigma_2 u_2}{2\mu_0}(C_{L_\alpha} + C_D) + \frac{\hat g + K}{u_1}\right] + \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{2.11}$$

iar (2.6) se admite *tale quale*.

Este de notat că presupunerile suplimentare de mai sus se realizează cu aceeași probabilitate ca și cele referitoare la u variabil.

Reluînd exemplul numeric de mai sus cu $\sigma_1 = 0{,}3$ (corespunzător altitudinii de tropopauză), $\sigma_2 = 1$, $u_1 = 0{,}275$, $u_2 = 1$, $\gamma = \pi/2$ (urcare verticală), $K = 3\hat g$ (accelerația maximă egală cu de trei ori accelerația gravitației), $C_{m_{\dot\alpha}} = -11{,}8$, deci folosind date voit defavorabile și folosind și relațiile acoperitoare (defavorabile și ele) (2.11), rezultă ca margine infe-

---

[2]) Conform ipotezei (2.3), care reflectă de altfel situația reală, vitezei de zbor minime îi corespunde o decelerație efectivă nulă sau o accelerație pozitivă, iar vitezei maxime o accelerație efectivă nulă, sau $du/dt < 0$.

rioară admisibilă pentru $C_{L_\chi} + C_D$ aproximativ 0,67 (valoarea minimă efectivă fiind 4,37), iar pentru $-C_{m_\alpha}$ (cu $C_{L_\alpha} + C_D = 5{,}14$, restul ca mai sus) : 0,118 (valoarea minimă efectivă fiind 0,34).

3. DEMONSTRAREA STABILITĂȚII ASIMPTOTICE UNIFORME A SISTEMULUI (2.2) PRIN METODA FUNCȚIEI LEAPUNOV

Se va arăta că în condiții obișnuite de zbor (în care sînt satisfăcute ipotezele din paragraful precedent), stabilitatea asimptotică uniformă a mișcării în jurul axei transversale a avionului (restabilirea rapidă a incidenței) este asigurată și în cazul mișcării de bază nestaționare.

Pentru cazul vitezei de zbor variabile, problema a fost studiată în alte lucrări prin metoda funcției lui Leapunov, găsindu-se unele rezultate parțiale. Astfel în [3] s-a arătat că, în anumite ipoteze privind dependența coeficienților sistemului (2.2) de viteza neperturbată ($b'(u) \geqslant 0$), stabilitatea asimptotică este asigurată pentru mișcarea de bază accelerată. Aceeași proprietate este demonstrată în [4] pentru zborul frînat dacă funcția $u(t)$ satisface condiția

$$\frac{\mathrm{d}^2 \ln u}{\mathrm{d}t^2} > -f \exp(-\ln u), \tag{3.1}$$

f fiind o constantă care depinde de parametrii sistemului. În ambele lucrări s-a presupus că sistemul are coeficienții mărginiți și își conservă structura (coeficienții a, b și c nu-și schimbă semnul și nu se anulează pentru $t \geqslant 0$), condiții de altfel naturale. Condițiile suplimentare $b'(u) \geqslant 0$ și (3.1) însă sînt restrictive.

În cele ce urmează se va demonstra, prin alegerea unei funcții Leapunov adecvate, că în ipoteze normale, compatibile cu aparatele de zbor de construcție obișnuită, mișcarea de bază nestaționară, reprezentată de soluția nulă a sistemului (2.2), este uniform asimptotic stabilă oricare ar fi sensul de variație al vitezei de zbor. Se dovedește că revenirea rapidă a incidenței este asigurată oricare ar fi, practic, mișcarea de bază a avionului.

Se va folosi următoarea funcție Leapunov :

$$\mathcal{V} = h\mathrm{e}^{-kt}(bx^2 + y^2) + x^2 + \frac{1}{b}y^2. \tag{3.2}$$

Se va arăta că există h și k, constante pozitive, pentru care această funcție pozitiv definită, avînd limită superioară infinit mică, are derivata totală în raport cu variabila independentă în virtutea sistemului (2.2) negativ definită, deci pentru care sînt satisfăcute condițiile cerute de cunoscuta teoremă de stabilitate asimptotică uniformă.

Într-adevăr, pe baza presupunerilor făcute rezultă următoarele condiții impuse coeficienților sistemului (2.2) :

a) coeficienții admit pentru $t \geqslant 0$ margini atît inferioare, cît și superioare negative :

$$0 < a_1 \leqslant a(t) \leqslant a_2,$$
$$0 < b_1 \leqslant b(t) \leqslant b_2,$$
$$0 < c_1 \leqslant c(t) \leqslant c_2;$$

b) derivata $\dot{b}$[3]) are limită nulă:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{b}(t) = 0.$$

Relaţiile a) şi b) implică, în continuare, pentru funcţia $b(t)$ condiţiile:

c) pentru orice mărime pozitivă ε există o funcţie $T(\varepsilon)$ astfel încît din $t \geqslant T(\varepsilon)$ să rezulte $|\dot{b}| < \varepsilon$;

d) derivata $\dot{b}$ este mărginită in modul, deci există $M > 0$ astfel că pentru t pozitiv arbitrar $|\dot{b}| \leqslant M$.

Se vede imediat că funcţia $\mathcal{V}$ este pozitiv definită şi admite limită superioară infinit mică oricare ar fi constantele pozitive h şi k. Într-adevăr conform condiţiei a) referitoare la funcţiile $b(t)$, avem

$$x^2 + \frac{1}{b_2} y^2 \leqslant he^{-kt}(bx^2 + y^2) + x^2 + \frac{1}{b} y^2 \leqslant (hb_2 + 1)\, x^2 + \left(h + \frac{1}{b_1}\right) y^2.$$

În continuare, h şi k se vor determina astfel încît derivata funcţiei $\mathcal{V}$ în raport cu t în virtutea sistemului (2.2) să fie negativ definită, cu alte cuvinte să aibă loc inegalitatea

$$\left(\frac{d\mathcal{V}}{dt}\right)_{(2.2)} = [-2a + he^{-kt}(\dot{b} - kb - 2ab)]\, x^2 + \left[-\frac{1}{b^2}(\dot{b} + 2bc) - he^{-kt}(2c + k)\right] y^2 \leqslant -\varkappa_1 x^2 - \varkappa_2 y^2, \tag{3.3}$$

cu $\varkappa_1$ şi $\varkappa_2$ constante pozitive.

Se alege $k = M/b_1$. Rezultă imediat, conform relaţiilor (a),

$$-2a + he^{-kt}(\dot{b} - kb - 2ab) \leqslant -2a_1 = -\varkappa_1. \tag{3.4}$$

Fie ε o constantă pozitivă, $0 < \varepsilon < \min\left(\frac{2b_1^2 c_1}{b_2};\ M\right)$, şi fie $T(\varepsilon)$ astfel încît $|\dot{b}| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant T$. Conform condiţiei (c), $T(\varepsilon)$ există. Atunci pentru $t \geqslant T$ are loc

$$-\frac{1}{b^2}(\dot{b} + 2bc) - he^{-kt}(2c + k) \leqslant -\frac{2c_1}{b_2} + \frac{\varepsilon}{b_1^2} < 0.$$

Membrul al doilea se va nota cu $-\varkappa_2$. Constanta h se va determina astfel încît inegalitatea

$$-\frac{1}{b^2}(b + 2bc) - he^{-kt}(2c + k) \leqslant -\varkappa_2 = -\frac{2c_1}{b_2} + \frac{2}{b_1^2} \tag{3.5}$$

să fie verificată şi pentru $0 \leqslant t \leqslant T$. Întrucît, conform condiţiilor a) şi d), pentru $0 \leqslant t \leqslant T$

$$-\frac{1}{b^2}(\dot{b} + 2bc) - he^{-kt}(2c + k) \leqslant \frac{M}{b_1^2} - \frac{2c_1}{b_2} - he^{-kT}(2c_1 + k),$$

relaţia (3.5) este satisfăcută pentru $h \geqslant \dfrac{M - \varepsilon}{b_1^2(2c_1 + k)} e^{kT}$.

[3]) Prin punct deasupra simbolului se înţelege derivata în raport cu t.

Atunci, pe baza relațiilor (3.4) și (3.5) pentru

$$k = \frac{M}{b_1}, \quad h = \frac{M - \varepsilon}{b_1^2 (2 c_1 + k)} e^{kT}, \tag{3.6}$$

condiția (3.3) este satisfăcută, $\varkappa_1$ și $\varkappa_2$ fiind

$$\varkappa_1 = 2a_1, \quad \varkappa_2 = \frac{2c_1}{b_2} - \frac{\varepsilon}{b_1^2}, \tag{3.7}$$

și, prin urmare, soluția nulă a sistemului (2.2) este uniform asimptotic stabilă. Cum ipotezele adoptate sînt valabile, în general, în toate cazurile care prezintă interes practic, rezultă că restabilirea rapidă a incidenței este asigurată, practic, pentru mișcările de bază variabile cu aceeași probabilitate ca pentru mișcarea de bază uniformă.

4. EVALUAREA VITEZEI DE AMORTIZARE A DEVIAȚIEI INDUSE A INCIDENȚEI PENTRU MIȘCĂRILE DE BAZĂ ÎN REGIM VARIABIL

Se va evalua viteza de amortizare a efectului unei perturbații de durată scurtă asupra incidenței aparatului de zbor.

Pentru orientare se va folosi la început funcția Leapunov (3.2) pentru toată evoluția considerată, urmînd ca în funcție de concluziile trase să se realizeze evaluări mai fine, recurgîndu-se pentru diferitele faze ale mișcării de bază la funcții Leapunov mai bine adaptate. Se reamintește că, spre deosebire de problema stabilității — proprietate globală a mișcării — , care necesită o funcție Leapunov unică, cel puțin începînd de la un anumit moment T suficient de mare, pentru evaluarea vitezei de amortizare pe intervale finite se pot folosi funcții Leapunov diferite, care să satisfacă numai pe intervalul considerat condiția cerută de teoria generală. Această condiție constă în aceea ca derivata funcției Leapunov $\mathcal{V}$ în virtutea sistemului să fie negativ definită (pentru $\mathcal{V}$ pozitiv definit), ceea ce asigură ca, în intervalul în care condiția este satisfăcută, curba integrală să taie elipsele mobile din planul (x, y) : $\mathcal{V}(t, x, y) = C$, din exterior spre interior. În acest fel, viteza de amortizare a variabilelor x și y poate fi evaluată cu ajutorul variației lungimii semiaxelor acestei elipse mobile.

După cum s-a văzut, funcția

$$\mathcal{V} = he^{-kt}(bx^2 + y^2) + x^2 + \frac{1}{b} y^2, \tag{4.1}$$

cu h și k constante, avînd expresiile (3.6), satisface pentru $t \geqslant 0$ dubla inegalitate

$$x^2 + \frac{1}{b_2} y^2 \leqslant \mathcal{V} \leqslant (hb_2 + 1) x^2 + \left(h + \frac{1}{b_1}\right) y^2, \tag{4.2}$$

iar derivata sa în raport cu t în virtutea sistemului (2.2) inegalitatea (3.3), care se transcrie pentru comoditate

$$\dot{\mathcal{V}} = \left(\frac{d\mathcal{V}}{dt}\right)_{(2.2)} \leqslant - \varkappa_1 x^2 - \varkappa_2 y^2,$$

unde $\varkappa_1 = 2a_1$, $\varkappa_2 = \dfrac{2c_1}{b_2} - \dfrac{\varepsilon}{b_1^2}$, cu $0 < \varepsilon < \min\left(\dfrac{2b_1 c_1}{b_2}; M\right)$.

Fie, în continuare,

$$\nu = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\varkappa_1}{hb_2 + 1}; \frac{\varkappa_2}{h + \frac{1}{b_1}} \right\}. \tag{4.3}$$

Atunci se vede imediat că are loc inegalitatea

$$\dot{\mathcal{V}} \leqslant -2\nu\mathcal{V}$$

şi deci, pentru $t_0 = 0$ şi $\mathcal{V}(0, x(0), y(0)) = \mathcal{V}_0$,

$$\mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}_0 e^{-2\nu t}$$

sau, încă ţinînd seama de (4.2),

$$x^2 + \frac{1}{b_2} y^2 \leqslant \mathcal{V}_0 e^{-2\nu t}.$$

Punctul figurativ (x, y) al curbei integrale din planul variabilelor dinamice fiind deci tot timpul în interiorul elipsei mobile,

$$x^2 + \frac{1}{b_2} y^2 = \mathcal{V}_0 e^{-2\nu t},$$

variabila x va fi majorată în modul de lungimea semiaxei corespunzătoare a acestei elipse, adică de către funcţia $\sqrt{\mathcal{V}_0}\, e^{-\nu t}$, iar viteza ei de amortizare va fi evaluată prin mărimea ν (4.3).

Să presupunem că în momentul, luat drept iniţial, $t_0 = 0$, are loc o perturbaţie a incidenţei aparatului:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = 0;$$

atunci deviaţia indusă a incidenţei pentru $t \geqslant 0$ va fi evaluată cu ajutorul relaţiei

$$|x| \leqslant \sqrt{(hb_0 + 1)}\, |x_0|\, e^{-\nu t}, \tag{4.4}$$

unde $b_0 = b(0)$

Este de notat că evaluarea (4.4) şi, în particular, ν depind de alegerea constantei pozitive ε, arbitrară în limita intervalului $\left[0, \min\left(\frac{2b_1^2 c_1}{b_2}; M\right)\right]$. Deci ε se va alege astfel încît membrul al doilea al inegalităţii (4.4) să rezulte cît mai mic. Pare apriori evident că, împărţind intervalul de timp total considerat într-un număr de subintervale, ε optim va varia de la un subinterval la altul. Astfel se vede fără nici un calcul că, pentru intervale $[t_i, t_{i+1}]$ cu t_i, t_{i+1} mici, ε trebuie astfel ales încît $\sqrt{hb_0 + 1}$, deci h să fie cît mai mic, iar pentru intervale cu t_i şi t_{i+1} mari factorul preponderent devine exponenţiala, ε trebuind deci astfel ales încît ν să rezulte cît mai mare. Se vede, de asemenea, că o valoare prea mică a constantei ε implică atît o valoare excesiv de mare a lui h, cît şi o evaluare dezavantajoasă a vitezei de amortizare printr-o valoare mică a lui $\varkappa_1$ şi deci a lui ν. Valori ale lui ε apropiate de $2b_1^2 c_1/b_2$ sînt de asemenea de evitat, acestea implicînd valori mici, apropiate de zero, ale lui $\varkappa_2$, deci şi a lui ν.

Valoarea optimă a constantei ε pentru fiecare interval de timp considerat se determină prin calcule efective. Dacă în urma găsirii acestei valori optime produsele hb_1 și hb_2, deci implicit și hb_0, rezultă totuși mari în comparație cu 1, evaluarea se dovedește a fi grosolană și se pune problema găsirii pentru acel interval a unei funcții Leapunov mai bine adaptate.

Se consideră, de exemplu, un interval $[t_i, t_{i+1}]$ în care mișcarea de bază este accelerată, u variind astfel încît în tot intervalul

$$\dot{b} > M > 0; \tag{4.5}$$

ca și în cazurile precedente, a, b și c satisfac în intervalul considerat relațiile

$$\begin{aligned} 0 < a_1 \leqslant a \leqslant a_2, \\ 0 < b_1 \leqslant b \leqslant b_2, \\ 0 < c_1 \leqslant c \leqslant c_2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Drept funcție Leapunov se folosește forma pătratică

$$\mathcal{V}^{(1)} = x^2 + \frac{1}{b} y^2,$$

pentru care au loc, evident, inegalitățile

$$x^2 + \frac{1}{b_2} y^2 \leqslant \mathcal{V}^{(1)} \leqslant x^2 + \frac{1}{b_1} y^2, \quad t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}. \tag{4.7}$$

Derivata funcției $\mathcal{V}^{(1)}$ în virtutea sistemului (2.2) fiind majorată de o formă pătratică negativ definită cu coeficienții independenți de t,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}^{(1)}}{\mathrm{d}t}\right)_{(2.\,2)} = -2a\,x^2 - \left(\frac{\dot{b}}{b^2} + \frac{2c}{b}\right) y^2 \leqslant -2a_1 x^2 - 2e_1 y^2, \; t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}, \tag{4.8}$$

unde $e_1 = M/2\,b_2^2 + c_1/b_2$, curba integrală va tăia elipsa mobilă $\mathcal{V}^{(1)} = C$ din planul variabilelor x și y spre interior.

Din (4.7) și (4.8) rezultă pe aceeași cale ca în cazul precedent:

$$\mathcal{V}^{(1)} \leqslant \mathcal{V}_0^{(1)}\, \mathrm{e}^{-2\nu^{(1)}(t-t_i)}, \quad t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1},$$

unde $\nu^{(1)} = \min\left\{a_1; \left(c_1 \frac{b_1}{b_2} + \frac{Mb_0}{2b_2^2}\right)\right\} \geqslant \min\left(a_1; c_1 \frac{b_1}{b_2}\right)$, și, prin urmare, evaluarea deviației induse a incidenței pentru condițiile inițiale $x(t_i) = x_0$, $y(t_i) = 0$ este

$$|x| \leqslant |x_0|\, \mathrm{e}^{-\nu^{(1)}(t-t_i)}, \quad t_i \leqslant t < t_{i+1}. \tag{4.9}$$

Fie acum $[t_j, t_{j+1}]$ un interval în care mișcarea de bază este frînată și u variază astfel încît

$$\dot{b}(t) < -M < 0, \quad t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}, \tag{4.10}$$

iar a, b și c satisfac în acest interval inegalitățile (4.6). Se va utiliza o funcție Leapunov de forma [4]

$$\mathcal{V}^{(2)} = bx^2 + y^2.$$

Refăcînd raționamentele de mai sus, se găsește

$$\mathcal{V}^{(2)} \leqslant \mathcal{V}_0^{(2)} \, e^{-2\nu^{(2)}(t-t_j)}, \quad t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1},$$

cu $\nu^{(2)} = \min\left\{\left(a_1 \frac{b_1}{b_2} + \frac{M}{2b_2}\right); c_1\right\} \geqslant \min\left(a_1 \frac{b_1}{b_2}; c_1\right)$, și pentru $x(t_j) = x_0$, $y(t_j) = 0$, se obține următoarea evaluare a variabilei x:

$$|x| \leqslant |x_0| \sqrt{\frac{b_0}{b_1}} \, e^{-\nu^{(2)}(t-t_j)}, \quad t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}, \tag{4.11}$$

cu $b_0 = b(t_j)$.

O anumită indicație asupra fineții evaluărilor de mai sus se poate obține examinînd ce devin ele în cazul mișcării de bază uniforme. Fie deci $a = a_1 = a_2 = a_0$, $b = b_1 = b_2 = b_0$, $c = c_1 = c_2 = c_0$, $b \equiv 0$. Vor fi identic nule, de asemenea, și constantele M și k și deci h. Atunci $\nu = \nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \min(a_0, c_0) = \nu_0$ iar evaluările (4.4), (4.9) și (4.11) se reduc la una singură:

$$|x| \leqslant |x_0| \, e^{-\nu_0(t-t_0)}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_k, \tag{4.12}$$

$[t_0, t_k]$ fiind intervalul în care mișcarea de bază este uniformă.

Pentru mișcarea de bază uniformă, sistemul care descrie mișcarea perturbată longitudinală rapidă va fi

$$\frac{dx}{dt} = -a_0 x + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -b_0 x - c_0 y.$$

Amplitudinea componentei x a soluției acestui sistem, corespunzătoare condiției inițiale $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = 0$, variază în intervalul $t_0 \leqslant t \leqslant t_k$ conform relației $|x_0| \, e^{-\nu^*(t-t_0)}$, sau

$$|x| \leqslant |x_0| \, e^{-\nu^*(t-t_0)}, \tag{4.13}$$

unde decrementul de amortizare

$$\nu^* = \frac{1}{2}(a_0 + c_0).$$

În general, coeficienții a și c sînt de ordine de mărime apropiate. În exemplul numeric din paragraful precedent, considerîndu-se $u = 1$, $\dot{u} = 0$, $C_{m_\alpha} = -4{,}3$, în cele patru cazuri $(1/2)(a_0 + c_0)$ variază aproximativ între 0,0135 și 0,0140, iar $\min(a_0, c_0)$ între 0,007 și 0,008, deci raportul dintre decrementul de amortizare exact și cel evaluat este mai puțin de doi (1,7 — 1,9).

NOTAȚII

t — timpul;
V — viteza aerodinamică;
V_{max}, V_{min} — viteza maximă și viteza minimă proprii aparatului de zbor;
$u = V/V_{max}$ — viteza adimensională;
α — incidența avionului;
θ — atitudinea longitudinală;
γ — înclinarea traiectoriei față de un plan orizontal;
ρ — masa specifică a aerului la altitudinea de zbor;
ρ_0 — masa specifică la sol;
$\sigma = \rho/\rho_0$;
S — suprafața de referință (aria suprafeței portante);
$\bar{c}$ — coarda de referință (aerodinamică medie);
m — masa avionului;
$\mu = 2m/\rho\, S\bar{c}$ — masa redusă (densitatea relativă) a avionului;
$\mu_0 = 2m/\rho_0 S\bar{c}$;
i_B — momentul de inerție longitudinal adimensional raportat la coarda de referință;
C_D — coeficientul de rezistență la înaintare a avionului;
C_L — coeficientul de portanță a avionului;
C_m — coeficientul de moment longitudinal;
C_{L_α} — panta instantanee a curbei $C_L = f(\alpha)$ $(C_{L_\alpha} = \partial C_L/\partial\alpha)$;
$C_{m_\alpha} = \partial C_m/\partial\alpha$ — coeficientul de stabilitate statică;
$C_{m_q} = \partial C_m/\partial\hat{q}$ — coeficientul de amortizare longitudinală;
$C_{m_{\dot{\alpha}}} = \partial C_m/\partial(\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t)$;

Simbolul Δ (delta), precedînd simbolurile α, q etc., indică deviațiile induse de o perturbație ale mărimilor reprezentate de acestea din urmă.

Simbolul $\hat{}$ (semnul grafic al accentului circumflex) indică forma adimensională a mărimii reprezentate de simbolul căruia i se aplică: $\hat{q} = q(\bar{c}/2V)$, $\hat{g} = g(\bar{c}/2V^2) = 1/\mathbf{NF}$ etalon (**NF** etalon — numărul Froude corespunzător cazului etalon).

Primită la redacție la 14 februarie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. S. NEUMARK, *Longitudinal stability, speed and height*, Aircr. Eng., **22**, *261*, 323—334 (1950)
2. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, Г.С. КАЛАЧЕВ, *Продольная устойчивость и управляемость самолета*, Оборонгиз, Москва, 1951.
3. T. HACKER, *Contribuții la studiul stabilității longitudinale a avionului în evoluțiile cele mai defavorabile.* St. cerc. mec. aplic., **6**, *3—4*, 269—297 (1955).
4. — *Unele probleme neclasice ale stabilității zborului*, St. cerc. mec. aplic., **21**, *2*, 531—548 (1966).

ASUPRA POSIBILITĂȚILOR DE FOLOSIRE A LEGILOR UNIVERSALE DE VITEZE LA STUDIUL LUBRIFICAȚIEI TURBULENTE

de V. N. CONSTANTINESCU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România
și S. GĂLETUȘE
Institutul politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej"

532

Se analizează unele legi universale ale distribuției vitezelor în regim turbulent, arătîndu-se că există posibilitatea de utilizare a acestora la cazul lubrificației turbulente, însă numai în situațiile în care mișcarea din stratul de lubrifiant diferă puțin de o mișcare Couette pură.
Pentru a obține o teorie cuprinzătoare a lubrificației turbulente este absolut necesar să se folosească o metodă mai generală de studiu, așa cum s-a procedat în unele lucrări anterioare ale autorilor. Legile universale pot însă servi ca verificări pe cazuri particulare și sînt folosite în lucrare pentru a determina unele corecții care îmbunătățesc precizia de determinare a caracteristicilor funcționale în lagărele lubrificate în regim turbulent.

Într-o serie de lucrări anterioare a fost examinată mișcarea turbulentă în strate foarte subțiri și mărginite de pereți solizi cu aplicații în lubrificație, folosind ipoteza lungimii de amestec.

Rezultatele obținute concordă cu datele experimentale existente. Pentru a considera însă teoria ca definitiv închegată, sînt necesare o serie de date experimentale nu numai globale (forțe și momente de frecare rezultante), dar și care să elucideze structura mișcării (distribuții de viteze, fluctuații, spectre de turbulență), date experimentale extrem de greu de obținut pentru moment, deoarece filmul de fluid în lagăre are grosimi extrem de reduse, de ordinul cel mult al cîtorva sutimi de milimetru. De aceea ar fi extrem de util să se poată folosi în acest scop informațiile experimentale cuprinzătoare care există pentru alte tipuri de curgeri turbulente în strate mult mai groase (conducte, strat-limită etc.).

Publicată și în „Rev. roum. sci. tehn. — Mécanique Appliquée", **12**, *4* (1967) (în limba engleză).

Totodată, problema lubrificației turbulente, datorită unor posibilități de aplicații recente, a căpătat o extindere și se bucură de o atenție deosebită. Pentru motivele menționate, unii autori au încercat recent să folosească unele metode împrumutate îndeosebi din studiul stratului-limită, în particular folosirea unor legi empirice pentru evaluarea tensiunilor turbulente sau a unor așa-numite legi universale de viteze.

În cele ce urmează ne propunem să examinăm problema valabilității unor asemenea legi în condițiile lubrificației și totodată problema posibilității folosirii rezultatelor experimentale obținute în probleme asemănătoare lubrificației la determinarea mai precisă a unor constante de care depinde în final orice parametru funcțional al lagărelor în regim turbulent. Pentru mișcările în regim turbulent, introducînd simplificările care rezultă din considerarea că mișcarea este permanentă și se efectuează în straturi subțiri, ecuațiile lui Reynolds pentru fluide incompresibile se scriu

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho \overline{u'v'}), \\ \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\, \overline{v'v'}), \\ \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\, \overline{v'w'}), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

unde notațiile supraliniate reprezintă valorile medii în timp ale mărimilor considerate, iar u', v', w' sînt pulsațiile vitezelor.

În cazul mișcării bidimensionale, punînd $\partial p/\partial z = 0$, $\overline{w} = 0$, ecuația de mișcare se scrie mai simplu

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho \overline{u'v'}) \tag{2}$$

sau încă

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}, \tag{3}$$

unde tensiunea de frecare este

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + (-\rho \overline{u'v'}). \tag{4}$$

Pentru a se putea exprima tensiunea de frecare turbulentă, Boussinesq a introdus concepția de viscozitate de vîrtej $\rho\varepsilon$, astfel ca tensiunea totală de frecare să poată fi scrisă ca

$$\tau = \rho(\nu + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

De asemenea, Prandtl a introdus noţiunea de lungime de amestec l_a [1] şi tensiunea totală de frecare este în acest caz

$$\tau = \rho\left(\nu + l_a^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right)\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{6}$$

Integrarea ecuaţiei (3) este posibilă dacă se cunoaşte ε în ecuaţia (5) sau l_a în ecuaţia (6). Cum însă teoretic nu s-au putut determina aceste mărimi, s-a recurs la rezultatele experimentale pe cazuri particulare (curgeri în tuburi, între plăci paralele, strat-limită etc.) pentru a găsi metode empirice sau semiempirice care să fie în acord cu aceste rezultate.

Foarte multe rezultate experimentale (Nikuradse [2], Laufer [3], Reichardt [4], Robertson [5], Ludwieg şi Tillmann [6]) au arătat că într-un strat foarte subţire lîngă perete în care curgerea este laminară se poate considera că tensiunea de frecare τ este constantă şi egală cu tensiunea de frecare la perete τ_0. Definind viteza de frecare la perete ca

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_0|}{\rho}}, \tag{7}$$

iar distribuţia de viteze fiind considerată liniară cu distanţa la perete,

$$u = \frac{\tau_0}{\mu} y, \tag{8}$$

se poate scrie

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{u_\tau\, y}{\nu}, \qquad u^+ = y^+, \tag{9}$$

unde

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \qquad \text{şi} \qquad y^+ = \frac{y}{\nu} u_\tau. \tag{10}$$

Această distribuţie este adevărată pentru $y^+ < 10$. Pentru $y^+ > 50$, rezultatele experimentale au arătat că distribuţia de viteze este aproape liniară funcţie de $\ln y^+$, indiferent de numărul Reynolds, pînă la $y^+ \cong 1\,000$. În această zonă, distribuţia de viteze se poate scrie

$$u^+ = \frac{1}{k^*} \ln y^+ + C. \tag{11}$$

Pentru a se obţine teoretic distribuţia de viteze (11) este necesar să se presupună că tensiunea de frecare turbulentă este constantă şi egală cu τ_0, iar pentru viscozitatea de vîrtej ε că variază liniar cu y :

$$\varepsilon = k^* u_\tau y\,. \tag{12}$$

De asemenea, în aceleaşi condiţii, legea

$$l_a = k^* y \tag{13}$$

conduce la aceeaşi expresie (11) pentru distribuţia de viteze.

Constanta k^* a fost aleasă așa fel ca rezultatele date de teorie să fie în concordanță cu rezultatele experimentale, și anume s-a propus valoarea 0,4. Această valoare este într-adevăr corectă, însă în cadrul ipotezelor admise mai sus și pentru $y^+ < 1\,000$. Pentru valori mai mari se remarcă o abatere de la distribuția liniară a vitezelor funcție de $\ln y^+$, și anume constanta k^* ar trebui micșorată, conform cu relația cunoscută sub denumirea „defectul legii de viteză" sau mai corect „legea defectului de impuls". Pentru zona $10 < y <^+ 50$, zonă în care tensiunile de frecare vîscoase și tensiunile de frecare turbulente sînt de același ordin de mărime, punctele experimentale fac racordarea între distribuțiile de viteză date de relațiile (9) și (11).

În figura 1 sînt arătate cîteva date experimentale pentru a se pune în evidență cele patru zone analizate mai sus. Rezultatele experimentale citate au arătat că într-adevăr alura distribuției de viteză în coordonatele u^+ ($\ln y^+$) este aceeași indiferent de numărul Reynolds pentru mișcări de tip Poiseuille și Couette. De aceea s-au dedus formule în așa fel ca rezultatele obținute cu acestea să se suprapună peste cele experimentale și au fost numite „legi universale de viteză".

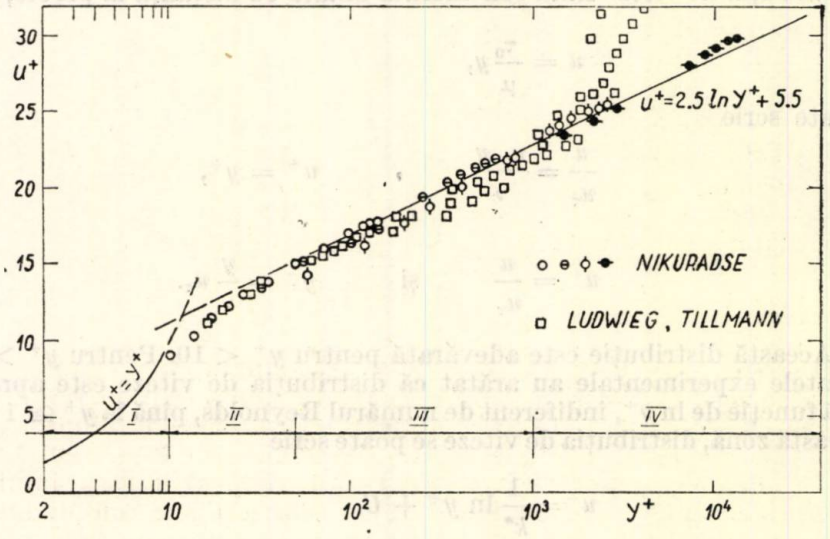


Fig. 1. — Distribuția vitezelor medii determinate experimental.

Astfel, Reichardt [7] și Elrod [8] au arătat că pentru $y^+ \to 0$ viscozitatea de vîrtej ε se anulează ca $(y^+)^3$ sau $(y^+)^4$, după cum există sau nu o variație a parametrilor scurgerii în direcția x, iar pentru valori y^+ crescătoare variația lui ε cu y^+ tinde monoton către variația liniară (12). Reichardt a propus o lege care să satisfacă aceste considerații, și anume

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = k^*[y^+ - \delta_l^+ \operatorname{th}(y^+/\delta_l^+)] \tag{14}$$

pentru mișcări de tip Couette avînd constantele egale cu

$$k^* = 0{,}4 \quad ; \quad \delta_l^+ = \frac{\delta_l}{\nu} u_\tau = 5{,}0. \tag{15}$$

Este de remarcat că relația (14) este valabilă în ipoteza că cel puțin în imediata apropiere a peretelui tensiunea de frecare este constantă cu y. Această ipoteză restrînge valabilitatea teoriei, deoarece tensiunea de frecare este constantă cu y numai în cazul mișcării Couette pure, și anume tensiunea totală de frecare.

În rest, pentru $\partial p/\partial x \neq 0$, așa cum este cazul lubrificației, tensiunea de frecare nu este constantă, ci variază liniar cu y. În consecință, relația (14) poate fi folosită pentru mișcări cu $\partial p/\partial x = 0$ și numai aproximativ pentru valori $\partial p/\partial x \neq 0$ reduse în valoare absolută, adică pentru mișcări foarte apropiate de mișcarea Couette pură.

În lucrarea [9], ecuația de mișcare (2), scrisă sub forma

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu f(y) \frac{\partial u}{\partial y}\right] - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{16}$$

unde

$$f(y) = 1 + \frac{\varepsilon}{\nu}, \tag{17}$$

ε fiind dat de relația (14), a fost integrată numeric, împărțind grosimea h în două regiuni, $0 < y < y_1$ și $y_1 < y < h$, definind pentru fiecare perete viteza de frecare u_τ cu ajutorul tensiunii de frecare τ_0, respectiv τ_h, corespunzător celor doi pereți. De asemenea, în locul constantelor (15) s-a considerat

$$k^* = 0{,}4 \quad ; \quad \delta_l^+ = 10{,}7. \tag{18}$$

În continuare, Ng și Pan [10] au căutat să îmbunătățească rezultatele ce se obțin pe această cale prin folosirea în continuare a legii universale (14) împreună cu constantele (18), dar în definirea variabilelor adimensionale u^+ și y^+ se utilizează tensiunea locală variabilă τ în locul tensiunii la perete τ_0. Pentru a putea rezolva problema astfel pusă în cazul lubrificației, autorii citați [10] propun o metodă de liniarizare prin considerarea că tensiunea τ nu diferă mult de tensiunea corespunzătoare unei mișcări Couette pure τ_c, adică

$$|\tau| \cong \tau_c + \delta \tau_x. \tag{19}$$

Așa cum s-a arătat chiar cantitativ în lucrările [11], [12], liniarizarea (19) este valabilă în regim turbulent numai pentru lagăre cu excentricități reduse.

În concluzie, folosirea legii empirice (14) sub formă directă sau prin intermediul liniarizării (19) este corectă pentru lagăre funcționînd la excentricități reduse. La excentricități mai mari, erorile introduse conduc la presiuni mai mici decît cele corecte.

Deoarece problemele sînt foarte greu de rezolvat cu ajutorul unei legi universale empirice pentru viscozitatea de vîrtej ε, Burton [13] propune să se pornească direct de la o lege universală empirică pentru u^+ (y^+), și anume

$$y^+ = u^+ + (u^+/8{,}74)^7, \tag{20}$$

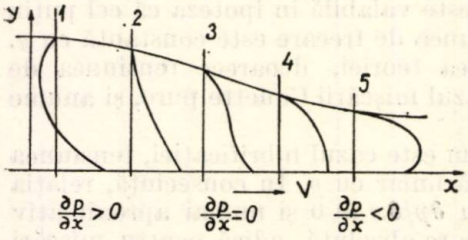


Fig. 2. — Tipuri de profile de viteze pentru lubrificație.

lege care concordă foarte bine cu datele experimentale.

Problema lubrificației se studiază în lucrarea [14], de asemenea pentru excentricități reduse, folosind în primă aproximație legea

$$u^+ = 8{,}7\,(y^+)^{\frac{1}{7}}, \tag{21}$$

care nu mai este atît de exactă ca legea propusă inițial (20).

În plus față de considerațiile precedente este de menționat că profilele de viteze din filmul de lubrifiant nu sînt universale, deoarece mișcarea este o combinație neliniară a mișcărilor de tip Couette și Poiseuille, adică mișcări cu o viteză relativă între suprafețe plus un gradient de presiune în direcția de scurgere. Distribuțiile de viteze în diferite secțiuni ale stratului de lubrifiant au aspectul din figura 2, depinzînd de gradientul de presiune.

Se observă că combinația mișcărilor Couette și Poiseuille prezintă distribuții de viteze cu maxime sau minime (secțiunea 5, respectiv secțiunea 1 din fig. 2). În ceea ce privește frecarea la perete, sînt cazuri cu tensiuni de frecare pozitive, negative sau chiar cu tensiune de frecare pe un perete egală cu zero, cum este cazul secțiunilor 2 și 4 din figura 2.

De aceea, pentru a obține o teorie cuprinzătoare a lubrificației turbulente s-a folosit ipoteza lungimii de amestec a lui Prandtl, considerînd tensiunea de frecare totală conform formulei (6). Ecuația de mișcare în acest caz devine

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho l_a^2 \frac{\partial u}{\partial y}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right] + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{22}$$

Prin integrare în raport cu y și folosind variabilele adimensionale

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho V h}{\mu}; \quad \bar{u} = \frac{u}{V}; \quad \bar{y} = \frac{y}{h}; \quad \bar{l}_a = \frac{l_a}{h}, \tag{23}$$

ecuația (22) devine

$$\mathcal{R}e\,\bar{l}_a^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right| + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{h^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x}\bar{y} - C = 0. \tag{24}$$

În lucrările anterioare [15], [17], [18], ecuația (24) a fost integrată în ipoteza că în apropierea suprafețelor lubrificate există un substrat laminar unde influența termenului $\mathcal{R}e\,\bar{l}_a^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right|$ este neglijabilă, iar în restul grosimii filmului de lubrifiant termenul $\partial \bar{u}/\partial \bar{y}$ este neglijabil.

Totodată s-a folosit pentru lungimea de amestec o variație liniară :

$$\begin{aligned} \bar{l}_a &= k^* \bar{y}\,; \quad ; \quad 0 < \bar{y} < 0{,}5, \\ \bar{l}_a &= k^*(1 - \bar{y}) \quad ; \quad 0{,}5 < \bar{y} < 1. \end{aligned} \tag{25}$$

În acest mod s-au obținut profilele de viteze pentru toate cazurile posibile și tensiunile de frecare pentru cele două suprafețe în funcție de numărul Reynolds modificat R și de parametrul B_x :

$$R = k^{*2}\,\mathcal{R}e \quad ; \quad B_x = -\frac{h^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{26}$$

Mai mult, după cum rezultă din lucrările [16], [19], folosind pentru lungimea de amestec o lege trigonometrică și parabolică, s-a confirmat faptul că legea de variație a lungimii de amestec cu y nu alterează calitativ profilul de viteze. Legea de variație a lungimii de amestec are o influență cantitativă destul de redusă și se obțin în final rezultate echivalente, modificînd corespunzător constanta k^*.

Este interesant de observat cum arată profilele de viteze în diagrama $u^+(hr\,y^+)$ pentru cazul lubrificației. Pentru aceasta au fost folosite rezultatele obținute în lucrarea [19], în care s-a utilizat pentru lungimea de amestec l_a o variație parabolică

$$\bar{l}_a = k^*\,\bar{y}\,(1 - \bar{y}), \tag{27}$$

iar ecuația de mișcare (24) este

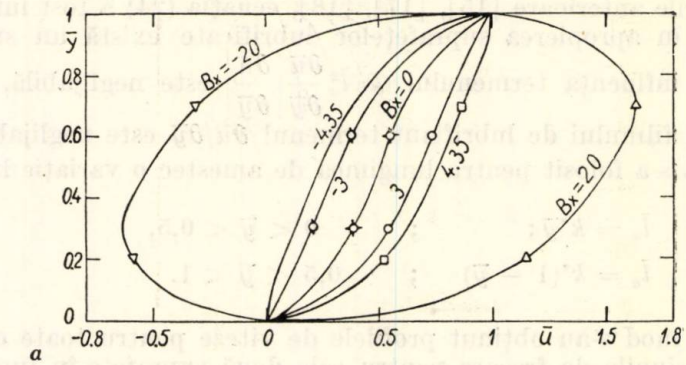
$$R\bar{y}^2\,(1 - \bar{y})^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right| + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + B_x \bar{y} - C = 0. \tag{28}$$

Pentru profilul de viteze de tipul celui din secțiunea 5 din figura 2, ecuația de mișcare este

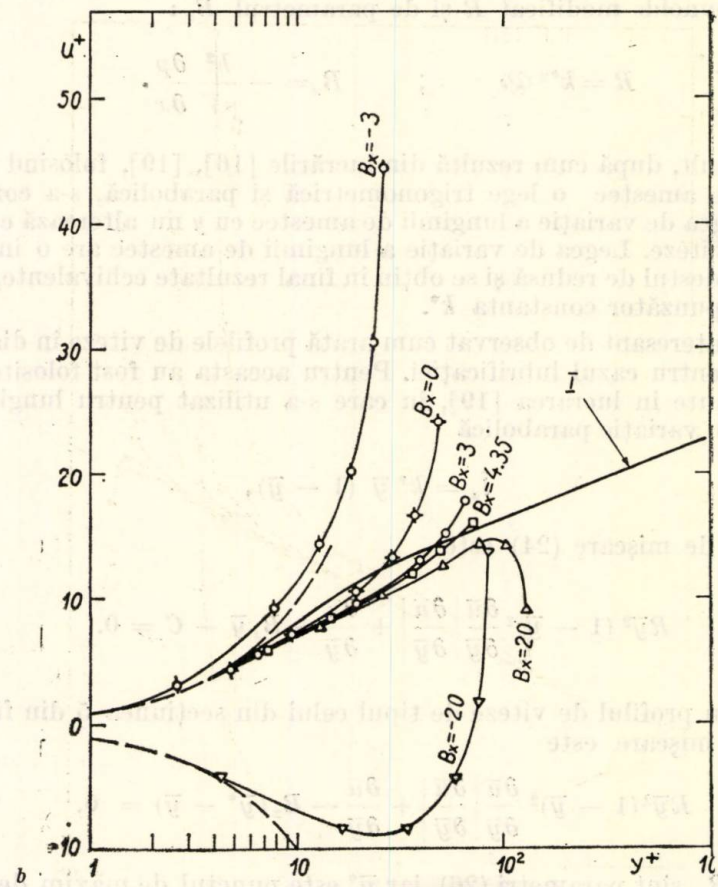
$$R\bar{y}^2(1 - \bar{y})^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right| + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - B_x(\bar{y}^* - \bar{y}) = 0, \tag{29}$$

unde R și B_x sînt parametri (26), iar $\bar{y}^*$ este punctul de maxim de viteză. Pentru a transpune profilele de viteze din coordonatele $\bar{u}(\bar{y})$ în coordonatele u^+ (ln y^+), s-a calculat „viteza de frecare"

$$u_\tau = V\sqrt{\frac{B_x}{\mathcal{R}e}\bar{y}^*}, \tag{30}$$



a



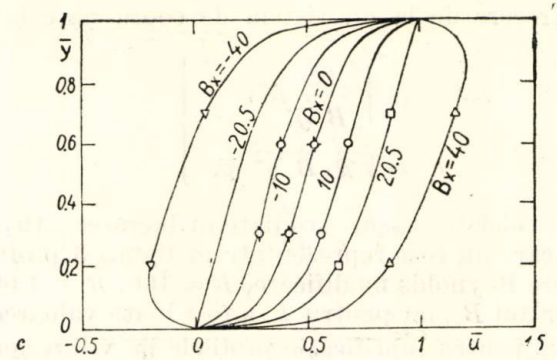
b

Fig. 3. — Profile de viteze pentru diferite valori ale parametrilor $\mathcal{R}e$ și B_x:

$a - R = 100$;

$b - R = 100$, $\mathcal{R}e = 150$, $k^* = 0{,}295$,

$$I \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{\nu} = k^* \left[y^+ - \delta_i^+ \operatorname{th} \left(y^+ / \delta_i^+ \right) \right], \\ y^+ = U^+ + (U^+/8{,}74)^7 ; \end{cases}$$



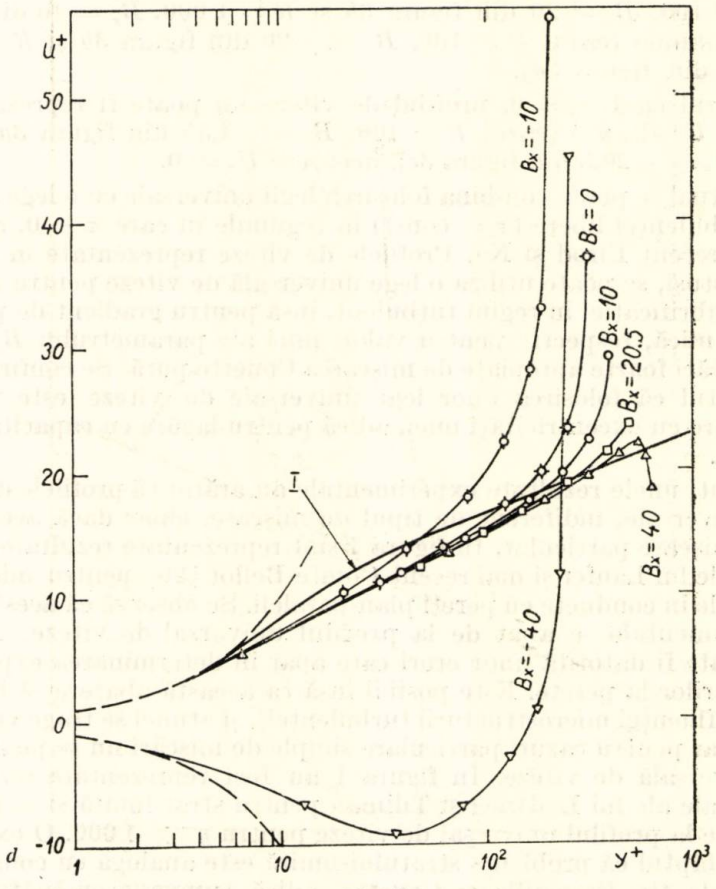


Fig. 3

c — R = 1 000;

d — R = 1 000, $\mathcal{Re}$ = 11 500, $k^* = 0{,}295$,

$$I\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{\nu} = k^*\left[y^+ - \delta_i^+ th\left(y^+/\delta_i^+\right)\right],\\ y^+ = U^+ + (U^+/8{,}74)^7.\end{cases}$$

iar formulele de trecere de la un sistem de coordonate la celălalt sînt

$$\left.\begin{aligned} u^+ &= \sqrt{\frac{\mathcal{R}e}{B_x \overline{y}^*}}\,\overline{u}, \\ y^+ &= \sqrt{\mathcal{R}e\, B_x \overline{y}^*}\;\overline{y}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Pentru toate celelalte cazuri studiate în lucrarea [19] se obțin formule similare, cu care au fost reprezentate în figura 3 profilele de viteze pentru două numere Reynolds modificate, $R = 100$, $R = 1\,000$, și diferite valori ale parametrului B_x, iar pentru k^* a fost luată valoarea 0,295.

Se observă că pentru lubrificație profilele de viteze nu sînt universale, ele diferind mult de o lege unică, pentru gradient de presiune mare, respectiv parametri B_x mari. Profilele de viteze pot avea puncte de maxim (cazul $R = 100$, $B_x = 20$ din figura 3*b* și $R = 1\,000$, $B_x = 40$ din figura 3*d*) sau de minim (cazul $R = 100$, $B_x = -20$ din figura 3*b* și $R = 1000$, $B_x = -40$ din figura 3*d*).

În cazul cînd $\tau_0 = 0$, profilul de viteze nu poate fi reprezentat în coordonate U^+ (ln y^+) (cazul $R = 100$, $B_x = -4{,}35$ din figura 3*a* și $R = 1\,000$, $B_x = -20{,}5$ din figura 3*c*), deoarece $U_\tau = 0$.

Eventual se poate combina folosirea legii universale cu o lege analogă cazului turbulenței libere ($\varepsilon = \text{const}$) în regiunile în care $\tau \to 0$, așa cum au propus recent Elrod și Ng. Profilele de viteze reprezentate în figura 3 arată că, totuși, se poate utiliza o lege universală de viteze pentru a studia problema lubrificației în regim turbulent, însă pentru gradient de presiune de valoare mică, respectiv pentru valori mici ale parametrului B_x, adică pentru mișcări foarte apropiate de mișcarea Couette pură. Se confirmă încă o dată faptul că folosirea unor legi universale de viteze este valabilă pentru lagăre cu excentricități mici, adică pentru lagăre cu capacitate portantă mică.

Recent, unele rezultate experimentale au arătat că profilele de viteze nu sînt universale, indiferent de tipul de mișcare, chiar dacă acesta este un tip de mișcare particular. În figura 4 sînt reprezentate rezultatele experimentale ale lui Laufer și mai recent Comte-Bellot [20] pentru mișcări de tip Poiseuille în conducte cu pereți plan-paraleli. Se observă că aceste rezultate experimentale se abat de la profilul universal de viteze. Această abatere poate fi datorită unor erori care apar în determinarea experimentală a frecărilor la perete. Este posibil însă ca această abatere să fie reală (datorită influenței microstructurii turbulenței), și atunci se trage concluzia că nici măcar pentru cazuri particulare simple de mișcări nu se poate folosi o lege universală de viteze. În figura 1 au fost reprezentate rezultatele experimentale ale lui Ludwieg și Tıllman pentru strat-limită și se remarcă o abatere de la profilul universal de viteze pentru $y^+ > 1\,000$. O explicație ar putea fi faptul că problema stratului-limită este analogă cu combinarea mișcărilor de tip Poiseuille și Couette, adică cumva asemănătoare cu problema lubrificației.

Legile universale pot însă servi ca verificări pe cazuri particulare de mișcări și pot folosi pentru determinarea unor corecții care îmbunătățesc precizia de determinare a caracteristicilor funcționale ale lagărelor lubre-

ficate în regim turbulent. Astfel, în lucrările publicate anterior [11], [12], [17] —]19], rezultatele obținute depind de constanta k^*, a cărei valoare a fost lăsată oarecare între 0,2 și 0,4. Valoarea corectă a acestei constante și eventuala ei dependență de anumiți parametri, ca, de exemplu, numărul

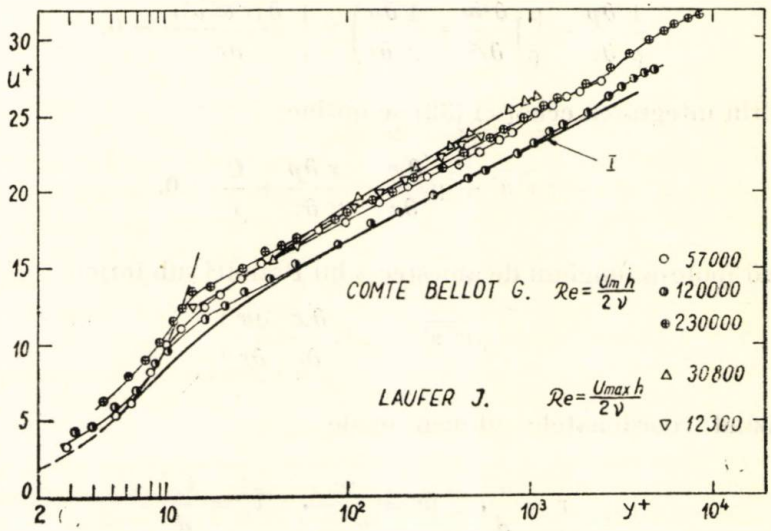


Fig. 4. — Distribuția de viteze pentru mișcarea Poiseuille în conducte cu pereți plan-paraleli : $I \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\nu} k^* [y^+ - \delta_l^+ \, th(y^+/\delta_l^+)], \\ y^+ = U^+ + (U^+/8{,}74)^7. \end{cases}$

Reynolds, urmează să fie determinate prin comparație cu datele experimentale. Din păcate, există foarte puține rezultate experimentale în lubrificația turbulentă. Mai mult, de pildă date obținute de Smith și Fuller [21] se referă numai la valori ale numărului Reynolds relativ reduse (chiar datele corespunzînd la excentricități mari, $\varepsilon = 0{,}8$, par să corespundă la un regim tranzitoriu și nu unui regim turbulent complet dezvoltat). De aceea datele experimentale existente în lubrificația turbulentă nu sînt suficiente pentru a putea determina constanta k^* pentru un interval destul de larg de numere Reynolds. În același timp, valoarea constantei k^* trebuie de asemenea corectată pentru a compensa eroarea introdusă prin considerarea a două regiuni separate de scurgere în stratul de lubrifiant : una interioară, în care tensiunile vîscoase sînt neglijabile, și cîte un substrat laminar în apropierea fiecărei suprafețe lubrificate, în care tensiunile turbulente sînt neglijate.

Într-adevăr, pentru o tratare mai precisă a problemei ar trebui luată în considerare și o a treia regiune de tranziție, în care cele două tipuri de tensiuni sînt de același ordin de mărime. Se poate corecta aproximativ această eroare, folosind legea universală de viteze pentru determinarea constantei k^* în funcție de numărul Reynolds. Pentru aceasta s-a studiat mișcarea axial-simetrică în tuburi, folosind ca și pînă acum ipoteza lungi-

mii de amestec a lui Prandtl, deoarece cele mai corecte rezultate experimentale sînt pentru astfel de tipuri de mișcări.

Folosind sistemul de coordonate r, φ, z și pentru viteze u, v, w, ecuația de mișcare este

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\overline{w'u'})}{\partial r} = 0. \tag{32}$$

Prin integrarea ecuației (32) se obține

$$-\rho\overline{w'u'} + \mu\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{r}{2}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{C}{r} = 0. \tag{33}$$

Folosind ipoteza lungimii de amestec a lui Prandtl sub forma

$$-\rho\overline{w'u'} = \rho\, l_a^2 \frac{\partial w}{\partial r}\left|\frac{\partial w}{\partial r}\right| \tag{34}$$

și utilizînd coordonatele adimensionale

$$\bar{r} = \frac{r}{d}, \quad \overline{w} = \frac{w}{w_{max}}, \quad \bar{l}_a = \frac{l_a}{d} \tag{35}$$

și numărul Reynolds definit în funcție de viteza maximă w_{max}

$$\mathcal{R}e_1 = \frac{\rho\, w_{max}\, d}{\mu}, \tag{36}$$

ecuația de mișcare se scrie

$$\mathcal{R}e_1 \bar{l}_a^2 \frac{\partial \overline{w}}{\partial \bar{r}}\left|\frac{\partial \overline{w}}{\partial \bar{r}}\right| + \frac{\partial \overline{w}}{\partial \bar{r}} - \frac{d^2}{\mu\, w_{max}}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\bar{r}}{2} + \frac{C_1}{\bar{r}} = 0. \tag{37}$$

Utilizînd o variație liniară pentru lungimea de amestec

$$\bar{l}_a = \frac{k^*}{2}(1 - 2\,\bar{r}) \tag{38}$$

și punînd condiția $\partial\overline{w}/\partial\bar{r} = 0$ la $\bar{r} = 0$, ecuația (37) devine

$$R_1 \frac{(1-2\,\bar{r})^2}{4}\frac{\partial \overline{w}}{\partial \bar{r}}\left|\frac{\partial \overline{w}}{\partial \bar{r}}\right| + \frac{\partial \overline{w}}{\partial \bar{r}} + B_z\frac{\bar{r}}{2} = 0, \tag{39}$$

unde

$$R_1 = k^{*2}\mathcal{R}e_1 \quad , \quad B_z = -\frac{d^2}{\mu\, w_{max}}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{40}$$

Pentru cele două zone amintite mai înainte, formulele pentru viteze şi derivatele lor sînt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} &= -B_z \frac{\bar{r}}{2}, \\ \bar{w} &= -\frac{B_z}{16}(1 - 4\,\bar{r}^2), \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

în substratul laminar $\bar{r}_1 \leqslant \bar{r} \leqslant \frac{1}{2}$, şi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} &= -2\sqrt{\frac{B_z}{2R_1}}\,\frac{\sqrt{\bar{r}}}{1 - 2\bar{r}}, \\ \bar{w} &= 1 - \sqrt{\frac{B_z}{4R_1}}\left[\ln\frac{1 + \sqrt{2\bar{r}}}{1 - \sqrt{2\bar{r}}} - 2\sqrt{2\bar{r}}\right], \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

în zona $0 \leqslant \bar{r} \leqslant \bar{r}_1$. Constantele B_z şi $\bar{r}_1$ se determină din sistemul obţinut prin condiţiile de racordare în punctul $\bar{r}_1$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{B_z}{2}\bar{r}_1 &= 2\sqrt{\frac{B_z}{2R_1}}\,\frac{\sqrt{\bar{r}_1}}{1 - 2\bar{r}_1}, \\ \frac{B_z}{16}(1 - 4\,\bar{r}_1^2) &= 1 - \sqrt{\frac{B_z}{4R_1}}\left[\ln\frac{1 + \sqrt{2\bar{r}_1}}{1 - \sqrt{2\bar{r}_1}} - 2\sqrt{2\bar{r}_1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Dacă se utilizează o variaţie parabolică pentru lungimea de amestec $\bar{l}_a = \frac{k^*}{4}\,[1 - 4\,\bar{r}^2]$, se obţin formule similare cu (42), şi anume

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} &= -4\sqrt{\frac{B_z}{2R_1}}\,\frac{\sqrt{\bar{r}}}{1 - 4\,\bar{r}^2}, \\ \bar{w} &= 1 - \sqrt{\frac{B_z}{4R_1}}\left[\ln\frac{1 + \sqrt{2\bar{r}}}{1 - \sqrt{2\bar{r}}} - 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{2\bar{r}}\right], \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

iar pentru substratul laminar formulele rămîn aceleaşi (41). Sistemul algebric pentru obţinerea constantelor B_z şi $\bar{r}_1$ este în acest caz

$$\left.\begin{aligned} B_z\frac{\bar{r}_1}{2} &= 4\sqrt{\frac{B_z}{2R_1}}\,\frac{\sqrt{\bar{r}_1}}{1 - 4\,\bar{r}_1^2}, \\ \frac{B_z}{16}(1 - 4\,\bar{r}_1^2) &= 1 - \sqrt{\frac{B_z}{4R_1}}\left[\ln\frac{1 + \sqrt{2\,\bar{r}_1}}{1 - \sqrt{2\,\bar{r}_1}} - 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{2\,\bar{r}_1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Cu aceste formule s-au determinat profile de viteze pentru diferite numere Reynolds modificate R_1 şi au fost reprezentate în figurile 5*a* şi 5*c* pentru variaţie liniară şi parabolică a lungimii de amestec. De asemenea s-au

calculat tensiunile de frecare la perete pentru a transpune profilele de viteze din coordonatele $\overline{w}(\overline{r})$ în coordonatele u^+ (ln y^+). Formulele de trecere de la un sistem de coordonate la celălalt sînt

$$\left.\begin{aligned} u^+ &= 2\sqrt{\frac{\mathcal{R}e_1}{B_z}}\,\overline{w}, \\ y^+ &= \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{R}e_1 B_z}\left(\frac{1}{2}-\overline{r}\right)\cdot \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Transpunerea în coordonatele u^+ (ln y^+) s-a făcut determinînd numărul $\mathcal{R}e_1$ așa fel ca profilele de viteze să fie cît mai apropiate de punctele experimentale, respectiv profilul universal de viteze, ca în figurile 5*b* și 5*d*. În acest mod se folosește legea universală de viteze pentru determinarea lui k^* în funcție de numărul Reynolds. Rezultatele sînt trecute în tabela 1 pentru lungime de amestec cu variație liniară și parabolică după normala la stratul de lubrifiant.

Tabela 1

Determinarea lui k^* în funcție de numărul Reynolds $\mathcal{R}e_1$ pentru mișcare de tip Poiseuille în tuburi circulare

$\overline{l}_a$	$R_1 = k^{*2}\,\mathcal{R}e_1$	$\mathcal{R}e_1 = \frac{w_{\max} d}{\nu}$	k^*
$\frac{k^*}{2}(1-2\,\overline{r})$	100	2 500	0,200
	270	5 660	0,218
	1 000	17 800	0,237
	10 000	139 000	0,268
	70 000	814 000	0,293
$\frac{k^*}{4}(1-4\,\overline{r}^2)$	100	1 990	0,224
	270	4 400	0,248
	1 000	14 250	0,264
	10 000	116 500	0,293
	70 000	705 000	0,315

Din figurile 5*a* și 5*c* se observă că legea de variație a lungimii de amestec nu are influență calitativă asupra profilelor de viteze, însă din figurile 5*b* și 5*d* se remarcă faptul că se obțin rezultate mai corecte pentru legea liniară de variație a lungimii de amestec.

În cazul mişcării de tip Couette, parametrul $B_x = 0$, iar ecuaţia de mişcare (24) devine

$$\mathcal{R}e\, \bar{l}_a^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right| + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - C_1 = 0, \tag{47}$$

în care numărul Reynolds este

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho V h}{\mu}. \tag{48}$$

Acest caz a fost studiat în lucrările anterioare [15], [19], folosind pentru lungimea de amestec o lege liniară şi parabolică de variaţie după normala la filmul de lubrifiant, determinîndu-se profilele de viteze şi tensiunile de frecare la suprafeţele lubrificate. Profilele de viteze pentru ambele cazuri sînt prezentate în figurile 6*a* şi 6*c* şi se remarcă faptul afirmat anterior că şi pentru acest caz legea de variaţie a lungimii de amestec nu influenţează calitativ profilele de viteze. Pentru transpunerea acestor profile în coordonate u^+ ($\ln y^+$) s-a determinat viteza de frecare la perete

$$u_\tau = \sqrt{\frac{C_1}{\mathcal{R}e}}\, V, \tag{49}$$

iar formulele de trecere de la un sistem de coordonate la celălalt sînt

$$\left.\begin{aligned} u^+ &= \sqrt{\frac{\mathcal{R}e}{C_1}}\, \bar{u}, \\ y^+ &= \sqrt{\mathcal{R}e\, C_1}\, \bar{y}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

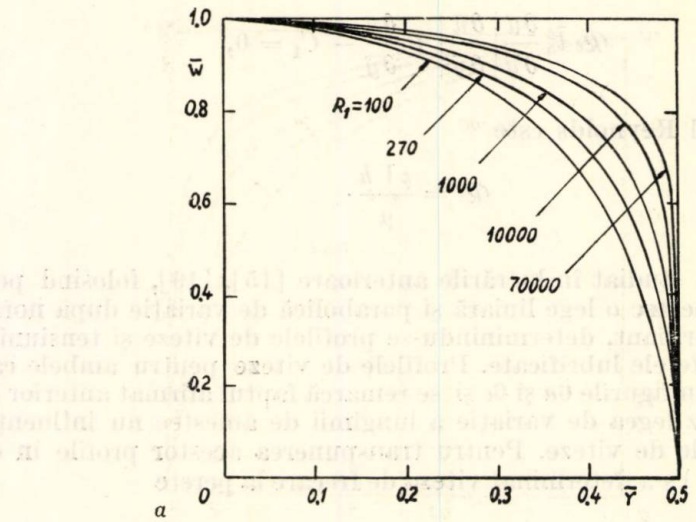
Şi pentru acest caz s-a utilizat legea universală de viteze pentru determinarea lui k^* în funcţie de numărul Reynolds, aşa fel ca profilele de viteze în coordonate u^+ ($\ln y^+$) să fie cît mai apropiate de profilul universal, rezultatele fiind prezentate în figurile 6*b* şi 6*d*. Numerele Reynolds $\mathcal{R}e$ şi k^* astfel determinate sînt trecute în tabela 2, pentru lungime de amestec liniară şi parabolică.

Din figurile 6*b* şi 6*d* se remarcă faptul că şi pentru mişcarea de tip Couette se obţin rezultate mai corecte pentru legea liniară de variaţie a lungimii de amestec. S-a determinat de asemenea coeficientul de frecare adimensional

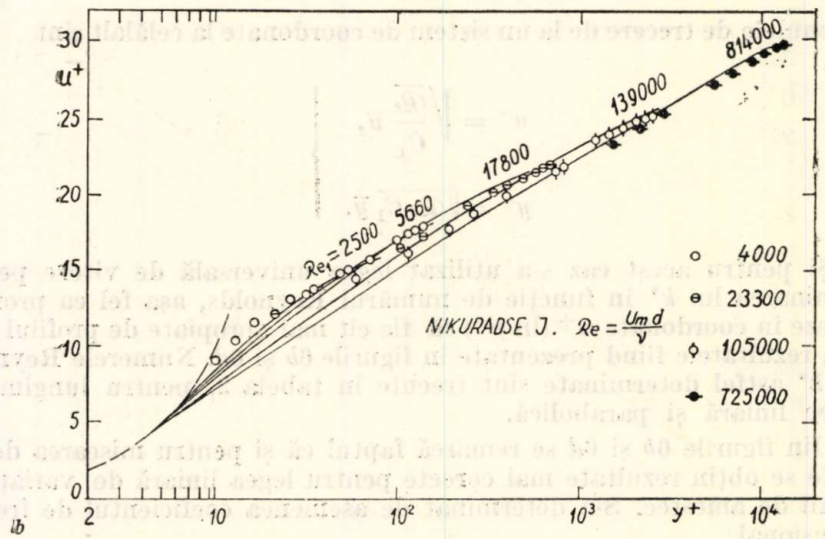
$$C_f = \frac{2|\tau_0|}{\rho V^2}, \tag{51}$$

unde τ_0, în funcţie de C_1 din ecuaţia (47), este

$$\tau_0 = \mu \frac{V}{h} C_1 = \mu \frac{V}{h} \bar{\tau}_0, \tag{52}$$



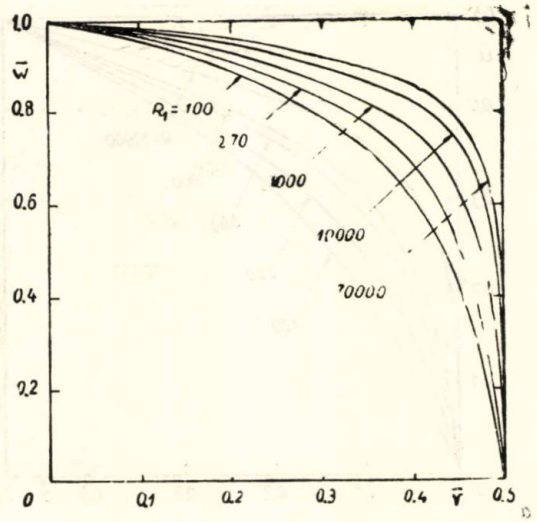
a

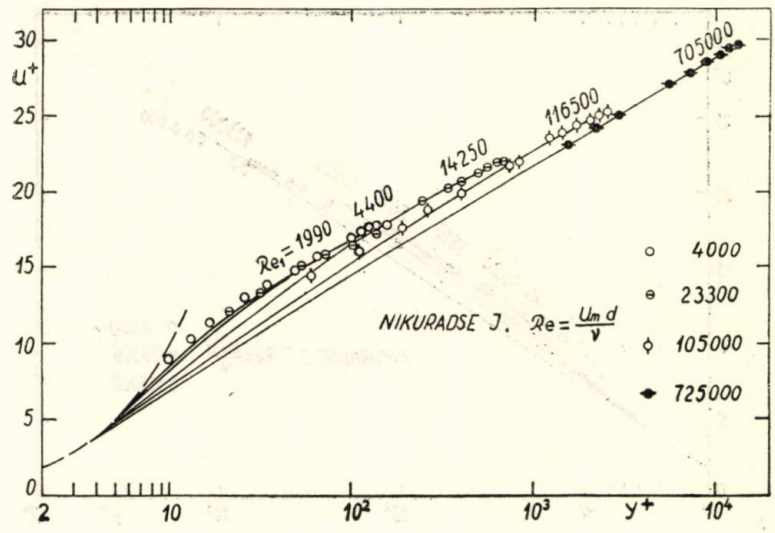


b

Fig. 5. — Distribuţia de viteze pentru mişcarea Poiseuille în conducte circulare :

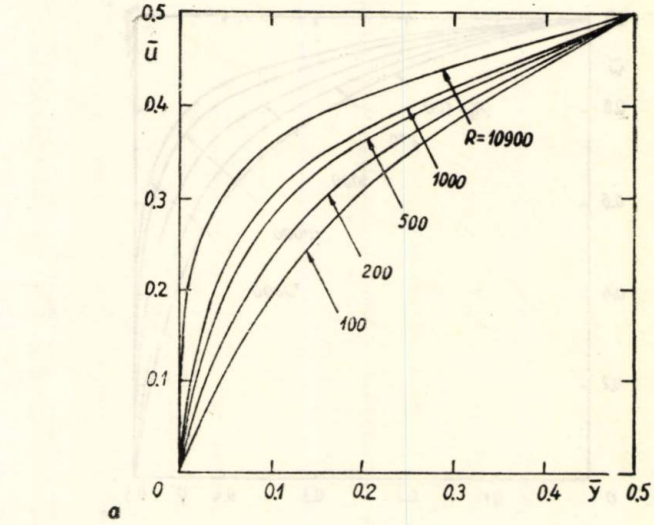
$$a,\ b - \bar{l}_a = \frac{k^*}{2}(1 - 2\,\bar{r})\,;$$



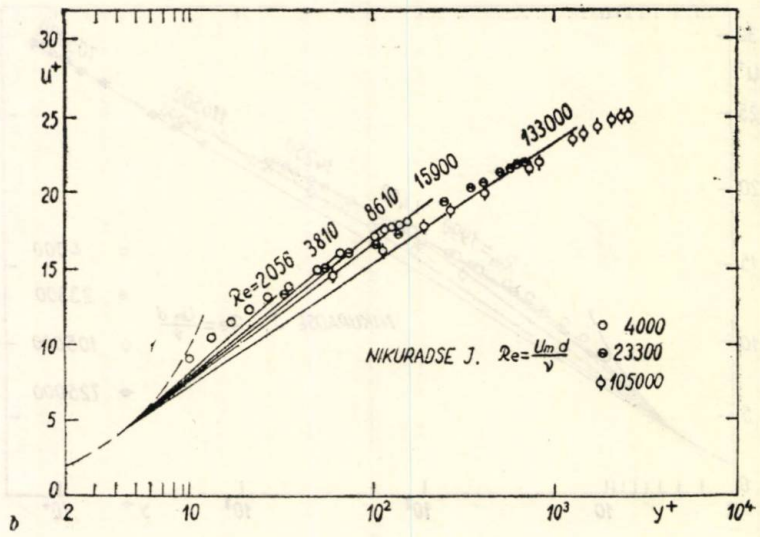


d

Fig. 5. — Distribuția de viteze pentru mișcarea Poiseuille în conducte circulare : c, $d - \bar{l}_a = \frac{k^*}{4}(1 - 4\bar{r}^2)$.

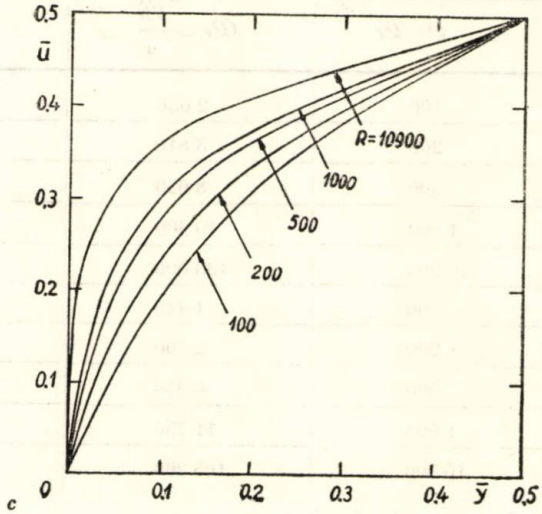


a

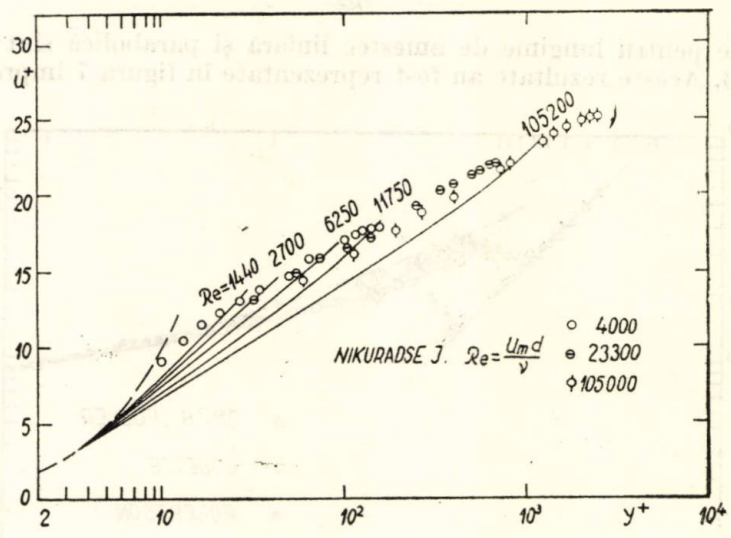


b

Fig. 6. — Distribuția de viteze pentru mișcarea Couette:
a, b — $\bar{l}_a = k^* \bar{y}$;



c



d

Fig. 6. — Distribuţia de viteze pentru mişcarea Couette:
c, d — $\bar{l}_a = k^* \bar{y}(1 - \bar{y})$.

Tabela 2

Determinarea lui k^* în funcție de numărul Reynolds $\mathcal{R}e$ pentru mișcarea de tip Couette

$\bar{l}_a$	$R = k^{*2}\mathcal{R}e$	$\mathcal{R}e = \frac{Vh}{\nu}$	k^*
$k^*\,\bar{y}$	100	2 056	0,2203
	200	3 810	0,2290
	500	8 620	0,2408
	1 000	15 900	0,2508
	10 900	133 000	0,2860
$k^*\bar{y}\,(1-\bar{y})$	100	1 440	0,2630
	200	2 700	0,2720
	500	6 250	0,2825
	1 000	11 750	0,2910
	10 900	105 200	0,3210

iar coeficientul de frecare C_f devine

$$C_f = \frac{2\,|\bar{\tau}_0|}{\mathcal{R}e}. \tag{53}$$

Rezultatele pentru lungime de amestec liniară și parabolică sînt trecute în tabela 3. Aceste rezultate au fost reprezentate în figura 7 împreună cu

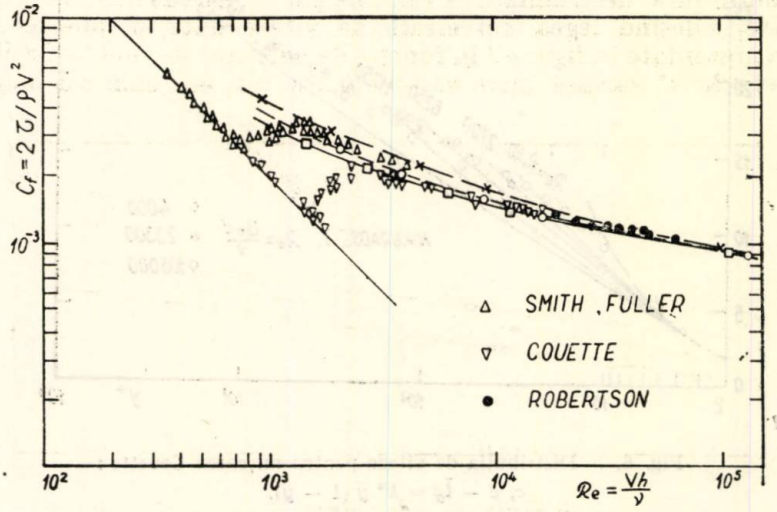


Fig. 7. — Coeficientul de frecare pentru mișcare Couette:

× $\left\{ \begin{array}{ll} \bar{l}_a = k^*\bar{y}, & k^* = 0{,}27; \\ \bar{l}_a = k^*\bar{y}\,(1-\bar{y}), & k^* = 0{,}33; \end{array} \right.$

○ $l_a = k^*\bar{y}$,
□ $l_a = k^*\bar{y}\ \ (1-\bar{y})$. } Tabela 3

rezultatele obținute în lucrările anterioare [17], [19] pentru k^* const. și de asemenea rezultatele experimentale ale lui Smith și Fuller [21], Couette și rezultatele lui Robertson.

Și rezultatele pentru frecări arată că este mai indicat să se folosească pentru lungimea de amestec o lege liniară de variație după normala la filmul de lubrifiant.

Tabela 3

Tensiunea $|\tau_0|$ și coeficientul C_f în funcție de numărul Reynolds

$\bar{l}_a$	$R = k^{*2}\mathcal{R}e$	$\mathcal{R}e = \frac{Vh}{\nu}$	$\lvert\overline{\tau_0}\rvert$	$C_f \cdot 10^3$
$k^*\bar{y}$	100	2 056	2,62	2,550
	200	3 810	3,81	2,000
	500	8 620	6,59	1,530
	1 000	15 900	10,27	1,291
	10 900	133 000	56,40	0,848
$k^*\bar{y}(1-\bar{y})$	100	1 440	1,98	2,750
	200	2 700	2,92	2,130
	500	6 250	5,12	1,632
	1 000	11 750	8,33	1,418
	10 900	105 200	47,80	0,910

Valorile lui k^* determinate pe cazurile particulare de mișcare Poiseuille și Couette, folosind legea universală de viteze date în tabelele 1 și 2, au fost reprezentate în figura 8 în funcție de numărul Reynolds. Se observă că într-adevăr k^* variază între valorile 0,2 și 0,4, așa cum s-a indicat în

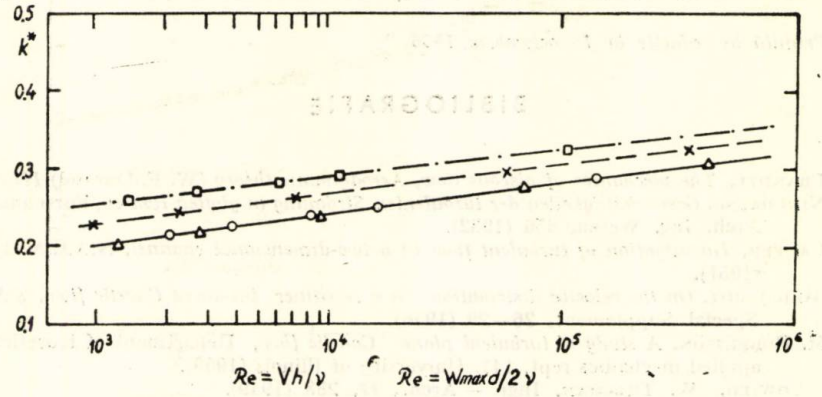


Fig. 8. — Dependența lui k^* în funcție de numărul Reynolds:
□ Couette, × Poiseuille } $\bar{l}_a$ — parabolic. ○ Couette, △ Poiseuille } $\bar{l}_a$ — liniar.
——— $k^* = 0{,}125\ \mathcal{R}e^{0{,}07}$

BIBLIOTECA ACADEMIEI R.P.R. BUDAPESTA

lucrările anterioare [12], [16], [17]. Deoarece s-a dovedit că este mai indicat să se folosească pentru lungimea de amestec o variație liniară, iar din figura 8 se observă că în acest caz valorile lui k^* sînt foarte apropiate pentru cele două tipuri de mișcări Poiseuille și Couette, se poate determina o formulă a lui k^* în funcție de numărul Reynolds unică pentru cele două tipuri de mișcări, de forma

$$k^* = C\,\mathcal{R}e^n. \tag{54}$$

Utilizînd valorile date în tabelele 1 și 2, s-au determinat valorile lui C și n:

$$k^* = 0{,}125\;\mathcal{R}e^{0.07}, \tag{55}$$

și valorile lui k^* deduse cu această formulă au fost reprezentate de asemenea în figura 8. În formula unică (55), pentru cele două tipuri de mișcări trebuie însă avut în vedere că numărul Reynolds este definit pentru mișcarea Couette $\mathcal{R}e = \rho Vh/\mu$, iar pentru mișcarea de tip Poiseuille este $\mathcal{R}e = \rho w_{max}\, d/2\mu$. Cu aceste precizări s-au putut determina mai exact valorile lui k^* la un interval suficient de mare de numere Reynolds, folosindu-se legile universale de viteze, respectiv datele experimentale pentru cazuri particulare simple de mișcări. În acest mod s-a compensat totodată eroarea introdusă prin considerarea a două regiuni separate în filmul de lubrifiant.

În concluzie, s-a dovedit că folosirea directă a legilor universale de viteze nu duce la rezultate valabile decît pentru mișcări foarte apropiate de mișcarea Couette pură, respectiv lagăre cu excentricitate mică. Legile universale de viteze pot fi folosite în cazul teoriei lubrificației turbulente bazate pe ipoteza lungimii de amestec, însă indirect, pentru determinarea mai exactă a lui k^* pe cazuri de mișcări particulare pentru care aceste legi sînt valabile. În continuare, rezultatele privind distribuția presiunilor, rezultanta presiunilor, frecarea și debitele de lubrifiant pot fi determinate direct în funcție numai de numărul Reynolds, deoarece constanta k^* însăși este acum determinată ca o funcție de numărul Reynolds.

Primită la redacție la 19 octombrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. L. Prandtl, *The mechanics of viscous flow, Aerodynamic theory* (W. F. Durand) *III* (1935).
2. J. Nikuradse, *Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren*, Forschungen — Arch. Ing. Wesen, 356 (1932).
3. J. Laufer, *Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel*, N.A.C.A. TR1053 (1951).
4. H. Reichardt, *On the velocity distribution in a rectiliner turbulent Couette flow*, Z A M M, Special Supplement, 26—29 (1956).
5. J. M. Robertson, *A study of turbulent plane Couette flow*, Department of teoretical and applied mechanics rept. 141. University of Illinois (1959).
6. H. Ludwieg, W. Tillman, Ingr. — Arch., *17*, 288 (1949).
7. H. Reichardt, *Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen*, Z A M M, *31*, 208 (1951).
8. H. G. Elrod, J. Aeronaut. Sci., *24*, 468 (1957).
9. C. W. Ng, *Fluid dynamic foundation of turbulent lubrication theory*, Trans. ASLE, *7*, *4*, 311—321 (1964).

10. C. W. Ng, C. H. T. Pan, *A liniarized turbulent lubrication theory*, Trans. ASME, **87**, *3*, 675—689 (1965).
11. V. N. Constantinescu, *Teoria lubrificației în regim turbulent*, Editura Academiei, București, 1965.
12. — *On the improvement of the turbulent lubrication theory, by using the mixing-lenght hypothesis*, Rev. roum. sci. techn. — Méc. Appl., **X**, *2*, 421—437 (1965).
13. R. A. Burton, *A simple universal velocity profile equation*, AIAA J. (1965).
14. R. A. Burton, *Turbulent film bearings under small displacements*, Trans. ASLE, *7*, 322—352 (1964)
15. V. N. Constantinescu, *Influența turbulenței asupra mișcării în stratul de lubrifiant*, St. cerc. mec. apl., **IX**, *1*, 103—137 (1958).
16. N. Tipei, V. N. Constantinescu, *Influența legii de variație a lungimii de amestec asupra mișcării turbulente în stratul de lubrifiant*, St. cerc. mec. apl., **XI**, *5*, 1091—1101 (1960).
17. V. N. Constantinescu, S. Găletuşe, *On the determination of friction forces in turbulent lubrication*, Trans. ASLE (1965).
18. V. N. Constantinescu, *Studiul lubrificației bidimensionale în regim turbulent*, St. cerc. mec. apl., **IX**, *1*, 139—162 (1958).
19. V. N. Constantinescu, S. Găletuşe, *The study of the turbulent lubrication by using the mixing-length hypothesis with a parabolic variation across the film*, Rev. roum. sci. techn. — Méc. appl., **XI**, *2* (1966).
20. G. Comte -Bellot, *Contribution à l'étude de la turbulence de conduite*, Thèse pour obtenir le grade de docteur ès sciences (1963).
21. M. I. Smith, D. D. Fuller, *Journal Bearing operation at superlaminar speeds*, Trans. ASME, *78*, 469—474 (1956).
22. H. G. Elrod, C. W. Ng, *A theory for turbulent fluid films and its application to bearings*, ASME-Paper 66—LUB—13.

CALCULUL PLASTIC AL PLĂCILOR INELARE DE BETON ARMAT SOLICITATE DE ÎNCĂRCĂRI UNIFORM DISTRIBUITE*)

de V. PETCU și SILVIA MINEA
Institutul de cercetări în construcții
și economia construcțiilor (INCERC), București

539

În lucrare se stabilesc elementele necesare pentru calculul plastic al plăcilor inelare de beton armat rezemate pe unul dintre contururile lor. Plăcile se presupun solicitate de încărcări uniform distribuite pe toată suprafața lor, respectiv de încărcări uniform distribuite de-a lungul conturului liber. Sînt luate în considerație două categorii de plăci, în funcție de modul lor de rezemare pe contururi. Baza teoretică a studiului este constituită de principiile metodei de calcul la starea-limită de rezistență, aplicate teoriei liniilor de rupere și de concepția coeficientului de redistribuție. Pentru rezolvarea ecuației de echilibru plastic a acestor elemente de construcție se folosește criteriul redistribuției minime.

I. INTRODUCERE

Plăcile inelare de beton armat rezemate pe unul dintre contururile lor se clasifică în următoarele două categorii:

— *plăci A* — plăci inelare încastrate elastic pe conturul exterior și libere pe conturul interior;

— *plăci B* — plăci inelare încastrate elastic pe conturul interior și libere pe conturul exterior.

Schemele acestor plăci, inclusiv elementele geometrice care le caracterizează, sînt date în figurile 1 și 2.

În ambele cazuri, gradul de încastrare η poate avea valori cuprinse între zero și unitate, aceste două valori-limită corespunzînd simplei rezemări, respectiv încastrării perfecte a plăcilor.

---

*) Lucrare prezentată la a XII-a Sesiune științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic Timișoara, 18—20 martie, 1966.
Publicată și în „Rev. roum. sci. techn.—Mécanique Appliquée" **12**, *4*, (1967) (în limba engleză).

În cadrul acestui studiu se stabilesc elementele necesare pentru calculul plastic al plăcilor inelare din cele două categorii prezentate mai sus pentru cazurile în care acestea sînt solicitate de încărcări alcătuind una dintre următoarele două scheme de încercare :

— *schema I*, formată dintr-o încărcare permanentă de calcul uniform distribuită pe toată suprafața plăcilor și dintr-o încărcare temporară

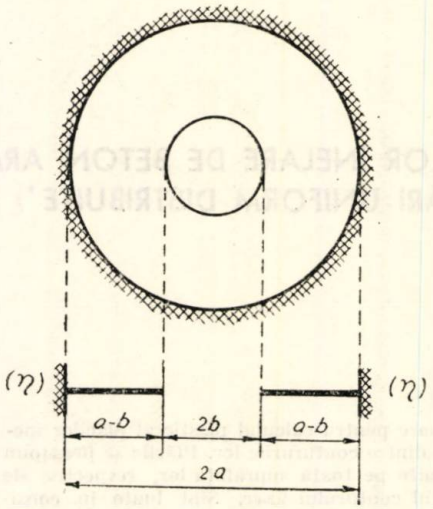


Fig. 1

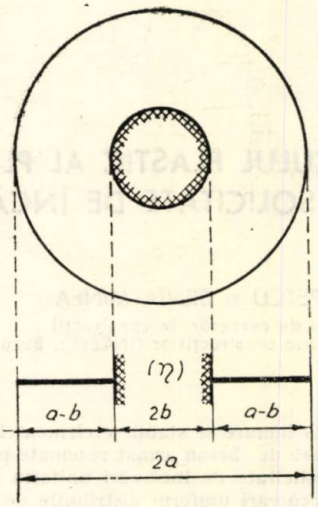


Fig. 2

de asemenea uniform distribuită pe toată suprafața plăcilor, a cărei intensitate poate varia de la valoarea ei normată la valoarea ei de calcul ;

— *schema II*, formată dintr-o încărcare permanentă de calcul uniform distribuită de-a lungul conturului liber al plăcilor și dintr-o încărcare temporară de asemenea uniform distribuită de-a lungul conturului liber al plăcilor, a cărei intensitate poate varia de la valoarea ei normată la valoarea ei de calcul.

Este de asemenea luată în considerație posibilitatea solicitării plăcilor de încărcări, a căror schemă reprezintă o combinație a schemelor I și II.

Studiul se bazează pe teoria liniilor de rupere [1] și pe principiile metodei de calcul al construcțiilor la starea-limită de rezistență [4].

Pentru rezolvarea ecuației de echilibru plastic a plăcilor se utilizează criteriul redistribuției minime [2].

La stabilirea valorilor momentelor de calcul se ia în considerație condiția privind comportarea elastică a armăturii sub acțiunea simultană a încărcării permanente de calcul și a încărcării temporare normate [2].

II. MECANISME DE RUPERE

În condiții normale de armare, plăcile *A* și *B* prezintă cîte un singur mecanism de rupere, indiferent de schema de încărcare.

Din punct de vedere teoretic, aceste mecanisme se compun dintr-o infinitate de linii de rupere radiale mărginite de conturul liber şi de o linie de rupere circulară care coincide cu conturul încastrat al plăcilor. Excepţie fac plăcile simplu rezemate, ale căror mecanisme de rupere sînt

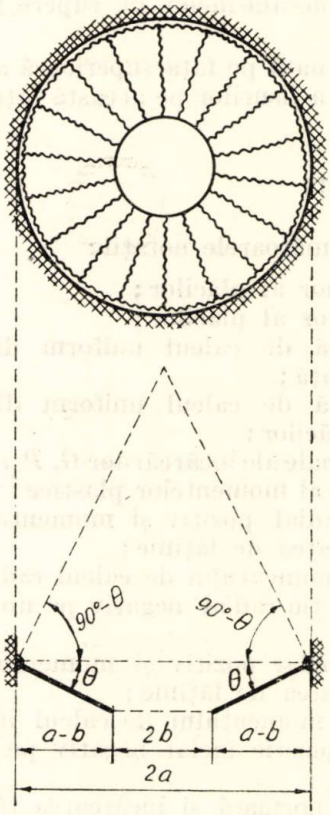


Fig. 3

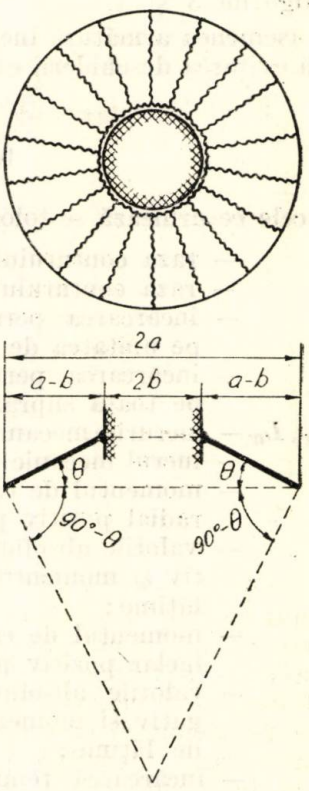


Fig. 4

alcătuite exclusiv dintr-o infinitate de linii de rupere radiale mărginite de contururile interioare şi exterioare ale plăcilor.

Schemele mecanismelor de rupere ale plăcilor A şi B sînt reprezentate în figurile 3 şi 4.

III. IPOTEZE DE CALCUL

Studiul comportării plastice a plăcilor A şi B se face în următoarele ipoteze :

1) starea-limită de rezistenţă a plăcilor corespunde transformării lor în mecanisme sub acţiunea încărcărilor permanente şi temporare de calcul ;

2) momentele plastice inelare pozitive ale plăcilor A, precum şi momentele plastice inelare negative ale plăcilor B, au aceleaşi valori pe toată suprafaţa plăcilor ;

3) pentru fiecare categorie de plăci, momentele plastice radiale negative au aceeași valoare în toate punctele contururilor încastrate ale plăcilor;

4) armătura radială situată pe fețele superioară și inferioară ale plăcilor asigură formarea exclusiv a mecanismelor de rupere reprezentate în figurile 3 și 4.

De asemenea armătura inelară situată pe fața superioară a plăcilor *A* asigură evitarea deschiderii excesive a fisurilor pe această față.

IV. NOTAȚII

În cele ce urmează se folosesc următoarele notații:

a — raza conturului exterior al plăcilor;
b — raza conturului interior al plăcilor;
g — încărcarea permanentă de calcul uniform distribuită pe unitatea de suprafață;
G — încărcarea permanentă de calcul uniform distribuită pe toată suprafața plăcilor;
L_G, L_P, L_V, L_W — lucrurile mecanice virtuale ale încărcărilor G, P_u, V și W_u;
L_M — lucrul mecanic virtual al momentelor plastice;
M_1, M_{p1} — momentul de calcul radial pozitiv și momentul plastic radial pozitiv pe unitatea de lățime;
M'_1, M'_{p1} — valorile absolute ale momentului de calcul radial negativ și momentului plastic radial negativ pe unitatea de lățime;
M_2, M_{p2} — momentul de calcul inelar pozitiv și momentul plastic inelar pozitiv pe unitatea de lățime;
M'_2, M'_{p2} — valorile absolute ale momentului de calcul inelar negativ și momentului plastic inelar negativ pe unitatea de lățime;
p_n, p_u — încărcarea temporară normată și încărcarea temporară de calcul uniform distribuite pe unitatea de suprafață;
p_1 — încărcarea temporară uniform distribuită pe unitatea de suprafață, corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul într-un singur punct sau simultan în mai multe puncte ale armăturii plăcilor;
P_n, P_u — încărcarea temporară normată și încărcarea temporară de calcul uniform distribuite pe toată suprafața plăcilor;
P_1 — încărcarea temporară uniform distribuită pe toată suprafața plăcilor, corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul într-un singur punct sau simultan în mai multe puncte ale armăturii plăcilor;
r — coeficientul de redistribuție;
r_a — valoarea-limită a coeficientului de redistribuție rezultată din condiția privind comportarea elastică a armăturii în stadiul de exploatare;
v — încărcarea permanentă de calcul uniform distribuită pe unitatea de lungime;

V — încărcarea permanentă de calcul uniform distribuită pe toată lungimea conturului liber al plăcilor;

w_n, w_u — încărcarea temporară normată și încărcarea temporară de calcul uniform distribuite pe unitatea de lungime;

w_1 — încărcarea temporară uniform distribuită pe unitatea de lungime, corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul într-un punct sau simultan în mai multe puncte ale armăturii plăcilor;

W_n, W_u — încărcarea temporară normată și încărcarea temporară de calcul uniform distribuite pe toată lungimea conturului liber al plăcilor;

W_1 — încărcarea temporară uniform distribuită pe toată lungimea conturului liber al plăcilor, corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul într-un punct sau simultan în mai multe puncte ale armăturii;

θ — deplasare unghiulară a mecanismelor de rupere ale plăcilor;

η — gradul de încastrare elastică a conturului rezemat al plăcilor ($0 \leqslant \eta \leqslant 1$);

$$Q_n = G + P_n\,;\quad Q_1 = G + P_1\,;\quad Q_u = G + P_u\,;$$

$$S_n = V + W_n\,;\quad S_1 = V + W_1\,;\quad S_u = V + W_u\,;$$

$$\lambda = \frac{b}{a}.$$

V. SCHEMA DE ÎNCĂRCARE I

1. EXPRESIA ECUAȚIEI DE ECHILIBRU PLASTIC

Schemele plăcilor A și B solicitate de încărcări permanente și temporare de calcul uniform distribuite pe toată suprafața lor sînt reprezentate în figurile 5 și 6.

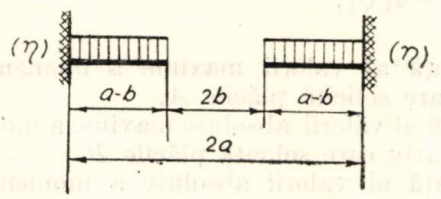


Fig. 5

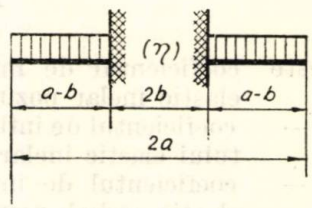


Fig. 6

Pentru ambele categorii de plăci, expresia generală a ecuației de echilibru plastic, obținută pe baza principiului lucrului mecanic virtual, este

$$L_M + L_G + L_P = 0. \qquad (1)$$

Lucrurile mecanice virtuale care intră în alcătuirea ecuației (1) au următoarele expresii :

— *plăcile A* :

$$L_M = -2\pi a\,[(1-\lambda)\,M_{p2} + M'_{p1}]\,\theta, \tag{2}$$

$$L_G + L_P = \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{3\,(1+\lambda)}\,aQ_u\theta\,; \tag{3}$$

— *plăcile B* :

$$L_M = -2\pi a\,[(1-\lambda)\,M'_{p2} + \lambda\,M'_{p1}]\,\theta, \tag{4}$$

$$L_G + L_P = \frac{(1-\lambda)(2+\lambda)}{3\,(1+\lambda)}\,aQ_u\theta. \tag{5}$$

2. DETERMINAREA MOMENTELOR PLASTICE

Expresiile (2) și (4) arată că pentru fiecare categorie de plăci ecuația de echilibru plastic conține ca necunoscute două momente plastice. De aceea, pentru obținerea unei soluții unice a acestor momente, este necesar ca ecuației de echilibru plastic să i se asocieze o ecuație suplimentară.

Pentru stabilirea acestei ecuații se adoptă criteriul redistribuției minime [2]. Conform acestui criteriu, momentele plastice ale plăcilor trebuie astfel proporționate, încît limita de curgere de calcul să fie atinsă simultan în armătura din secțiunile cele mai solicitate ale plăcilor. În consecință, momentele plastice ale unei plăci se obțin din expresiile momentelor elastice maxime (în valoare absolută) pentru o valoare a încărcării temporare egală cu P_1.

Cu precizările de mai sus rezultă

$$M_{p2} = \alpha_2\,Q_1, \tag{6}$$

$$M'_{p2} = \alpha'_2\,Q_1\,, \tag{7}$$

$$M'_{p1} = \alpha'_1\,Q_1\,, \tag{8}$$

unde

α_2 este coeficientul de influență al valorii maxime a momentului elastic inelar pozitiv care solicită plăcile A,

α'_2 — coeficientul de influență al valorii absolute maxime a momentului elastic inelar negativ care solicită plăcile B,

α'_1 — coeficientul de influență al valorii absolute a momentului elastic radial negativ de pe conturul încastrat al plăcilor pentru ambele categorii de plăci.

Valorile acestor coeficienți deduse din relațiile date în lucrarea [3], în care coeficientul lui Poisson a fost considerat egal cu $\frac{1}{6}$, sînt date în tabelele 1 și 2 pentru plăcile A, respectiv în tabelele 3 și 4 pentru plăcile B.

Tabela 1

Plăci A. Coeficientul α_2

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,117	0,100	0,084	0,067	0,050	0,034
0,4	0,105	0,088	0,070	0,050	0,035	0,018
0,6	0,095	0,077	0,059	0,042	0,024	0,006
0,8	0,087	0,070	0,054	0,038	0,021	0,005

Tabela 2

Plăci A. Coeficientul α_1'

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,000	0,008	0,016	0,024	0,032	0,040
0,4	0,000	0,007	0,015	0,022	0,030	0,037
0,6	0,000	0,006	0,012	0,017	0,023	0,028
0,8	0,000	0,003	0,006	0,011	0,013	0,015

Tabela 3

Plăci B. Coeficientul α_2'

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,263	0,217	0,172	0,127	0,082	0,061
0,4	0,164	0,135	0,105	0,079	0,087	0,095
0,6	0,120	0,098	0,088	0,100	0,112	0,124
0,8	0,094	0,087	0,101	0,115	0,129	0,144

Tabela 4

Plăci B. Coeficientul α_1'

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,000	0,042	0,083	0,125	0,166	0,207
0,4	0,000	0,021	0,043	0,064	0,085	0,106
0,6	0,000	0,011	0,021	0,031	0,042	0,053
0,8	0,000	0,004	0,008	0,013	0,016	0,020

Prin eliminarea încărcării Q_1 între relațiile (6) și (7), respectiv între relațiile (6) și (8), se obțin ecuațiile suplimentare necesare pentru determinarea valorilor momentelor plastice ale plăcilor A și B.

Ținînd seama de relațiile (2) — (8), din ecuația de echilibru plastic (1) se obțin următoarele expresii ale coeficientului de redistribuție :

$$r = \frac{Q_u}{Q_1} = \frac{6\pi(1+\lambda)[(1-\lambda)\alpha_2 + \alpha_1']}{(1-\lambda)(1+2\lambda)} \tag{9}$$

pentru plăcile A, respectiv

$$r = \frac{Q_u}{Q_1} = \frac{6\pi(1+\lambda)[(1-\lambda)\alpha_2' + \lambda\alpha_1']}{(1-\lambda)(2+\lambda)} \tag{10}$$

pentru plăcile B.

Valorile coeficientului de redistribuție sînt date în tabela 5 pentru plăcile A, respectiv în tabela 6 pentru plăcile B.

Tabela 5

Plăci A. Coeficientul de redistribuție r

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	1,89	1,77	1,66	1,55	1,45	1,35
0,4	1,54	1,46	1,38	1,29	1,22	1,16
0,6	1,31	1,25	1,20	1,15	1,10	1,05
0,8	1,13	1,10	1,08	1,06	1,03	1,01

Tabela 6

Plăci B. Coeficientul de redistribuție r

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	2,70	2,34	1,98	1,62	1,26	1,16
0,4	1,80	1,64	1,48	1,33	1,57	1,82
0,6	1,39	1,31	1,39	1,70	2,02	2,35
0,8	1,13	1,24	1,61	1,97	2,34	2,71

Din expresia generală a coeficientului de redistribuție rezultă

$$Q_1 = \frac{Q_u}{r}. \tag{11}$$

Ţinînd seama de relaţia (11), expresiile (6) — (8) devin

$$M_{p2} = \frac{\alpha_2}{r} Q_u, \tag{12}$$

$$M'_{p2} = \frac{\alpha'_2}{r} Q_u, \tag{13}$$

$$M'_{p1} = \frac{\alpha'_1}{r} Q_u. \tag{14}$$

Momentele plastice date de relaţiile (12) — (14) sînt momente de calcul numai în cazurile în care $r < r_a$, unde r_a este dat de relaţia [2]:

$$r_a = \frac{Q_u}{Q_n}. \tag{15}$$

Dacă $r \geqslant r_a$, momentele de calcul sînt date de relaţiile

$$M_2 = \frac{\alpha_2}{r_a} Q_u, \tag{16}$$

$$M'_2 = \frac{\alpha'_2}{r_a} Q_u, \tag{17}$$

$$M'_1 = \frac{\alpha'_1}{r_a} Q_u. \tag{18}$$

În acest din urmă caz, datorită faptului că momentele de calcul sînt mai mari decît momentele plastice, rezultă că sub acţiunea încărcărilor de calcul are loc o redistribuţie parţială a eforturilor, respectiv plăcile nu se transformă în mecanisme sub acţiunea acestor încărcări.

3. ELEMENTE SUPLIMENTARE DE CALCUL

3.1. Plăcile A

Asigurarea formării mecanismului de rupere reprezentat în figura 3 presupune preluarea momentelor radiale pozitive şi a momentelor radiale negative din cuprinsul plăcilor prin intermediul unor armături adecvate.

De asemenea, pentru evitarea deschiderii excesive a fisurilor radiale pe faţa superioară a plăcilor, este necesară montarea unei armături suplimentare capabile de a prelua momentele inelare negative.

a) Momentul de calcul radial pozitiv este dat de relaţia

$$M_1 = \alpha_1 Q_1, \tag{19}$$

în care α_1 este coeficientul de influenţă al valorii maxime a momentului elastic radial pozitiv. Valorile acestui coeficient sînt date în tabela 7.

Tabela 7

Plăci A. Coeficientul α_1

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,040	0,034	0,027	0,020	0,015	0,009
0,4	0,024	0,019	0,014	0,009	0,005	0,002
0,6	0,013	0,009	0,006	0,004	0,002	0,001
0,8	0,005	0,004	0,002	0,001	0,000	0,000

Mărimea încărcării Q_1 din ecuaţia (19) este dată de relaţia (11) pentru $r < r_a$, respectiv de relaţia

$$Q_1 = \frac{Q_u}{r_a} \tag{20}$$

pentru $r \geqslant r_a$.

Armătura corespunzătoare momentului de calcul M_1 se consideră constantă pe toată suprafaţa plăcilor.

b) Momentele radiale negative acţionează pe suprafaţa unei coroane mărginite la exterior de conturul exterior al plăcilor.

Fie $\rho_1' a$ raza conturului interior al acestei coroane. Mărimea parametrului ρ_1' se obţine din egalarea cu zero a expresiei momentului elastic radial.

Valorile acestui parametru sînt date în tabela 8.

Tabela 8

Plăci A. Parametrul ρ_1'

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	1,00	0,93	0,86	0,78	0,69	0,58
0,4	1,00	0,93	0,86	0,78	0,69	0,58
0,6	1,00	0,95	0,89	0,84	0,74	0,63
0,8	1,00	0,97	0,92	0,88	0,80	0,80

Armătura corespunzătoare momentului de calcul M_1', determinat cu relaţia (8) pentru $r < r_a$, respectiv cu relaţia (18) pentru $r \geqslant r_a$, se consideră constantă pe toată suprafaţa coroanei pe care acţionează momente radiale negative.

c) Momentele inelare negative acţionează pe suprafaţa unei coroane mărginite la exterior de conturul exterior al plăcilor. Ele apar numai în cazurile în care coeficienţii η şi λ satisfac simultan condiţiile $\eta = 1$ şi $\lambda \leqslant 0{,}6$.

Fie $\rho_2' a$ raza conturului interior al acestei coroane.

Mărimea parametrului ρ_2' se obține din egalarea cu zero a expresiei momentului elastic inelar.

Valorile acestui parametru sînt date în tabela 9.

Tabela 9

Plăci A. Coeficienții α_2' și ρ_2' pentru $\eta = 1$

λ	0,2	0,4	0,6
α_2'	0,007	0,007	0,005
ρ_2'	0,88	0,88	0,90

Valoarea absolută a momentului inelar negativ de calcul este dată de relația

$$M_2' = \alpha_2' Q_1, \tag{21}$$

în care încărcarea Q_1 este dată de relația (11) dacă $r < r_a$, respectiv de relația (20) dacă $r \geqslant r_a$.

În relația (21), α_2' este coeficientul de influență al valorii absolute maxime a momentului elastic inelar negativ. Valorile acestui coeficient sînt date în tabela 9.

Armătura inelară corespunzătoare momentului de calcul M_2' se consideră constantă pe toată lățimea coroanei pe care acționează momentele inelare negative.

3.2. Plăcile B

Asigurarea formării mecanismului de rupere, reprezentat în figura 4, presupune preluarea momentelor radiale pozitive și momentelor radiale negative prin intermediul unei armături adecvate.

a) Momentul de calcul radial pozitiv M_1 este dat de relația (19), în care încărcarea Q_1 se determină ca în cazul plăcilor A.

Valorile coeficientului α_1 sînt date în tabela 10.

Tabela 10

Plăci B. Coeficientul α_1

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,004	0,003	0,003	0,003	0,002	0,001
0,4	0,007	0,004	0,002	0,001	0,001	0,000
0,6	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000	0,000
0,8	0,004	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000

Armătura corespunzătoare momentului de calcul M_1 se consideră constantă pe toată suprafața plăcilor.

b) Pentru $\eta \geqslant 0{,}2$, momentele radiale negative acționează în mod practic pe toată suprafața plăcilor.

Pentru preluarea acestor momente se consideră că armătura corespunzătoare momentului de calcul M_1' este constantă pe toată suprafața plăcilor.

Observație. Plăcile B nu sînt solicitate de momente inelare pozitive. De aceea intensitatea armăturii situate pe fața inferioară a plăcilor se stabilește pe baza dispozițiilor constructive ale acestor elemente de construcție.

VI. SCHEMA DE ÎNCĂRCARE II

1. EXPRESIA ECUAȚIEI DE ECHILIBRU PLASTIC

Schemele plăcilor A și B, solicitate de încărcări permanente și temporare de calcul uniform distribuite de-a lungul conturului lor liber, sînt reprezentate în figurile 7 și 8.

Pentru ambele categorii de plăci, expresia generală a ecuației de echilibru plastic este

$$L_M + L_V + L_W = 0. \tag{22}$$

Lucrul mecanic virtual L_M este dat de relația (2) pentru plăcile A, respectiv de relația (4) pentru plăcile B.

Suma $L_V + L_W$ are expresia

$$L_V + L_W = (1 - \lambda)\, aS_u\theta. \tag{23}$$

Această expresie este valabilă pentru ambele categorii de plăci.

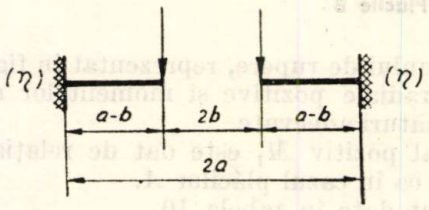


Fig. 7

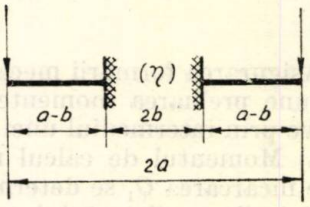


Fig. 8

2. DETERMINAREA MOMENTELOR PLASTICE

Expresiile generale ale momentelor plastice, stabilite pe baza criteriului redistribuției minime, sînt:

$$M_{p2} = \alpha_2 S_1, \tag{24}$$

$$M'_{p2} = \alpha'_2 S_1, \tag{25}$$

$$M'_{p1} = \alpha'_1 S_1. \tag{26}$$

Coeficienții α_2, α'_2 și α'_1 care intervin în aceste expresii au aceeași semnificație ca în cazul schemei de încărcare I.

Valorile acestor coeficienți, deduse din relațiile date în lucrarea [3], în care coeficientul lui Poisson a fost considerat egal cu $\frac{1}{6}$, sînt date

în tabelele 11 și 12 pentru plăcile *A*, respectiv în tabelele 13 și 14 pentru plăcile *B*.

Tabela 11

Plăci A. Coeficientul α_2

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,376	0,340	0,305	0,269	0,232	0,198
0,4	0,269	0,222	0,175	0,129	0,082	0,036
0,6	0,215	0,176	0,138	0,099	0,061	0,023
0,8	0,181	0,145	0,109	0,073	0,038	0,002

Tabela 12

Plăci A. Coeficientul α_1'

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,000	0,017	0,034	0,051	0,069	0,086
0,4	0,000	0,020	0,039	0,059	0,079	0,098
0,6	0,000	0,012	0,025	0,037	0,049	0,061
0,8	0,000	0,007	0,013	0,019	0,026	0,032

Tabela 13

Plăci B. Coeficientul α_2'

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,376	0,311	0,244	0,178	0,131	0,105
0,4	0,269	0,224	0,178	0,132	0,087	0,051
0,6	0,215	0,175	0,135	0,096	0,056	0,021
0,8	0,181	0,147	0,111	0,076	0,041	0,007

Tabela 14

Plăci B. Coeficientul α_1'

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,000	0,061	0,121	0,181	0,242	0,302
0,4	0,000	0,035	0,069	0,104	0,139	0,174
0,6	0,000	0,019	0,038	0,056	0,075	0,094
0,8	0,000	0,008	0,016	0,023	0,031	0,038

Ţinînd seama de relaţiile (2), (4) şi (23) — (26), din ecuaţia de echilibru plastic (22) se obţin următoarele expresii ale coeficientului de redistribuţie :

$$r = \frac{S_u}{S_1} = \frac{2\pi\,[(1-\lambda)\,\alpha_2 + \alpha_1']}{1-\lambda} \tag{27}$$

pentru plăcile A, respectiv

$$r = \frac{S_u}{S_1} = \frac{2\pi\,[(1-\lambda)\,\alpha_2' + \lambda\alpha_1']}{1-\lambda} \tag{28}$$

pentru plăcile B.

Valorile coeficientului de redistribuţie sînt date în tabela 15 pentru plăcile A, respectiv în tabela 16 pentru plăcile B.

Tabela 15

Plăci A. Coeficientul de redistribuţie r

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	2,36	2,28	2,18	2,09	2,00	1,92
0,4	1,69	1,60	1,51	1,42	1,32	1,25
0,6	1,35	1,30	1,25	1,20	1,15	1,11
0,8	1,13	1,11	1,09	1,07	1,04	1,02

Tabela 16

Plăci B. Coeficientul de redistribuţie r

λ \ η	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	2,37	2,05	1,73	1,40	1,20	1,13
0,4	1,69	1,55	1,41	1,26	1,12	1,04
0,6	1,35	1,28	1,20	1,13	1,06	1,02
0,8	1,14	1,11	1,09	1,06	1,03	1,01

Din expresia generală a coeficientului de redistribuţie rezultă

$$S_1 = \frac{S_u}{r}. \tag{29}$$

Ţinînd seama de relaţia (29), expresiile (24) — (26) devin

$$M_{p2} = \frac{\alpha_2}{r} S_u, \tag{30}$$

$$M'_{p2} = \frac{\alpha_2'}{r} S_u, \tag{31}$$

$$M'_{p1} = \frac{\alpha_1'}{r} S_u. \tag{32}$$

Momentele plastice date de relațiile (30) — (32) sînt momente de calcul numai în cazurile în care $r < r_a$, unde r_a este dat de relația

$$r_a = \frac{S_u}{S_n}. \tag{33}$$

Dacă $r \geqslant r_a$, momentele de calcul sînt date de relațiile

$$M_2 = \frac{\alpha_2}{r_a} S_u, \tag{34}$$

$$M_2' = \frac{\alpha_2'}{r_a} S_u, \tag{35}$$

$$M_1' = \frac{\alpha_1'}{r_a} S_u. \tag{36}$$

3. ELEMENTE SUPLIMENTARE DE CALCUL

3.1. Plăcile A

Asigurarea formării mecanismului de rupere reprezentat în figura 3 presupune preluarea momentelor radiale pozitive și a momentelor radiale negative din cuprinsul plăcilor prin intermediul unor armături adecvate.

De asemenea, pentru evitarea deschiderii excesive a fisurilor radiale pe fața superioară a plăcilor este necesară montarea unei armături suplimentare capabile de a prelua momentele inelare negative.

a) Momentul de calcul radial pozitiv este dat de relația

$$M_1 = \alpha_1 S_1, \tag{37}$$

în care coeficientul α_1 are aceeași semnificație ca în cazul schemei de încărcare I a plăcilor *A*. Valorile acestui coeficient sînt date în tabela 17.

Tabela 17

Plăci A. Coeficientul α_1

λ \ η_1	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,052	0,040	0,030	0,019	0,009	0,004
0,4	0,018	0,007	0,003	—	—	—
0,6	0,006	—	—	—	—	—
0,8	0,001	—	—	—	—	—

Mărimea încărcării S_1 din relația (37) este dată de relația (29) pentru $r < r_a$, respectiv de relația

$$S_1 = \frac{S_u}{r_a} \tag{38}$$

pentru $r \geqslant r_a$.

Armătura corespunzătoare momentului de calcul M_1 se consideră constantă pe toată suprafața plăcilor.

b) Pentru $\eta \geqslant 0{,}2$, momentele radiale negative acționează practic pe toată suprafața plăcilor. Pentru preluarea acestor momente se consideră că armătura corespunzătoare momentului de calcul M_1' este constantă pe toată suprafața plăcilor.

c) Momentele inelare negative acționează pe suprafața unei coroane mărginite la exterior de conturul exterior al plăcilor. Ele apar numai în cazurile în care coeficienții η și λ satisfac simultan condițiile $\eta = 1$ și $\lambda \geqslant 0{,}2$.

Lățimea coroanei pe care acționează momentele inelare negative nu depășește 5% din lungimea razei conturului exterior al plăcilor.

Valoarea absolută a momentului inelar negativ de calcul este dată de relația

$$M_2' = \alpha_2' S_1 , \tag{39}$$

în care încărcarea S_1 este dată de relația (29) dacă $r < r_a$, respectiv de relația (38) dacă $r \geqslant r_a$.

În relația (39), α_2' este coeficientul de influență al valorii absolute maxime a momentului elastic inelar negativ.

Valorile acestui coeficient sînt date în tabela 18.

Tabela 18

Plăci A. Coeficientul α_2' pentru $\eta = 1$

λ	0,2	0,4	0,6	0,8
α_2'	0,015	0,004	0,001	0,001

Armătura inelară corespunzătoare momentului de calcul M_2' se consideră constantă pe toată lățimea pe care acționează momentele inelare negative.

3.2. Plăcile B

Asigurarea formării mecanismului de rupere reprezentat în figura 4 presupune preluarea momentelor radiale negative prin intermediul unei armături adecvate. Aceste momente acționează pe toată suprafața plăcilor, indiferent de valoarea gradului de încastrare η.

Momentul de calcul radial negativ M_1' se determină cu relația (21), în care coeficientul α_1' se ia din tabela 14.

Armătura corespunzătoare momentului de calcul M_1' se consideră constantă pe toată suprafața plăcilor.

Observație. Plăcile *B* nu sînt solicitate de momente inelare pozitive sau de momente radiale pozitive.

VII. COMBINAȚII DE ÎNCĂRCĂRI

Uneori plăcile inelare de beton armat sînt solicitate de încărcări a căror schemă reprezintă o combinație a schemelor de încărcare I și II.

În astfel de cazuri, determinarea momentelor plastice pe baza criteriului redistribuției minime reprezintă o operație laborioasă. Datorită

acestui fapt, se preferă întotdeauna utilizarea unor procedee aproximative de calcul.

Un astfel de procedeu, care utilizează în întregime rezultatele obținute în cadrul acestui studiu, constă în următoarele operații:

a) se determină coeficientul de redistribuție al plăcii, care se notează cu r_1, în ipoteza că placa este solicitată exclusiv de încărcările care alcătuiesc schema de încărcare I;

b) se determină coeficientul de redistribuție al plăcii, care se notează cu r_2, în ipoteza că placa este solicitată exclusiv de încărcările care alcătuiesc schema de încărcare II;

c) se admite că coeficientul de redistribuție al plăcii solicitate de o combinație a schemelor de încărcare I și II, care se notează cu r, este rezultatul unei interpolări liniare între coeficienții de redistribuție r_1 și r_2, efectuată în funcție de valorile încărcărilor de calcul care alcătuiesc aceste scheme.

Rezultă

$$r = \frac{r_1 Q_u + r_2 S_u}{Q_u + S_u} \tag{40}$$

și

$$r_a = \frac{r_{a1} Q_u + r_{a2} S_u}{Q_u + S_u}, \tag{41}$$

în care

$$r_{a1} = \frac{Q_u}{Q_n} \tag{42}$$

și

$$r_{a2} = \frac{S_u}{S_n}; \tag{43}$$

d) momentele plastice se obțin prin sumarea momentelor date de relațiile (12) — (14) cu cele date de relațiile (30) — (32), în care coeficientul r se introduce cu valoarea dată de relația (40).

Momentele plastice obținute în acest mod sînt momente de calcul dacă coeficienții de redistribuție dați de relațiile (40) și (41) îndeplinesc condiția $r < r_a$.

Dacă rezultă însă $r \geqslant r_a$, atunci momentele de calcul ale plăcii solicitate de o combinație a schemelor de încărcare I și II se obțin prin sumarea momentelor date de relațiile (16) — (18) cu cele date de relațiile (34) — (36), în care coeficientul r_a se introduce cu valoarea dată de relația (41).

BIBLIOGRAFIE

1. K. W. Johansen, *Yield-line Theory*, Londra, Cement and Concrete Association, 1962.
2. V. Petcu, *Calculul plastic al plăcilor armate cruciș*, Standardizarea, **14**, 2, 174 — 182 (1962).
3. Д. В. Вайнберг, Е. Д. Вайнберг, *Пластины, диски, балки — стенки*, Киев, *Госстройиздат*, 1959 г.
4. * * * *Normativ condiționat pentru calculul construcțiilor la stări limită*, vol. I, București, Edit. tehnică, 1963.

CONSIDERAȚII ASUPRA CALCULULUI STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE[1])

de S. RĂUTU
Centrul de mecanica solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

531.2

Sînt prezentate două metode pentru calculul structurilor static nedeterminate. Prima metodă presupune diagrama finală sub forma unei sume de „diagrame static compatibile", funcție de un număr de parametri. Determinarea valorilor parametrilor se obține din condiția ca energia potențială a sistemului să fie minimă. A doua metodă pornește de la o diagramă finală sub forma unei sume de „diagrame cinematic compatibile", funcție de o serie de parametri a căror valoare se determină din condiția de minim a energiei potențiale. Se arată că toate metodele utilizate în prezent pentru calculul structurilor static nedeterminate pot fi considerate ca niște cazuri particulare ale metodelor expuse.

În prezent există un număr mare de metode de calcul al structurilor static nedeterminate, însă ele nu reprezintă altceva decît variante ale metodelor clasice de calcul: metoda eforturilor și metoda deplasărilor. Ceea ce caracterizează toate metodele de calcul este existența unui sistem de bază ales de calculator și care este folosit în fundamentarea metodei, fie explicit, ca în cazul metodelor clasice, fie implicit, prin modul de organizare a calculului. Sistemul de bază ales are un număr de legături cinematice suplimentare (în cazul metodei deplasărilor) sau un număr de legături îndepărtate (în cazul metodei eforturilor), iar determinarea eforturilor din sistemul dat se face prin înlăturarea diferențelor existente între sistemul de bază ales și sistemul dat. Introducerea noțiunii de „sistem de bază" a dat o serie de rezultate remarcabile, permițînd rezolvarea tuturor sistemelor static nedeterminate și dînd un sens fizic, ușor de urmărit, fiecărei etape de calcul. În ultima perioadă se observă că în anumite cazuri noțiunea de „sistem de bază" reprezintă o stavilă în simplificarea calcu-

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. — Mécanique Appliquée", **12**, *6* (1967) (în limba engleză).

lelor. Introducerea necunoscutelor grupate şi alegerea mai multor sisteme de bază pentru rezolvarea aceleiaşi structuri (în cazul metodei eforturilor) sînt cîteva dintre artificiile de calcul menite de a înlătura piedicile pe care le introduce noţiunea de „sistem de bază".

În această lucrare se prezintă calculul structurilor static nedeterminate, renunţîndu-se la noţiunea de „sistem de bază" şi folosind noţiunile des întîlnite în calculul structurilor în domeniul plastic de „diagramă static compatibilă" şi „diagramă cinematic compatibilă".

Se defineşte ca diagramă static compatibilă o diagramă corespunzătoare unei stări de eforturi în echilibru cu solicitările exterioare, dar care nu trebuie să satisfacă şi condiţiile cinematice.

Prin diagramă cinematic compatibilă se înţelege o diagramă de eforturi care corespunde unei deformate ce satisface condiţiile cinematice, însă nu satisface condiţiile de echilibru. Condiţiile cinematice impuse unei structuri sînt condiţiile de continuitate, condiţiile de rezemare şi condiţiile de nedeformabilitate a unghiurilor dintre barele ce se întîlnesc în acelaşi nod. În cazul structurilor static determinate, o diagramă static compatibilă este în acelaşi timp şi cinematic compatibilă. Pentru o structură static nedeterminată avem o infinitate de diagrame static compatibile şi o infinitate de diagrame cinematic compatibile. Diagrama reală este unică şi este în acelaşi timp static compatibilă şi cinematic compatibilă.

În cele ce urmează se demonstrează că, dacă pentru o structură reală se alege ca diagramă de eforturi o diagramă static compatibilă funcţie de un număr de parametri şi se pune condiţia ca parametrii să fie astfel aleşi încît energia potenţială a structurii să fie minimă, valorile rezultate ale acestor parametri fac ca diagrama să fie şi cinematic compatibilă, deci se obţine diagrama reală.

Şi problema inversă este valabilă, adică, alegînd diagrama finală sub forma unei diagrame cinematic compatibile, funcţia are o serie de parametri şi, punînd condiţia ca energia potenţială să fie minimă, se obţine o diagramă care este şi static compatibilă şi deci diagrama reală.

I. În primul caz se caută a se exprima diagrama de eforturi care ia naştere pe o structură static nedeterminată sub forma *)

$$M_p = M_p^0 + \sum_1^n X_i m_i, \tag{1}$$

unde

M_p^0 reprezintă o diagramă static compatibilă oarecare în echilibru cu sarcinile exterioare,

m_i — o diagramă static compatibilă corespunzătoare unei sarcini exterioare în autoechilibru,

*) Scrierea diagramei finale sub o formă foarte asemănătoare a fost dată de către o serie de autori [1] — [4], toţi pornind de la noţiunea de sistem de bază, gruparea necunoscutelor sau utilizarea mai multor sisteme de bază.

În lucrările [1] şi [3] se afirmă că putem renunţa la alegerea unui sistem de bază, acceptînd o expresie a diagramei finale de tipul elastic (1), fără a lega această problemă de noţiunea de diagrama static compatibilă.

n — numărul maxim de diagrame, corespunzătoare unei sarcini în autoechilibru, liniar independente, pe care le acceptă sistemul; se știe că numărul maxim al diagramelor liniar independente este egal cu gradul de nedeterminare a structurii,

X_i — niște coeficienți necunoscuți, al căror sens fizic va fi stabilit ulterior.

Diagrama obținută din relația (1) este static compatibilă (în echilibru cu sarcinile exterioare), indiferent de valoarea coeficienților X_i.

Pentru determinarea valorii coeficienților punem condiția ca energia potențială a sistemului să fie minimă:

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = 0 \qquad (i = 1,2, \ldots, n). \tag{2}$$

Pentru simplificarea expunerii vom presupune că neglijăm energia potențială dată de sarcinile axiale și forțele tăietoare (așa cum se procedează în mod obișnuit în calculul cadrelor), însă demonstrația este valabilă și pentru cazul general, adăugînd termenii reprezentînd energia potențială dată de aceste solicitări.

Dacă dăm coeficienților X_i sensul unor forțe generalizate (în autoechilibru), expresia (2) reprezintă, conform relațiilor lui Castigliano, condiția ca deplasarea generalizată pe direcția i să fie egală cu zero:

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = \Delta_i = 0 \qquad (i = 1,2, \ldots, n). \tag{3}$$

Ținînd seama de formula diagramei de moment și de expresia energiei potențiale

$$W = \frac{1}{2}\int \frac{M_p^2}{EI}\, \mathrm{d}x, \tag{4}$$

relațiile (3) capătă forma

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = \Delta_i = \frac{1}{2}\int \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{M_p^2}{EI}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{M_p^0 m_i}{EI}\, \mathrm{d}x + \Sigma X_j \int \frac{m_i m_j}{EI}\, \mathrm{d}x = 0. \tag{5}$$

S-a obținut în acest fel ecuația generală a metodei eforturilor sub forma relației dată de Castigliano (5), care însă obține această relație pornind de la diagramele unitare pe un sistem de bază ales.

Fiecare termen al ecuației (5) reprezintă deplasarea generalizată pe direcția i dată de sarcinile exterioare sau de sarcinile K în autoechilibru. Ținînd seama de aceasta, se ajunge la forma canonică a ecuațiilor metodei eforturilor:

$$\Delta_i = \Delta_{ip} + \Sigma X_j \delta_{ij} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Avantajul acestui mod de prezentare îl constituie faptul că relațiile sînt puse sub o formă generală, metoda eforturilor sub forma ei clasică reprezentînd un caz particular; gruparea necunoscutelor și chiar utilizarea mai multor sisteme de bază nu mai necesită demonstrații speciale. Singura condiție care se pune este ca sistemul diagramelor în autoechilibru să fie complet și liniar independent.

În cazul cînd fiecare dintre diagramele static compatibile din relaţia (1) satisface un număr de k condiţii cinematice, numărul condiţiilor de tipul dat de relaţia (2) este $(n - k)$, celelalte relaţii fiind îndeplinite automat. Lucrul acesta este arătat şi de faptul că, obligînd diagramele să satisfacă k relaţii suplimentare, numărul diagramelor liniar independent devine $(n - k)$ şi, în consecinţă, problema se simplifică, prezentînd însă dificultatea de găsire a diagramelor care să satisfacă condiţiile cinematice impuse.

Acest mod de calcul coincide cu ceea ce reprezintă în modul clasic de prezentare a metodei eforturilor utilizarea sistemelor de bază de k ori static nedeterminate, ecuaţiile canonice fiind necesare pentru obţinerea celor $(n - k)$ condiţii de continuitate pe care sistemul de bază nu le satisface.

II. În cea de-a doua ipoteză se caută diagrama finală sub forma unei sume de diagrame cinematic compatibile:

$$M_p = \overline{M}_p^0 + \sum_1^p Z_i \overline{m}_i, \tag{7}$$

unde

$\overline{M}_p^0$ reprezintă o diagramă cinematic compatibilă cauzată de sarcinile exterioare şi de o serie de sarcini de legătură;

$\overline{m}_i$ — o diagramă cinematic compatibilă cauzată de o deplasare generalizată oarecare pe direcţia i;

p — numărul de grade de libertate cinematică a nodurilor structurii în sensul curent întrebuinţat în statica construcţiilor;

Z_i — un coeficient de proporţionalitate care reprezintă raportul dintre deplasările reale pe direcţia generalizată i şi deplasarea corespunzătoare diagramei $\overline{m}_i$.

Deplasările i trebuie să fie liniar independente.

Pentru determinarea mărimii necunoscutelor vom folosi condiţia de minim a energiei potenţiale. Deoarece în acest caz vom lucra cu sarcinile exterioare, vom pune condiţia de minim al lucrului mecanic al sarcinilor exterioare.

Notînd cu

P_j — sarcina exterioară în punctul j;

A_{ip} — sarcina de legătură pe direcţia i introdusă pentru ca diagrama $\overline{M}_p^0$ să fie cinematic compatibilă;

A_{ik} — sarcina de legătură pe direcţia i introdusă pentru ca diagrama $\overline{m}_k$ să fie cinematic compatibilă;

δ_{jk} — deplasarea pe direcţia j dată de deplasarea generalizată k;

δ_{j0} — deplasarea pe direcţia j în cazul diagramei $\overline{M}_p^0$.

Sarcinile exterioare care acţionează sistemul vor fi

— mărimea sarcinei de legătură pe direcţia:

$$A_i = A_{ip} + \sum Z_k A_{ik}; \tag{8}$$

— lucrul mecanic al sarcinilor exterioare :

$$L = \sum A_{ip} Z_i + \sum_i \sum_k A_{ik} Z_i Z_k + \sum_i \sum_j P_j \delta_{ji} Z_i + \frac{1}{2} \sum P_j \delta_{j0}. \quad (9)$$

Punînd condiția de minim pentru energia potențială, se obține relația

$$\frac{\partial W}{\partial Z_i} = \frac{\partial L}{\partial Z_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (10)$$

Derivata energiei potențiale în funcție de deplasarea generalizată Z_i, reprezintă forța generalizată A_i. În consecință, relația (10) reprezintă condiția ca sarcina generalizată de pe direcția i să fie nulă :

$$\frac{\partial L}{\partial Z_i} = A_i = 0. \quad (11)$$

Se pot scrie P asemenea relații, rezultînd că numărul ecuațiilor de echilibru de tip (11) este egal cu numărul gradelor de libertate ale structurii. În consecință, diagrama dată de relația (7), care este cinematic compatibilă dacă satisface și relațiile (11), este și static compatibilă, deci reprezintă diagrama reală a eforturilor ce iau naștere în structură sub sarcină.

Condiția de minim a energiei potențiale se obține din derivarea relației (9) :

$$\frac{\partial L}{\partial Z_i} = (A_{ip} + \sum A_{ik} Z_k + \sum P_j \delta_{ji}) = 0 \qquad i = (1, 2, \ldots, n). \quad (12)$$

În cazul particular cînd deplasările cinematic compatibile date sînt rotiri de nod sau translații de etaj, sistemul de ecuații (12) reprezintă ecuațiile canonice ale metodei deplasărilor. Deosebirea constă în faptul că în cazul metodei deplasărilor, se pornește de la un sistem de bază dat, deplasările sînt impuse și, în loc să se opereze cu sarcinile care fac diagramele cinematic compatibile (A_{ip} și A_{ik}), se operează cu reacțiunile din legăturile suplimentare R_{ip} și r_{ik}.

Relația (12) are o formă mult mai generală, nefiind legată de nici un fel de sistem de bază, deplasările date fiind complet arbitare, însă liniar independente. Remarcăm faptul că relația (12) este o condiție de echilibru static ; ea poate fi impusă sub orice formă. De exemplu, deși s-au dat deplasări generalizate pe direcțiile i cărora le corespund diagramele $\overline{m}_i$, condițiile de echilibru pot fi date sub forma

$$A_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad (13)$$

forța generalizată pe direcția j fiind complet independentă de deplasările unitare i date anterior. Acest lucru este posibil deoarece condițiile date de relațiile (12), fiind condiții de echilibru, este indiferent modul în care ele sînt exprimate.

Este mai indicat a se scrie condițiile de echilibru sub formă de ecuații de lucru mecanic virtual, ceea ce duce la o simplificare a modului de organizare a calculului (2), (3), (4) și permite în același timp o programare ușoară la mașini electronice a calculului (6).

Notînd cu $\|\delta\|$ o matrice conținînd p coloane, fiecare corespunzînd unei deplasări liniare independente, ecuațiile de echilibru au forma [6]

$$\|\delta\| \cdot \|M_p\| = \|\delta'\| \cdot \|\overline{M}_p^0\| + \|\delta'\| \cdot \|\overline{m}_i\| \cdot \|Z_i\| = 0, \tag{14}$$

unde

$\|M_p\|$ este o matrice-coloană care reprezintă diagrama de momente finală,

$\|\overline{M}_p^0\|$ — matrice-coloană reprezentînd diagrama cinematic compatibilă dată de sarcina exterioară și forțele de legătură,

$\|\overline{m}_i\|$ — matrice avînd p coloane, pe fiecare coloană fiind dată diagrama produsă de o deplasare cinematic compatibilă,

$\|Z_i\|$ — necunoscutele problemei,

$\|\delta'\|$ — transformata matricei deplasărilor.

De remarcat faptul că în matricea $\|\overline{M}_p^0\|$ sînt introduse atît momentele active pe direcțiile i, cît și sarcinile exterioare de tipul P_j. De asemenea, în matricea deplasărilor $\|\delta\|$ se introduc deplasările corespunzătoare acestor sarcini.

Dacă diagramele cinematic compatibile sînt astfel alese încît condițiile de echilibru pe una sau pe mai multe direcții sînt satisfăcute, numărul ecuațiilor care intervin în sistemul de ecuații (12) se reduce cu numărul de direcții pe care condițiile de echilibru sînt satisfăcute automat.

Deducerea metodelor de calcul al structurilor static nedeterminate, pornind de la noțiunea de diagramă static compatibilă și de diagramă cinematic compatibilă, precum și de la condiția de minim a energiei potențiale, scoate în evidență încă unul dintre aspectele comune ale celor două metode de calcul al structurilor : metoda eforturilor și metoda deplasărilor.

Arătînd caracterul unitar al principiilor celor două metode, modul de demonstrație face ca toate metodele de lucru întîlnite pînă în prezent să poată fi privite drept cazuri particulare ale metodei generale prezentate. În același timp, modul de prezentare face ca și în calculul elastic să operăm cu o serie de noțiuni întîlnite pînă în prezent numai în calculul plastic al structurilor, noțiunile de „diagramă static compatibilă" și „diagramă cinematic compatibilă", permițînd o prezentare unitară a metodelor de calcul al structurilor în domeniul elastic și plastic.

III. Metodica propusă pentru obținerea ecuațiilor generale de calcul al structurilor static nedeterminate are o importanță nu numai teoretică, ci și practică, deschizînd noi căi pentru găsirea unor noi metode de calcul al structurilor în domeniul elastic. Dacă în cadrul metodei eforturilor, prin intermediul posibilității de a lucra cu mai multe sisteme de bază, s-a ajuns la o formă similară cu relația (2) pentru diagrama finală și, în consecință, s-au indicat o serie de organizări ale calculului care au adus la simplificări importante, în cadrul metodei deplasărilor cercetările în această direcție sînt mult mai puțin dezvoltate și se referă mai mult la aplicarea metodei deplasărilor sub forma teoretică.

Un exemplu de „diagramă cinematic compatibilă" utilizată curent în metoda deplasărilor poate fi luat din calculul structurilor în două etape (fază de noduri fixe și fază de noduri deplasabile). Dacă avem un cadru ca cel din figura 1*a*, o diagramă cinematic compatibilă este cea din

figura 1 *b* și corespunde unei deplasări de translație orizontală a tuturor etajelor, egală pentru toate etajele. De remarcat faptul că toate condițiile cinematice sînt satisfăcute și chiar condițiile statice pentru fiecare nod sînt satisfăcute. Trasînd 5 asemenea diagrame cinematic compatibile, $\overline{M}_p^0$, $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$, $\overline{m}_3$ și $\overline{m}_4$, corespunzătoare acțiunii sarcinilor exterioare și

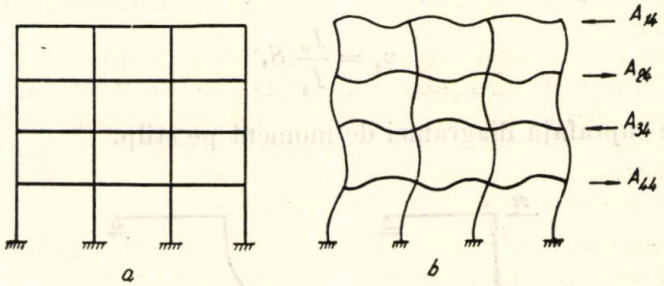


Fig. 1

deplasărilor fiecărui etaj, se pot alege astfel deplasările etajelor $Z_1 \ldots Z_4$, încît și condițiile statice să fie satisfăcute :

$$A_{ip} + \sum A_{ik} Z_k + \sum P_j \delta_{ji} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Numărul condițiilor impuse, deci numărul ecuațiilor, este egal cu numărul etajelor. Se vede că calculul cadrului cu noduri deformabile în două etape devine un caz particular al metodei expuse. Considerăm însă că prin introducerea noțiunii de deplasare cinematic compatibilă se poate da o serie de metode noi de organizare a calculului elastic. Vom prezenta cîteva dintre ele, legate de un singur gen de cadre : cadre cu noduri deplasabile.

Fie cadrul din figura 2. În mod curent, un asemenea cadru este mai indicat să fie rezolvat prin metoda eforturilor, avînd două necunoscute dacă este rezolvat cu această metodă și patru necunoscute dacă este

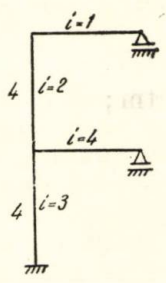
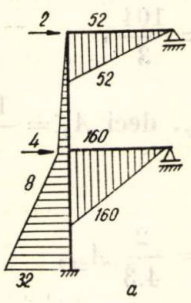


Fig. 2



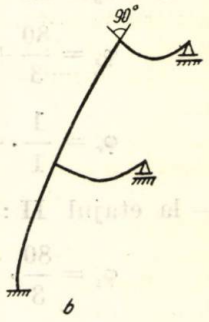


Fig. 3

rezolvat prin metoda deplasărilor sub forma ei clasică. Vom rezolva această construcție folosind metoda deplasărilor, însă luînd asemenea diagrame cinematic compatibile care satisfac automat condițiile de echilibru pe orizontală. Pentru încărcarea provenită din sarcinile exterioare vom alege diagramele cinematic compatibile din figurile 3 sau 4. Diagrama din

figura 3 corespunde unei deformații prezentate în figura 3 *b*. De remarcat faptul că în afara solicitărilor exterioare intervin și două sarcini de legătură, și anume momentele de 52 tm și 160 tm, momente care asigură condițiile de continuitate între stîlp și riglă.

Determinarea lor se face foarte simplu.

Rotirea stîlpului în dreptul unui etaj are valoarea

$$\varphi_s = \frac{I_0}{I_s} S, \tag{16}$$

unde S este suprafața diagramei de moment pe stîlp.

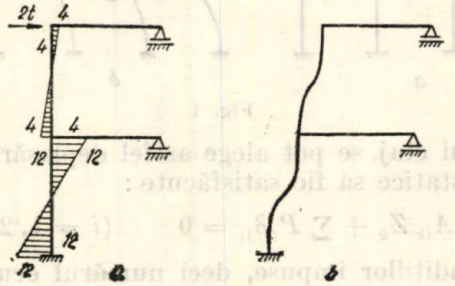


Fig. 4

Rotirea riglei (în ipoteza cînd rigla nu este încărcată) :

$$\varphi_r = \frac{I_0}{I_r} \frac{l}{3} A_r \tag{17}$$

egalînd cele două rotiri, obținem :

— la etajul I :

$$\varphi_s = \frac{80}{3} + \frac{16}{2} = \frac{104}{3},$$

$$\varphi_r = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} A_{1r}, \text{ deci } A_{1r} = \frac{104}{3} \cdot \frac{3}{2} = 52 \text{ tm};$$

— la etajul II :

$$\varphi_s = \frac{80}{3}, \quad \varphi_r = \frac{2}{4.3} A_{2r},$$

$$\text{de unde } A_{2r} = \frac{80}{3} \cdot \frac{4.3}{2} = 160 \text{ tm}.$$

Diagrama cinematic compatibilă din figura 4*a* corespunde deformației din figura 4*b*. Diagrama din figura 4*a* se obține adăugînd niște momente active egale pe capetele de bază, în așa fel ca diagrama obținută să aibă suprafața nulă și forța tăietoare egală cu aceea a forței tăie-

toare exterioare. În cazul particular al problemei studiate, diagrama are o variaţie liniară ca şi în figură şi

$$A_i = -\frac{T_i \cdot h}{2}. \tag{18}$$

Diagramele cinematic compatibile alese pot fi şi cele din figura 5 *a* şi *c* şi corespund deformaţiilor din figura 5 *b*.

Punînd condiţia ca forţa tăietoare pe stîlpi să fie nulă, rezultă condiţia ca diagramele pe stîlpi să fie constante.

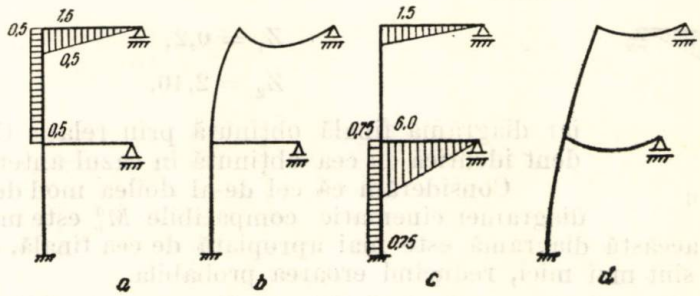


Fig. 5

Din condiţia ca rotirea unui nod să fie egală cu unitatea, rezultă

$$\varphi_s = 1 = \frac{M_s h}{EI_s};\ \varphi_r = 1 = \frac{l}{3}\frac{M_r}{EI_r},$$
$$M_s = \frac{EI_s}{h} = i_s;\ M_r = \frac{3EI_r}{l} = 3i_r. \tag{19}$$

Luînd ca diagrame cinematic compatibile pe cele din figurile 3 şi 5, sistemul de ecuaţii canonice devine

$$\begin{aligned} Z_1 A_{11} + Z_2 A_{12} + A_{1p} &= 0, \\ Z_1 A_{21} + Z_2 A_{22} + A_{2p} &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

sau, numeric,

$$\begin{aligned} 2{,}00\ Z_1 + 1{,}5\ Z_2 + 52 &= 0, \\ -0{,}5\ Z_1 + 6{,}75\ Z_2 + 160 &= 0, \end{aligned} \tag{21}$$

de unde

$$Z_1 = 7{,}75,$$
$$Z_2 = -24{,}2,$$

iar diagrama finală obținută cu ajutorul relației (7),

$$M_p = \overline{M}_p^0 + \sum Z_i \overline{m}_i,$$

este reprezentată în figura 6.

În cazul cînd se acceptă pentru sarcinile exterioare diagrama din figura 4*a*, numai termenii liberi se schimbă, iar sistemul de ecuații devine

$$2Z_1 + 1{,}5\ Z_2 - 4 = 0,$$
$$-0{,}5\ Z_1 + 6{,}75\ Z_2 - 16 = 0;$$

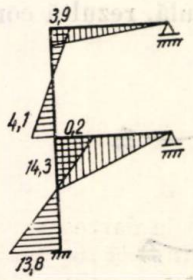


Fig. 6

rezultă

$$Z_1 = 0{,}2,$$
$$Z_2 = 2{,}40,$$

iar diagrama finală obținută prin relația (7) este evident identică cu cea obținută în cazul anterior.

Considerăm că cel de-al doilea mod de alegere a diagramei cinematic compatibile $\overline{M}_p^0$ este mai indicat, deoarece această diagramă este mai apropiată de cea finală, deci coeficienții Z_i sînt mai mici, reducînd eroarea probabilă.

Există, evident, un număr infinit de diagrame cinematic compatibile posibile; vom arăta încă o posibilitate pentru alegerea deplasărilor cinematic compatibile, ca cea din figura 7.

Diagrama m_1 rămîne identică ca în cazul anterior, iar diagrama m_2 se modifică, introducînd pe stîlp un moment care anulează rotirea de la capătul său superior.

Acest mod de calcul este mai avantajos pentru acest gen de structură decît metoda clasică a deplasărilor și chiar decît metoda efortu-

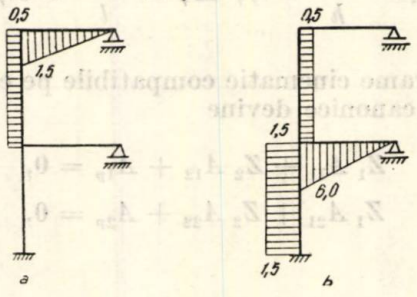


Fig. 7

rilor, deoarece calculul coeficienților se face direct prin simpla operație de echilibru și nu prin integrări de diagrame. Este evident că în oricare dintre cazurile expuse putem ca, în loc să rezolvăm direct sistemul de ecuații, să căutăm soluția prin iterări. S-a demonstrat [7] că iterarea ecuațiilor metodei deplasărilor prin relaxări pentru solicitări statice este întotdeauna convergentă și deci iterarea este posibilă.

Dacă rezolvăm prin iterație cazul particular de diagrame cinematice compatibile reprezentate în figurile 4*a* și 7, se obține metoda distorsiunilor [8].

Se dă un exemplu de calcul pentru un cadru cu mai multe deschideri și un singur etaj (fig. 8). Pentru sarcinile exterioare vom alege ca diagramă cinematic compatibilă diagrama obținută pe sistemul de bază cu deplasări orizontale și fără rotiri de noduri. Sarcinile orizontale dau naș-

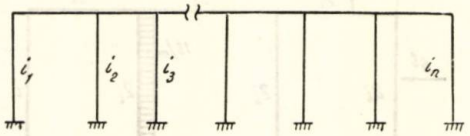


Fig. 8

tere la diagrame numai pe stîlpi. Pentru ca rotirea stîlpilor la partea superioară să fie nulă, este necesar ca suprafața fiecărei diagrame să fie egală cu zero, iar deplasarea orizontală să fie atît de mare, încît forța tăietoare totală să fie egală cu zero. Fie încărcarea exterioară pe un stîlp cea din figura 9. Forțele tăietoare rezultate la partea superioară a stîlpului au valoarea

$$T_s = P_i \frac{b_i}{h} + \frac{M_{ai} - M_{bi}}{h}.$$

Deplasarea pe orizontală a etajului cu un unghi egal cu φ dă naștere la momentele din figura 9 și, punînd condiția ca forța tăietoare totală să fie nulă, se obține valoarea unghiului φ_0:

$$\frac{1}{h} \Sigma P_i b_i + \frac{1}{h} \Sigma (M_{ai} - M_{bi}) - \varphi_0 \frac{12}{h} \Sigma i_j = 0.$$

Cunoscînd valoarea rotirii φ, se poate obține diagrama finală pe fiecare stîlp prin suprapunerea diagramelor din figura 9 *b* și *c*.

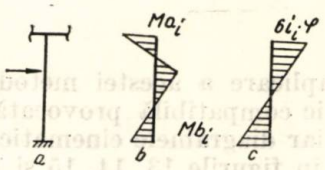


Fig. 9

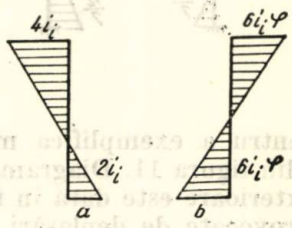


Fig. 10

Ca deplasare cinematică compatibilă poate fi aleasă cea rezultată din rotirea nodului *j* cu unitatea și deplasarea cadrului pe orizontală atît de mare, încît suma forțelor tăietoare să fie nulă.

Diagrama pe stîlpul *j* va fi compusă din două diagrame: prima provocată de rotirea unitară și a doua de deplasarea orizontală a cadrului (fig. 10).

Punînd condiţia ca forţa tăietoare la nivelul etajului să fie nulă, rezultă φ şi deci diagrama finală

$$6\,i_j - 12\,\varphi \sum_1^n i_k = 0 \qquad \varphi = \frac{i_j}{2\,\Sigma\, i_k}.$$

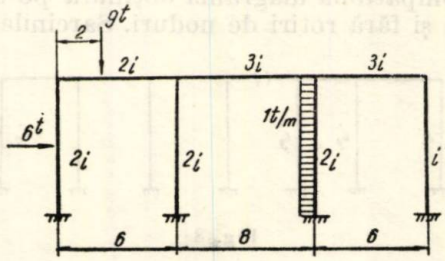


Fig. 11

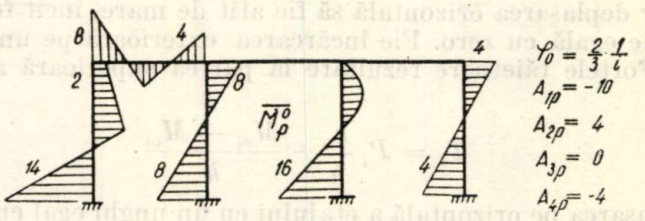


Fig. 12

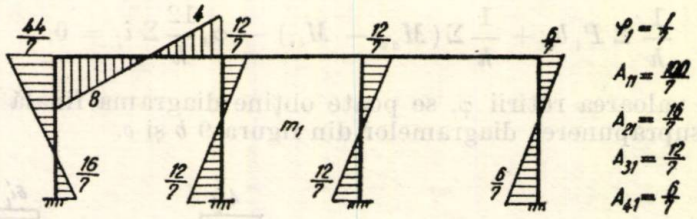


Fig. 13

Pentru a exemplifica modul de aplicare a acestei metode, luăm cadrul din figura 11. Diagrama cinematic compatibilă provocată de sarcinile exterioare este dată în figura 12, iar diagramele cinematic compatibile provocate de deplasări sînt date în figurile 13, 14, 15 şi 16.

Punînd condiţia de echilibru al fiecărui nod, se obţine sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned}
100\,Z_1 + 16\,Z_2 - 12\,Z_3 - 6\,Z_4 - 70 &= 0,\\
16\,Z_1 + 184\,Z_2 + 30\,Z_3 - 6\,Z_4 - 28 &= 0,\\
-12\,Z_1 + 30\,Z_2 + 332\,Z_3 + 36\,Z_4 &= 0,\\
-6\,Z_1 - 6\,Z_2 + 36\,Z_3 + 121\,Z_4 - 28 &= 0.
\end{aligned}$$

Rezolvarea sistemului de ecuații se poate face direct sau prin iterație. Lucrînd prin iterație, fiecare deplasare va trebui să corespundă unei deplasări cinematic compatibile date inițial.

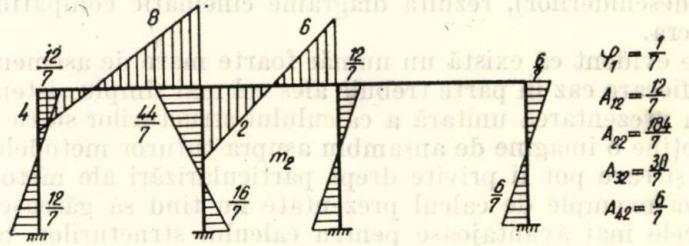


Fig. 14

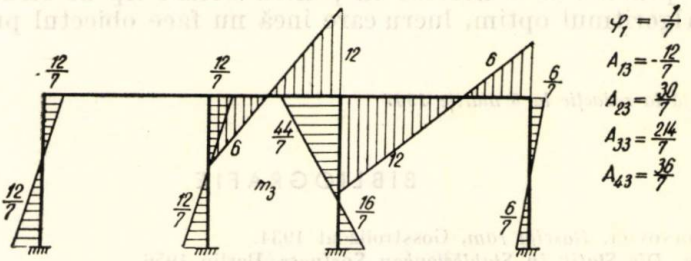


Fig. 15

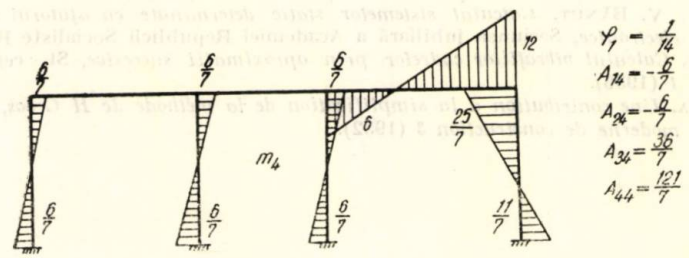


Fig. 16

★

În mod analog se pot calcula și cadrele multietajate și cu mai multe deschideri. De data aceasta, condițiile impuse deplasărilor cinematice sînt date de anularea forțelor de legătură de la etajele A_{i-1}, A_i, A_{i+1}.

Scriind condiția

$$A_i = \Sigma\, a_{ik} Z_k = 0,$$

se obțin trei ecuații omogene, deoarece diagrama M aleasă satisface automat condiția ca $A_{ip} = 0$. Alegînd deplasările de translație

$$\varphi_{i-1} = 1, \quad \varphi_i = 0, \quad \varphi_{i+1} = 0,$$

rezultă un sistem de trei ecuaţii care trebuie satisfăcute. Alegînd trei dintre rotirile nodurilor etajului i diferite de zero, se determină din sistemul de ecuaţii mărimea acestor rotiri şi diagrame corespunzătoare. Luînd m asemenea diagrame liniare independente pentru fiecare etaj (m fiind numărul deschiderilor), rezultă diagrame cinematic compatibile cu care putem lucra.

Este evident că există un număr foarte mare de asemenea posibilităţi şi în fiecare caz în parte trebuie ales cel mai simplu sistem de calcul.

Prin prezentarea unitară a calculului structurilor static nedeterminate se obţine o imagine de ansamblu asupra tuturor metodelor de calcul existente şi care pot fi privite drept particularizări ale metodei expuse. Cele cîteva exemple de calcul prezentate nu tind să găsească metodele practice cele mai avantajoase pentru calculul structurilor, ci numai să ilustreze modul în care se pot aplica elementele teoretice prezentate în lucrare. Pentru obţinerea celor mai indicate metode de calcul din punct de vedere practic, ar fi necesar ca pentru fiecare tip de structură să se studieze algoritmul optim, lucru care încă nu face obiectul prezentei lucrări.

Primită la redacţie la 8 martie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. I. M. Robinovici, *Rasciot ram*, Gosstroiizdat 1934.
2. K. Beyer, *Die Statik in Stahlbetonban Springer*, Berlin 1956.
3. P. Mazilu, *Statica construcţiilor vol. II*, Edit. tehnică 1959.
4. Al. Gheorghiu, *Statica construcţiilor vol. II*, Edit. tehnică 1965.
5. A. Casiigliano, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, Turin 1879.
6. S. Răutu, V. Bănut, *Calculul sistemelor static determinate cu ajutorul calculatoarelor electronice*, Sesiunea jubiliară a Academiei Republicii Socialiste România.
7. S. Răutu, *Calculul vibraţiilor cadrelor prin aproximaţii succesive*, St. cerc. mec. apl., *1* (1956).
8. P. Csonka, *Une contribution à la simplification de la méthode de H Croos*, *La technique moderne de construction 3* (1952).

VIBRAȚIILE TRANSVERSALE LIBERE ALE GRINZII PE DOUĂ REAZEME ELASTICE LUNGI[1]

de GH. BUZDUGAN, M. BLUMENFELD, L. STOICESCU și L. FETCU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

539.3 : 699

Lucrarea studiază vibrațiile transversale libere ale unei grinzi prismatice, pe două reazeme elastice lungi. Scriind ecuațiile diferențiale pentru fiecare tronson de grindă (1), (9) și introducînd condițiile la limită și condițiile de continuitate în soluțiile ecuațiilor diferențiale, se obțin ecuațiile pulsațiilor proprii pentru formele simetrice și antisimetrice de oscilație (15, 15′), (17, 17′). În lucrare este prezentată o aplicație numerică, însoțită de o verificare experimentală. Rezultatele obținute (tabela 1), confirmă necesitatea luării în considerare la calculul pulsațiilor proprii a lungimii și elasticității reazemelor.

1. INTRODUCERE

În mod curent, reazemele reale ale barelor sînt aproximate prin reazeme punctiforme, rigide sau elastice. Lucrarea de față își propune determinarea pulsațiilor proprii ale grinzii cu două reazeme pentru cazul în care lungimea și elasticitatea reazemelor nu poate fi neglijată, deci trebnie să intervină în calcul.

Problema este rezolvată în următoarele ipoteze :

— grinda are pe toată lungimea moment de inerție constant ;

— reacțiunea reazemului în orice secțiune este proporțională cu săgeata grinzii în acel punct (ipoteza lui Winkler) ;

— reazemele au acțiune bilaterală, sînt de lungimi egale și au aceeași constantă elastică k ;

Datorită simetriei sistemului, se studiază porțiunea de grindă cuprinsă între o extremitate și planul de simetrie.

---

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. — Mécanique Appliquée", **12**, *4* (1967) (în limba engleză)

2. CALCULUL PULSAȚIILOR PROPRII

Ecuația diferențială a vibrațiilor transversale libere ale grinzii prismatice rezemate pe teren elastic, fără a considera influența forțelor tăietoare și a inerției de rotație a elementelor grinzii, este [1]

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + k v + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

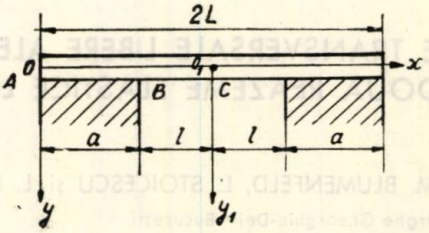


Fig. 1

în care

EI_z este rigiditatea la încovoiere a grinzii, în planul mișcării vibratorii,

v — săgeata grinzii într-o secțiune de abscisă x,

ρA — masa unității de lungime a grinzii,

A — aria secțiunii transversale a grinzii.

Sub această formă, ecuația este valabilă pentru porțiunea de grindă $A - B$, aflată pe reazemul elastic (fig. 1).

Luînd soluția de forma

$$v = X_1(x) \sin(pt + \alpha),$$

ecuația (1) devine

$$X_1^{IV} + \frac{k - \rho A p^2}{EI_z} X_1 = 0. \tag{2}$$

Pentru $k > \rho A p^2$, notînd

$$\frac{k - \rho A p^2}{EI_z} = 4m^4 \tag{3}$$

și făcînd substituția

$$x = \frac{\xi}{m}, \tag{4}$$

ecuația (2) devine

$$\frac{d^4 X_1}{d\xi^4} + 4X_1 = 0. \tag{5}$$

Soluția acestei ecuații, exprimată cu ajutorul funcțiilor fundamentale Krîlov [2], este

$$X_1 = C_1 V_1(\xi) + C_2 V_2(\xi) + C_3 V_3(\xi) + C_4 V_4(\xi). \tag{6}$$

Considerînd originea sistemului de axe în capătul liber al grinzii, unde momentul încovoietor și forța tăietoare sînt nule, două dintre condițiile la limită necesare pentru determinarea constantelor devin pentru $x = 0$ sau $\xi = 0$, $X_1'' = 0$, $X_1''' = 0$, ceea ce duce la

$$C_3 = C_4 = 0.$$

Soluția (6) ia deci forma

$$X_1 = C_1 V_1(\xi) + C_2 V_2(\xi). \tag{7}$$

Celelalte relații necesare pentru determinarea constantelor se obțin din condițiile de continuitate a eforturilor și deformațiilor în secțiunea B, unde funcția X_1 și primele trei derivate ale sale au expresiile

$$\begin{aligned} X_1\ (a) &= C_1 V_1(ma) + C_2 V_2(ma), \\ X_1'\ (a) &= -4m\, C_1 V_4(ma) + mC_2 V_1(ma), \\ X_1''\ (a) &= -4m^2 C_1 V_3(ma) - 4m^2 C_2 V_4(ma), \\ X_1'''(a) &= -4m^3 C_1 V_2(ma) - 4\, m^3 C_2 V_3(ma). \end{aligned} \tag{8}$$

Pentru porțiunea de grindă $B - C$ dintre reazeme (fig. 1), ecuația vibrațiilor transversale are forma cunoscută:

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \tag{9}$$

Soluția acestei ecuații este de forma

$$v = X_2(x)\ \sin(pt + \alpha),$$

unde funcția de timp este aceeași ca la soluția ecuației (1), în virtutea condiției de continuitate a săgeții în secțiunea B, care trebuie îndeplinită pentru orice moment t.

Funcția $X_2(x)$ este soluția ecuației

$$X_2^{IV} - p^2 \frac{\rho A}{EI_z} X_2 = 0, \tag{10}$$

obținută prin introducerea funcției v în ecuația (9).

Dacă se notează

$$\gamma^4 = p^2 \frac{\rho A}{EI_z}, \tag{11}$$

funcția $X_2(x)$ are expresia

$$X_2 = C_1' \sin \gamma x + C_2' \cos \gamma x + C_3' \operatorname{sh} \gamma x + C_4' \operatorname{ch} \gamma x. \tag{12}$$

Luînd originea axelor în planul de simetrie (sistemul de axe $xo_1 y_1$) în cazul formelor simetrice de oscilaţie, unghiul şi forţa tăietoare sînt nule pentru $x = 0$, iar în cazul formelor antisimetrice de oscilaţie săgeata şi momentul încovoietor se anulează. Astfel, soluţia (12) devine :

— pentru formele simetrice,

$$X_2 = C_2' \cos \gamma x + C_4' \operatorname{ch} \gamma x ; \tag{13}$$

— pentru formele antisimetrice

$$X_2 = C_1' \sin \gamma x + C_3' \operatorname{sh} \gamma x. \tag{13'}$$

În secţiunea B, pentru $x = -l$, soluţiile (13), (13') şi primele lor trei derivate devin :

— pentru formele simetrice :

$$\begin{aligned} X_2 (-l) &= C_2' \cos \gamma l + C_4' \operatorname{ch} \gamma l, \\ X_2' (-l) &= \gamma C_2' \sin \gamma l - \gamma C_4' \operatorname{sh} \gamma l, \\ X_2'' (-l) &= -\gamma^2 C_2' \cos \gamma l + \gamma^2 C_4' \operatorname{ch} \gamma l, \\ X_2''' (-l) &= -\gamma^3 C_2' \sin \gamma l - \gamma^3 C_4' \operatorname{sh} \gamma l ; \end{aligned} \tag{14}$$

— pentru formele antisimetrice

$$\begin{aligned} X_2 (-l) &= -C_1' \sin \gamma l - C_3' \operatorname{sh} \gamma l, \\ X_2' (-l) &= \gamma C_1' \cos \gamma l + \gamma C_3' \operatorname{ch} \gamma l, \\ X_2'' (-l) &= \gamma^2 C_1' \sin \gamma l - \gamma^2 C_3' \operatorname{sh} \gamma l, \\ X_2''' (-l) &= -\gamma^3 C_1' \cos \gamma l + \gamma^3 C_3' \operatorname{ch} \gamma l. \end{aligned} \tag{14'}$$

Condiţiile de continuitate obligă la egalitatea relaţiilor (8) cu (14) sau (14'), ceea ce conduce la rezolvarea unui sistem omogen de patru ecuaţii cu patru necunoscute : C_1, C_2, C_2', C_4', pentru formele simetrice, sau C_1, C_2, C_1' şi C_3', pentru formele antisimetrice de oscilaţie. Pentru ca acest sistem de ecuaţii să admită şi soluţii diferite de cea banală, se pune condiţia ca determinantul sistemului să fie nul.

După dezvoltarea determinantului se obţine :

— pentru formele simetrice de oscilaţie :

$$\begin{aligned} &(\operatorname{tg} \gamma l + \operatorname{th} \gamma l) [2\gamma^4 - (\gamma^4 - 4m^4)(\sin^2 ma - \operatorname{sh}^2 ma)] + \\ &+ (\operatorname{tg} \gamma l - \operatorname{th} \gamma l) 4 m^2 \gamma^2 (\sin^2 ma + \operatorname{sh}^2 ma) - \\ &- \operatorname{tg} \gamma l \cdot \operatorname{th} \gamma l \cdot 4m \gamma^3 (\sin ma \cos ma - \operatorname{sh} ma \operatorname{ch} ma) - \\ &- 8 m^3 \gamma (\sin ma \cos ma + \operatorname{sh} ma \operatorname{ch} ma) = 0 ; \end{aligned} \tag{15}$$

— pentru formele antisimetrice de oscilaţie :

$$\begin{aligned} &(\operatorname{tg} \gamma l - \operatorname{th} \gamma l) [2\gamma^4 - (\gamma^4 - 4 m^4)(\sin^2 ma - \operatorname{sh}^2 ma)] - \\ &- (\operatorname{tg} \gamma l + \operatorname{th} \gamma l) 4 m^2 \gamma^2 (\sin^2 ma + \operatorname{sh}^2 ma) - \\ &- \operatorname{tg} \gamma l \cdot \operatorname{th} \gamma l \cdot 8 m^3 \gamma (\sin ma \cos ma + \operatorname{sh} ma \operatorname{ch} ma) + \\ &+ 4 m \gamma^3 (\sin ma \cos ma - \operatorname{sh} ma \operatorname{ch} ma) = 0. \end{aligned} \tag{15'}$$

Ecuațiile (15) și (15′) dau șirul pulsațiilor proprii pentru vibrațiile transversale ale grinzii pe reazeme lungi elastice.

În cazul în care pentru ecuația (2)

$$k < \rho A p^2,$$

soluția acesteia este de forma

$$X_1 = C_1(\mathrm{ch}\,\mu x + \cos \mu x) + C_2(\mathrm{sh}\,\mu x + \sin \mu x), \tag{16}$$

unde

$$\mu^4 = \frac{\rho A p^2 - k}{EI_z}.$$

Procedînd analog, se obțin următoarele ecuații pentru calculul pulsațiilor proprii :

— pentru forme simetrice de oscilație :

$$\begin{aligned}&(\mathrm{tg}\,\gamma l + \mathrm{th}\,\gamma l)[(\mu^4 - \gamma^4) - (\gamma^4 + \mu^4)\cos \mu a\,\mathrm{ch}\,\mu a] + \\ &+ (\mathrm{tg}\,\gamma l - \mathrm{th}\,\gamma l)\,2\,\mu^2\gamma^2 \sin \mu a\,\mathrm{sh}\,\mu a + \\ &+ \mathrm{tg}\,\gamma l\,\mathrm{th}\,\gamma l\,2\,\mu\gamma^3(\sin \mu a\,\mathrm{ch}\,\mu a - \cos \mu a\,\mathrm{sh}\,\mu a) - \\ &- 2\mu^3\gamma(\sin \mu a\,\mathrm{ch}\,\mu a + \cos \mu a\,\mathrm{sh}\,\mu a) = 0;\end{aligned} \tag{17}$$

— pentru forme antisimetrice de oscilație :

$$\begin{aligned}&(\mathrm{tg}\,\gamma l - \mathrm{th}\,\gamma l)\,[(\gamma^4 - \mu^4) + (\gamma^4 + \mu^4)\cos \mu a\,\mathrm{ch}\,\mu a] + \\ &+ (\mathrm{tg}\,\gamma l + \mathrm{th}\,\gamma l)\,2\,\mu^2\gamma^2 \sin \mu a\,\mathrm{sh}\,\mu a + \\ &+ \mathrm{tg}\,\gamma l\,\mathrm{th}\,\gamma l\,2\,\mu^3\gamma(\sin \mu a\,\mathrm{ch}\,\mu a + \cos \mu a\,\mathrm{sh}\mu a) + \\ &+ 2\,\mu\gamma^3(\sin \mu a\,\mathrm{ch}\,\mu a - \cos \mu a\,\mathrm{sh}\,\mu a) = 0.\end{aligned} \tag{17′}$$

Ecuațiile (15) și (17), respectiv ecuațiile (15′) și (17′), sînt identice, ceea ce se poate ușor demonstra ținînd seama că între μ și m există relația

$$\mu^4 = -4m^4.$$

După relația de ordine stabilită între k și ρAp^2, se utilizează una dintre relațiile de mai sus pentru determinarea pulsațiilor proprii știind că în cele două cazuri vor diferi doar formele proprii de oscilație.

3. APLICAȚIE

În scopul verificării ecuațiilor propuse pentru determinarea pulsațiilor proprii, s-au măsurat frecvențele proprii fundamentale pentru o grindă de oțel cu secțiune pătrată de arie $A = 2{,}5 \times 2{,}5$ cm^2 cu lungimea $2L = 90$ cm, considerînd patru tipuri de reazeme elastice lungi :

1) reazem de cauciuc, de lungime $a = 20$ cm, cu constanta elastică $k = 555$ kgf/cm^2 ;

2) reazem de cauciuc de lungime $a = 10$ cm, cu constanta elastică $k = 555$ kgf/cm^2 ;

3) reazem de aluminiu, de lungime $a = 20$ cm, cu constanta elastică $k = 2{,}05.10^6$ kgf/cm^2;

4) reazem de aluminiu, de lungime $a = 10$ cm, cu constanta elastică $k = 2{,}05.10^6$ kgf/cm^2.

Frecvențele proprii au fost determinate experimental, identificînd rezonanța grinzii în vibrație forțată cu ajutorul unui captor tensometric.

Schema-bloc a instalației experimentale prezentate în figura 3, este dată în figura 2. Epruveta *1*, a cărei frecvență proprie trebuie deter-

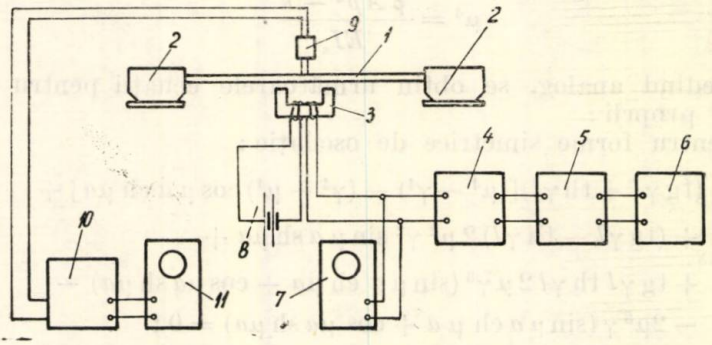


Fig. 2

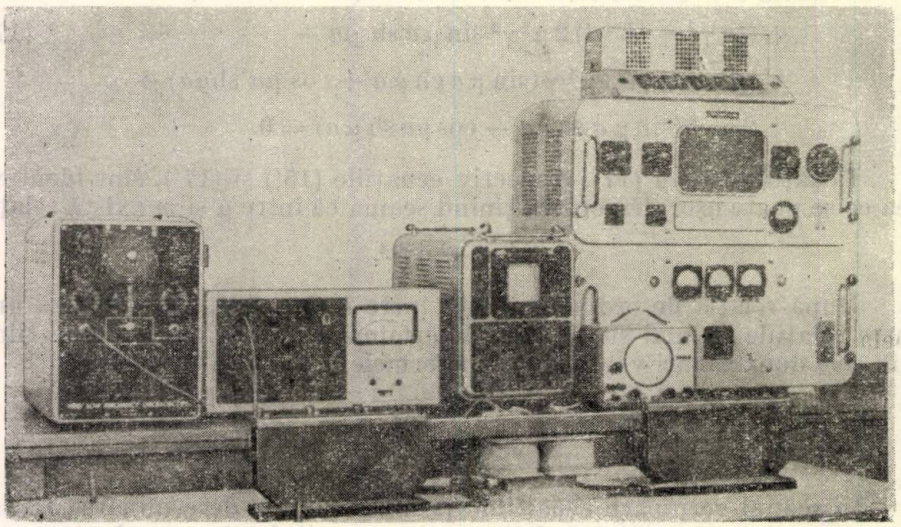


Fig. 3

minată, este fixată în reazemele *2*. Oscilația grinzii este cauzată de către o forță produsă de electromagnetul *3*, a cărei frecvență poate fi variată. Grinda, împreună cu reazemele *2*, este fixată pe o fundație masivă. Curentul de frecvență variabilă din electromagnet este produs de către amplifi-

catorul de mare putere *4*, excitat de generatorul de joasă frecvență *6*, prin intermediul preamplificatorului *5*. Pentru controlul formei semnalului impus, el este vizualizat pe ecranul osciloscopului catodic *7*. Electromagnetul este premagnetizat cu o a doua înfășurare, alimentată în curent continuu de la bateria de acumulatori *8*. Înregistrarea oscilațiilor se face prin captorul cu traductori tensometrici rezistivi *9*, puterea tensometrică

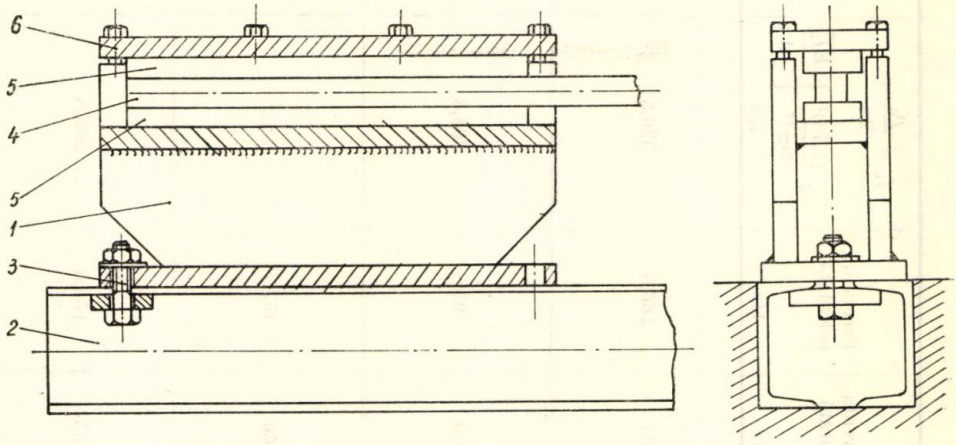


Fig. 4

10 și osciloscopul catodic 11, de pe ecranul căruia semnalul poate fi fotografiat.

În figura 4 este arătată schița de detaliu a unui reazem.

Suportul masiv *1* este fixat de profilele *2* — îngropate în fundația masivă — prin intermediul șuruburilor *3*. Bara studiată *4* este rezemată bilateral între plăcile *5*, care constituie elementul elastic. Strîngerea barei între plăcile *5* se realizează prin placa superioară *6*, prinsă de suport cu opt șuruburi.

Frecvențele proprii obținute prin măsurare au fost înscrise în tabela 1. Tot în tabela 1 sînt redate frecvențele calculate din pulsațiile proprii fundamentale, obținute prin rezolvarea ecuației (15). Pentru fiecare caz în parte, ecuația s-a rezolvat prin încercări, cunoscînd limitele inferioare și superioare ale rădăcinilor. Într-adevăr, dacă se notează

p_a — pulsația proprie pentru grinda simplu rezemată de lungime $2L$ (fig. 5 *a*),

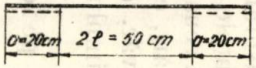
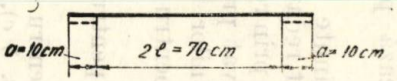
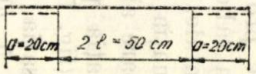
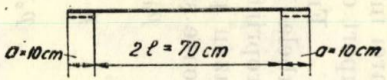
p — pulsația proprie pentru grinda pe reazeme lungi, elastice (fig. 5 *b*),

p_c — pulsația proprie pentru grinda încastrată la ambele capete, de lungime $2l$ (fig. 5 *c*),

este evidentă relația

$$p_a < p < p_c .$$

Tabela 1

Nr. crt.	Cazul considerat	$f_a = \frac{p_a}{2\pi} = \frac{\pi}{8L^2}\sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}}$ Hz	Frecvența măsurată Hz	Frecvența calculată Hz	$f_c = \frac{p_c}{2\pi} = \frac{(4{,}73)^2}{8\pi l^2}\sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}}$ Hz	$\Delta f = \frac{f_{măs} - f_{calc}}{f_{măs}} \times 100$ %
1	Reazeme de cauciuc 	71,66	184	166,5	526,87	− 9,5
2	Reazeme de cauciuc 	71,66	109	95	268,8	−12,8
3	Reazeme de aluminiu 	71,66	366	457,7	526,87	25,1
4	Reazeme de aluminiu 	71,66	165	169,5	268,8	2,7

Comparînd datele prezentate în tabela 1, se observă că prin metoda propusă se obțin pentru frecvențe valorile cele mai apropiate de cele măsurate. Erorile se datoresc, pe de o parte, faptului că ipoteza lui Winkler este valabilă doar cu aproximație pentru materialele din care au fost executate reazemele, iar pe de altă parte însăși realizării constructive a reazemelor lungi pentru care nu s-a putut controla contactul continuu între reazem și grindă.

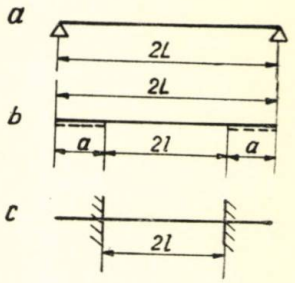


Fig. 5

4. CONCLUZII

Rezemarea simplă și încastrarea punctiformă sînt scheme de calcul care, în calculul frecvențelor proprii ale vibrațiilor transversale, pot cauza uneori erori destul de mari. Se pot obține prin calcul valori ale frecvențelor proprii mult mai apropiate de cele reale dacă se ia în considerare lungimea și elasticitatea reazemului încastrat, așa cum s-a stabilit în lucrarea de față.

Primită la redacție la 18 februarie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. НОВАЦКИЙ, ВИТОЛЬД, *Динамика сооружений*, Moscova 1963.
2. S. D. PONOMARIOV, V. L. BIDERMAN, C. K. LIHAREV, V. M. MAKUSIN, N. N. MALININ, V. I. FEODOSIEV, Calculul de rezistență în construcția de mașini vol. I, Edit. tehnică, București, 1960.

CONTRIBUȚII ȘI PRECIZĂRI LA CALCULUL REZERVOARELOR CILINDRICE VERTICALE CU CAPAC AUTOPORTANT FĂRĂ MOMENT

de A. PAVEL
Institutul de petrol, gaze și geologie

539.4

Avînd în vedere avantajele pe care le prezintă rezervoarele cilindrice verticale cu capac autoportant fără moment și pornind de la constatarea că pînă în prezent în literatura de specialitate problemele de calcul ale acestor rezervoare sînt incomplet tratate, iar formulele recomandate prezintă neconcordanțe care pot afecta în mod deosebit rezultatele finale, în lucrarea de față sînt expuse o serie de rezultate ale unor cercetări efectuate de către autor cu privire la calculul eforturilor din capac, dimensionarea capacului și a altor elemente aferente lui, calculul deplasărilor capacului etc. În urma efectuării unei analize atente a formulelor de calcul obținute se fac recomandări și se dau indicații concrete privind aplicarea acestor formule și domeniile lor de valabilitate. În baza condițiilor de rezistență se stabilesc relații de calcul care permit determinarea și verificarea grosimii capacului și a altor elemente dimensionale.

INTRODUCERE

Pentru depozitarea produselor petroliere în general și mai ales pentru depozitarea produselor petroliere albe, care dau suprapresiuni în spațiul de vapori pînă la 300 mm H_2O, s-au conceput și realizat [1]—[6] rezervoare cilindrice verticale cu capacități de depozitare de 100 — 5 000 m^3, prevăzute cu capac autoportant fără moment, executat sub forma unei membrane conice cu generatoare curbe (fig. 1). Capacul se compune din mai multe sectoare circulare, avînd o singură și aceeași curbură [1]), apropiată de cea a lănțișorului. Aceste sectoare, îmbinate între ele prin sudare prin suprapunere, se sprijină pe umbrela populului central și pe mantaua rezervorului, lucrînd — cu excepția zonelor de contur — numai

[1]) Curbură totală negativă mică, fiind îndeplinită condiția indicată în monografia lui V. V. Novojilov [10].

la întindere, deci în cele mai avantajoase condiții pentru oțel. Se menționează că, în afara carcasei periferice de rigidizare (sau a inelului de rigidizare) și a umbrelei populul central, capacul de acest tip nu are nici un fel de alte elemente rigide portante. Cercetările experimentale au arătat [3] că un astfel de capac are o stabilitate ridicată pentru un unghi de înclinare (unghi de ridicare) de 18°30′ (fig. 1).

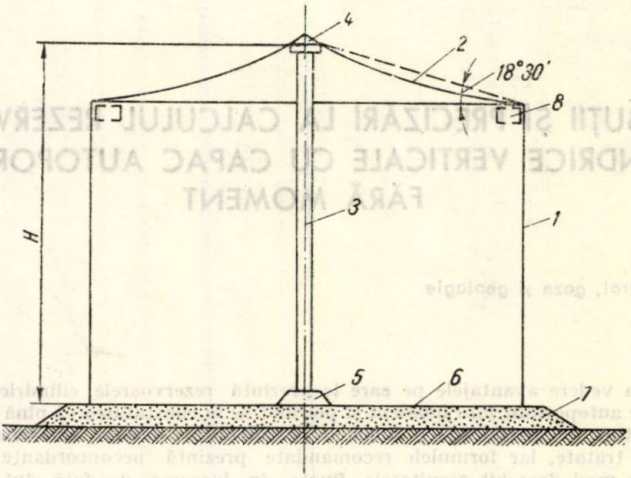


Fig. 1. — Schema principială a rezervorului cilindric vertical cu capac autoportant fără moment :

1 — mantaua rezervorului ; *2* — capac (autoportant fără moment) ; *3* — pop central ; *4* — umbrelă ; *5* — suport cu ghidaj telescopic ; *6* — fund ; *7* — pat de nisip ; *8* — carcasă periferică de rigidizare (pentru capacități de depozitare de 2 000 — 5 000 m³) sau inel de rigidizare (pentru capacități de depozitare de 100 — 2 000 m³).

Avantajele pe care le prezintă acest tip de rezervor cilindric vertical sînt următoarele :

— construcția simplă a capacului ;

— economie de metal de 8—20% față de rezervoarele cilindrice verticale cu capac susținut pe elemente rigide portante ;

— posibilitatea preluării de suprapresiuni interioare pînă la 300 mm H_2O și de sarcini verticale pînă la 260 kgf/m² ;

— accelerarea și simplificarea lucrărilor de montaj.

Avînd în vedere aceste avantaje și pornind de la constatarea că pînă în prezent în literatura de specialitate [1] — [6] problemele de calcul ale acestor rezervoare sînt incomplet tratate, iar formulele recomandate prezintă neconcordanțe care în unele cazuri pot afecta în mod deosebit rezultatele finale, autorul a efectuat o serie de cercetări privind calculul rezervoarelor cilindrice verticale cu capac autoportant fără moment, rezultatele acestor cercetări urmînd a fi prezentate în cele ce urmează.

CALCULUL EFORTURILOR DIN CAPAC ŞI DIMENSIONAREA CAPACULUI

Se consideră un element de capac având în proiecţie în plan orizontal forma unui sector de cerc cu unghiul la centru $\alpha = 1$ (fig. 2 *b*) şi fiind încărcat cu o sarcină uniform distribuită q în kgf/cm² (fig. 2 *a*, în care capacul este reprezentat prin curba sa meridiană mediană [2]). Se impune

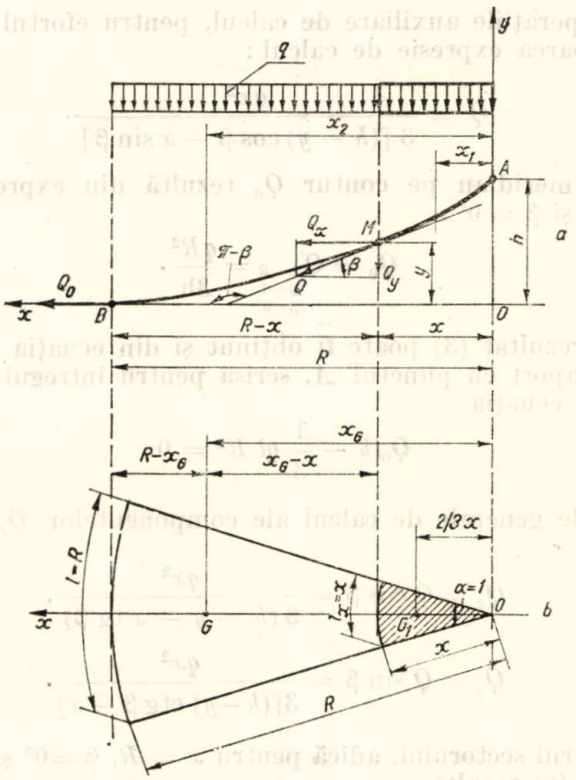


Fig. 2. — Schema de calcul a capacului autoportant fără moment.

condiţia ca tangenta la curba meridiană mediană în punctul de abscisă $x = R$ şi de ordonată $y = 0$ (adică în locul de asamblare a capacului cu mantaua) să fie orizontală.

Se introduc următoarele notaţii (fig. 2) :

Q — efortul meridian (forţa secţională), considerat uniform distribuit în lungul secţiunii normale pe tangenta la curba meridiană mediană în punctul considerat, în kgf/cm ;

Q_0 — efortul meridian, considerat uniform distribuit pe conturul de lungime $l = R$ al elementului de capac, în kgf/cm.

---

[2]) Curba meridiană mediană (curbă generatoare) are o curbură totală negativă mică, fiind îndeplinită condiţia $\frac{h}{R} \leqslant \frac{1}{5}$, formulată de V. V. Novojilov [10].

Datorită formei particulare a capacului, evident forțele secționale Q și Q_0 sînt de natura unor forțe de întindere.

Scriind ecuația de echilibru de momente în raport cu punctul A pentru segmentul de element de capac AM (fig. 2 *a*) :

$$Q_x l_x (h - y) - Q_y l_x x - \frac{1}{3} q l_x x^2 = 0 \tag{1}$$

și efectuînd operațiile auxiliare de calcul, pentru efortul meridian Q se obține următoarea expresie de calcul :

$$Q = \frac{qx^2}{3\,[(h - y)\cos\beta - x\sin\beta]}. \tag{2}$$

Efortul meridian pe contur Q_0 rezultă din expresia (2) pentru $x = R$, $y = 0$ și $\beta = 0°$:

$$Q_0 = Q\Big|_{\substack{x=R\\y=0\\\beta=0°}} = \frac{qR^2}{3h}. \tag{3}$$

Același rezultat (3) poate fi obținut și din ecuația de echilibru de momente în raport cu punctul A, scrisă pentru întregul sector (fig. 2), și anume din ecuația

$$Q_0 lh - \frac{1}{3} q l R^2 = 0. \tag{4}$$

Expresiile generale de calcul ale componentelor Q_x și Q_y (fig. 2*a*) vor fi

$$Q_x = Q\cos\beta = \frac{qx^2}{3\,(h - y - x\,\mathrm{tg}\,\beta)}, \tag{5}$$

$$Q_y = Q\sin\beta = \frac{qx^2}{3[(h-y)\,\mathrm{ctg}\,\beta - x]}. \tag{6}$$

Pe conturul sectorului, adică pentru $x = R$, $\beta = 0°$ și deci $y = 0$, din relațiile (5) și (6) rezultă :

$$Q_y = 0,$$

$$Q_x = \frac{qR^2}{3h} = Q_0. \tag{3'}$$

După cum se observă din expresiile stabilite anterior, pentru determinarea efortului meridian Q sau a eforturilor meridiane componente Q_x și Q_y în fiecare punct M al capacului, este necesară cunoașterea săgeții y, deci cunoașterea ecuației curbei meridiane mediane, și a unghiurilor β sau $\pi - \beta$, acesta din urmă reprezentînd panta tangentei geometrice la curba meridiană mediană în punctul considerat (de exemplu M în fig. 2 *a*).

Întrucît, ca idee constructivă, capacul este de tipul „fără moment încovoietor", rezultă că în orice secțiune orizontală a sa trebuie ca momentul încovoietor rezultant să fie nul. Considerînd segmentul de element de

capac BM (fig. 2 *a*), se scrie această din urmă condiție în punctul M[3]) :

$$Q_0 Ry - qA_x(x_G - x) = 0, \tag{7}$$

unde

A_x reprezintă aria din sectorul decupat corespunzătoare segmentului BM, în cm^2 ; în figura 2 *b* această arie nu este haşurată,

x_G — abscisa centrului de greutate al suprafeței având aria A_x, în cm.

Aria A_x are valoarea

$$A_x = \frac{1}{2}(R^2 - x^2). \tag{8}$$

Pentru a determina abscisa centrului de greutate x_G a suprafeței de arie A_x, se scrie ecuația de momente statice în raport cu punctul 0 :

$$\frac{1}{3}(R^3 - x^3) = A_x x_G, \tag{9}$$

de unde, considerînd şi expresia (8), rezultă

$$x_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - x^3}{R^2 - x^2}. \tag{10}$$

Introducînd valorile A_x şi x_G, calculate cu expresiile (8) şi, respectiv, (10), în ecuația (7), după efectuarea calculelor auxiliare se obține

$$y = \frac{h}{2}\left(2 - 3\frac{x}{R} + \frac{x^3}{R^3}\right), \tag{11}$$

această expresie reprezentînd ecuația curbei meridiane mediane a capacului. Derivînd această expresie în raport cu x, se obține tangenta trigonometrică a pantei tangentei geometrice la curba meridiană mediană într-un punct dat M (fig. 2 *a*), adică

$$\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg}\beta,$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{2}\left(\frac{h}{R} - \frac{hx^2}{R^3}\right). \tag{12}$$

Substituind valorile obținute y (formula (11)) și $\operatorname{tg}\beta$ (formula (12)) în expresia (2) şi efectuînd operațiile auxiliare de calcul, se obține forma finală, valabilă pentru orice punct M aparținînd suprafeței mediane a capacului, a formulei de calcul a efortului meridian :

$$Q = \frac{qR^3}{3hx\cos\beta} \tag{13}$$

[3]) Forța secțională T nu se ia în considerație, întrucît față de forța secțională Q are o valoare neglijabil de mică, așa cum de altfel se va vedea mai departe.

și a formulelor de calcul ale componentelor efortului meridian :

$$Q_x = \frac{qR^3}{3hx}, \tag{14}$$

$$Q_y = \frac{qR^3 \operatorname{tg} \beta}{3hx}. \tag{15}$$

Pentru $\beta = \frac{\pi}{4} = 45°$, pentru care $\operatorname{tg} \beta = 1$ și $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, formulele (13) — (15) devin

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{qR^3}{hx}, \tag{16}$$

$$Q_x = Q_y = \frac{qR^3}{3hx}. \tag{17}$$

În practică, obișnuit, $\beta \leqslant 45°$, în acest caz obținîndu-se

$$Q \leqslant \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{qR^3}{hx}, \tag{16'}$$

$$Q_y \leqslant \frac{qR^3}{3hx}, \tag{17'}$$

$$Q_x = \frac{qR^3}{3hx}.$$

Tabela 1

Variația eforturilor meridiane (Q, Q_x și Q_y) în funcție de unghiul β

β	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
$Q \cdot \frac{3hx}{qR^3}$	1,004	1,016	1,033	1,061	1,102	1,153	1,220	1,305	1,412
$Q_x \cdot \frac{3hx}{qR^3}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Q_y \cdot \frac{3hx}{qR^3}$	0,0875	0,1763	0,2680	0,3640	0,4663	0,5774	0,7002	0,8391	1,0000
Q/Q_x	1,004	1,016	1,033	1,061	1,102	1,153	1,220	1,305	1,412
	0,4 %	1,6 %	3,3 %	6,1 %	10,2 %	15,3 %	22,0 %	30,5 %	41,2 %
Q/Q_y	11,49	5,76	3,84	2,92	2,365	1,995	1,741	1,555	1,412
Q_y/Q_x	0,0875	0,1763	0,2680	0,3640	0,4663	0,5774	0,7002	0,8391	1,0000
	8,75 %	17,63 %	26,80 %	36,4 %	46,63 %	57,74 %	70,02 %	83,91 %	100 %
Q_y/Q	0,0871	0,1734	0,2606	0,342	0,423	0,501	0,573	0,643	0,707
	8,71 %	17,34 %	26,06 %	34,2 %	42,3 %	50,1 %	57,3 %	64,3 %	70,7 %

În tabela 1 sînt indicate spre comparare valorile eforturilor meridiane calculate cu formulele (13) — (15), modificate astfel :

$$Q \cdot \frac{3hx}{qR^3} = \frac{1}{\cos\beta}, \tag{13'}$$

$$Q_x \cdot \frac{3hx}{qR^3} = 1, \tag{14'}$$

$$Q_y \cdot \frac{3hx}{qR^3} = \operatorname{tg}\beta, \tag{15'}$$

și valorile, în unități relative și în procente, ale raporturilor Q/Q_x, Q/Q_y, Q_y/Q_x și Q_y/Q. Pe baza acestor date au fost trasate curbele de variație a eforturilor meridiane (Q, Q_x și Q_y) în funcție de unghiul β, reprezentate în figura 3. Din analiza și din interpretarea datelor cuprinse în tabela 1

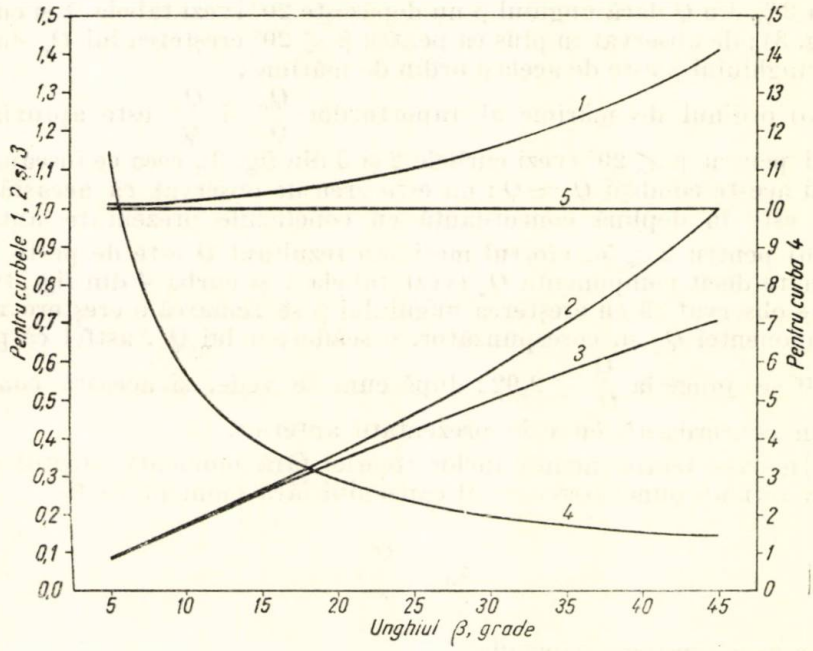


Fig. 3. — Variația eforturilor meridiane (Q, Q_x și Q_y) în funcție de unghiul β : curba 1 = Q/Q_x și Q ; curba 2 : Q_y/Q_x ; curba 3 : Q_y/Q și Q ; curba 4 : Q/Q_y ; curba 5 : Q_x.

și a curbelor reprezentate în figura 3 se desprind următoarele concluzii principale :

1) efortul meridian Q_x nu depinde de unghiul β, așa cum de altfel rezultă și din formula (14), ci numai de variabila x ; așadar, pentru orice valoare $\beta \geqslant 0°$, $Q_x = \text{const}$ (curba 5 din fig. 3) ;

2) pentru β variind între 0 și 20°, efortul meridian rezultant Q crește cu pînă la 6,1 %, la fel ca raportul Q/Q_x (curba *1* din fig. 3); rezultă, așadar, că pentru $\beta < 20°$ neluarea în considerație a variației efortului meridian Q cu variația unghiului β poate conduce la o eroare de calcul în orice caz mai mică decît 6,1 %; rezultă de asemenea că, dacă unghiul β nu depășește 20°, în mod practic se poate considera $Q = Q_x$, deci se poate neglija (la dimensionare) efortul meridian Q_y, fără ca eroarea să fie mai mare de 6,1 % (vezi tabela 1);

3) pentru $\beta > 20°$, atît efortul meridian rezultant Q, cît și raportul Q/Q_x cresc o dată cu creșterea unghiului β, atingînd cifra de peste 40 % pentru $\beta = 45°$ (vezi tabela 1); înseamnă deci că pentru $\beta > 20°$ componenta Q_x a efortului meridian rezultant Q scade cu creșterea unghiului β în așa măsură, încît neglijarea componentei Q_y, care crește o dată cu creșterea unghiului β (formula 15), nu mai poate avea loc, întrucît aceasta ar putea conduce la erori apreciabile, așa cum de altfel se întîmplă în lucrarea [3] și în alte lucrări;

4) componenta Q_y a efortului meridian rezultant Q rămîne tot timpul sub 34,2 % din Q dacă unghiul β nu depășește 20° (vezi tabela 1 și curba *3* din fig. 3); de observat în plus că pentru $\beta \leqslant 20°$ creșterea lui Q_y cu creșterea unghiului β este de același ordin de mărime;

5) ordinul de mărime al raporturilor $\frac{Q_y}{Q_x}$ și $\frac{Q_y}{Q}$ este aproximativ același pentru $\beta \leqslant 20°$ (vezi curbele *2* și *3* din fig. 3), ceea ce înseamnă că pentru aceste condiții $Q_x \approx Q$; nu este greu de observat că această concluzie este în deplină concordanță cu concluziile prezentate anterior;

6) pentru $\beta \leqslant 5°$, efortul meridian rezultant Q este de peste 10 ori mai mare decît componenta Q_y (vezi tabela 1 și curba *4* din fig. 3), însă trebuie observat că cu creșterea unghiului β se remarcă o creștere rapidă a componentei Q_y și, corespunzător, o scădere a lui Q_x, astfel că pentru $\beta \geqslant 20°$ se ajunge la $\frac{Q}{Q_y} \leqslant 2{,}92$; după cum se vede, și această concluzie este în concordanță cu cele prezentate anterior.

În baza teoriei membranelor (teoriei fără moment), efortul unitar efectiv într-un punct oarecare al capacului fără moment va fi

$$\sigma_{ef} = \frac{Q}{s}, \tag{18}$$

unde s este grosimea capacului.

Avînd în vedere că tablele capacului se îmbină, în prelungire într-un sector, prin sudare prin suprapunere, deci sub acțiunea eforturilor Q cordoanele de sudură sînt solicitate la forfecare, și neluînd în considerare îmbinările prin sudură laterale dintre sectoare (sudurile de pe flancuri, care de asemenea sînt prin suprapunere), condiția de rezistență pentru capac poate fi scrisă în felul următor:

$$\sigma_{ef} = \frac{Q}{s} \leqslant \varphi_0 \sigma_a, \tag{19}$$

de unde, dacă se ţine seama şi de prezenţa şi efectele coroziunii, rezultă

$$s \geqslant \frac{qR^3}{3h\varphi_0\sigma_a x\cos\beta} + c, \tag{20}$$

în care

φ_0 este cifra de calitate a îmbinărilor prin sudare prin suprapunere : pentru suduri de colţ, prin suprapunere pe o singură parte, se recomandă $\varphi_0 = 0{,}7$,

σ_a — rezistenţa admisibilă la întindere a materialului tablelor capacului, în kgf/cm^2,

c — adaosul de coroziune, în cm.

Dacă, ţinînd cont şi de prezenţa îmbinărilor prin sudură laterale (de pe flancuri), se presupune că rezistenţa este aceeaşi şi în materialul de bază, şi în sudurile de colţ, atunci rezultă

$$\sigma_{ef} = \frac{Q}{s} \leqslant \sigma_a, \tag{19'}$$

de unde se obţine

$$s \geqslant \frac{qR^3}{3h\sigma_a x\cos\beta} + c. \tag{20'}$$

Din formulele (20) şi (20') rezultă distanţa x, măsurată de la centrul capacului (fig. 2), pentru care o anumită grosime de capac s dată asigură îndeplinirea condiţiei de rezistenţă :

— corespunzător formulei (20) :

$$x = \frac{qR^3}{3h\varphi_0\sigma_a(s-c)\cos\beta}; \tag{21}$$

— corespunzător formulei (20') :

$$x = \frac{qR^3}{3h\sigma_a(s-c)\cos\beta}. \tag{21'}$$

Pentru orice punct de pe capac situat faţă de centrul său la o distanţă $x_1 < x$ (fig. 2 *a*), grosimea de tablă s dată nu mai asigură îndeplinirea condiţiilor de rezistenţă (20) sau (20'), deoarece efortul meridian Q creşte repede (vezi formula 13), datorită creşterii unghiului β ($\cos\beta$ scade, deci grosimea necesară a capacului creşte).

Pentru orice punct de pe capac situat faţă de centrul său la distanţa $x_2 > x$ (fig. 2 *a*), grosimea de tablă s dată asigură condiţia de rezistenţă (20) sau (20'), întrucît efortul meridian Q scade repede (vezi formula (13)), datorită scăderii unghiului β ($\cos\beta$ creşte, deci grosimea necesară a capacului scade).

Rezultă deci că pentru $x_2 \geqslant x$ (fig. 2 *a*) capacul poate fi confecţionat din table avînd aceeaşi grosime cu grosimea s. Prin urmare, dacă raza umbrelei populu central se ia egală sau ceva mai mare decît distanţa x

(fig. 2 *a*), atunci de la conturul umbrelei pînă la conturul de rezemare pe mantaua rezervorului grosimea tablelor poate fi constantă și egală cu cea rezultată ca fiind necesară pe conturul de prindere la umbrelă[4]). Evident, în această situație capacul va prezenta o serioasă rezervă de rezistență și în materialul de bază, și în îmbinările sudate.

CALCULUL UMBRELEI, AL POPULUI CENTRAL ȘI AL SUPORTULUI CU GHIDAJ TELESCOPIC

Schema principală a sistemului de susținere al capacului autoportant fără moment, alcătuit din umbrelă și popul central, este indicată în figura 4.

Grosimea s_1 a tablelor care alcătuiesc discul central al umbrelei se poate determina din formula (20′), punînd condițiile

$$x = x_0 \text{ (fig. 4)},$$

$\varphi_0 = 1$ (îmbinările prin sudare lipsesc).

Rezultă

$$s_1 \geqslant \frac{qR^3}{3h\sigma_a x_0 \cos \beta_0} + c. \tag{22}$$

Deși $x_0 > \frac{D_{ep}}{2}$, unde D_{ep} este diametrul exterior al populului central, în calculele practice se recomandă să se considere, acoperitor, $x_0 = \frac{D_{ep}}{2}$.

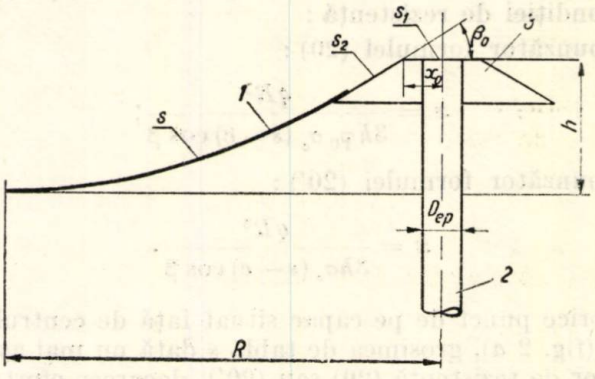


Fig. 4. — Schema principială a sistemului de susținere al capacului autoportant fără moment :

1 — capac (autoportant fără moment) ; *2* — pop central ; *3* — umbrelă.

Grosimea s_2[5]) a tablelor care alcătuiesc partea conică a umbrelei se recomandă să se calculeze tot cu formula (22), însă în ipoteza că numai

[4]) În practică, pentru confecționarea capacelor autoportante fără moment ale rezervoarelor cilindrice verticale se folosesc table cu grosimea $s = 2{,}5 - 3{,}5$ mm.

[5]) Pentru comoditatea confecționării și a montajului, partea conică a umbrelei se execută din table de aceeași grosime s_2.

jumătate din sarcinile exterioare sînt preluate de aceste table, cealaltă jumătate revenind guseelor. În acest caz rezultă

$$s_2 \geqslant \frac{s_1}{2} = \frac{qR}{6\,h\sigma_a\, x_0 \cos\beta_0} + c. \qquad (22')$$

Numărul guseelor, grosimea lor și dimensiunile cordoanelor de sudură se vor calcula, în consecință, considerînd numai jumătate din sarcinile exterioare care revin umbrelei.

Popul central se calculează la sarcină verticală, în ipoteza considerării lui ca o țeavă articulată la ambele capete și supusă la compresiune axială centrică.

Avînd în vedere modul de lucru al capacului autoportant fără moment, se va considera că popul central preia întreaga sarcină verticală dată de capac, ceea ce ar corespunde situației cînd zona conturului exterior al capacului nu ar transmite mantalei rezervorului nici un fel de încărcări verticale. Trebuie observat însă că în realitate mantaua preia, prin intermediul capacului bineînțeles, o parte din sarcinile verticale, însă, acestea fiind mici, într-o primă aproximație pot să nu fie luate în considerație în calcule.

Rezultă, așadar, că forța verticală de compresiune care revine popului central va fi

$$P = \pi R^2 q, \qquad [\text{kgf}] \qquad (23)$$

unde q reprezintă suma tuturor sarcinilor exterioare (greutatea proprie a capacului, încărcarea cu zăpadă etc.), raportată la unitatea de suprafață de capac, în kgf/cm².

Pentru a asigura stabilitatea formei drepte a popului central comprimat axial centric, trebuie să fie îndeplinite următoarele două condiții:

— condiția de rezistență la compresiune:

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A_p} \leqslant \sigma_{ac}; \qquad (24)$$

— condiția de stabilitate la flambaj:

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A_p} \leqslant \sigma_{af}, \qquad (25)$$

în care

A_p este aria secțiunii transversale a popului central, în cm²;

σ_{ac} — rezistența admisibilă la compresiune a materialului popului central, în kgf/cm²;

σ_{af} — rezistența admisibilă la flambaj a materialului popului central, în kgf/cm².

Rezistența admisibilă la compresiune σ_{ac} se poate calcula, în funcție de rezistența admisibilă la întindere, cu formula [7]

$$\sigma_{ac} = (1{,}3 \ldots 1{,}5)\,\sigma_a. \qquad (a)$$

Rezistența admisibilă la flambaj este definită prin relația

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_f}{c_f} = \frac{\sigma_{cr}}{c_f}, \tag{b}$$

în care

$\sigma_f = \sigma_{cr}$ este efortul unitar critic de flambaj, în kgf/cm²,
c_f — coeficientul de siguranță la flambaj; pentru țevi $c_f = 3{,}0 \ldots 5{,}0$ [8], [9].

Efortul unitar critic se calculează [8], [9]:

a) pentru $\lambda \geqslant \lambda_0$ (în domeniul elastic) cu formula Euler:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}; \tag{c}$$

b) pentru $\lambda < \lambda_0$ (în domeniul plastic) cu una dintre formulele următoare:
— formulele lui Tetmajer — Iasinsky:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{cr} &= 3\,100 - 11{,}4\,\lambda \quad \text{pentru OL 38 și } \lambda_0 = 105 \\ \sigma_{cr} &= 3\,350 - 6{,}2\,\lambda \quad \text{pentru OL 42 și } \lambda_0 = 89 \\ \sigma_{cr} &= 4\,700 - 23\,\lambda \quad \text{pentru oțel cu 5\% Ni și } \lambda_0 = 86 \end{aligned}\right\} \text{[kgf/cm²]} \tag{d}$$

(valorile σ_{cr} obținute cu aceste formule se limitează la mărimea limitei de curgere a materialului respectiv);

— formula lui Johnson (valabilă pentru oțel de construcții):

$$\sigma_{cr} = 2\,800 - 0{,}0931\ \lambda^2 \quad \text{[kgf/cm²]}; \tag{e}$$

— formula lui Rankine (valabilă pentru construcții metalice):

$$\sigma_{af} = \frac{12{,}6}{1 + \dfrac{\lambda^2}{18\,000}} \quad \text{[kgf/cm²]} \tag{f}$$

(această formulă este valabilă numai pentru $60 < \lambda < \lambda_0$; pentru $\lambda < 60$ se va lua $\sigma_{af} = 1\,050$ kgf/cm²),

unde

E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului populului central în kgf/cm²,

$\lambda = \dfrac{l_f}{i_{min}}$ — coeficientul de zvelțețe sau coeficientul de subțirime al populului;

l_f — lungimea de flambaj, în cm; pentru cazul populului central articulat la ambele capete, lungimea de flambaj se poate considera egală cu înălțimea rezervorului (fig. 1): $l_f = H$,

$i_{min} = \sqrt{\dfrac{I_{min}}{A_p}}$ — raza de inerție minimă a secțiunii transversale a populului central, în cm,

I_{min} — momentul de inerție minim al secțiunii transversale a populului central calculat față de una dintre axele principale trecînd prin centrul său de greutate, în cm⁴;

λ_0 — valoarea coeficientului de zvelțețe pentru care efortul unitar critic atinge limite de proporționalitate (respectiv de elasticitate) a materialului populului central.

Dimensionarea şi verificarea la flambaj a populului central se recomandă să se desfăşoare în modul următor :

1) se dimensionează popul, determinînd momentul de inerţie minim I_{min} al secţiunii sale transversale în baza formulei lui Euler, bineînţeles după ce în prealabil s-a adoptat coeficientul de siguranţă c_f :

$$I_{min} = \frac{c_f l_f^2 P}{\pi^2 E}; \tag{26}$$

pe baza momentului de inerţie obţinut cu formula (26) se aleg dimensiunile secţiunii populului central;

2) se calculează coeficientul de zvelteţe λ corespunzător secţiunii alese. Dacă pentru materialul respectiv al populului $\lambda \geqslant \lambda_0$, calculul în baza formulei lui Euler este bine făcut, iar dimensiunile sînt alese în mod corespunzător;

3) în cazul cînd $\lambda < \lambda_0$, calculul în baza formulei lui Euler nu mai convine. În acest caz se utilizează una dintre formulele de verificare menţionate anterior pentru cazul $\lambda < \lambda_0$ (formulele d, e şi f), verificarea făcîndu-se astfel :

— se calculează σ_{cr} cu formula lui Tetmajer — Iasinsky, Johnson sau Rankine;

— se calculează efortul unitar de compresiune simplă cu formula cunoscută :

$$\sigma_{c_f} = \frac{P}{A_p};$$

— se verifică coeficientul de siguranţă la flambaj :

$$c_{f_{ef}} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cf}} \geqslant c_f, \tag{27}$$

unde c_f este coeficientul de siguranţă impus sau ales dinainte.

Dacă nu este îndeplinită condiţia (27), atunci secţiunea populului central se modifică şi problema se rezolvă prin încercări succesive.

În literatura de specialitate [8], [9] etc., pentru calculul rezistenţei admisibile la flambaj σ_{af} mai sînt menţionate următoarele formule :

— metoda factorului ω (conform normelor germane DIN) :

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{ac}}{\omega}; \tag{g}$$

— metoda factorului φ (conform normelor sovietice GOST) :

$$\sigma_{af} = \varphi \sigma_{ac}. \tag{h}$$

Aceste formule prezintă avantajul că permit folosirea în calculele de dimensionare şi verificare a unor rezistenţe admisibile σ_{ac} cunoscute. Valorile coeficienţilor φ şi ω sînt date în tabele [8], [9] etc., în funcţie de λ şi de materialul populului central.

De remarcat că metoda factorului φ (formula h) dă o rezistență admisibilă mai mare deci o sarcină exterioară mai mare (dar în limite admise) și o folosire mai completă a capacității portante a materialului populului central.

Cercetările experimentale au arătat [3] că ridicarea populului central sub acțiunea suprapresiunii interioare pe capac îmbunătățește condițiile de lucru ale capacului. De aceea se consideră rațional ca partea de jos a populului central să se execute astfel încît să aibă posibilitatea deplasării pe verticală (fig. 5).

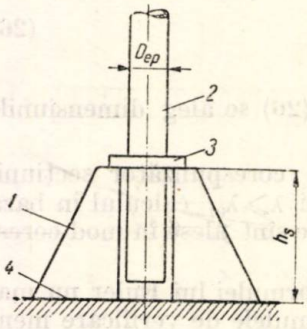


Fig. 5. — Schema de principiu a sistemului de ghidare al populului central:
1 — știut director; 2 — pop central; 3 — inel de rezemare; 4 — placă de sprijin.

Înălțimea h_s a știutului director (fig. 5) se va lua egală cu dublul înălțimii h_p de ridicare a populului central, adică

$$h_s^{6)} = 2\,h_p. \tag{28}$$

Suprafața de rezemare a plăcii de sprijin (fig. 5), rigidizată obișnuit prin nervurare, se va determina din condiția ca presiunea efectivă, pe patul de nisip (fig. 1), considerînd și greutatea produsului depozitat să nu depășească 2 kgf/cm^2.

CALCULUL DEPLASĂRILOR CAPACULUI

Anterior s-a stabilit că ecuația curbei meridiane mediane a capacului autoportant fără moment, în ipoteza încărcării capacului cu o sarcină verticală uniform distribuită, este

$$y = \frac{h}{2}\left(2 - 3\,\frac{x}{R} + \frac{x^3}{R^3}\right).$$

Pe de altă parte, se știe că ecuația săgeții unui fir flexibil, agățat la capete (capetele fiind denivelate cu înălțimea h și avînd deschiderea R; fig. 6) și încărcat cu o sarcină uniform distribuită, este o parabolă de ecuație:

$$y = \frac{q\,x_1^2}{2\,Q_0}, \tag{29}$$

unde Q_0 este componenta orizontală a tensiunii de capăt din fir, iar x_1 conform figurii 6.

Considerînd că drept fir ar servi o fișie de capac [7]) de lățime constantă egală cu unitatea și agățată la capete (fig. 7), rezultă (ecuația de echilibru de momente se scrie în raport cu punctul A pentru segmentul AM):

$$Q_0 = \frac{q\,x^2}{2\,[(h - y)\cos\beta - x\sin\beta]}. \tag{30}$$

---

[6]) La majoritatea construcțiilor de rezervoare cilindrice verticale cu capac autoportant fără moment realizate pînă în prezent s-a admis $h_p = 600$ mm, deci $h_s = 1\,200$ mm.

[7]) Obținută prin intersectarea capacului cu două planuri paralele între ele, situate la o anumită distanță și perpendiculare pe planurile paralelelor.

Avînd în vedere condițiile de rezemare pe manta ale capacului — la $x = R$; $y = 0$ și $\beta = 0°$ (fig. 7) —, pentru componenta orizontală a „tensiunii de capăt" Q_0 se obține următoarea formulă de calcul (componenta verticală a „tensiunii de capăt" este nulă în acest caz):

$$Q_0 = \frac{q R^2}{2h}. \tag{31}$$

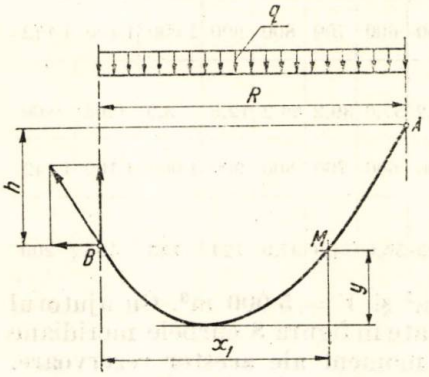


Fig. 6. — Schema de calcul a firului flexibil.

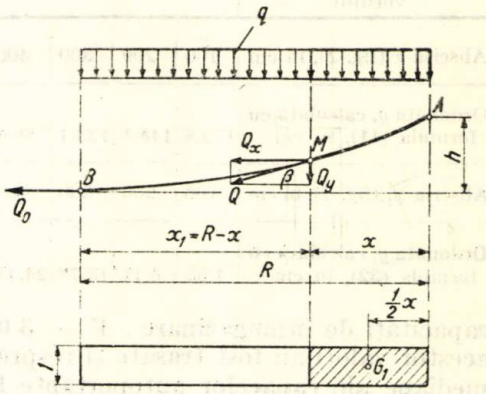


Fig. 7. — Schemă de calcul la stabilirea ecuației săgeților în cazul capacului autoportant fără moment.

Se compară formulele (30) și (31) cu formulele (2) și, respectiv, (3). Rezultă

$$\frac{Q_{(30)}}{Q_{(2)}} = \frac{3}{2} = 1{,}5, \tag{30'}$$

$$\frac{Q_{0(31)}}{Q_{0(3)}} = \frac{3}{2} = 1{,}5. \tag{31'}$$

Așadar, eforturile meridiane, calculate cu formulele (30) și (31), stabilite în ipoteza considerării sectorului de capac cu unghiul la centru $\alpha = 1$ (fig. 2 *b*), sînt mai mari cu 50% decît cele calculate cu formulele (2) și, respectiv, (3), stabilite în ipoteza considerării unei fîșii de capac de lățime constantă egală cu unitatea (fig.7). Se poate conchide, în consecință, că, dacă în dimensionarea capacului s-ar folosi una dintre formulele (30) și (31), ar rezulta grosimi s cu cel puțin 50% mai mari decît cele necesare (vezi formula (20') și urm.), deci s-ar face o supradimensionare exagerată, cu totul nejustificată.

Substituind valoarea Q_0, calculată cu formula (31), în ecuația (29), se obține

$$y = h \frac{x_1^2}{R^2}. \tag{32}$$

Valorile ordonatelor (săgeților) y, calculate cu formulele (11) și (32), sînt date în tabela 2 pentru două rezervoare, avînd următoarele

Tabe-

Valorile ordonatelor *y*
(tabelă com-

Capacitatea de înmagazinare a rezervorului	$V = 5\,000$ m³											
Elemente constructiv-dimensionale ale rezervorului	$R = 11\,420$ mm; $H = 13\,700$ mm; $h = 2\,000$ mm											
Abscisa x (fig. 2), în cm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	1 100	1 142
Ordonata y, calculată cu formula (11), în cm	173,8	148,1	123,1	89,4	77,2	57,0	39,2	24,2	12,5	3,9	0,08	0,00
Abscisa x_1 (fig. 7), în cm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	1 100	1 142
Ordonata y, calculată cu formula (32), în cm	1,53	6,11	13,78	24,45	38,25	55,0	74,9	97,9	124	153	185	200

capacităţi de înmagazinare: $V = 3\,000$ m³ şi $V = 5\,000$ m³. Cu ajutorul acestor valori au fost trasate şi resprezentate în figura 8 curbele meridiane mediane ale capacelor autoportante fără moment ale acestor rezervoare.

Din analiza rezultatelor cuprinse în tabela 2 şi a figurilor 8 *a* şi *b*, se constată că forma capacului, corespunzătoare ecuaţiei (11), este puţin diferită de cea corespunzătoare ecuaţiei (32) în cazul rezervoarelor cu capacitatea de înmagazinare pînă la 3 000 m³ (fig. 8 *b*). Diferenţa dintre ele se accentuează însă pe măsură ca capacitatea de înmagazinare a rezervorului creşte (fig. 8 *a*). Interpretarea rezultatelor cercetărilor experimentale efectuate [1], [3] pe rezervoare de acest tip pînă în prezent arată că există mari posibilităţi de perfecţionare constructivă a capacelor autoportante fără moment, deci se întrevede posibilitatea acţionării cu succes în direcţia apropierii formelor curbelor corespunzătoare ecuaţiilor (11) şi (32).

Anterior s-a arătat că, în cazul rezervoarelor cu capac autoportant fără moment, procesul de „respiraţie" nu este împiedicat, ci uşurat, deci capacul, împreună cu popul central, se va ridica pe o anumită înălţime[8]) (fig. 5). Valoarea-limită a ridicării poate fi calculată analitic dacă se consideră că în poziţia limită de ridicare forma curbă a capacului se atenuează, curba meridiană mediană tinzînd la o dreaptă (reprezentată punctat în fig. 8 *a* şi *b*). Cunoscînd lungimea l a coardei care întinde curba meridiană mediană şi care în triunghiul dreptunghic OAB (fig. 8 *a* şi *b*) este ipotenuză, pentru o valoare dată a razei R întotdeauna poate fi determinată înălţimea (cateta) h.

Diferenţa, măsurată deasupra conturului superior al mantalei cilindrice, dintre înălţimea h a centrului capacului înainte de ridicare şi înălţimea h_1 a centrului capacului după ridicare reprezintă tocmai valoarea-limită a ridicării capacului sub acţiunea suprapresiunii din interior, adică valoarea înălţimii de „respiraţie" a capacului.

[8]) Egală cu 300 — 350 mm pentru rezervoarele de 3 000 m³ şi cu 450—500 mm pentru rezervoarele de 5 000 m³.

la 2

(vezi formulele (11) şi (32))
parativă)

$V = 3\,000\ m^3$

$R = 9\,530$ mm; $H = 13\,450$ mm; $h = 1\,750$ mm

100	200	300	400	500	600	700	800	900	953
147,5	120,8	94,9	71,5	46,3	31,4	16,62	6,12	0,438	0,00
100	200	300	400	500	600	700	800	900	953
1,93	7,71	17,38	30,8	48,2	69,5	94,5	123,5	156,2	175

Într-o primă aproximaţie, proiecţia pe orizontală a curbei meridiane mediane a capacului autoportant fără moment, reprezentînd distanţa de la conturul exterior al populu central pînă la conturul interior al mantalei, măsurată pe direcţie radială, va fi (fig. 9)

$$a = R - \frac{D_{ep}}{2}. \tag{33}$$

Înălţimea [9]) centrului capacului deasupra conturului superior al mantalei este h, acestei înălţimi corespunzîndu-i coarda (ipotenuza) AB (fig. 9), avînd lungimea

$$l_{AB} = 1 = \sqrt{\left(R - \frac{D_{ep}}{2}\right)^2 - h^2}. \tag{34}$$

La funcţionarea în fază de regim, datorită suprapresiunii interioare, centrul capacului se va ridica deasupra conturului superior al mantalei la înălţimea-limită h_1, corespunzătoare suprapresiunii interioare maxime. Acestei înălţimi îi va corespunde o coardă (ipotenuză) $A'B$ (fig. 9) avînd lungimea egală cu cea a curbei meridiane mediane a capacului, adică

$$l_{A'B} = l_c.$$

După cum se ştie, lungimea unui arc de curbă poate fi calculată, atunci cînd se cunoaşte ecuaţia curbei, cu următoarea formulă:

$$l_c = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx. \tag{35}$$

[9]) Se măsoară la sfîrşitul fazei de montaj sau cînd rezervorul este complet golit şi pus în comunicaţie cu atmosfera.

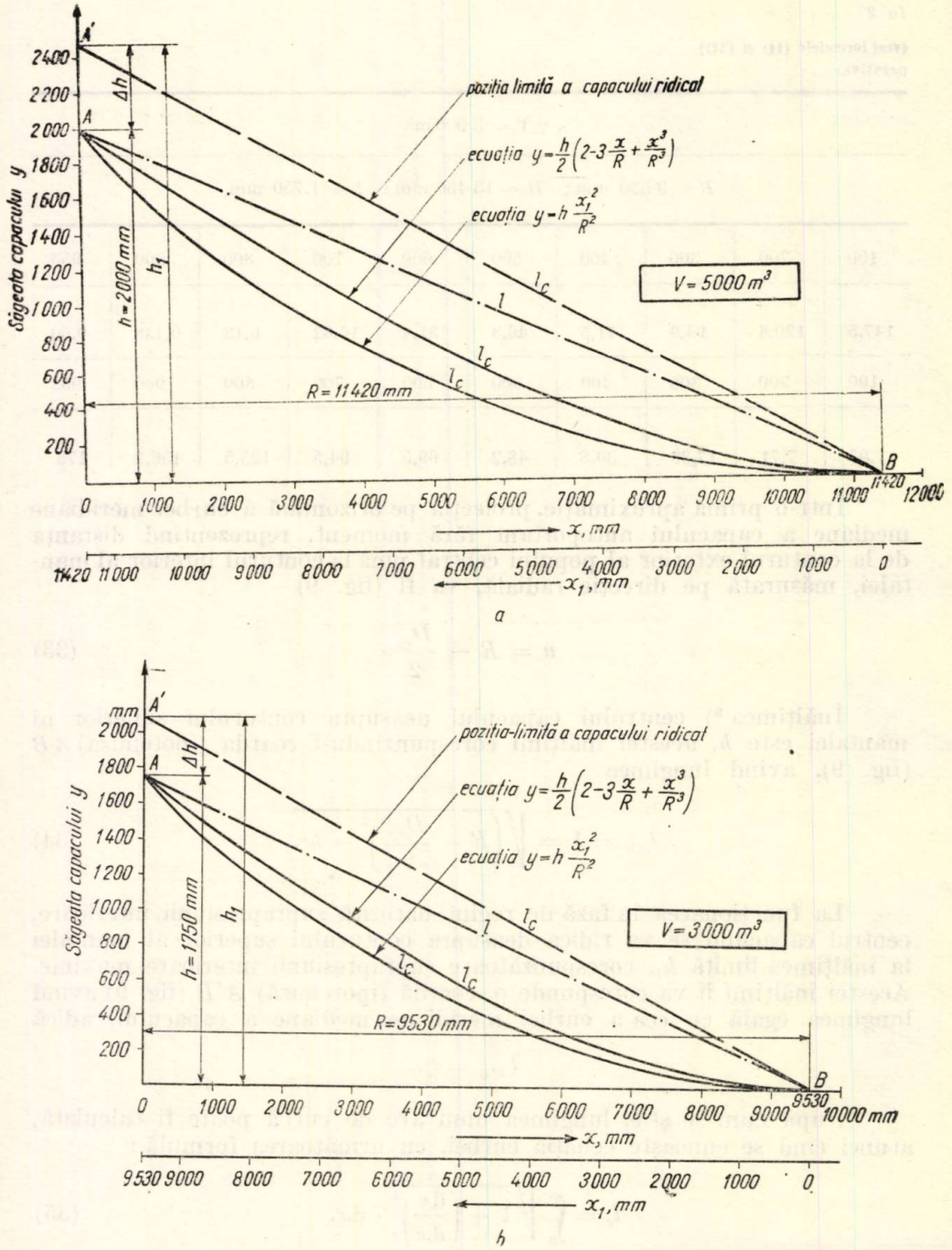


Fig. 8. — Trasarea curbelor meridiane mediane ale capacelor autoportante fără moment în cazul rezervoarelor cu capacitatea de înmagazinare $V = 5\,000$ m³ (a) și $V = 3\,000$ m³ (b).

Derivînd ecuația (32) modificată

$$y = h\frac{x_1^2}{a^2} \tag{32'}$$

în raport cu x_1 și aplicînd formula (35), se obține după efectuarea calculelor auxiliare

$$l_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2} + \frac{a^2}{4h}\ln\left(\frac{2h}{a} + \sqrt{1 + \frac{4h^2}{a^2}}\right). \tag{36}$$

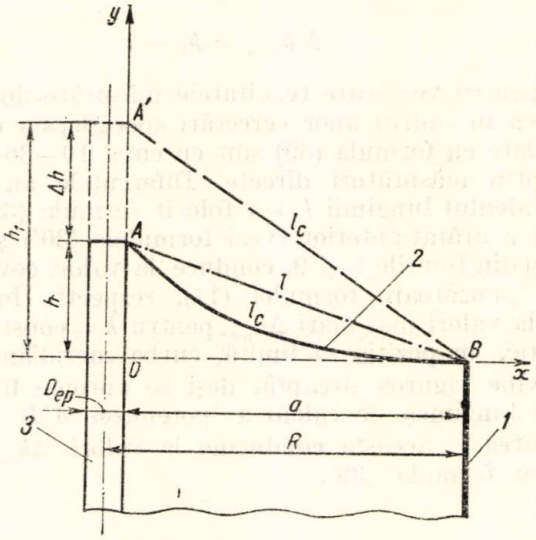


Fig. 9. — Schemă de calcul la determinarea înălțimii de „respirație" :

1 — manta cilindrică ; *2* — capac autoportant fără moment ; *3* — pop central.

Derivînd ecuația (11) în raport cu x și aplicînd formula (35), după efectuarea unor calcule auxiliare rezultă

$$l_c = \frac{3h}{2a}\int_{x=0}^{x=a}\sqrt{\frac{4a^2}{9h^2} + \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)^2}\cdot dx \tag{37}$$

sau

$$l_c = -\frac{3}{4}h\int_0^{-1}\sqrt{\frac{b^2 + z^2}{z + 1}}\cdot dz, \tag{37'}$$

unde

$$z = \frac{x^2}{a^2} - 1.$$

Este evident că lungimea curbei meridiane mediane $l_{A'B} = l_c$ este mai mare decît lungimea coardei AB $l_{AB} = l$, între cele două lungimi existînd o diferență Δl

$$\Delta l = l_{A'B} - l_{AB} = l_c - l. \tag{38}$$

Pentru poziția-limită superioară a capacului, corespunzătoare situației cînd, sub acțiunea suprapresiunii interioare, popul central se ridică în punctul cel mai de sus, iar curba meridiană mediană a capacului tinde la o dreaptă, înălțimea h_1 (fig. 8 *a* și *b* și fig. 9) va fi

$$h_1 = \sqrt{l_c^2 - a^2}.$$

În consecință, înălțimea (ridicarea) relativă maximă a populuі central și deci a capacului rezervorului, egală cu înălțimea de „respirație", va fi

$$\Delta h_{max} = h_1 - h. \tag{39}$$

Utilizînd pentru verificare rezultatele măsurătorilor efectuate [1]—[3] în practică în cadrul unor cercetări speciale, s-a constatat că valorile Δh_{max} calculate cu formula (39) sînt cu circa 10—30 % mai mari decît cele obținute prin măsurători directe. Diferențele au apărut datorită faptului că la calculul lungimii l_c s-a folosit formula (32), respectiv (36), care, așa cum s-a arătat anterior (vezi formulele (30′) și (31′)) și cum se poate constata și din figurile 8 și 9, conduce la valori ceva mai mari decît cele reale, corespunzătoare formulei (11), respectiv formulelor (37) și (37′), și implicit la valori mai mari Δh_{max} pentru $h = \text{const}$. În plus trebuie reținut că practic, în poziția sa limită, curba meridiană mediană a capacului nu devine riguros dreaptă, deși se apropie foarte mult de ea (ipotenuză) deci lungimea de calcul a ipotenuzei $A'B$ rămîne ceva mai mică decît valoarea l_c, aceasta conducînd la valori Δh_{max} mai mici decît cele calculate cu formula (39).

CALCULUL EFORTURILOR DIN CAPAC ÎN CAZUL CONSIDERĂRII ÎNCLINĂRII LUI INIȚIALE PE CONTURUL DE ÎMBINARE CU MANTAUA

Din practica construirii și exploatării rezervoarelor cu capac autoportant fără moment s-a constatat [3] că pe contur capacul are o foarte mică rigiditate, din care cauză el se deformează sub acțiunea greutății proprii, în această zonă apărînd o contrapantă (fig. 10) care favorizează acumularea apei de ploaie și de zăpadă și care creează astfel condițiile unei puternice coroziuni locale a metalului.

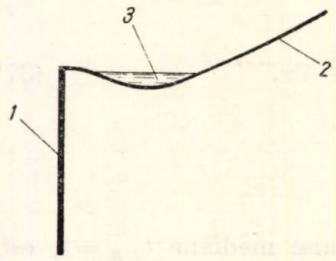


Fig. 10. — Formarea contrapantei la capacele autoportante :

1 — manta cilindrică ; *2* — capac autoportant ; *3* — apă de ploaie sau de zăpadă.

În scopul evitării apariției contrapantei capacului autoportant în zona de prindere la manta, se preconizează următoarele măsuri :

— prevederea pe conturul superior al mantalei a unei carcase de rigidizare sau a unui puternic inel de rigidizare ;

— fixarea capacului autoportant de inelul (carcasa) de rigidizare sub un unghi (unghiul tangentei) $\varphi = 5°$ (fig. 11), renunțîndu-se la construcția de capac care admite o tangentă orizontală ($\varphi = 0°$) în zona de fixare cu mantaua (fig. 1, 2 și 4).

Formula pentru calculul efortului meridian se obține în acest caz din expresia (2), în care se introduce $x = R$, $\beta = \varphi$ și $y = 0$. Rezultă

$$Q_0 = \frac{q\,R^2}{3\cos\varphi\,(h - R\,\mathrm{tg}\,\varphi)}. \tag{40}$$

Expresiile generale de calcul ale componentelor Q_x și Q_y care apar pe conturul de prindere a capacului autoportant la manta (fig. 11 *b*) vor fi

$$Q_x\Big|_{x=R} = \frac{q\,R^2}{3\,(h - R\,\mathrm{tg}\,\varphi)} \tag{41}$$

$$Q_y\Big|_{x=R} = \frac{q\,R^2}{3\,(h\,\mathrm{ctg}\,\varphi - R)}. \tag{42}$$

Întrucît unghiul φ (fig. 11) este în general mic ($\varphi = 5°$), se poate considera $\cos\varphi \approx 1$, și pentru calculele practice se poate admite

$$Q_0 = Q_x\Big|_{x=R} = \frac{q\,R^2}{3\,(h - R\,\mathrm{tg}\,\varphi)}. \tag{43}$$

Că nu se face o eroare prea mare pentru calculele practice în acest caz se vede și din datele cuprinse în tabela 3, obținute cu formulele

$$\frac{Q_0}{Q_x\big|_{x=R}} = \frac{1}{\cos\varphi}, \tag{44}$$

$$\frac{Q_0}{Q_y\big|_{y=R}} = \frac{1}{\sin\varphi}, \tag{44'}$$

$$\frac{Q_x\big|_{x=R}}{Q_y\big|_{x=R}} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi} = \mathrm{ctg}\,\varphi. \tag{44''}$$

Tabela 3

Variația eforturilor meridiane (Q_0, $Q_x\big|_{x=R}$ și $Q_y\big|_{y=R}$) în funcție de unghiul φ

φ	1°	2°	3°	4°	5°	6°	8°	10°
$Q_0/Q_x\big\|_{x=R}$	1,0001	1,0006	1,0014	1,0025	1,0038	1,0055	1,0097	1,0154
	0,01 %	0,06 %	0,14 %	0,25 %	0,38 %	0,55 %	0,97 %	1,54 %
$Q_0/Q_y\big\|_{x=R}$	57,1429	28,6533	19,1205	14,3266	11,4679	9,5694	7,1839	5,7571
$Q_x\big\|_{x=R}/Q_y\big\|_{x=R}$	57,2900	28,6363	19,0811	14,3007	11,4301	9,5144	7,1154	5,6713

După cum se vede din această tabelă, dacă Q_0 se calculează cu formula (43), eroarea în calcule nu depășește 1,54% dacă unghiul φ rămîne sub 10°.

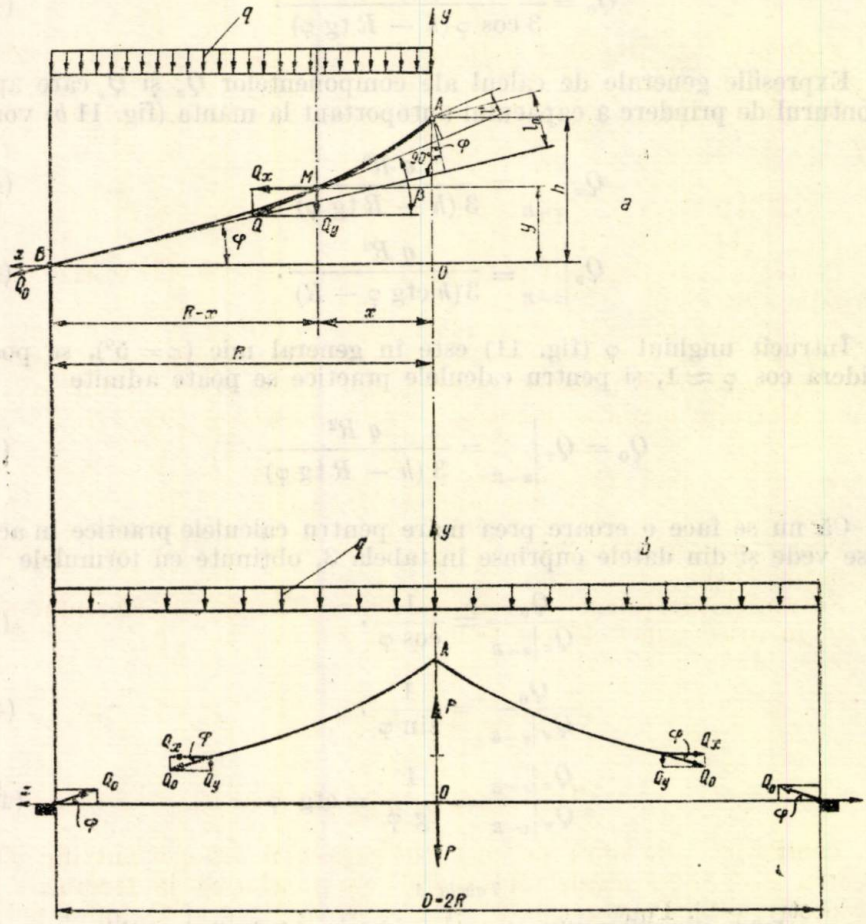


Fig. 11. — Scheme de calcul pentru capacul autoportant montat cu o înclinare inițială φ (unghiul tangentei) a conturului său.

Considerînd segmentul BM (fig. 11 *a*), se scrie condiția de moment încovoietor în punctul M, adică se pune condiția ca momentul încovoietor rezultant în acest punct să fie nul (vezi și formula (1)) :

$$Q_0 Ry \cos \varphi - Q_0 R (R - x) \sin \varphi - \frac{q}{6}(2R^3 - 3R^2 x + x^3) = 0. \qquad (45)$$

După înlocuirea în ecuația (45) a efortului meridian Q_0 prin valoarea sa dată de expresia (40) și după efectuarea operațiilor auxiliare de

calcul, se obține ecuația curbei meridiane mediane a capacului autoportant pentru cazul de rezemare considerat (fig. 11):

$$y = \frac{h - R \operatorname{tg} \varphi}{2}\left(2 - \frac{3x}{R} + \frac{x^3}{R^3}\right) + (R - x) \operatorname{tg} \varphi. \tag{46}$$

Pentru $\varphi = 0°$ (fig. 2, 4 și 7), $\operatorname{tg} \varphi = 0$ și ecuația (46) se transformă în ecuația (11).

Derivînd expresia (46) în raport cu x și schimbîndu-i semnul, se obține

$$\operatorname{tg} \beta = -y' = -\left[\frac{h - R \operatorname{tg} \varphi}{2}\left(\frac{3x^2}{R^3} - \frac{3}{R}\right) - \operatorname{tg} \varphi\right]. \tag{47}$$

Pentru $\varphi = 0°$ (fig. 2, 4 și 7), $\operatorname{tg} \varphi = 0$ și ecuația (47) se transformă în ecuația (12).

Substituind valorile obținute y (formula (46)) și $\operatorname{tg} \beta$ (formula 47) în expresia (2), se obține forma finală, valabilă pentru orice punct M aparținînd suprafeței mediane a capacului autoportant, a formulei de calcul a efortului meridian median în cazul considerat (fig. 11):

$$Q = \frac{q \cdot R^3}{3\, x \cos \beta\, (h - R \operatorname{tg} \varphi)}. \tag{48}$$

Pentru $\varphi = 0°$ (fig. 2,4 și 7), $\operatorname{tg} \varphi = 0$ și ecuația (48) se transformă în ecuația (13).

Formulele de calcul ale componentelor Q_x și Q_y ale efortului meridian Q în orice punct M vor fi în acest caz

$$Q_x = \frac{q\, R^3}{3x\, (h - R \operatorname{tg} \varphi)}, \tag{49}$$

$$Q_y = \frac{q\, R^3 \operatorname{tg} \beta}{3x\, (h - R \operatorname{tg} \varphi)}. \tag{50}$$

Pentru $x = R$, adică pe conturul capacului autoportant (fig. 11 *b*), și pentru $\varphi = \beta$, formulele (49) și (50) se transformă în formulele (41) și, respectiv, (42). Pentru $\varphi = 0°$ și $x = R$ (fig. 2, 4 și 7), adică pe conturul capacului autoportant montat fără înclinație inițială, formula (49) se transformă în formula (3).

Avînd în vedere formula (18) și condiția de rezistență (19), pentru dimensionarea capacului autoportant în cazul considerat (fig 11) se obține următoarea formulă:

$$s \geqslant \frac{q\, R^3}{3 \varphi_0\, \sigma_a\, x \cos \beta (h - R \operatorname{tg} \varphi)} + c, \tag{51}$$

care, pentru $\varphi = 0°$, se transformă în expresia (20). Discuțiile făcute în cazul expresiei (20) rămîn valabile și în cazul formulei (51).

Pentru a determina sarcina P care revine în acest caz populu central (fig. 11 *b*) se pune condiția de echilibru pentru capac prin anularea ecuației de proiecții pe axa verticală a rezervorului (axa y).

Rezultă

$$2\pi RQ_y + \pi R^2 q - P = 0, \tag{52}$$

de unde se obține

$$P = \frac{\pi D^2}{4} q + \pi DQ_0 \sin \varphi. \tag{53}$$

Așadar, sarcina P care revine populul central este mai mare decît sarcina exterioară rezultantă $\frac{\pi D^2}{4} q$ teoretic cu valoarea $\pi DQ_0 \sin \varphi$ (care uneori depășește 50% din sarcina exterioară rezultantă), aceasta din urmă datorîndu-se modului particular de rezemare (sub un unghi inițial φ) a conturului capacului pe mantaua rezervorului. Practic însă, valoarea $\pi DQ_0 \sin \varphi$ nu se atinge, întrucît unghiul φ și deci sin φ scad față de valorile inițiale atunci cînd asupra capacului acționează sarcina exterioară q. Prin urmare, componenta $\pi DQ_0 \sin \varphi$ va scădea cu scăderea unghiului φ și se va anula pentru $\varphi = 0°$, în acest din urmă caz rezultînd (vezi formula (23))

$$P = \frac{\pi D^2}{4} q.$$

Se poate deci considera că, prin însăși construcția sa, în condiții de exploatare capacul va regla sarcina care revine populul central și tălpii acestuia. În consecință se apreciază ca fiind mai corectă luarea în considerație în calculele de verificare (a populul central), a tălpii acestuia și a presiunii transmise patului de nisip) a sarcinii P calculate cu formula (23). Dacă, totuși, în calculele de verificare se folosește sarcina P determinată cu formula (53), atunci se recomandă, pentru condițiile de exploatare, corectarea valorii de calcul în felul următor:

$$P' = P - \frac{\pi D^2}{4} p = \frac{\pi D^2}{4} (q - p) + \pi DQ_0 \sin \varphi, \tag{54}$$

unde

P' este sarcina de calcul pentru verificarea populul central, a tălpii acestuia și a presiunii transmise patului de nisip în condițiile funcționării în regim,

P — sarcina exterioară, calculată cu formula (53),

p — suprapresiunea din interiorul rezervorului (este vorba de suprapresiunea din spațiul liber al rezervorului).

ASUPRA REZOLVĂRII PROBLEMEI DE CONTUR ÎN ZONA ÎMBINĂRII CAPACULUI CU MANTAUA

Anterior s-a precizat că, pe conturul de îmbinare cu mantaua, capacul autoportant fără moment are o foarte mică rigiditate, din care cauză el se deformează ușor sub acțiunea încărcărilor exterioare. Deformațiile care apar (de natura unor rotiri și deplasări) sînt însă limitate, fiind împiedicate să se dezvolte de către mantaua rezervorului, a cărei rigiditate

este mult mai mare decît cea a capacului. În consecinţă, pe conturul de îmbinare al celor două elemente (vezi fig. 1 şi 11) apar eforturi (forţe secţionale şi momente de încovoiere), considerate uniform distribuite în teoria membranelor care depind de următorii factori:

— modul de realizare al îmbinării respective;

— modificarea geometriei rezervorului (capacului, mantalei etc.);

— variaţia proprietăţilor fizico-mecanice ale materialului la trecerea dintr-o secţiune în alta pe direcţia curbei meridiane;

— caracterul distribuţiei sarcinilor în direcţia curbei meridiane (variaţii bruşte, treptate, continue, discontinue etc.).

Aşa cum s-a arătat mai înainte (fig. 10), experimental s-a constatat, iar cercetările teoretice au confirmat în general acest lucru, că influenţa unor astfel de eforturi asupra stărilor de eforturi unitare şi deformaţii poate fi considerabilă şi ignorarea sa poate conduce la rezultate greşite sau la aprecieri complet eronate. Se impune, aşadar, necesitatea stabilirii unor formule de calcul care să permită o apreciere cantitativă cît mai completă şi mai exactă a stărilor de deformaţii şi eforturi care apar şi se dezvoltă local în capacul autoportant şi manta sub acţiunea sarcinilor simetrice, uniform distribuite pe conturul de îmbinare dintre ele.

În scopul determinării efortului inelar T (forţă secţională), se apelează la ecuaţia de echilibru a elementului de membrană (ecuaţia lui Laplace):

$$\frac{Q}{R_1} + \frac{T}{R_2} = -Z, \tag{55}$$

în care

R_1 este raza de curbură a curbei meridiane într-un punct oarecare şi se numeşte prima rază principală de curbură a suprafeţei mediane în punctul respectiv (M în fig. 12),

R_2 — raza de curbură a curbei obţinute prin intersectarea suprafeţei mediane cu un plan perpendicular pe curba meridiană într-un punct carecare dat (M în fig. 12) şi se numeşte a doua rază principală de curbură a suprafeţei mediane în punctul respectiv,

Q — are semnificaţia anterioară,

Z — componenta forţelor exterioare pe direcţia axei MO_1 (fig. 12) (axa z în teoria generală a membranelor), raportate la unitatea de suprafaţă.

Considerînd ecuaţia curbei meridiane mediane (11) şi figura 12, pentru cazul de faţă rezultă

$$R_1 = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \approx \frac{R^3}{3 \cdot hx}, \tag{56}$$

întrucît $\left(\frac{x^2}{R^2} - 1\right)^2 \ll \frac{4 \cdot R^2}{9 \cdot h^2}$,

$$R_2 = \frac{x}{\sin \beta}, \tag{57}$$

$$Z = -q, \tag{58}$$

întrucît capacul autoportant are o curbură $\frac{1}{R_1}$ mică, deci o rază de curbură R_1 mare.

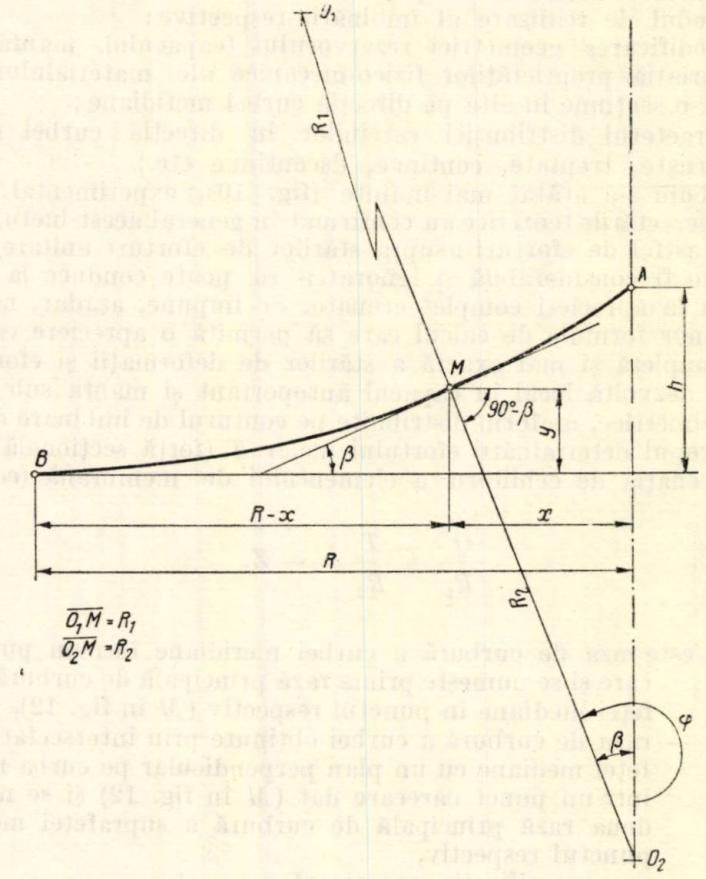


Fig. 12. — Schemă de calcul la determinarea razelor de curbură.

Avînd în vedere ecuațiile (13) și (56) — (58), din (55) se obține următoarea expresie de calcul pentru forța secțională T:

$$T = -\frac{2 \cdot q \cdot x}{\sin 2\beta}(1 - \cos\beta), \tag{59}$$

de unde rezultă, așa cum de altfel era de așteptat, că efectul acestei forțe este cel de compresiune.

Pentru $x = 0$ și $\beta \neq 0°$ și pentru $x = R$ și $\beta = 0°$, din formula (55) rezultă $T = 0$, iar pentru $x = R$ și $\beta \neq 0°$, deci pe conturul de îmbinare capac-manta pentru cazul $\beta = \varphi \neq 0°$ din aceeași formulă se obține

$$T = -\frac{2 \cdot q \cdot R}{\sin 2\beta}(1 - \cos\beta). \tag{60}$$

Folosind formulele generale (13) și (60), a fost întocmită tabela 4, din care rezultă următoarea concluzie generală:

$$|T| \ll |Q|, \tag{61}$$

deci neglijarea forței secționale T în calculul capacului autoportant fără moment nu poate duce la erori însemnate atîta vreme cît unghiul β nu depășește o anumită valoare (peste 45 — 50°).

Tabela 4

Compararea forțelor secționale Q și T

Nr. crt.	x	β	Formula de calcul	$\left\lvert\frac{Q}{T}\right\rvert$ pentru $\frac{R}{h}=\frac{5}{1}$	Observații
1	R	$\neq 0°$	$\left\lvert\frac{Q}{T}\right\rvert = \frac{3R}{h}\cdot\frac{\sin\beta}{1-\cos\beta}$	—	—
2	R	0	$\left\lvert\frac{Q}{T}\right\rvert = \infty$	—	$T = 0$
3	R	4°	$\left\lvert\frac{Q}{T}\right\rvert = 11{,}667\cdot\frac{R}{h}$	$\left\lvert\frac{Q}{T}\right\rvert = 58{,}3$	$\lvert Q\rvert \gg \lvert T\rvert$
4	R	30°	$\frac{Q}{T} = 1{,}23\cdot\frac{R}{h}$	$\left\lvert\frac{Q}{T}\right\rvert = 6{,}15$	$\lvert Q\rvert \gg \lvert T\rvert$
5	R	45°	$\left\lvert\frac{Q}{T}\right\rvert = 0{,}796\cdot\frac{R}{h}$	$\left\lvert\frac{Q}{T}\right\rvert = 4$	$\lvert Q\rvert \gg \lvert T\rvert$

Pentru a determina rotirea (curbei meridiane) într-un anumit punct sub acțiunea încărcărilor exterioare q, se consideră ecuația de simultaneitate din teoria generală a membranelor:

$$\theta = \left(\varepsilon_1 - \frac{R_2}{R_1}\cdot\varepsilon_2\right)\cdot\operatorname{ctg}\varphi - \frac{1}{R_1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(\varepsilon_2\cdot R_2), \tag{62}$$

în care

$$\varphi = \pi + \beta \text{ (vezi fig. 12)},$$

ε_1 și ε_2 — alungiri specifice meridiană și, respectiv, inelară ale elementului de suprafață mediană.

Dacă se iau în considerație legea generalizată a lui Hooke (problema plană) și expresiile de calcul (56) — (61), ecuația (62) devine

$$\theta = \frac{q\cdot R^3}{3\cdot E\cdot s\cdot h\cdot x\cdot\cos\beta}\left(1 + \frac{3\cdot\mu\cdot h\cdot x^2}{R^3\cdot\sin\beta}\right)\cdot\operatorname{ctg}\beta - \frac{4\cdot\mu\cdot x\cdot q}{E\cdot s}\cdot\frac{\operatorname{ctg}2\beta}{\sin 2\beta}, \tag{63}$$

pentru $x = R$ și $\beta \neq 0°$ (deci pe contur) rezultînd

$$\theta = \frac{q \cdot R^2}{3 \cdot E \cdot s \cdot h \cdot \cos\beta} \left(1 + \frac{3 \cdot \mu \cdot h}{R \cdot \sin\beta}\right) \cdot \operatorname{ctg}\beta - \frac{4 \cdot \mu \cdot R \cdot q}{E \cdot s} \cdot \frac{\operatorname{ctg} 2\beta}{\sin 2\beta}. \quad (64)$$

Nu este greu de observat din (64) că pentru $\beta = 0$, așa cum era de așteptat [10]), $\theta = \infty$.

Momentul de încovoiere meridian M_Q va fi

$$M_Q = D \cdot \left[\frac{1}{E \cdot s}\left(\frac{Q - \mu \cdot T}{R_1} + \frac{T - \mu \cdot Q}{R_2}\right) - \frac{\theta'}{R_1} - \mu \cdot \frac{\theta \cdot \operatorname{ctg}\varphi}{R_2}\right], \quad (65)$$

unde

$D = \frac{E \cdot s^3}{12(1 - \mu^2)}$ este rigiditatea cilindrică a capacului autoportant fără moment,

μ — coeficientul lui Poisson,

E — modulul de elasticitate longitudinal al materialului capacului,

$$\theta' = \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{d\theta}{d\beta}.$$

Dacă se neglijează termenii în θ, care pentru unghiuri $\beta \neq 0°$ și pentru abscise $x < R$ au valori mici, atunci pentru calculul momentului de încovoiere M_Q pe contur se poate folosi următoarea formulă aproximativă :

$$M_Q = \frac{q \cdot s^2}{12(1 - \mu^2)}. \quad (66)$$

Alungirea razei cercului paralel, deci deplasarea radială, se calculează cu formula

$$\Delta r = -\frac{R_2 \cdot \sin\varphi}{E \cdot s}(T - \mu \cdot Q), \quad (67)$$

care, dacă se ține seama de cele observate mai înainte, devine

$$\Delta r = -\frac{\mu \cdot q \cdot R^3}{3 \cdot E \cdot s \cdot h \cdot \cos\beta}, \quad (68)$$

pentru $\beta = 0$ rezultînd

$$\Delta r = -\frac{\mu \cdot q \cdot R^3}{3 \cdot E \cdot s \cdot h}. \quad (69)$$

În figura 13 sînt puse în evidență sarcinile de contur P_0 (forțe tăietoare) și M_0 (momente încovoietoare), a căror valoare urmează să fie determinată în cele ce urmează. Pe conturul de îmbinare capac auto-

[10]) În acest caz, curba generatoare admite o asimptotă, deci descompunerea în stări de eforturi nu mai este valabilă.

portant — manta se pot scrie următoarele egalități, reprezentînd condiții de compatibilitate a încărcărilor și deformațiilor :

$$\left.\begin{aligned} P_{0\,(z_1=0)}^{\text{manta}} &= -\,P_{0\,(x_1=0)}^{\text{capac}} \\ M_{0\,(z=0)}^{\text{manta}} &= M_{0\,(x_1=0)}^{\text{capac}} \\ \Delta r_{(z=0)}^{\text{manta}} &= \Delta r_{(x_1=0)}^{\text{capac}} \\ \theta_{(z=0)}^{\text{manta}} &= \theta_{(x_1=0)}^{\text{capac}} \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

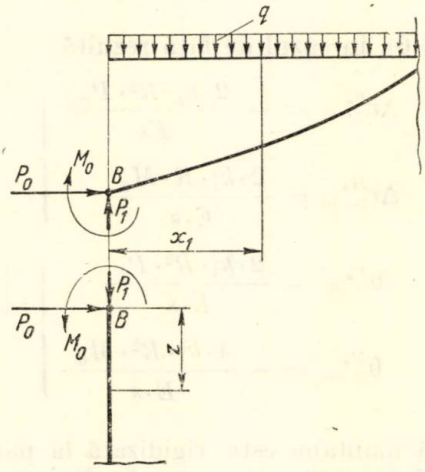


Fig. 13. — Încărcările de contur.

în care

$$\left.\begin{aligned} \Delta r_{(x_1=0)}^{\text{capac}} &= \Delta r_{(x_1=0)}^{P_0} + \Delta r_{(x_1=0)}^{M_0} + \Delta r^{q} \\ \theta_{(x_1=0)}^{\text{capac}} &= \theta_{(x_1=0)}^{P_0} + \theta_{(x_1=0)}^{M_0} + \theta^{q} \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

$\Delta r_{(x_1=0)}^{P_0}$, $\Delta r_{(x_1=0)}^{M_0}$ și Δr^{q} sînt deplasări radiale pe conturul capacului autoportant ($x_1 = 0$), produse de încărcările P_0, M_0 și, respectiv, q,

$\theta_{(x_1=0)}^{P_0}$, $\theta_{(x_1=0)}^{M_0}$ și θ^{q} — rotiri ale capacului autoportant pe contur ($x_1 = 0$), produse de încărcările P_0, M_0 și, respectiv, q.

Formulele de calcul corespunzătoare sînt în general cunoscute, și anume

$$\left.\begin{aligned} \Delta r_{(z)}^{P_0} &= -\frac{R\cdot T_z}{E\cdot s} = -\frac{2\cdot k_1\cdot R^2\cdot P_0\cdot \exp(-k_1 z)\cdot \cos k_1 z}{E\cdot s} \\ \Delta r_{(z)}^{M_0} &= \frac{R\cdot T_z}{E\cdot s} = \frac{2\cdot k_1^2\cdot R^2\cdot M_0\cdot \exp(-k_1 z)\cdot(\cos k_1 z - \sin k_1 z)}{E\cdot s} \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

$$\left.\begin{aligned}\theta^{P_0}_{(z)} &= \frac{2\cdot k_1^2\cdot R^2}{Es}\cdot P_0\cdot\exp(-k_1 z)\cdot(\cos k_1 z+\sin k_1 z)\\ \theta^{M_0}_{(z)} &= -\frac{4\cdot k_1^3\cdot R^2\cdot M_0\cdot\exp(-k_1 z)\cdot\cos k_1 z}{E\cdot s}\end{aligned}\right\}\qquad(72')$$

în care

$$k_1=\frac{\sqrt[4]{3\cdot(1-\mu^2)}}{\sqrt{R\cdot s}}.\qquad(73)$$

Pe contur ($z=0$), în cazul de față rezultă

$$\left.\begin{aligned}\Delta r^{P_0}_{(z=0)} &= -\frac{2\cdot k_1\cdot R^2\cdot P_0}{Es}\\ \Delta r^{M_0}_{(z=0)} &= \frac{2\cdot k_1^2\cdot R\cdot M_0}{E\cdot s}\end{aligned}\right\}\qquad(74)$$

$$\left.\begin{aligned}\theta^{P_0}_{(z=0)} &= \frac{2\cdot k_1^2\cdot R^2\cdot P_0}{E\cdot s}\\ \theta^{M_0}_{(z=0)} &= -\frac{4\cdot k_1^3\cdot R^2\cdot M_0}{E\cdot s}\end{aligned}\right\}\qquad(74')$$

Presupunînd că mantaua este rigidizată la partea superioară cu o carcasă indeformabilă (pentru care se poate deci emite ipoteza unei rigidități infinite), condițiile de compatibilitate a deformațiilor se pot scrie în felul următor:

$$\left.\begin{aligned}\Delta r^{\text{manta}}_{(z=0)} &= \Delta r^{\text{capac}}_{(x_1=0)} = \Delta r^{P_0}_{(z=0)}+\Delta r^{M_0}_{(z=0)}+\Delta r^{q}=0\\ \theta^{\text{manta}}_{(z=0)} &= \theta^{\text{capac}}_{(x_1=0)} = \theta^{P_0}_{(z=0)}+\theta^{M_0}_{(z=0)}+\theta^{q}=0\end{aligned}\right\}\qquad(75)$$

rezultînd

$$\left.\begin{aligned}-\frac{2\cdot k_1^2\cdot R^2\cdot P_0}{E\cdot s}-\frac{2\cdot k_1^2\cdot RM_0}{E\cdot s}+\Delta r^{q}_{\substack{(x_1=0)\\(x=R)}}=0\\ -\frac{2\cdot k_1^2\cdot R^2\cdot P_0}{E\cdot s}-\frac{4\cdot k_1^3\cdot R^2\cdot M_0}{E\cdot s}+\theta^{q}_{\substack{(x_1=0)\\(x=R)}}=0\end{aligned}\right\}\qquad(76)$$

În urma rezolvării acestui sistem de două ecuații cu două necunoscute (P_0 și M_0), se obține

$$P_0=\frac{E\cdot s}{2\cdot k_1^2\cdot R^2}\cdot\left[2\cdot k_1\cdot\Delta r^{q}_{\substack{(x_1=0)\\(x=R)}}-\theta^{q}_{\substack{(x_1=0)\\(x=R)}}\right],\qquad(77)$$

$$M_0=\frac{E\cdot s}{2\cdot k_1^2\cdot R^2}\cdot\left[\frac{1}{k_1}\cdot\theta^{q}_{\substack{(x_1=0)\\(x=R)}}-\Delta r^{q}_{\substack{(x_1=0)\\(x=R)}}\right].\qquad(78)$$

Formulele de calcul ale momentelor de încovoiere meridiane datorite efectului de contur vor fi

$$M^{P_0}_{Q\,(z)} = M^{P_0}_{Q\,(x)} = \frac{1}{k_1} \cdot P_0 \cdot \exp\,(-k_1 z) \cdot \sin k_1 z, \tag{79}$$

$$M^{M_0}_{Q\,(z)} = M^{P_0}_{Q\,(x)} = M_0 \cdot \exp\,(-k_1 z) \cdot (\cos k_1 z + \sin k_1 z, \tag{80}$$

pe contur, unde acest moment este maxim, rezultînd

$$\left.\begin{aligned} M^{P_0}_{Q\,(x=R)} &= 0 \\ M^{M_0}_{Q\,(z=0)} &= M^{M_0}_{Q\,(x=R)} = M_0 \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Modul de variație al momentului de încovoiere $M^{M_0}_{Q\,(x=R)}$ este indicat în figura 14. Din această figură se vede imediat că momentul de încovoiere

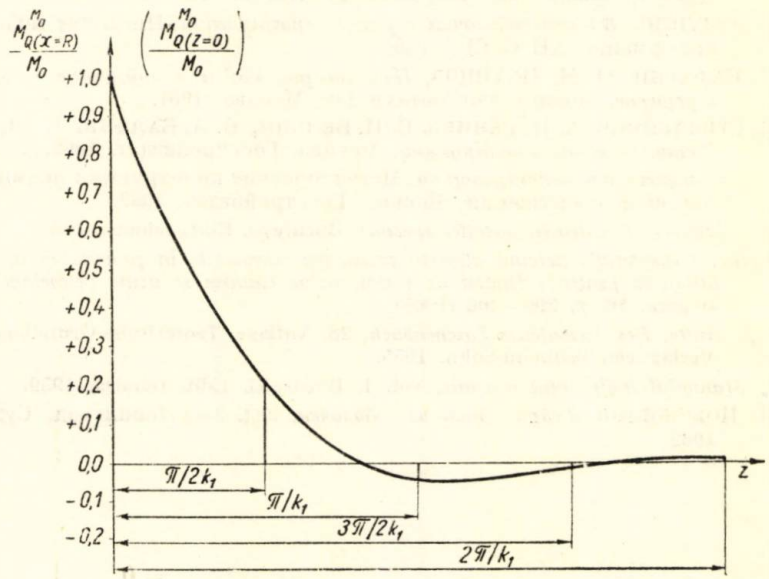


Fig. 14. — Variația momentului de încovoiere meridian de contur.

meridian de contur are o valoare foarte ridicată pe contur (pentru $x=R$), însă pe măsura îndepărtării de la contur către popul central (fig. 1) el scade și se amortizează extrem de rapid [11]).

Din formula (78) rezultă că pe contur, dacă $\beta = 0$, momentul încovoietor $M^{M_0}_{Q\,(x=R)} = M_0$ devine infinit, pentru că rotirea $\theta^{Q}_{\substack{(x_1=0)\\(x=R)}}$ este infinită în acest caz. De observat însă că, dacă i se dă capacului autoportant o înclinare inițială pe conturul de îmbinare de $\varphi = \beta = 4°$, mo-

[11]) Pentru rezervoarele cu capacitate de depozitare pînă la 5 000 m³, amortizarea se produce pe o distanță față de contur mai mică decît 1 m.

mentul încovoietor de contur scade considerabil, ceea ce este în deplină concordanță cu analiza prezentată mai înainte.

Așadar, în zona conturului de îmbinare cu mantaua, calculul de verificare a capacului autoportant va trebui să țină neapărat seama de existența unei stări de solicitare compusă (întindere sau compresiune + încovoiere), condiția de verificare fiind următoarea :

$$\sigma_{ef} = \frac{Q}{s} + \frac{6 \cdot M_0}{s^2} \leqslant \varphi_0 \cdot \sigma_a .$$

Primită la redacție la 25 noiembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. А. С. Арзунян, *Резервуары с безмоментной кровлей для хранения нефти и нефтепродуктов*, Москва, ЦНИИТЭНефть, 1956.
2. А. С. Арзунян, *Висячие оболочки в резервуаростроении*, Институт техн.-эконом. информаций АН СССР, 1956.
3. М. К. Сафарян, О. М. Иванцов, *Проектирование и сооружение стальных резервуаров*, Москва, Гостоптехиздат, Москва, 1961.
4. Н. С. Стрелецкий, А. Н. Гениев, Е. И. Беленя, В. А. Балдин, Е. Н. Лессиг, *Металлические конструкции*, Москва, Госстройиздат, 1962.
5. — *Справочник проектировщика*, Металлические конструкции промышленных зданий и сооружений, Москва, Госстройиздат, 1962.
6. D. D. Mateescu, *Construcții metalice speciale*, București, Edit. tehnică, 1952.
7. A. Pavel, *Considerații privind alegerea rezistenței admisibile în proiectarea aparatelor și utilajelor pentru rafinării de petrol, uzine chimice și uzine petrochimice*, Petrol și gaze, **16**, 7, 399—406 (1965)
8. * * * *Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch*, 28. Auflage, Teoretische Grundlagen, Berlin, Verlag von Wilhelm-Sohn, 1955.
9. * * * *Manualul inginerului mecanic*, vol. I, București, Edit. tehnică, 1959.
10. В. В. Новожилов, *Теория тонких оболочек*, изд. 3-е, Ленинград, Судпромгиз, 1962.

MECANISME PENTALATERE ŞI PATRULATERE ARTICULATE CU UNELE CAZURI PARTICULARE ALE ACESTORA*)

de R. C. BOGDAN şi T. V. HUNCKER
Centrul de mecanica solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

531.1.

Utilizînd metoda analizei armonice complexe, se studiază unele cazuri particulare ale mecanismelor fundamentale plane cu cinci elemente. Rezultatele se compară cu soluţiile obţinute anterior cu ajutorul metodelor clasice pe tipuri izolate de mecanisme.

Soluţiile obţinute pentru mişcarea cea mai generală a grupelor structurale binare prin analiza armonică complexă [3], [4], [18] au creat posibilitatea, în cazul legării grupelor la două elemente conducătoare,

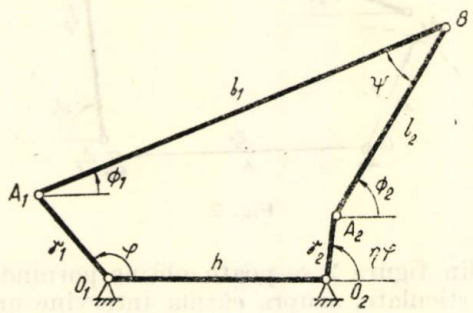


Fig. 1

să se ajungă la expresii simplificate specifice mecanismelor cu cinci elemente [5], [6], [9].

*) Publicată şi în „Rev. roum. sci. techn. – Mécanique Appliquée", **12**, 4 (1967) (în limba franceză).

Lucrarea de față va prezenta studiul unor categorii de mecanisme care derivă din mecanismul fundamental cu cinci elemente (fig. 1), prin particularizări, în felul următor:

I. $r_2 = 0$, categoria mecanismelor patrulatere;
II. $h = 0$, categoria mecanismelor pentalatere cu cuplă cinematică dublă la bază;
III. $r_1 = r_2 = r$, $l_1 = l_2 = l$, categoria mecanismelor isoscele;
a) $h \neq 0$, mecanism dublu bielă-manivelă excentric;
b) $h = 0$, mecanism dublu bielă-manivelă centric.

I. CATEGORIA MECANISMELOR PATRULATERE ($r_2 = 0$)

Prin legarea unei diade de aspectul I la o manivelă și la bază (fig. 2) se obține mecanismul cu patru elemente de formă generală [3], [18].

Mecanismele patrulatere au format obiectul a foarte numeroase studii, utilizîndu-se diverse metode analitice; de exemplu W. Meyer zur Capellen le-a studiat prin serii trigonometrice ca mecanisme izolate [13] — [16].

Se pot studia însă mecanismele patrulatere ca derivate din mecanismele cu cinci elemente (acestea fiind studiate anterior prin serii armonice complexe), utilizînd soluțiile generale elaborate pentru grupele structurale assurice, în mișcarea cea mai generală plană [3], [4], [6]

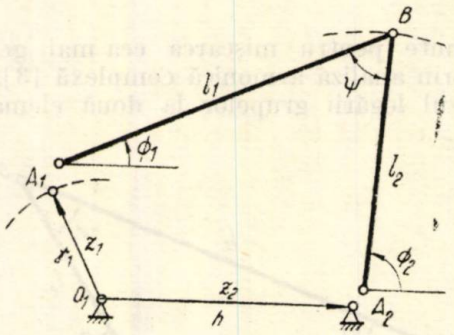


Fig. 2

Construcția din figura 2 se poate obține pornind de la mecanismul cu cinci elemente articulate, asupra căruia intervine una din următoarele două condiții:

$$\text{a)} \qquad r_2 = 0, \tag{1}$$

ceea ce conduce la păstrarea bazei h,

$$\text{b)} \qquad \eta = 0,$$

ceea ce conduce la modificarea bazei patrulaterului astfel:

$$h^* = h + r_2, \text{ respectiv } r_2^* = 0 \tag{2}$$

În consecință, vom considera mecanismul cu patru elemente ca derivat al mecanismului cu cinci elemente, căruia îi vom determina mărimile coeficienților dezvoltărilor $e^{i\Psi}$, $e^{i\Phi_1}$, și $e^{i\Phi_2}$ prin introducerea condițiilor de mai sus la soluțiile generale ale mecanismelor pentalatere.

În cazul patrulaterului articulat OA_1BA_2, cupla cinematică A_1 este obligată să descrie un cerc cu raza $r_1 = r$, iar cupla cinematică A_2 este fixată la bază; în consecință, vectorii de poziție complecși z_1 și z_2 au exprsiile

$$\begin{aligned} z_1 &= r\, e^{i\varphi}, \\ z_2 &= h. \end{aligned} \tag{3}$$

I. 2. DETERMINAREA COEFICIENȚILOR Δ_k

Față de expresiile vectorilor z_1 și z_2 rezultă coeficienții

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &= r, \\ \alpha_0^{(2)} &= h, \end{aligned} \tag{4}$$

considerați reali fără a restrînge generalitatea.

De asemenea coeficienții β_k și γ_k devin

$$\begin{aligned} \beta_0 &= h, \\ \beta_1 &= -r \end{aligned} \tag{5}$$

și

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= h^2 + r^2, \\ \gamma_1 &= \gamma_{-1} = -h\,r. \end{aligned} \tag{6}$$

Coeficienții Δ_k rezultă în consecință:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \frac{l_1^2 + l_2^2 - h^2 - r^2}{2\,l_1\,l_2}, \\ \Delta_1 &= \Delta_{-1} = \frac{h\,r}{2\,l_1 l_2} \end{aligned} \tag{7}$$

Se observă că s-au obținut numai trei coeficienți Δ_k, ceea ce permite să se asimileze restul calculelor cu cazul deja tratat al mecanismului pentalater cu raportul de transmitere $\tau_i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = +1$ [6] — [9], considerînd

$$\begin{aligned} \delta_{01} &= \frac{l_1^0 + l_2^2 - h^2 - r^2}{2\,l_1 l_2}, \\ \delta_1^* &= \frac{h\,r}{2\,l_1 l_2}, \\ \theta &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

și deci calculele nu vor fi repetate. Calculul coeficienților Δ_k pentru valori concrete date elementelor se poate efectua și prin utilizarea diagramelor date în lucrări anterioare [7].

Limitele valorilor mărimilor Δ_0 și Δ_1 rezultă din particularizarea expresiilor generale:

$$0 < |\Delta_1| < \frac{1}{2},$$
$$(1 - 2\Delta_1) > |\Delta_0| > -(1 - 2\Delta_1). \tag{9}$$

I. 2. DETERMINAREA COEFICIENȚILOR A_k

După calculul coeficienților D_k [4], [5], [7] se obțin mai departe coeficienții

$$\begin{aligned} B_k &= \Delta_k + \mathrm{i}\, D_k, \\ C_k^{(1)} &= -l_2 B_k, \\ C_0^{(1)} &= l_1 - l_2 B_0. \end{aligned} \tag{10}$$

Ecuațiile pentru determinarea coeficienților A_k în cazul patrulaterului articulat se reduc la

$$C_{-m} = h\overline{A}_m - r\overline{A}_{m+1}, \tag{11}$$

pe care le luăm în considerare pentru următoarele două condiții:

1) în condiția

$$h > r,$$

ceea ce corespunde cu

$$\xi_1^* = \xi = \frac{r}{h} < 1 \text{ și } \xi_2^* = 0$$
$$\overline{A}_m = \xi^{n+1}\overline{A}_{m+n+1} + \frac{1}{h}[C_{-m} + \xi C_{-(m+1)} + \ldots + \xi^n C_{-(m+n)}]; \tag{12}$$

2) în condiția

$$h < r,$$

ceea ce corespunde cu

$$\xi_1^* = \xi = \frac{r}{h} > 1 \text{ și } \xi_2^* = 0,$$
$$\overline{A}_{m+1} = \frac{1}{\xi^{m-n}}\overline{A}_{m-n} - \frac{1}{\xi h}\left[C_{-m} + \frac{C_{-m+1}}{\xi} + \ldots + \frac{C_{-m+n}}{\xi^n}\right]. \tag{13}$$

Se observă că și la determinarea coeficienților A_k există o mare asemănare între patrulaterul articulat și cazul pentalaterului articulat cu $\eta = +1$.

Acest fapt apare mai clar în figura 3, unde mişcarea mecanismului pentalater articulat $O_1\ A_1\ B\ A_2\ O_2$, cu $\eta = +1$, corespunde cu mişcarea patrulaterului articulat OA_1BA_2, care are ca manivelă elementul $OA = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\,r_1 r_2 \cos \varphi_d}$ ce se roteşte cu acelaşi unghi φ ca manivelele

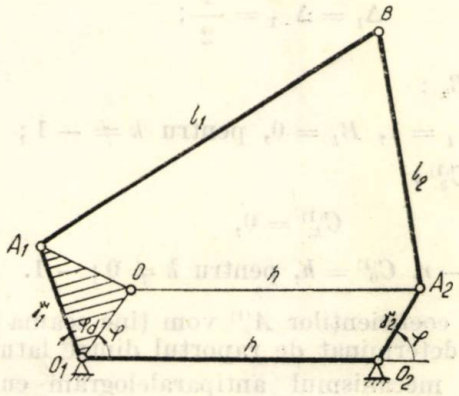


Fig. 3

r_1 şi r_2, şi, în plus, o translaţie a bazei dată de mişcarea paralelogramului $O_1OA_2\,O_2$.

Mecanismele patrulatere articulate cu cîte două laturi opuse egale (fig. 4 *a*, *b*),

$$r = r_1 = l_2 \quad \text{şi} \quad h = l_1,$$

formează tipuri de mecanisme particulare, dintre care un mai mare interes prezintă acelea denumite antiparalelogram.

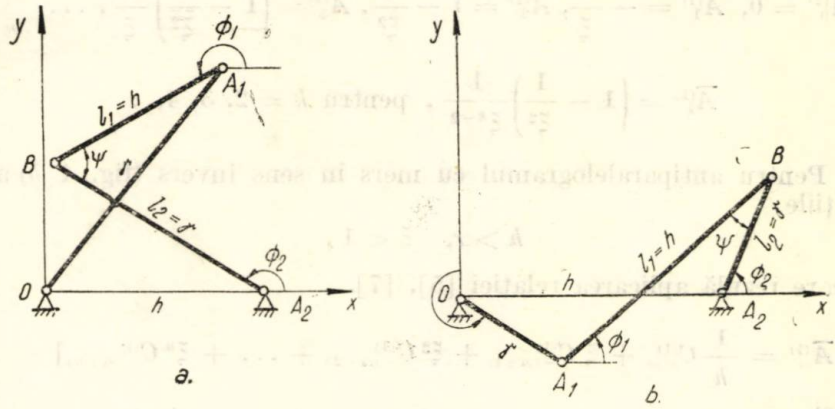


Fig. 4

Se observă că la aceste mecanisme unghiul de transmitere Ψ se găseşte, faţă de φ în relaţia

$$\Psi = -\varphi \quad \text{sau} \quad \Psi = 360° - \varphi.$$

Ca urmare, mărimile coeficienților sînt

— coeficienții Δ_k :

$$\Delta_0 = 0,$$

$$\Delta_1 = \Delta_{-1} = \frac{1}{2}; \tag{14}$$

— coeficienții B_k :

$$B_{-1} = 1,\ B_k = 0,\ \text{pentru}\ k \neq -1; \tag{15}$$

— coeficienții $C_k^{(1)}$:

$$C_k^{(1)} = 0,$$

$$C_{-1}^{(1)} = -r,\ C_0^{(1)} = h,\ \text{pentru}\ k \neq 0; -1. \tag{16}$$

Pentru calculul coeficienților $A_k^{(1)}$ vom ține seama de sensul de mișcare al manivelelor, determinat de raportul dintre laturi.

Astfel, pentru mecanismul antiparalelogram cu mers în același sens (fig. 4 *a*) avem condițiile

$$h < r,\ \xi > 1,$$

ceea ce atrage după sine utilizarea relației

$$\overline{A}_{m+1}^{(1)} = -\frac{1}{r}\left[C_{-m}^{(1)} + \frac{C_{-m+1}^{(1)}}{\xi} + \frac{C_{-m+2}^{(1)}}{\xi^2} + \ldots + \frac{C_{-m+n}^{(1)}}{\xi^n}\right] \tag{17}$$

și deci

$$\overline{A}_{m+1}^{(1)} = 0 \ \text{pentru}\ m \leqslant -1$$

$$\overline{A}_0^{(1)} = 0,\ \overline{A}_1^{(1)} = -\frac{1}{\xi},\ \overline{A}_2^{(1)} = 1 - \frac{1}{\xi^2},\ \overline{A}_3^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)\frac{1}{\xi}, \ldots \tag{18}$$

$$\overline{A}_k^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)\frac{1}{\xi^{k-2}},\ \text{pentru}\ k = 2, 3, 4, \ldots$$

Pentru antiparalelogramul cu mers în sens invers (fig. 4 *b*) avem condițiile

$$h > r,\quad \xi < 1,$$

din care rezultă aplicarea relației [5], [7].

$$\overline{A}_m^{(1)} = \frac{1}{h}\left[C_{-m}^{(1)} + \xi\, C_{-(m+1)}^{(1)} + \xi^2 C_{-(m+2)}^{(1)} + \ldots + \xi^n C_{-(m+n)}^{(1)}\right] \tag{19}$$

și deci

$$\overline{A}_m^{(1)} = 0,\ \text{pentru}\ m > 1$$

$$\overline{A}_1^{(1)} = -\xi,\ \overline{A}_0^{(1)} = 1 - \xi^2,\ \overline{A}_{-1}^{(1)} = (1 - \xi^2)\,\xi, \ldots \tag{20}$$

$$\overline{A}_{-k}^{(1)} = (1 - \xi^2)\,\xi^k,\ \text{pentru}\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Coeficienții $A_k^{(2)}$ ai dezvoltării unghiului Φ_2 pe baza relației $\Phi_2 - \Phi_1 = -\varphi$ se determină funcție de $A_k^{(1)}$ prin formula

$$A_k^{(2)} = A_{k+1}^{(1)}. \tag{21}$$

Ca urmare, pentru antiparalelogramul cu mers în același sens obținem dezvoltarea

$$e^{i\Phi_2} = -\frac{1}{\xi} + \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) e^{i\varphi} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\xi} e^{i\varphi}\right)^p\right] = -\frac{1}{\xi} + \frac{\left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) e^{i\varphi}}{1 - \frac{1}{\xi} e^{i\varphi}}, \tag{22}$$

iar pentru antiparalelogramul cu mers în sens invers, dezvoltarea

$$e^{i\Phi_2} = -\xi + (1 - \xi^2)\, e^{i\varphi} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (\xi\, e^{-i\varphi})^p\right] = -\xi + \frac{(1 - \xi^2)\, e^{-i\varphi}}{1 - \xi\, e^{-i\varphi}}, \tag{23}$$

La aceste două cazuri este de remarcat că, datorită particularităților constructive, dezvoltările infinite ale coeficienților din cazurile generale sînt progresii geometrice.

II. CATEGORIA MECANISMELOR CU CUPLĂ CINEMATICĂ DUBLĂ LA BAZĂ ($h = 0$)

Mecanismul cu cinci elemente articulate de tip general (fig. 1) poate genera un alt tip de mecanism prin introducerea condiției $h = 0$; la mecanismul nou obținut (fig. 5), cele două manivele își păstrează fiecare independența mișcării de rotație.

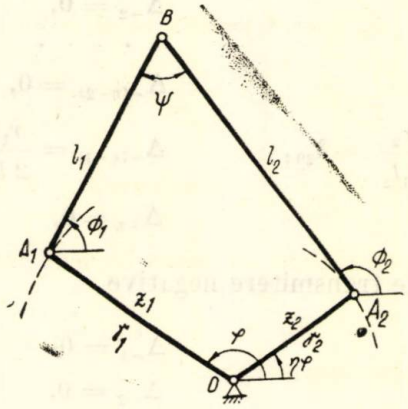


Fig. 5

Vectorii de poziție complecși z_1 și z_2 au dezvoltările

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} e^{ik\varphi} = r_1\, e^{i\varphi_0} \cdot e^{i\varphi}, \\ z_2 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} e^{ik\varphi} = r_2\, e^{i\varphi_0} \cdot e^{i\eta\varphi}. \end{aligned} \tag{24}$$

Vitezele unghiulare, diferite ca mărime și sens, ale celor două elemente conducătoare — manivele — vor da rapoarte de transmitere η în situațiile

$$\eta \geqslant +1 \quad \text{și} \quad \eta \leqslant -1.$$

Pentru cazul $\eta = +1$, mecanismul nu prezintă interes, deoarece întreg sistemul se rotește ca un solid rigid, unghiul de decalaj φ_d și unghiul de transmitere Ψ fiind constante. Toate punctele mecanismului descriu cercuri cu centrul în O.

Pentru rapoarte de transmitere $\eta \neq +1$, mecanismele cu cuplă dublă la bază prezintă unele particularități, care vor face obiectul unor alte studii.

II. 1. DETERMINAREA COEFICIENȚILOR Δ_k

Coeficienții Δ_k se obțin direct din relațiile stabilite pentru cazul general al mecanismelor pentalatere [5], făcînd pe $h = 0$:

$$\Delta_0 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - r_1^2 - r_2^2}{2\, l_1 l_2} = \delta_{00},$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = 0, && \Delta_{-1} = 0,\\
&\Delta_2 = 0, && \Delta_{-2} = 0,\\
&\dots\dots && \dots\dots\\
&\Delta_{\eta-2} = 0, && \Delta_{-(\eta-2)} = 0,\\
&\Delta_{\eta-1} = \frac{\bar{r}_1 r_2}{2\, l_1 l_2} = \delta_{20}, && \Delta_{-(\eta-1)} = \frac{r_1 \bar{r}_2}{2\, l_1 l_2} = \bar{\delta}_{20},\\
&\Delta_\eta = 0, && \Delta_{-\eta} = 0,
\end{aligned} \tag{25}$$

iar pentru rapoarte de transmitere negative

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = 0, && \Delta_{-1} = 0,\\
&\Delta_2 = 0, && \Delta_{-2} = 0,\\
&\dots\dots && \dots\dots\\
&\Delta_{-\eta} = 0 && \Delta_\eta = 0,\\
&\Delta_{-(\eta-1)} = \frac{r_1 \bar{r}_2}{2\, l_1 l_2} = \bar{\delta}_{20}, && \Delta_{\eta-1} = \frac{\bar{r}_1 r_2}{2\, l_1 l_2} = \delta_{20}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Apoi, pe baza metodicii indicate la cazul general, se calculează ceilalți coeficienți: D_k, B_k și C_k.

II. 2. CALCULUL COEFICIENȚILOR A_k

La determinarea coeficiențiior A_k se observă că pot apărea doar următoarele două cazuri :

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad |r_1| > |r_2|, \\ &\text{b)} \quad |r_1| < |r_2|, \end{aligned} \tag{27}$$

iar rapoartele ξ între manivelă și bază sînt

$$\xi_1 = \infty, \quad \xi_2 = \infty, \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{r_2}{r_1},$$

a) În condițiile

$$|r_1| > |r_2|, \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{r_2}{r_1} < 1$$

obținem

$$\begin{aligned} \overline{A}_{m+1} = \operatorname{sim} b \Bigg[& \frac{1}{\xi_1^{n+1}} (1 + \ldots + \xi_2^{n+1} \overline{A}_\eta^{n+1}) \overline{A}_{m-n} - \\ & - \frac{1}{r_1} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\xi_1^p} (1 + \ldots + \xi_2^p C_{-\eta}^p) C_{-m+p} \Bigg] \to \\ \to \Bigg[& \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} A_{(n+1)\eta+m-n} - \frac{1}{r_1} \left(C_{-m} + \ldots + \frac{r_2^n}{r_1^n} C_{-m+n(1-\eta)} \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{28}$$

$$\overline{A}_{m+1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} \overline{A}_{m-n+(n+1)\eta} - \frac{1}{r_1} \left[C_{-m} + \ldots + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n C_{-m+n(1-\eta)} \right].$$

b) În condițiile

$$|r_1| < |r_2|, \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{r_1}{r_2} < 1$$

obținem

$$\begin{aligned} \overline{A}_{m+\eta} = \operatorname{sim} b \Bigg[& \frac{1}{\xi_2^{n+1}} (\xi_1^{n+1} \overline{A}_1^{n+1} \ldots \pm 1) \overline{A}_{m-n\eta} + \\ & + \frac{1}{r_2} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\xi_2^p} (\xi_1^p C_{-1}^p \ldots \pm 1) C_{-(m-p\eta)} \Bigg] \to \\ \to \Bigg[& \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} \overline{A}_{m-n\eta+n+1} + \frac{1}{r_2} \left(C_{-m} + \frac{r_1}{r_2} C_{-m+\eta-1} + \ldots \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{29}$$

$$\overline{A}_{m+\eta} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} \overline{A}_{m-n(\eta-1)+1} + \frac{1}{r_2} \left[C_{-m} + \ldots + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n C_{-m+n(\eta-1)} \right].$$

II. 3. RELAȚII DE OBȚINERE A DIVERSILOR COEFICIENȚI PENTRU VALORI CONCRETE ALE LUI η

a) $\eta = +2$

— coeficientul β_k :

$$\beta_1 = -r_1 \cdot e^{i\varphi_0}; \quad \beta_2 = r_2, \cdot e^{i\varphi_0}; \tag{30}$$

— coeficienții Δ_k :

$$\Delta_0 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - r_1^2 - r_2^2}{2\, l_1\, l_2} = \delta_0, \tag{31}$$

$$\Delta_1 = \Delta_{-1} = \frac{r_1\, r_2}{2\, l_1\, l_2} = \delta_2;$$

— coeficienții A_k :

1) în condițiile

$$|r_1| < |r_2|$$

$$\overline{A}_{m+1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} \overline{A}_{m+n+2} - \frac{1}{r_1}\left[C_{-m} + \frac{r_2}{r_1} C_{-m-1} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n C_{-m-n}\right]; \tag{32}$$

2) în condițiile

$$|r_2| > |r_1|$$

$$\overline{A}_{m+2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} \overline{A}_{m-n+1} + \frac{1}{r_2}\left[C_{-m} + \ldots + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n C_{-m+n}\right], \tag{32'}$$

b) $\eta = +3$

— coeficienții β_k :

$$\beta_1 = -r_1 \cdot e^{i\varphi_0}; \quad \beta_3 = r_2 \cdot e^{i\varphi_0}; \tag{33}$$

— coeficienții Δ_k :

$$\Delta_2 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - r_1^2 - r_2^2}{2\, l_1\, l_2} = \delta_0,$$

$$\Delta_2 = \Delta_{-2} = \frac{r_1\, r_2}{2\, l_1\, l_2} = \delta_2; \tag{34}$$

— coeficienții A_k :

1) în condițiile

$$|r_1| > |r_2|$$

$$\overline{A}_{m+1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} \overline{A}_{m+2n+3} - \frac{1}{r_1}\left[C_{-m} + \ldots + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n C_{-m-2n}\right], \tag{35}$$

2) în condițiile

$$|r_2| > |r_1|$$

$$\overline{A}_{m+3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} \overline{A}_{m-2n+1} + \frac{1}{r_2}\left[C_{-m} + \ldots + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n} C_{-m+2n}\right], \quad (35')$$

c) $\eta = +10$

— coeficienții β_k:

$$\beta_1 = -r_1 \cdot e^{i\varphi_0}; \quad \beta_{10} = r_2 \cdot e^{i\varphi_0}; \quad (36)$$

— coeficienții Δ_k:

$$\Delta_0 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - r_1^2 - r_2^2}{2\, l_1\, l_2} = \delta_0,$$

$$\Delta_9 = \Delta_{-9} = \frac{r_1\, r_2}{2\, l_1\, l_2} = \delta_2; \quad (37)$$

— coeficienții A_k:

1) în condițiile

$$|r_1| > |r_2|$$

$$\overline{A}_{m+1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} \overline{A}_{m+9n+10} - \frac{1}{r_1}\left[C_{-m} + \frac{r_2}{r_1} C_{-m-9} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n} C_{-m-9n}\right]; \quad (38)$$

2) în condițiile

$$|r_2| > |r_1|$$

$$\overline{A}_{m+10} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} \overline{A}_{m-9n+1} + \frac{1}{r_2}\left[C_{-m} + \frac{r_1}{r_2} C_{-m+9} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n} C_{-m+9n}\right], \quad (38')$$

d) $\eta = -2$

— coeficienții β_k:

$$\beta_{-2} = r_2 \cdot e^{i\varphi_0}; \quad \beta_1 = -r_1 \cdot e^{i\varphi_0}; \quad (39)$$

— coeficienții Δ_k:

$$\Delta_0 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - r_1^2 - r_2^2}{2\, l_1\, l_2} = \delta_0,$$

$$\Delta_3 = \Delta_{-3} = \frac{r_1\, r_2}{2\, l_1\, l_2} = \delta_2; \quad (40)$$

— coeficienții A_k:

1) în condițiile

$$|r_1| > |r_2|$$

$$\overline{A}_{m+1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} \overline{A}_{m-3n-2} - \frac{1}{r_1}\left[C_{-m} + \frac{r_2}{r_1} C_{-m+3} + \dots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n} C_{-m+3n}\right]; \tag{41}$$

2) în condițiile

$$|r_2| > |r_1|$$

$$\overline{A}_{m-2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} \overline{A}_{m+3n+1} + \frac{1}{r_2}\left[C_{-m} + \frac{r_1}{r_2} C_{-m-3} + \dots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n} C_{-m-3n}\right] \tag{41'}$$

III. GRUPA MECANISMELOR ISOSCELE

Mecanismele fundamentale pentalatere, precum și categoria celor cu cuplă cinematică dublă la bază, prezintă tipuri particulare caracteristice, rezultate din introducerea unor condiții de egalitate reciprocă între elemente. Astfel, egalitatea manivelelor și, separat, a bielelor la mecanismele cu cinci elemente (precum și în cazul $h = 0$) dă naștere la mecanisme simetrice (isoscele).

Pe baza rezultatelor obținute din soluțiile generale, vom examina cazurile particulare menționate mai sus.

III. a. DUBLU MECANISM BIELĂ-MANIVELĂ EXCENTRIC

Luînd în considerare mecanismele cu cinci elemente articulate (fig. 6) cu $h \neq 0$ și $\eta = -1$, le impunem următoarele condiții de egalitate a elementelor:

$$r_1 = r_2 = r; \quad l_1 = l_2 = l.$$

Se observă că s-a obținut de fapt un mecanism dublu bielă-manivelă cu dezaxarea $\frac{h}{2}$.

Studiul de ansamblu al acestui tip de mecanism prin metoda analizei armonice complexe, datorită funcționării simetrice, ne conduce la rezultate aplicabile direct la mecanismele bielă-manivelă excentrice întîlnite în practică.

Vectorii de poziție complecși față de notațiile adoptate au expresiile

$$z_1 = r \cdot e^{i(\pi/2+\varphi)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi},$$

$$z_2 = h + r \cdot e^{i(\pi/2-\varphi)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{42}$$

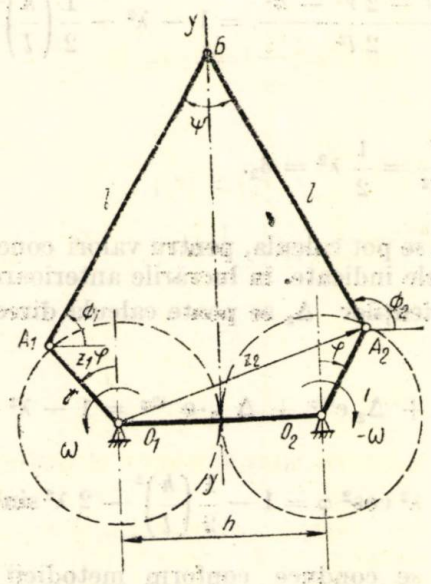


Fig. 6

III. a. 1. Determinarea coeficienților Δ_k

Coeficienții α_k :

$$\alpha_1^{(1)} = r \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = ri\,; \quad \alpha_{-1}^{(2)} = r\, e^{i\frac{\pi}{2}} = ri\,; \quad \alpha_0^{(2)} = h. \tag{43}$$

Coeficienții β_k :

$$\beta_{-1} = r\, e^{i\pi/2} = ri\,; \quad \beta_0 = h\,; \quad \beta_{+1} = -r\, e^{i\pi/2} = -ri. \tag{44}$$

Coeficienții γ se determină din relația generală

$$\gamma_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m}\, \overline{\beta}_k = \beta_{-1+m}\, \overline{\beta}_{-1} + \beta_{0+m}\, \overline{\beta}_0 + \beta_{1+m}\, \overline{\beta}_1,$$

din care rezultă

$$\gamma_0 = h^2 + 2r^2,$$

$$\gamma_1 = \gamma_{-1} = \frac{hr\, e^{-i\varphi_0} - hr\, e^{-i\varphi_0}}{2l^2} = 0, \text{ căci } \varphi_0 = 180°, \tag{45}$$

$$\gamma_2 = \gamma_{-2} = -r^2.$$

Coeficienţii Δ_k vor fi

$$\Delta_{-2} = \frac{r^2}{2\,l^2} = \frac{1}{2}\lambda^2 = \delta_2,$$

$$\Delta_{-1} = 0, \tag{46}$$

$$\Delta_0 = \frac{2\,l - 2\,r^2 - h^2}{2\,l^2} = 1 - \lambda^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{l}\right)^2 = \delta_0,$$

$$\Delta_1 = 0,$$

$$\Delta_2 = \frac{r^2}{2\,l^2} = \frac{1}{2}\lambda^2 = \delta_2.$$

Coeficienţii Δ_k se pot calcula, pentru valori concrete ale elementelor, utilizînd şi diagramele indicate în lucrările anterioare [5].

Pe baza coeficienţilor Δ_k se poate calcula direct unghiul de transmitere Ψ:

$$\cos\Psi = \Delta_0 + \Delta_2\,e^{i2\varphi} + \Delta_{-2}\cdot e^{-i2\varphi} = 1 - \lambda^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{l}\right)^2 +$$

$$+ \lambda^2\cos^2\varphi = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{l}\right)^2 - 2\,\lambda^2\sin^2\varphi. \tag{47}$$

Apoi calculul se conduce conform metodicii indicate [5] — [8], obţinîndu-se coeficienţii D_k, B_k şi C_k,

III. a. 2. Determinarea coeficienţilor A_k

Pentru coeficienţii A_k putem considera ca frecvent cazul cînd excentricitatea $e = h/2$ este mică, deci

$$|r| > h$$

$$\overline{A}_{m+1} = \text{sim}\,b\left[\left(\frac{1}{\xi} + \overline{A}_{-1}\right)^{n+1}\overline{A}_{m-n} + \frac{i}{r}\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{\xi} + C_1\right)^p C_{-(m-p)}\right]. \tag{48}$$

III. b. DUBLU MECANISM BIELĂ-MANIVELĂ CENTRIC

Mecanismele cu cuplă cinematică dublă la bază, deci cu $h = 0$ şi $\eta = -1$ în condiţiile de egalitate ale elementelor:

$r = r_1 = r_2$ şi $l = l_1 = l_2$ şi raportul $\frac{r}{l} = \lambda$, formează mecanisme dublu bielă-manivelă centrice (fig. 7), corespunzătoare clasicelor mecanisme bielă-manivelă. Vom urmări rezolvarea unui asemnea tip de mecanism.

Vectorii de poziție complecși z_1 și z_2 :

$$z_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} \cdot e^{ik} = r \cdot e^{i(\pi/2+\varphi)},$$

$$z_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi} = r \cdot e^{i(\pi/2-\varphi)}. \tag{49}$$

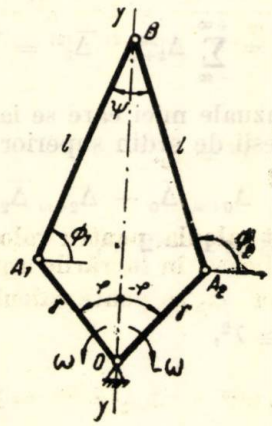


Fig. 7

III. b. 1. Determinarea coeficienților Δ_k

Coeficienții α_k :

$$\alpha_1^{(1)} = r \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad \alpha_{-1}^{(2)} = r\, e^{i\frac{\pi}{2}}. \tag{50}$$

Coeficienții β_k :

$$\beta_1 = -r \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = -r\,i; \quad \beta_{-1} = r\, e^{i\frac{\pi}{2}} = ri. \tag{51}$$

Coeficienții γ_k :

$$\gamma_0 = \beta_{-1}\,\overline{\beta}_{-1} + \beta_1\,\overline{\beta}_1 = 2\,r^2,$$

$$\gamma_1 = \gamma_{-1} = 0,$$

$$\gamma_2 = \gamma_{-2} = \beta_1\,\overline{\beta}_{-1} = -r^2. \tag{52}$$

Coeficienții Δ_k :

$$\Delta_0 = \frac{2\,l^2 - 2\,r^2}{2\,l^2} = 1 - \lambda^2 = \delta_0,$$

$$\Delta_1 = \Delta_{-1} = 0,$$

$$\Delta_2 = \Delta_{-2} = \frac{r^2}{2\,l^2} = \frac{1}{2}\,\lambda^2 = \delta_2. \tag{53}$$

De asemenea, calculul coeficienţilor Δ_k pentru valori concrete ale elementelor mecanismului poate fi efectuat şi cu ajutorul diagramelor [7].

Pentru a exemplifica racordarea metodei generale a analizei armonice complexe [5], [6] a grupelor structurale binare (assurice), la calculul unui tip clasic de mecanism, studiat pînă în prezent ca mecanism izolat, vom continua calculele pînă la obţinerea unor expresii analitice finale.

Astfel vom efectua calculul coeficienţilor de forma

$$\Delta_m^{(2n)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{k+m}^{(2n-2)} \overline{\Delta}_k^{(2)} = \overline{\Delta}_{-m}^{(2n)}.$$

Date fiind valorile uzuale mici care se iau pentru λ, se vor neglija termenii care conţin expresii de ordin superior (mai mari ca λ^3). Astfel

$$\begin{aligned}
&\Delta_m^{(2)} = \Delta_{-2+m} \overline{\Delta}_{-2} + \Delta_{0+m} \overline{\Delta}_0 + \Delta_{2+m} \overline{\Delta}_2,\\
&\Delta_0^{(2)} = 2\,\delta_2^2 + \delta_0^2 \cong 1 - 2\,\lambda^2,\\
&\Delta_1^{(2)} = 0,\\
&\Delta_2^{(2)} = 2\,\delta_0\,\delta_2 \cong \lambda^2,\\
&\Delta_3^{(2)} = 0,\\
&\Delta_4^{(2)} \cong 0\,;
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_m^{(4)} = \Delta_{-2+m}^{(2)} \overline{\Delta}_{-2}^{(2)} + \Delta_{0+m}^{(2)} \overline{\Delta}_0^{(2)} + \Delta_{2+m}^{(2)} \overline{\Delta}_2^{(2)},\\
&\Delta_0^{(4)} = 2\,\Delta_2^{(2)} \overline{\Delta}_2^{(2)} + \Delta_0^{(2)} \overline{\Delta}_0^{(2)} \cong 1 - 4\,\lambda^2,\\
&\Delta_1^{(4)} = 0,\\
&\Delta_2^{(4)} = 2\,\Delta_0^{(2)} \overline{\Delta}_2^{(2)} \cong 2\,\lambda^2,\\
&\Delta_3^{(4)} = 0,\\
&\Delta_4^{(4)} \cong 0\,;
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_m^{(6)} = \Delta_{-2+m}^{(4)} \overline{\Delta}_{-2}^{(2)} + \Delta_{0+m}^{(4)} \overline{\Delta}_0^{(2)} + \Delta_{2+m}^{(4)} \overline{\Delta}_2^{(2)},\\
&\Delta_0^{(6)} = 2\,\Delta_2^{(4)} \overline{\Delta}_2^{(2)} + \Delta_0^{(4)} \overline{\Delta}_0^{(2)} = 1 - 6\,\lambda^2,\\
&\Delta_2^{(6)} = 0,\\
&\Delta_2^{(6)} = \Delta_0^{(4)} \overline{\Delta}_2^{(2)} + \Delta_2^{(4)} \overline{\Delta}_0^{(2)} \cong 3\,\lambda^2,\\
&\Delta_3^{(6)} = 0,\\
&\Delta_4^{(6)} \cong 0.
\end{aligned} \tag{56}$$

În final vom avea coeficenţii de rang $(2n)$ de forma

$$\begin{aligned}
&\Delta_0^{(2n)} \cong 1 - 2\,n\,\lambda^2,\\
&\Delta_1^{(2n)} = 0,\\
&\Delta_2^{(2n)} \cong n\,\lambda^2,\\
&\Delta_3^{(2n)} = 0\\
&\Delta_4^{(2n)} \cong 0.
\end{aligned} \tag{57}$$

III. b. 2. Determinarea coeficienților D_k

$$D_0 = \pm 1 \mp \left[\frac{1}{2}\,\Delta_0^{(2)} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\,\Delta_0^{(4)} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n \cdot n!}\,\Delta_0^{(2n)} \ldots\right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{2}\,(1 - 2\lambda^2) + \frac{1}{8}\,(1 - 4\lambda^2) + \ldots. + \frac{1.3.5.(2n-3)}{2^n \cdot n!}\,(1 - 2n\lambda^2)\right] =$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots.(2n-3)}{2^n \cdot n!}\right) - \left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\,\lambda^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3}{8}\,\lambda^2 + \frac{1.3.5\ldots.(2n-3)}{2^n \cdot n!}\,2n\lambda^2.\right)\right]. \tag{58}$$

Întrucît

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n \cdot n!} = 1,$$

D_0 este exprimat ca o sumă:

$$D_0 = \left(\sum \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n \cdot n!}\,2n\right)\lambda^2. \tag{59}$$

Apoi

$$D_k = \overline{D}_{-k} = \mp\left[\frac{1}{2}\,\Delta_k^{(2)} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\,\Delta_k^{(4)} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n \cdot n!}\,\Delta_k^{(2n)}\right],$$

$$D_1 = \overline{D}_{-1} = 0,$$

$$D_{-2} = D_2 = -\left[\frac{1}{2}\,\lambda^2 + \frac{1}{8}\cdot 2\lambda^2 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n \cdot n!}\,n\lambda^2\right] =$$

$$= \left(\sum \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n \cdot n!}\,n\right)\lambda^2, \tag{60}$$

$$D_3 = \overline{D}_3 = 0,$$

$$D_4 = \overline{D}_{-4} \cong 0.$$

Avînd coeficienții Δ_k, se poate scri valoarea funcției trigonometrice $\cos \Psi$:

$$\cos \Psi = \Delta_0 + \Delta_2\, e^{i2\varphi} + \Delta_{-2}\, e^{-i2\varphi} = 1 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos 2\varphi = 1 - 2\lambda^2 \sin^2 \varphi. \tag{61}$$

din care se deduce

$$\sin \Psi = 2\lambda \sin \varphi\,(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \tag{62}$$

și care prin dezvoltare devine

$$\sin \Psi = 2\lambda \sin \varphi \left[1 - \frac{1}{2}\,\lambda^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{8}\,\lambda^4 \sin^4 \varphi + \ldots\right]. \tag{63}$$

Dar

$$\sin \Psi = D_0 + D_2 e^{i2\varphi} + D_{-2} e^{-i2\varphi} =$$

$$= \left(\sum \frac{1.3.5 \ldots (2n-3)}{2^n \cdot n!} 2n \right) \lambda^2 - 2 \left(\sum \frac{1.3.5 \ldots (2n-3)}{2^n \cdot n!} n \right) \lambda^2 \cos 2\varphi =$$

$$= \left(\sum \frac{1.3.5 \ldots (2n-3)}{2^n \cdot n!} 2n \right) (1 - \cos 2\varphi) \lambda^2. \tag{64}$$

Din egalarea celor două expresii ale funcției trigonometrice $\sin \Psi$ obținem

$$\sum \frac{1.3.5 \ldots (2n-3)}{2^n \cdot n!} 2n = \frac{1}{\lambda \sin \varphi} - \frac{1}{2} \lambda \sin \varphi - \frac{1}{8} \lambda^3 \sin^3 \varphi \ldots \tag{65}$$

Deci coeficienții D_k vor avea expresiile

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{\lambda}{\sin \varphi} - \frac{1}{2} \lambda^3 \sin \varphi \ldots, \\ D_1 &= 0, \\ D_2 &= \overline{D}_{-2} = -\left[\frac{\lambda}{2 \sin \varphi} - \frac{1}{4} \lambda^3 \sin \varphi \ldots \right], \\ D_3 &= 0. \end{aligned} \tag{66}$$

III. b. 4. Determinarea coeficienților B_k

$$B_k = \Delta_k + i D_k$$

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 - \lambda^2 + \left[\frac{\lambda}{\sin \varphi} - \frac{1}{2} \lambda^3 \sin \varphi \right] i, \\ B_1 &= 0, \\ B_2 &= B_{-2} = \frac{1}{2} \lambda^2 - \left[\frac{\lambda}{2 \sin \varphi} - \frac{1}{4} \lambda^3 \sin \varphi \right] i, \\ B_3 &= 0. \end{aligned} \tag{67}$$

III. b. 4. Determinarea coeficienților C_k

$$\begin{aligned} C_0^{(1)} &= l(1 - B_0) = \frac{r^2}{l} - \left(\frac{r}{\sin \varphi} - \frac{1}{2} \lambda^2 r \sin \varphi \right) i, \\ C_1^{(1)} &= -l B_1 = 0, \\ C_2^{(1)} &= -l B_2 = -\frac{1}{2} \frac{r^2}{l} + \left(\frac{r}{2 \sin \varphi} - \frac{1}{4} \lambda^2 r \sin \varphi \right) i, \\ C_3^{(1)} &= -l B_3 = 0. \end{aligned} \tag{68}$$

III. b. 5. Determinarea coeficienților A_k

Coeficienții A_k vor fi de forma

$$\bar{A}_{m+1} = \overline{A}_{m-2n-1} + \frac{\mathrm{i}}{r}[C_{-m} + C_{-m+2} + C_{-m+4} + \ldots + C_{-m+2n}] \tag{69}$$

și, înlocuind valorile respective,

$$\begin{aligned} A_{-1}^{(1)} &= -\frac{1}{2\sin\varphi} + \frac{1}{4}\lambda^2 \sin\varphi + \frac{1}{2}\lambda\,\mathrm{i}, \\ A_0^{(1)} &= 0, \\ A_1^{(1)} &= \frac{1}{2\sin\varphi} - \frac{1}{4}\lambda^2 \sin\varphi - \frac{1}{2}\lambda\,\mathrm{i}, \\ A_2^{(1)} &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{70}$$

Considerînd

$$e^{i\Phi_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi},$$

vom obține

$$\begin{aligned} \cos\Phi_1 &= \lambda \sin\varphi, \\ \sin\Phi_1 &= 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2\varphi. \end{aligned} \tag{71}$$

III. b. 6. Determinarea deplasării punctului B

$$y_B = r\cos\varphi + l\sin\Phi_1 = l\left(\lambda\cos\varphi + 1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right). \tag{72}$$

Expresia (72) este identică cu cea indicată în literatura de specialitate pentru determinarea cursei pistonului unui mecanism bielă-manivelă.

Elemente dimensionale:

IV. APLICAȚII NUMERICE

IV. 1. MECANISM CU PATRU ELEMENTE ARTICULATE

Elemente dimensionale:

$$r_1 = 100\,; \quad l_1 = 500\,; \quad l_2 = 400\,; \quad h = 300.$$

Coeficienţii Δ_k:

$$\Delta_0 = \delta_{01} = \frac{l_1^2 + l_2^2 - h^2 - r_1^2}{2\, l_1\, l_2} = 0{,}77500,$$

$$\Delta_1 = \Delta_{-1} = \delta_1^* = \frac{h\, r_1}{2\, l_1\, l_2} = 0{,}07500.$$

Ceilalţi coeficienţi de ordin superior sînt următorii:

$2n$ \ k	0	1	2	3	4	5
(1)	0,77500	0,07500	—	—	—	—
(2)	0,61189	0,11625	0,00563	—	—	—
(4)	0,40151	0,14356	0,02041	0,00130	—	—
(6)	0,27922	0,13764	0,03155	0,00396	0,00027	0,00001
(8)	0,20305	0,12105	0,03723	0,00687	0,00078	0,00006

Coeficienţii D_k şi B_k:

$D_0 = 0{,}61848$ $\qquad B_0 = 0{,}77500 + 0{,}61848\,i$

$D_1 = -0{,}08941$ $\qquad B_1 = B_{-1} = 0{,}07500 - 0{,}08941\,i$

$D_2 = -0{,}00879$ $\qquad B_2 = B_{-2} = -0{,}00879\,i$

$D_3 = -0{,}00068$ $\qquad B_3 = B_{-3} = -0{,}00068\,i$

$D_4 = -0{,}00005$ $\qquad B_4 = B_{-4} = -0{,}00005\,i$

Coeficienţii C_k:

$C_0^{(1)} = 190 - 247{,}39200\,i$ $\qquad C_0^{(2)} = -12{,}50000 - 309{,}24000\,i$

$C_1^{(1)} = -30 + 35{,}76400\,i$ $\qquad C_1^{(2)} = 37{,}50000 + 44{,}70500\,i$

$C_2^{(1)} = 3{,}51600\,i$ $\qquad C_2^{(2)} = 4{,}39500\,i$

$C_3^{(1)} = 0{,}27200\,i$ $\qquad C_3^{(2)} = 0{,}34000\,i$

$C_4^{(1)} = 0{,}02000\,i$ $\qquad C_4^{(2)} = 0{,}02500\,i$

$C_5^{(1)} = 0{,}00116\,i$ $\qquad C_5^{(2)} = 0{,}00145\,i$

$C_6^{(1)} = 0{,}00004\,i$ $\qquad C_6^{(2)} = 0{,}00006\,i$

Coeficienţii A_k:

$A_4^{(1)} = -0{,}00007\,i$ $\qquad A_4^{(2)} = -0{,}00008\,i$

$A_3^{(1)} = -0{,}00093\,i$ $\qquad A_3^{(2)} = -0{,}00116\,i$

$A_2^{(1)} = -0{,}01203\,i$ $\qquad A_2^{(2)} = -0{,}01504\,i$

$A_1^{(1)} = -0{,}10000 - 0{,}12322\,i$ $\qquad A_1^{(2)} = 0{,}12500 - 0{,}15403\,i$

$A_0^{(1)} = 0{,}60000 + 0{,}78357\,i$ $\qquad A_0^{(2)} = 0{,}97946\,i$

$A_{-1}^{(1)} = 0{,}10000 + 0{,}14198\,i$ $\qquad A_{-1}^{(2)} = 0{,}12500 + 0{,}17747\,i$

$A_{-2}^{(1)} = 0{,}03333 + 0{,}03561\,i$ $\qquad A_{-2}^{(2)} = 0{,}04167 + 0{,}04451\,i$

$A_{-3}^{(1)} = 0{,}01111 + 0{,}01096\,i \qquad A_{-3}^{(2)} = 0{,}01389 + 0{,}01370\,i$

$A_{-4}^{(1)} = 0{,}00370 + 0{,}00359\,i \qquad A_{-4}^{(2)} = 0{,}00463 = 0{,}00448\,i$

$A_{-5}^{(1)} = 0{,}00123 + 0{,}00119\,i \qquad A_{-5}^{(2)} = 0{,}00154 + 0{,}00149\,i$

$A_{-6}^{(1)} = 0{,}00041 + 0{,}00040\,i \qquad A_{-6}^{(2)} = 0{,}00051 + 0{,}00050\,i$

IV. 2. DUBLU MECANISM BIELĂ-MANIVELĂ

Elemente dimensionale : $r = 50$; $l = 200$

$$y_B = l\left(\lambda \cos \varphi + 1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 \cos 2\varphi\right),$$

— pentru $\varphi = 0°$: $y_{max} = l(\lambda + 1) = r + l = 250$;

— pentru $\varphi = 180°$: $y_{min} = l(-\lambda + 1) = -r + l = 150$;

— pentru $\varphi = 30°$; $y_{30°} = l(0{,}25 \cdot 0{,}86 + 1 - \frac{0{,}25^2}{4} + \frac{0{,}25^2}{4} \cdot 0{,}50) = 241{,}40.$

Primită la redacție la 27 martie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. I. I. Artobolevski, N. I. Levitski, S. A. Cerkudinov, *Sintez polskih mehanizmov*, Izd. Fiz. Mat. Lit., Moscova, 1969.
2. I. I. Artobolevski, *Teoria mehanizmov*, Izd. Fiz. Mat. Lit., Moscova, 1959.
3. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, *Contribuții la cinematica diadei* Cebîșev, St. cerc. mec. apl., **10**, *4* (1959).
4. R. C. Bogdan, *Considerații analitice asupra grupelor cinematice* cu două elemente, St. cerc. mec. apl., **15**, *1* (1964).
5. — *Studiul general prin serii armonice complexe asupra mecanismelor cu cinci elemente articulate*. St. cerc. mec. apl., **15**, *2* (1964).
6. — *Cercetarea grupelor assurice în construcția mecanismelor prin serii armonice complexe și metoda mecanoelectronică*, Teză de doctorat. Institutul Politehnic București, 1964.
7. — *Mecanisme cu cinci elemente articulate*. I. *Rapoarte de transmitere pozitive*. St. cerc. mec. apl., **17**, *5* (1964)
8. — *Mecanisme cu cinci elemente articulate*. II. *Rapoarte de transmitere negative*, St. cerc. mec. apl., **17**, *6*. (1964).
9. R. C. Bogdan, T. V. Huncker, *Sistematizarea generală și calculul unitar al mecanismelor fundamentale plane cu cinci și patru elemente*, St. cerc. mec. apl., **24**, *2* (1967)
10. F. Freudenstein, *Harmonic Analysis of Crank-and-Rocker Mechanisms with Application*, J. Appl. Mec., 26, Trans, ASME, S. E., 81 (1959).
11. M. Kirchhof, *Dans Gelenkfünfeck und sein Bewegungsbereich*, Maschinenbautechnik (Getriebetechnik) **12**, *2* (1963).
12. — *Kinematik und Dynamik des fünfgliedigen Zweikurbelgetriebs in analytischer Behandlung*, Dissertation. T. H. Karl-Marx-Stadt, 1966.
13. W. Meyer, zur Capellen, *Harmonische Analyse bei Kurbeltrieben I. Allgemeine Zusammenhänge*, Forschungesberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, 676, Westdeutscher Verlag/ Köln und Opladen, 1959.

14. W. Meyer zur Capellen, Erich Lenk, *Harmonische Analyse bei* Kurbeltrieben. II. Gleichschenklige Getriebe, Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, 803, Westdeutscher Verlag/Köln und Opladen, 1960.
15. W. Meyer zur Capellen, *Die geschränkte Kurbelschleife I. Die* Bewegungsverhältnisse, Forschungsberichte des Landes Nordrheim-Westfalem, 718, Westdeutscher Verlag/Köln und Opleden, 1959.
16. W. Meyer zur Capellen, Walter Rath, *Die geschränkte Kurbelschleife. II. Die harmonische Analyse*, Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, 804, Westdeutscher Verlag Köln und Opladen, 1960.
17. Chr. Pelecudi, R. C. Bogdan, *Contribuţii asupra metodei analitice de cercetare a mecanismelor pe baza variabilelor* complexe. St. cerc. mec. apl., **10**, *2*, (1959).
18. Chr. Pelecudi, R. C. Bogdan, L. Calmaciuc, *Contribuţii la cinematica mecanismului cu patru elemente articulate*, St. cerc. mec. apl., **11**, *2* (1960).
19. D. C. Tao, A. S. Hall, *Analysis of symmetrical five-bar linkages*, Product Engineering, 1952, 23.
20. C. D. Tao, *Die Erzeugung von Bewegung mit mehreren Rasten mit Hilfe des fünfgelenkigen Zweikurbel-Getriebes*, Das Industrieblatt, Febr. 1962.

VIBRAȚII TORSIONALE AUTOPARAMETRICE ÎN TRANSMISIILE MECANICE CU ARTICULAȚII CARDANICE*)

de FL. DUDIȚĂ
Institutul politehnic Brașov

621.85

Se stabilesc ecuațiile vibrațiilor torsionale libere în cazul general al sistemelor mecanice cu n grade de libertate care includ articulații cardanice și se analizează separat sistemul format din doi volanți legați prin transmisie policardanică. Pentru unghiuri nu prea mari în articulațiile cardanice ($\alpha < 20°$), cu suficientă aproximație pentru problemele practice, în primul caz se obține un sistem de ecuații liniare neomogene cu coeficienți periodici, iar în al doilea ecuația Mathieu neomogenă. Pe baza datelor experimentale se arată că pentru depistarea rezonanțelor parametrice principale este suficientă în cazul general analiza sistemului de ecuații diferențiale liniare neomogene cu coeficienți constanți în care factorii perturbatori sînt armonice simple de pulsație 2ω (ω — viteza unghiulară).

În tehnică, după forma ecuațiilor diferențiale, alături de *sistemele neliniare* (ecuații diferențiale neliniare) și *sistemele liniare* (ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți) se disting *sistemele parametrice* (ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili). În majoritatea cazurilor, prin sisteme parametrice se subînțeleg cele descrise de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți periodici. În lucrare, prin vibrații parametrice se înțeleg deci vibrațiile descrise de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți periodici (ecuații Mathieu, Wittaker, Hill etc. [4]). Se cunosc multe cazuri de vibrații ale sistemelor mecanice descrise de ecuații cu coeficienți periodici [1], [6], [7], [10] — [15], [17] — [23].

Dacă schimbarea în timp a parametrilor (variația în timp a coeficienților ecuațiilor) este determinată de o sursă exterioară și independentă de sistem, vibrațiile se numesc *heteroparametrice*, iar dacă această schimbare este determinată de o sursă cuprinsă în sistem și dependentă de acesta, vibrațiile se numesc *autoparametrice* [17].

*) Prezentată la Conferința de mecanică, București, septembrie, 1965.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 25 NR. 4 P. 917–938 BUCUREȘTI 1967

1. SCURT ISTORIC AL PROBLEMEI

Prin transmisii cardanice se înțeleg transmisiile formate în principal din articulații cardanice și arbori. Domeniul de utilizare al acestor transmisii este vast : automobile, locomotive diesel, avioane, elicoptere, nave maritime, mașini-unelte, laminoare, mașimi agricole, utilaj petrolier etc. [10].

Apariția vibrațiilor torsionale autoparametrice în transmisiile cardanice este condiționată de asincronismul periodic care caracterizează articulația cardanică.

Böhm [2], studiind teoretic urmările asincronismului articulațiilor cardanice asupra solicitărilor la torsiune ale arborilor transmisiei bicardanice a locomotivei diesel, a ajuns la ecuația Mathieu neomogenă. B. Porter [19], studiind teoretic vibrațiile torsionale ale unui sistem simplu (un volant antrenat prin doi arbori legați printr-o articulație cardanică Hooke), a ajuns la o ecuație diferențială liniarizată, neomogenă, cu coeficienți periodici, și a studiat prin metode aproximative stabilitatea soluțiilor acestei ecuații. Ulterior [21] a revenit la aceeași problemă, cercetînd-o sub aspect neliniar. Pasquarelli [18] a analizat efectul articulațiilor cardanice asupra vibrațiilor torsionale în transmisia cu două articulații a locomotivei diesel. În lucrare există inexactități privitoare la cinematica transmisiei bicardanice. Aceeași problemă este reluată de Dornig [6], care, analizînd teoretic instabilitatea vibrațiilor torsionale ale unui sistem disipativ simplificat, cauzate de transmisia bicardanică sincronă, a ajuns la ecuația Mathieu omogenă. Bossler și Flannelly [3] au semnalat urmările asincronismului transmisiilor cardanice asupra vibrațiilor torsionale în sistemul de acționare al turbinelor (V/STOL) și al elicopterelor, subliniind importanța montării corecte a articulațiilor cardanice.

În lucrarea [7], autorul a cercetat teoretic vibrațiile torsionale cauzate de asincronismul remanent (analizînd amănunțit și sursele de erori cinematice) în transmisia cardanică a automobilului. Concluziile teoretice (existența vibrațiilor torsionale periculoase) au fost verificate experimental pe un model fizic. În monografia [10] sînt analizate multiple aspecte ale vibrațiilor auto- și heteroparametrice (torsionale, flexionale, laterale etc.) existente în transmisiile cardanice. În această lucrare,

a) se deduc ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor torsionale în cazul general al sistemelor cu n-grade de libertate care includ articulații cardanice, subliniindu-se aspectul neliniar la problemei;

b) se analizează separat sistemul format din doi volanți legați prin transmisia cu n-articulații cardanice și, pentru acest caz,

c) se prezintă vibrogramele, înregistrate pe un model fizic bimasic, care confirmă (în concordanță cu unele cercetări anterioare [2], [3], [7], [10]), existența a două domenii de instabilitate (dintre care unul principal), care prezintă interes pentru problemele practice.

2. ELEMENTE DIN CINEMATICA MECANISMELOR CARDANICE

Respectînd notațiile din figura 1, legea de transmitere a articulației cardanice este

$$\theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\cos \alpha_1} \operatorname{tg} \varphi_1\right), \tag{1}$$

din care se deduce

$$\theta_1 - \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{(1 - \cos \alpha_1) \operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}. \tag{2}$$

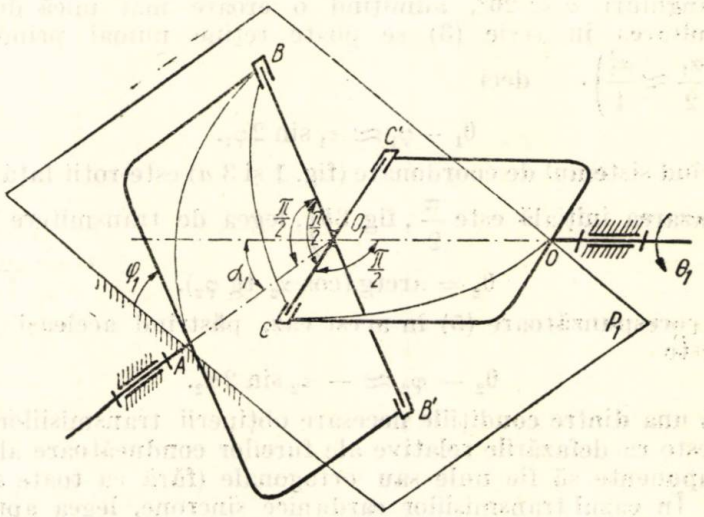


Fig. 1

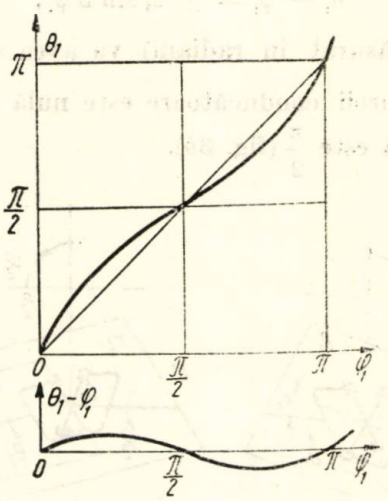


Fig. 2

Graficele funcțiilor (1) și (2) sînt arătate în figura 2. Funcția (2) de perioadă π fiind continuă și cu variație mărginită (fig. 2), convergența seriei Fourier este asigurată. Dezvoltînd (2) în serie Fourier, se obține

$$\theta_1 - \varphi_1 = \varepsilon_1 \sin 2\varphi_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 \sin 4\varphi_1 + \frac{1}{3} \varepsilon_1^3 \sin 6\varphi_1 + \ldots, \tag{3}$$

în care

$$\varepsilon_1 = \frac{1 - \cos \alpha_1}{1 + \cos \alpha_1} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_1}{2}. \tag{4}$$

Pentru unghiuri $\alpha < 20°$, admițînd o eroare mai mică decît 0,1%, din dezvoltarea în serie (3) se poate reține numai primul termen $\left(\varepsilon_1 = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_1}{2} \approx \frac{\alpha_1^2}{4}\right)$, deci

$$\theta_1 - \varphi_1 \approx \varepsilon_1 \sin 2\varphi_1. \tag{5}$$

În cazul cînd sistemul de coordonate (fig. 1 și 3 *a*) este rotit față de primul cu $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{defazarea inițială este } \frac{\pi}{2}, \text{ fig. } 3b\right)$, legea de transmitere (1) devine

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} (\cos \alpha_2 \operatorname{tg} \varphi_2). \tag{6}$$

Expresia corespunzătoare (5) în acest caz, păstrînd aceleași premize și notații, este

$$\theta_2 - \varphi_2 \approx - \varepsilon_2 \sin 2\varphi_2. \tag{7}$$

Se știe că una dintre condițiile necesare obținerii transmisiilor cardanice sincrone este ca defazările relative ale furcilor conducătoare ale articulațiilor componente să fie nule sau ortogonale (fără ca toate să fie nule) [9], [10]. În cazul transmisiilor cardanice sincrone, legea aproximativă de transmitere pentru o articulație oarecare va fi deci de forma

$$\theta_i - \varphi_i = \pm \varepsilon_i \sin 2\varphi_i, \tag{8}$$

în care $\varepsilon_i \approx \frac{\alpha_i^2}{4}$ (α_i măsurat în radiani) va avea semnul plus (5) cînd defazarea inițială a furcii conducătoare este nulă (fig. 3 *a*) și minus (7) cînd defazarea inițială este $\frac{\pi}{2}$ (fig. 3*b*).

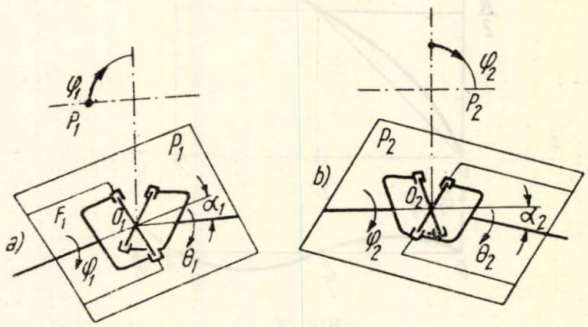


Fig. 3

3. MODELAREA SISTEMELOR MECANICE CARE INCLUD MECANISME

Cunoscînd apriori efectul stabilizator al frecărilor vîscoase în sistemele liniare, în continuare se vor considera sistemele liniare conservative.

3.1. *Sistem polimasic care nu include mecanisme.* Ecuațiile vibrațiilor torsionale în cazul sistemului mecanic format din mai mulți volanți montați pe același arbore (fig. 4), adoptînd notațiile clasice : J_i — mo-

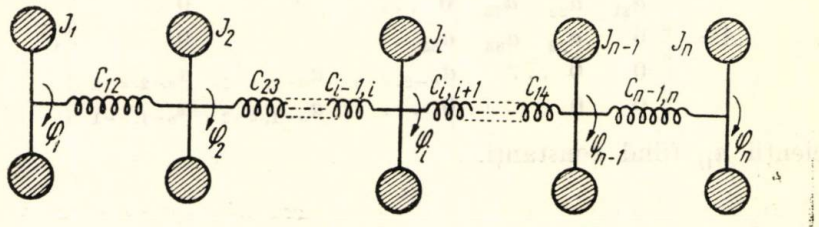


Fig. 4

mente de inerție mecanice ; φ_i — deplasări unghiulare ; $c_{i,i+1}$ — rigidități la torsiune, sînt

$$\begin{aligned}
&J_1\ddot{\varphi}_1 - c_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,\\
&J_2\ddot{\varphi}_2 + c_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) - c_{23}(\varphi_3 - \varphi_2) = 0,\\
&\cdots\\
&J_i\ddot{\varphi}_i + c_{i-1,i}(\varphi_i - \varphi_{i-1}) - c_{i,i+1}(\varphi_{i+1} - \varphi_i) = 0,\\
&\cdots\\
&J_n\ddot{\varphi}_n + c_{n-1,n}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Știind că în astfel de cazuri una dintre pulsațiile propri ale sistemului este nulă, se pot adopta ca noi variabile deformațiile unghiulare. După unele transformări liniare, sistemul (9) se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned}
&\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 + c_{12}\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{c_{23}}{J_2}(\varphi_3 - \varphi_2) = 0,\\
&\ddot{\varphi}_3 - \ddot{\varphi}_2 - c_{12}\frac{1}{J_2}(\varphi_2 - \varphi_1) + c_{23}\left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_3}\right)(\varphi_3 - \varphi_2) - \frac{c_{34}}{J_3}(\varphi_4 - \varphi_3) = 0,\\
&\cdots\\
&\ddot{\varphi}_n - \ddot{\varphi}_{n-1} - \frac{c_{n-2,n-1}}{J_{n-1}}(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + c_{n-1,n}\left(\frac{1}{J_{n-1}} + \frac{1}{J_n}\right)(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Introducînd ca variabile

$$x_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i ; \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{11}$$

și adoptînd scrierea matricială a sistemelor de ecuații, se obține

$$\ddot{X} + A\,X = 0, \tag{12}$$

în care $\ddot{X}$ și X sînt vectori $(n-1)$ — dimensionali, iar A este matrice $(n-1) \times (n-1)$ de forma

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \ldots & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \ldots & & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \ldots & & 0 \\ 0 & 0 \ldots & & a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & & 0 \ldots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

coeficienții a_{ij} fiind constanți.

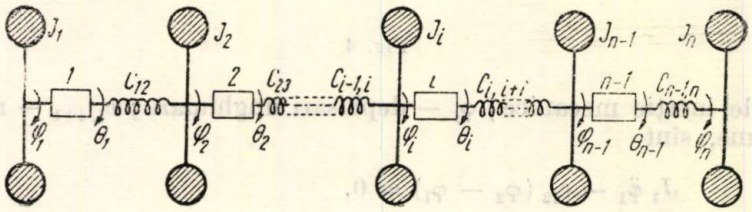


Fig. 5

Vibrațiile torsionale libere ale sistemului format din n-volanți montați pe același arbore (fig. 4) sînt descrise deci de un sistem de $n-1$ ecuații diferențiale liniare de ordinul doi cu coeficienți constanți (12). La astfel de sisteme se ajunge cînd se analizează aproximativ vibrațiile torsionale în arborii cotiți, turbine etc.

3.2. *Sistem polimasic care include mecanisme.* Transmisiile unei importante clase de mașini, în scopul studierii vibrațiilor torsionale, se pot modela ca în figura 5. Se consideră că mecanismele (reprezentate simbolic prin dreptunghiuri) care transmit și transformă în general mișcarea au elementele componente rigide (mecanisme dezmodrome). În această premisă, legile de transmitere sînt cunoscute :

$$\theta_i = \theta_i(\varphi_i); \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{14}$$

Sistemul de ecuații pentru astfel de sisteme mecanice, ținînd seama de condițiile de legătură (14), este

$$\begin{aligned} &J_1 \ddot{\varphi}_1 - c_{12}(\varphi_2 - \theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi_1} = 0, \\ &J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_{12}(\varphi_2 - \theta_1) - c_{23}(\varphi_3 - \theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial \varphi_2} = 0, \\ &\vdots \\ &J_i \ddot{\varphi}_i + c_{i-1,i}(\varphi_i - \theta_{i-1}) - c_{i,i+1}(\varphi_{i+1} - \theta_i) \frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_i} = 0, \\ &\vdots \\ &J_n \ddot{\varphi}_n + c_{n-1,n}(\varphi_n - \theta_{n-1}) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

3.2.1. *Sistem polimasic cu mecanisme sincrone.* Caracteristic pentru mecanismele sincrone este că legile de mișcare la intrarea și la ieșirea din mecanism coincid, adică

$$\theta_i(t) \equiv \varphi_i(t); \quad i = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Ca exemple de mecanisme sincrone se amintesc articulațiile universale sincrone (homocinetice) Bendix-Weiss, Rzeppa, articulațiile cardanice duble cu dispozitiv de autocentrare etc. [10]. În acest caz, deoarece $\frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_i} \equiv 1$; $i = 1, 2, \ldots$, sistemul (15) se transformă în sistemul (9). Rezultă că vibrațiile torsionale libere în sistemele polimasice conservative cu mecanisme sincrone sînt descrise de sistemul de ecuații diferențiale omogene de ordinul doi cu coeficienți constanți de forma (12).

3.2.2. *Sistem polimasic cu mecanisme uniforme.* Dacă legile de transmitere (14) ale mecanismelor sînt de forma

$$\theta_i = k_i \varphi_i; \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

k_i fiind mărimi constante, mecanismele se numesc uniforme. Ca exemple de mecanisme uniforme se amintesc mecanismele cu roți dințate (reductoare, cutii de viteze etc.). În acest caz, deoarece $\frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_i} = k_i$; $i=1, 2, \ldots$, sistemul (15) devine liniar cu coeficienți constanți, a cărui formă matriceală este (12), în care numai valorile coeficienților constanți a_{ij} se schimbă. La astfel de sisteme se ajunge cînd se studiază vibrațiile torsionale ale transmisiilor mașinilor care conțin cutii de viteze și reductoare.

3.2.3. *Sistem polimasic cu mecanisme periodice.* Dacă legile de transmitere (14) ale mecanismelor sînt funcții periodice,

$$\theta_i = \theta_i(\varphi_i) = \theta_i(\varphi_i + \Phi); \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

mecanismele se numesc periodice (sau, uneori, neuniforme). În aceste cazuri, sistemul de ecuații (15) este neliniar, deci vibrațiile torsionale sînt neliniare [11], [21], [23]. Studiind stabilitatea soluțiilor sistemului (ecuații în variații), se ajunge la sisteme de ecuații liniare cu coeficienți periodici de forma

$$\ddot{X} + (A + B(t)) X = 0, \tag{19}$$

în care matricea pătratică A are coeficienții constanți, iar matricea pătratică $B(t)$ este periodică în t de perioadă T — $B(t) = B(t + T)$.

În concluzie, studiul vibrațiilor torsionale libere în sistemele mecanice polimasice fără mecanisme (fig. 4), cu mecanisme sincrone și uniforme conduce la sisteme de ecuații diferențiale omogene de ordinul doi cu coeficienți constanți asemănătoare, iar în cele cu mecanisme periodice la sisteme de ecuații diferențiale omogene de ordinul doi neliniare, pentru care, studiind stabilitatea soluțiilor, se ajunge la sisteme liniare cu coeficienți periodici de forma (19).

4. SISTEM POLIMASIC CU ARTICULAȚII CARDANICE

Articulația cardanică (fig. 1) este un caz particular de mecanism periodic. Legea de trasmitere pentru o articulație oarecare a mecanismului policardanic sincron este funcție periodică, care în primă aproximație (2), (5), (8) are expresia

$$\theta_i = \varphi_i + \varepsilon_i \sin 2\varphi_i, \tag{20}$$

deci

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_i} = 1 + 2\,\varepsilon_i \cos 2\,\varphi_i. \tag{21}$$

Deoarece în relațiile (20), (21) mărimile ε_i (4), (8) sînt mici (parametrii mici), factorii care conțin pe ε_i^2, ε_i^3 etc. fiind neglijați, sistemul de ecuații (15) obținut prin considerarea dependentelor (20), (21) este cvasiliniar (pentru $\varepsilon_i = 0$; $i = 1,2,\ldots$ sistemul devine liniar cu coeficienți constanți).

Procedînd prin analogie cu cazul precedent analizat (10) (fig. 4) în scopul introducerii ca variabile a deformațiilor unghiulare, pornind de la sistemul (15), se obțin (vezi fig. 6) relațiile:

$$\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{c_{12}}{J_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi_1} + \frac{c_{12}}{J_2}\right)(\varphi_2 - \theta_1) = 0,$$

$$\ddot{\varphi}_3 - \ddot{\varphi}_2 - \frac{c_{12}}{J_2}(\varphi_2 - \theta_1) + \left(\frac{c_{23}}{J_2}\frac{\partial \theta_2}{\partial \varphi_2} + \frac{c_{23}}{J_3}\right)(\varphi_3 - \theta_2) - \frac{c_{34}}{J_3}(\varphi_4 - \theta_3)\frac{\partial \theta_3}{\partial \varphi_3} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\ddot{\varphi}_i - \ddot{\varphi}_{i-1} - \frac{c_{i-2,i-1}}{J_{i-1}}(\varphi_{i-1} - \theta_{i-2}) + \left(\frac{c_{i-1,i}}{J_{i-1}}\frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial \varphi_{i-1}} + \frac{c_{i-1,i}}{J_i}\right)(\varphi_i - \theta_{i-1}) - \tag{22}$$

$$- \frac{c_{i,i+1}}{J_i}(\varphi_{i+1} - \theta_i)\frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_i} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\ddot{\varphi}_n - \ddot{\varphi}_{n-1} - \frac{c_{n-2,n-1}}{J_{n-1}}(\varphi_{n-1} - \theta_{n-2}) + \left(\frac{c_{n-1,n}}{J_{n-1}}\frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial \varphi_{n-1}} + \frac{c_{n-1,n}}{J_n}\right)(\varphi_n - \theta_{n-1}) = 0.$$

Postulînd micile oscilații în scopul liniarizării sistemului, se admite

$$\varphi_i = \omega t + \varepsilon_i f(t); \quad f_i(t) = f_i(t + T).$$

În această ipoteză, reținînd numai factorii liniari în ε_i, rezultă următoarea aproximare a expresiilor (20), (21):

$$\theta_i - \varphi_i \approx \varepsilon_i \sin 2\omega t, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_i} = 1 + 2\varepsilon_i \cos 2\omega t. \tag{24}$$

Se introduc ca variabile

$$x_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i; \quad i = 1,2,\ldots n-1 \tag{25}$$

şi, ţinînd seama de (23), se observă că

$$\varphi_{i+1} - \theta_i = (\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (\theta_i - \varphi_i) = x_i - \varepsilon_i \sin 2\omega t. \tag{26}$$

Din (26) rezultă că între deformaţia unghiulară efectivă $(\varphi_{i+1} - \theta_i)$ şi variabila aleasă există o relaţie liniară. Pornind de la sistemul (22), ţinînd seama

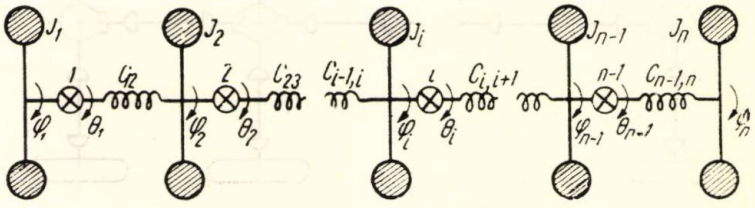


Fig. 6

de (24), (25) şi (26), se obţine un sistem de ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi periodici, care, în scriere matriceală, are forma

$$\ddot{X} + (A + \varepsilon B \cos 2\omega t) X = \varepsilon H \sin 2\omega t, \tag{27}$$

unde $\ddot{X}$, X sînt vectori $(n-1)$ — dimensionali, A este matricea $(n-1) \times (n-1)$ cu coeficienţi constanţi de tipul (13), iar

$$\varepsilon B = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 b_{11} & \varepsilon_2 b_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 b_{22} & \varepsilon_3 b_{23} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 b_{33} & \varepsilon_4 b_{34} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_{n-1} \cdot b_{n-1,\,n-1} \end{Vmatrix} \tag{28}$$

$$\varepsilon H = \begin{Vmatrix} h_1 & (\varepsilon_1, & \varepsilon_2) \\ h_2 & (\varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3) \\ h_3 & (\varepsilon_2, & \varepsilon_3, & \varepsilon_4) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ h_{n-1} & (\varepsilon_{n-2}, & \varepsilon_{n-1}) \end{Vmatrix}; \qquad \varepsilon_i = \frac{\alpha_i^2}{4}; \qquad i = 1,2,\ldots n-1. \tag{29}$$

Din această analiză rezultă că vibraţiile torsionale libere ale sistemelor polimasice policardanice, în care unghiurile dintre arbori nu sînt prea mari ($\alpha_i < 20°$), pot fi descrise în primă aproximaţie de un sistem de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi periodici neomogene de tipul (27). Se observă că, dacă articulaţiile cardanice ($\varepsilon_i \neq 0$) se înlocuiesc cu articulaţii universale sincrone de tip Weiss, Rzeppa etc. ($\varepsilon_i = 0$), sistemul (27) degenerează în sistemul liniar omogen cu coeficienţi constanţi (12).

La astfel de sisteme de ecuații (27) se ajunge cînd se studiază în primă aproximație vibrațiile torsionale în transmisiile de forță ale automobilelor (fig. 7), locomotivelor diesel (fig. 8) și în general ale autovehicolelor cu transmisii cardanice [10].

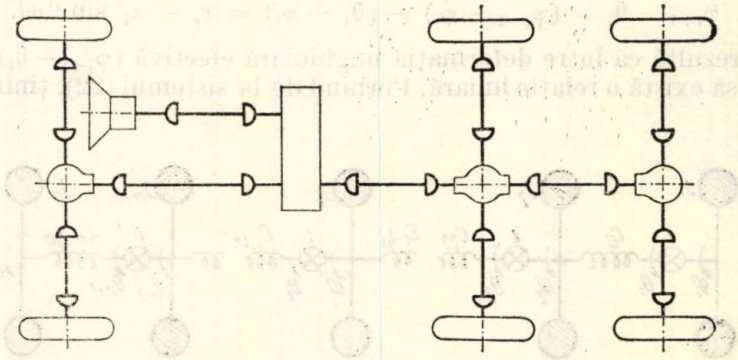


Fig. 7.

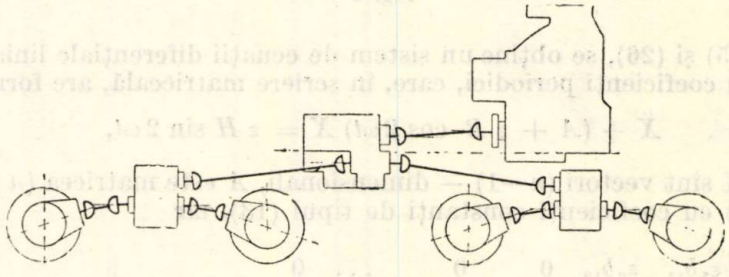


Fig. 8

5. SISTEM BIMASIC CU TRANSMISIE POLICARDANICĂ

De multe ori în aplicațiile practice transmisiile mașinilor se modelează prin sisteme bimasice, urmărindu-se determinarea fie a pulsației proprii fundamentale (în cazul sistemelor liniare [8]), fie a domeniilor principale de instabilitate (în cazul sistemelor neliniare sau liniare parametrice). De aceea se analizează separat acest caz particular (fig. 9).

Pornind de la cazul general analizat (15), în care se impune $J_i = 0$; $i = 2,3,\ldots\ n-1$, se obține sistemul de ecuații

$$\begin{aligned}
&J_1\ddot{\varphi}_1 - c_{12}(\varphi_2 - \theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi_1} = 0,\\
&c_{12}(\varphi_2 - \theta_1) - c_{23}(\varphi_3 - \theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial\varphi_2} = 0,\\
&\vdots\\
&c_{n-2,n-1}(\varphi_{n-1} - \theta_{n-2}) - c_{n-1,n}(\varphi_n - \theta_{n-1})\frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial\varphi_{n-1}} = 0,\\
&J_n\ddot{\varphi}_n + c_{n-1,n}(\varphi_n - \theta_{n-1}) = 0,
\end{aligned} \tag{30}$$

din care, după înlocuiri evidente, se obține

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 - c_{n-1,n}(\varphi_n - \theta_{n-1}) \prod_1^{n-1} \frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_i} = 0,$$
$$J_n \ddot{\varphi}_n + c_{n-1,n}(\varphi_n - \theta_{n-1}) = 0. \tag{31}$$

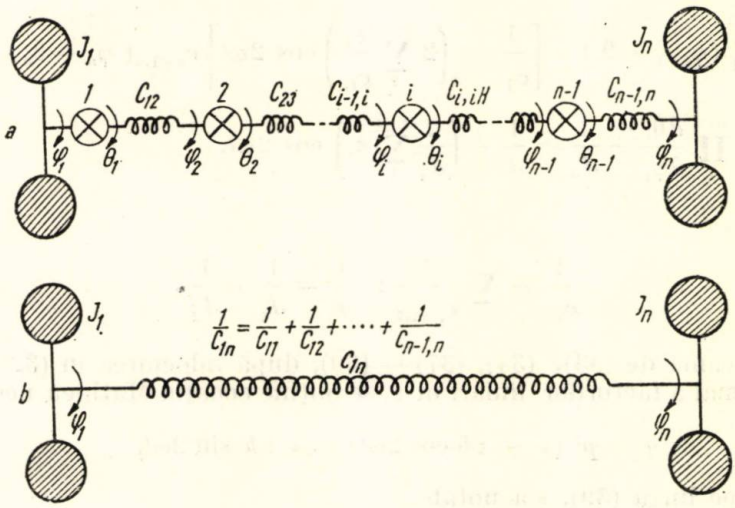


Fig. 9

În scopul introducerii deformației unghiulare ca variabilă, procedînd prin analogie cu (22), din (31) se obține

$$\ddot{\varphi}_n - \ddot{\varphi}_1 + c_{n-1,n}(\varphi_n - \theta_{n-1}) \left(\frac{1}{J_1} \prod_1^{n-1} \frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_i} + \frac{1}{J_n} \right) = 0. \tag{32}$$

Se notează

$$y = \varphi_n - \varphi_1 = \sum_1^{n-1} (\theta_i - \varphi_i) + \sum_1^{n-1} (\varphi_{i+1} - \theta_i). \tag{33}$$

În ipoteza premiselor adoptate care conduc la relațiile aproximative (23), (24), se obține

$$\sum_1^{n-1} (\theta_i - \varphi_i) = \sum_1^{n-1} \varepsilon_i \sin 2\omega t = \left(\sum_1^{n-1} \varepsilon_i \right) \sin 2\omega t, \tag{34}$$

$$\sum_1^{n-1} (\varphi_{i+1} - \theta_i) = \left(\frac{1}{c_{12}} \prod_2^{n-1} \frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_i} + \frac{1}{c_{23}} \prod_3^{n-1} \frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_i} + \cdots \frac{1}{c_{n-2,n-1}} \frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial \varphi_{n-1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{c_{n-1,n}} \right) c_{n-1,n}(\varphi_n - \theta_{n-1}). \tag{35}$$

Conform relațiilor aproximative (24), reținînd termenii liniari în ε_i, rezultă aproximarea

$$\prod_{i}^{i+k} \frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_i} = \prod_{i}^{i+k} (1 + 2\varepsilon_i \cos 2\omega t) \approx 1 + \left(2 \sum_{i}^{i+k} \varepsilon_i\right) \cos 2\omega t. \tag{36}$$

Ținînd seama de (36), după înlocuiri în (35), rezultă

$$\sum_{1}^{n-1} (\varphi_{i+1} - \theta_i) = \left[\frac{1}{c_{1n}} + \left(2 \sum_{2}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{c_{1,i}}\right) \cos 2\omega t\right] c_{n-1,n}(\varphi_n - \theta_{n-1}), \tag{37}$$

$$\frac{1}{J_1} \prod_{1}^{n-1} \frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi_i} + \frac{1}{J_n} = \frac{1}{J} + \left(\frac{2}{J_1} \sum_{1}^{n-1} \varepsilon_i\right) \cos 2\omega t, \tag{38}$$

unde

$$\frac{1}{c_{1,i}} = \sum_{2}^{i} \frac{1}{c_{i-1,i}}; \quad \frac{1}{J} = \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}. \tag{39}$$

Ținînd seama de (33), (34), (37) — (39), după înlocuirea în (32) și reținerea numai a factorilor liniari în ε_i se obține ecuația Mathieu neomogenă

$$\ddot{y} + p^2 (1 + \varepsilon b \cos 2\omega t)\, y = \varepsilon h \sin 2\omega t, \tag{40}$$

în care, pe lîngă (39), s-a notat

$$p^2 = \frac{c_{1n}}{J}; \quad \varepsilon b = 2\left(\frac{J}{J_1} \sum_{1}^{n-1} \varepsilon_i - c_{1n} \sum_{2}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{c_{1,i}}\right); \quad \varepsilon h = p^2 \sum_{1}^{n-1} \varepsilon_i. \tag{41}$$

În urma acestei analize, rezultă că vibrațiile torsionale libere ale sistemelor mecanice reductibile la sistemele bimasice, care includ articulații cardanice în care unghiurile dintre arbori α_i nu sînt prea mari ($\alpha_i < 20°$), pot fi descrise în primă aproximație, în cazul general, de ecuația Mathieu neomogenă (40).

Din cinematica transmisiilor cardanice [9], [10], pornind de la condițiile pentru unghiurile α_i dintre arborii cardanici, necesare realizării mișcării sincrone a arborilor extremali, în ipoteza solidului rigid, se deduce că pentru transmisiile cardanice sincrone suma algebrică a parametrilor $\varepsilon_i \left(\varepsilon_i = \frac{\alpha_i^2}{4};\ i = 1,2,...\right)$ este nulă ($\Sigma \varepsilon_i = 0$), de exemplu transmisiile tricardanice sincrone din figura 10 *a*,*b*,*c*. În cazul transmisiilor cardanice, cu toate articulațiile sinfazate, realizarea sincronismului nefiind posibilă [9], [10], suma algebrică a acelorași parametri ε_i totdeauna nenulă ($\Sigma \varepsilon_i \neq 0$; se exclude cazul banal $\varepsilon_i = 0$); de exemplu transmisia tricardanică cu toate articulațiile sinfazate din figura 10 *d*.

Analizînd ecuația (40) în lumina acestor precizări privitoare la cinematica transmisiilor policardanice, se poate conchide că vibrațiile torsionale libere în sistemele mecanice bimasice care includ transmisii policardanice asincrone ($\Sigma \varepsilon_i \neq 0$) sînt descrise în primă aproximație de

ecuația Mathieu neomogenă (40), iar în cele care includ transmisii policardanice sincrone ($\Sigma \varepsilon_i = 0$) de ecuația Mathieu omogenă

$$\ddot{y} + p^2 (1 + \varepsilon b' \cos 2\omega t)\, y = 0, \tag{42}$$

obținută prin particularizarea ecuației (40).

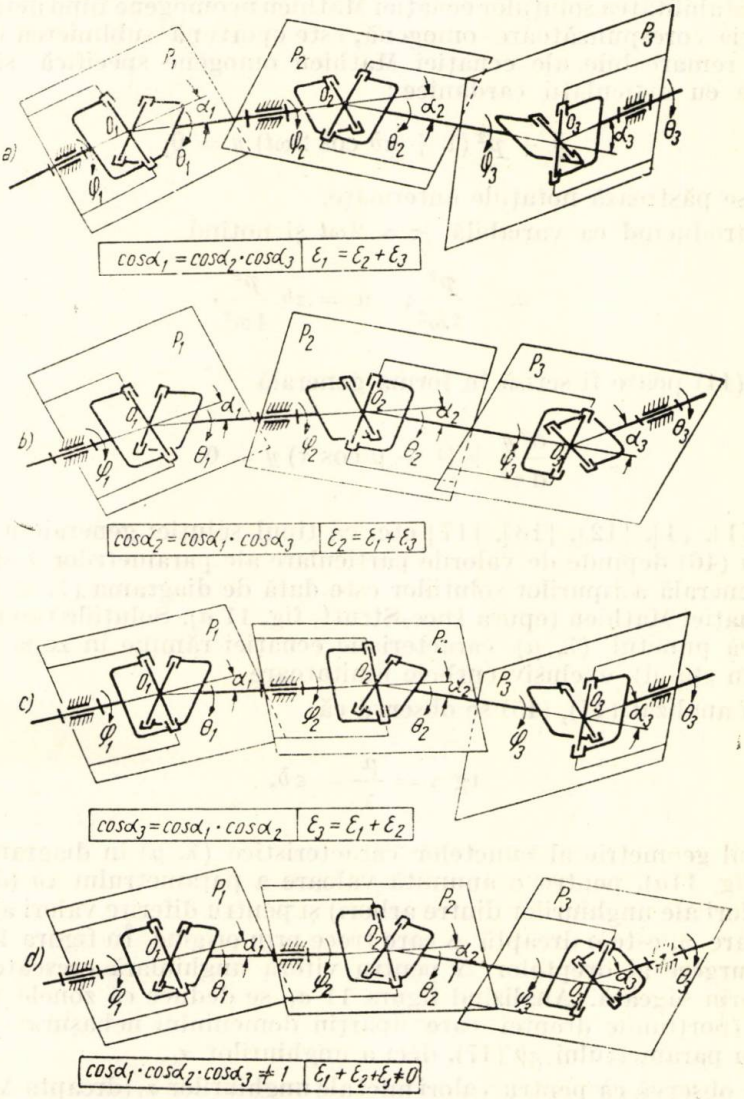


Fig. 10

Comparînd (40) și (42) cu cazul în care transmisiile sînt formate din articulații universale sincrone-homocinetice ($\varepsilon_i = 0$; $i = 1,2,\ldots$ $\ldots\ n-1$; fig. 9*b*), deci cînd vibrațiile torsionale libere sînt descrise de cunoscuta ecuație omogenă cu coeficienți constanți

$$y + p^2 y = 0, \tag{43}$$

rezultă că existența articulațiilor cardanice și a arborilor elastici cauzează totdeauna în timpul rotirii vibrații torsionale parametrice, ale căror amplitudini pot deveni nepermis de mari în zonele de instabilitate (rezonanțe parametrice).

Instabilitatea soluțiilor ecuației Mathieu neomogene fiind determinată de ecuația corespunzătoare omogenă, este oportună sublinierea unor proprietăți remarcabile ale ecuației Mathieu omogene specifică sistemelor bimasice cu articulații cardanice :

$$\ddot{y} + p^2 (1 + \varepsilon b \cos 2\omega t)\, y = 0, \tag{44}$$

în care se păstrează notațiile anterioare.

Introducînd ca variabilă $\tau = 2\omega t$ și notînd

$$\lambda = \frac{p^2}{4\omega^2}; \quad \mu = \varepsilon b \frac{p^2}{4\omega^2}, \tag{45}$$

ecuația (44) poate fi scrisă în forma generală

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\tau^2} + (\lambda + \mu \cos \tau)\, y = 0. \tag{46}$$

Se știe [1], [4], [12], [13], [17] etc. că tipul soluției generale a ecuației Mathieu (46) depinde de valorile particulare ale parametrilor λ și μ. Imaginea generală a tipurilor soluțiilor este dată de diagrama (λ, μ) a stabilității ecuației Mathieu (epura Ince-Strutt, fig. 11 *a*). Soluțiile rămîn mărginite dacă punctul (λ, μ) caracteristic ecuației rămîne în zona haşurată (domeniu stabil), exclusiv curbele limitatoare

În cazul analizat (44), (45) se observă că

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\mu}{\lambda} = \varepsilon b, \tag{47}$$

deci locul geometric al punctelor caracteristice (λ, μ) în diagrama stabilității (fig. 11*a*), pentru o anumită valoare a parametrului εb (deci anumite valori ale unghiurilor dintre arbori) și pentru diferite valori ale vitezei unghiulare ω, este o dreaptă Δ care trece prin origine. În figura 12, sensul de parcurgere al dreptelor Δ pentru viteza unghiulară crescătoare este arătat prin săgeată. Analizînd figura 11 *a*, se deduce că zonele de instabilitate (porțiunile dreptei care aparțin domeniului nehaşurat) cresc cu creșterea parametrului εb (47), deci a unghiurilor α_i.

Se observă că pentru valori mici ale unghiurilor α_i (dreapta Δ_1, fig. 12) prezintă importanță practică numai două domenii din vecinătatea valorilor (fig. 12 *b*) :

$$\lambda = 0{,}25\,;\ 1. \tag{48}$$

Dacă se ține seama și de amortizarea vîscoasă a sistemului, de care s-a făcut abstracție în stabilirea ecuațiilor (40), (42), (44), domeniile stabilității soluțiilor se lărgesc cu creșterea coeficientului de amortizare ρ

(domeniile haşurate se lărgesc pînă la curbele de amortizare ρ), ceea ce duce la micşorarea (uneori dispariţia completă) a zonelor de instabilitate (fig. 12 *b*) [6], [12], [16].

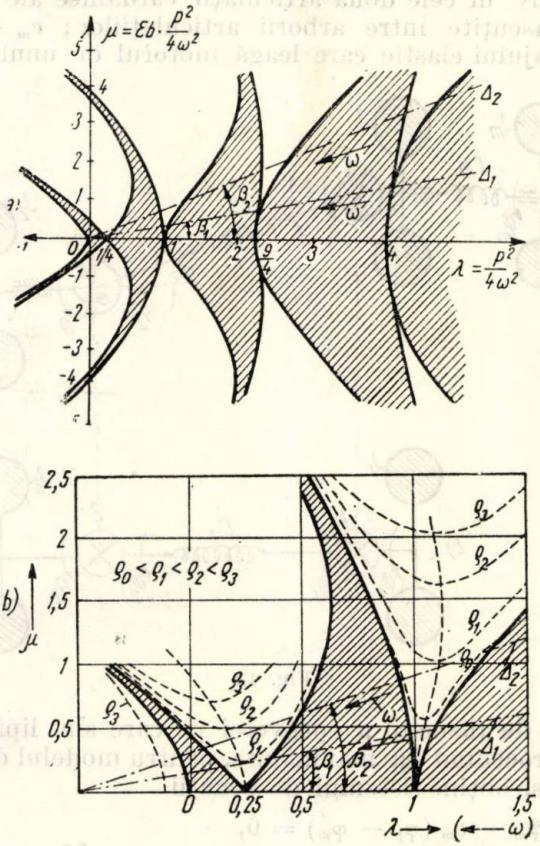


Fig. 11

6. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE

Verificarea existenţei vibraţiilor torsionale parametrice în sistemele care includ articulaţii cardanice a fost făcută pe o instalaţie formată din doi volanţi, legaţi prin o transmisie bicardanică. Mişcarea se transmite sistemului de un motor electric prin intermediul unui cuplaj foarte elastic ($c_m \ll c_{12}$) (fig. 12).

În instalaţie există posibilitatea variaţiei unghiurilor dintre arbori (α_1 şi α_2), a defazării furcilor arborelui intermediar, a turaţiei şi a rigidităţii la răsucire prin schimbarea epruvetelor. În experienţe s-a înregistrat pe peliculă, cu ajutorul traductoarelor tensometrice, deformaţia epruvetei, turaţia şi baza de timp [1]). Modelul dinamic al instalaţiei este

[1]) Experienţele au fost efectuate de autor în colaborare cu un grup de cercetători de la Centrul de mecanică a solidelor din Bucureşti, utilizînd aparatura acestui institut.

arătat în figura 12*a*, unde s-au adoptat următoarele notații : J_m — momentul de inerție al rotorului motorului electric ; J_1, J_2 — momente de inerție ale volanților ; φ_1, θ_1 și φ_2, θ_2 — deplasări unghiulare la intrare și ieșire, respectiv în cele două articulații cardanice ale transmisiei ; α_1, α_2 — unghiuri ascuțite între arborii articulațiilor ; c_m — rigiditatea la răsucire a cuplajului elastic care leagă motorul de unul dintre volanți ;

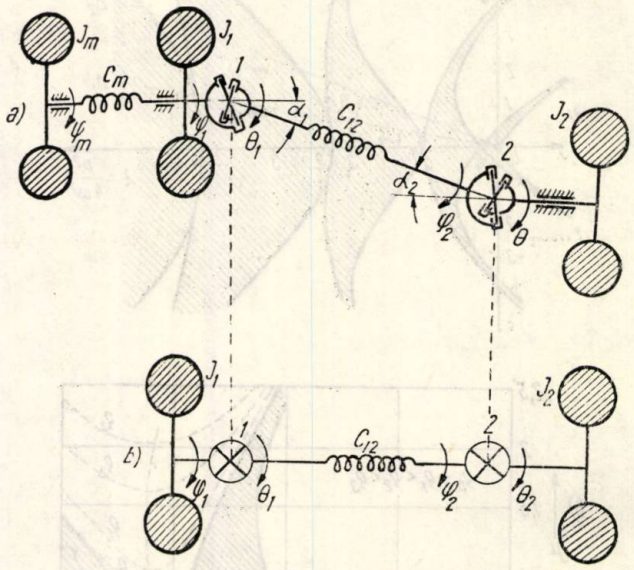


Fig. 12

c_{12} — rigiditatea de răsucire a epruvetei pe care sînt lipite traductoarele tensometrice. Procedînd ca mai înainte, pentru modelul dinamic al instalației (fig. 12 *a*) se obține sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} &J_m\ddot{\varphi}_m - c_m(\varphi_1 - \varphi_m) = 0,\\ &J_1\ddot{\varphi}_1 + c_m(\varphi_1 - \varphi_m) - c_{12}(\varphi_2 - \theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi_1} = 0,\\ &J_2\ddot{\theta}_2 + c_{12}(\varphi_2 - \theta_1)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta_2}, \end{aligned} \tag{49}$$

pentru care există condițiile de legătură de tipul (20), (21), deci

$$\begin{aligned} \theta_1 - \varphi_1 &= \varepsilon_1 \sin 2\varphi_1,\\ \theta_2 - \varphi_2 &= \varepsilon_2 \sin 2\varphi_2. \end{aligned} \tag{50}$$

Corespunzător relațiilor aproximative (23) și (24), în acest caz se obține

$$\begin{aligned} \theta_1 - \varphi_1 &= \varepsilon_1 \sin 2\omega t,\\ \theta_2 - \varphi_2 &= \varepsilon_2 \sin 2\omega t,\\ \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi_1} &= 1 + 2\varepsilon_1 \cos 2\omega t,\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta_2} &= 1 - 2\varepsilon_2 \cos 2\omega t. \end{aligned} \tag{51}$$

În scopul simplificării calculelor, prin alegerea unui cuplaj foarte elastic al motorului ($c_m \approx 0 \rightarrow \varphi_m \approx \omega t$), în locul modelului trimasic (fig. 12*a*) se poate cerceta modelul bimasic (fig. 12*b*). În acest caz, sistemul de ecuații diferențiale este

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 - c_{12}(\varphi_2 - \theta_1)\frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi_1} = 0,$$
$$J_2 \ddot{\theta}_2 + c_{12}(\varphi_2 - \theta_1)\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_2} = 0, \tag{52}$$

din care rezultă

$$\ddot{\theta}_2 - \ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{c_{12}}{J_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi_1} + \frac{c_{12}}{J_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_2}\right)(\varphi_2 - \theta_1) = 0. \tag{53}$$

Se notează *deformația unghiulară a epruvetei* (mărime înregistrată pe vibrograme) cu

$$z = \varphi_2 - \theta_1 \tag{54}$$

și, prin analogie cu cazurile anterioare,

$$y = \theta_2 - \varphi_1. \tag{55}$$

Observînd că

$$\theta_2 - \varphi_1 = (\theta_1 - \varphi_1) + (\varphi_2 - \theta_1) + (\theta_2 - \varphi_2),$$

rezultă, ținînd seama de (51),

$$y = z + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sin 2\omega t. \tag{56}$$

Utilizînd aceste notații (54), (55), după înlocuirea relației (56) în ecuația (53) și prin reținerea factorilor liniari în ε se obține ecuația aproximativă a vibrațiilor torsionale libere ale epruvetei modelului fizic analizat (fig. 12*b*):

$$\ddot{z} + p^2(1 + \varepsilon b_0 \cos 2\omega t)\, z = \varepsilon h_0 \sin 2\omega t, \tag{57}$$

unde

$$p^2 = c_{12}\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right); \quad \varepsilon b_0 = 2\,\frac{\varepsilon_1 J_2 - \varepsilon_2 J_1}{J_1 + J_2}; \quad \varepsilon h_0 = -4\omega^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \tag{58}$$

care este o ecuație Mathieu neomogenă.

În experiențe s-au înregistrat pe peliculă, în ordine, deformația unghiulară a epruvetei, turația (4 impulsuri la 1 rotație) și timpul (25 de impulsuri pe secundă, fig. 14, 16—18). În toate vibrogramele se păstrează aceeași ordine a parametrilor înregistrați. Cu ajutorul instalației prezentate (fig. 12 *a*), variindu-se rigiditatea la torsiune (c_{12}) a epruvetei (prin schimbarea diametrului), defazarea furcilor intermediare și unghiurilor din articulații, s-au efectuat experiențe pentru cîteva cazuri particulare. Variația vitezei unghiulare s-a realizat lent și în trepte.

a. *Sistem bimasic monocardanic.* Dacă în modelul fizic din figura 12*a* se impune $\alpha_1 \neq 0$; $\alpha_2 = 0$, se obține cazul arătat în figura 13. Ecuația vibrațiilor torsionale se obține prin particularizare ($\varepsilon_2 = 0$) din (57):

$$\ddot{z} + p^2(1 + \varepsilon b_1 \cos 2\omega t)\, z = \varepsilon h_1 \sin 2\omega t, \tag{59}$$

în care

$$\varepsilon b_1 = \frac{2\varepsilon_1 J_2}{J_1 + J_2}; \qquad \varepsilon h_1 = -4\omega^2 \varepsilon_1. \tag{60}$$

Pentru acest caz, în vibrograma din figura 14*a* este înregistrată creșterea amplitudinilor vibrațiilor torsionale în timpul apropierii de valoarea $2\omega = p$. În vibrograma din figura 14 *b* este înregistrat regimul staționar cu amplitudinile vibrațiilor mari în vecinătatea valorii $2\omega = p$, iar în cea din figura 14*c* în vecinătatea valorii $\omega = p$. Alte creșteri vizibile ale amplitudinilor nu s-au înregistrat.

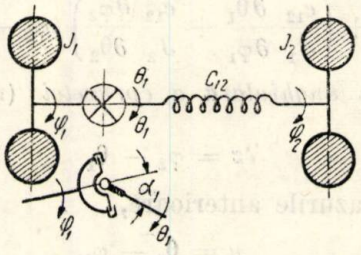


Fig. 13

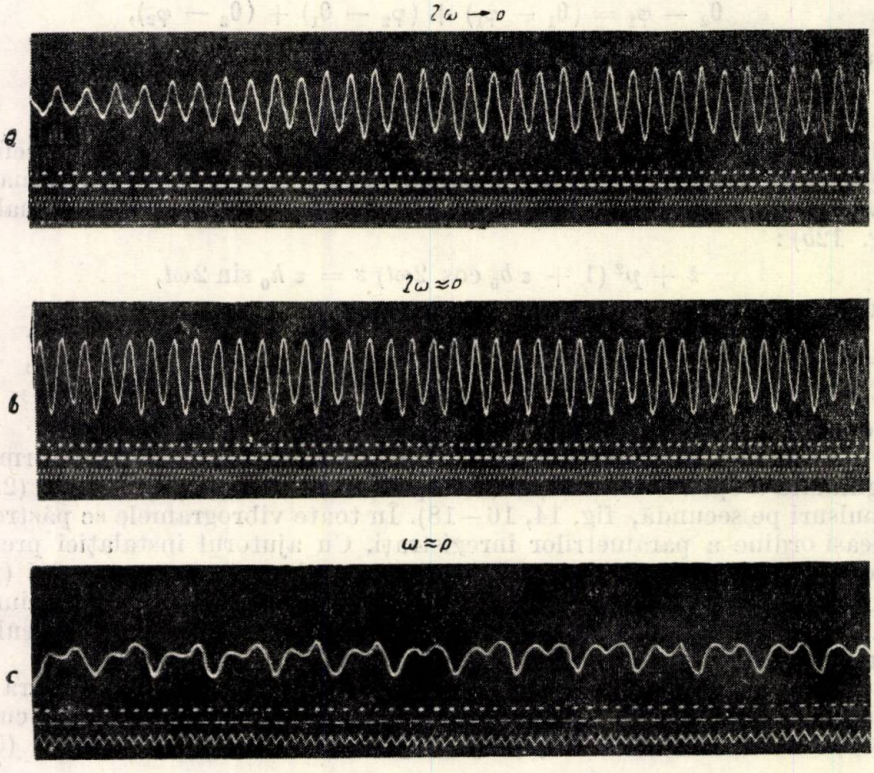


Fig. 14

b. *Sistem bimasic bicardanic asincron.* Pornind de la același model fizic (fig. 12*a*) în care se impune $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \neq 0$, iar furcile intermediare sînt ortofazate ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, fig. 15*a*), se obține cazul transmisiei bicar-

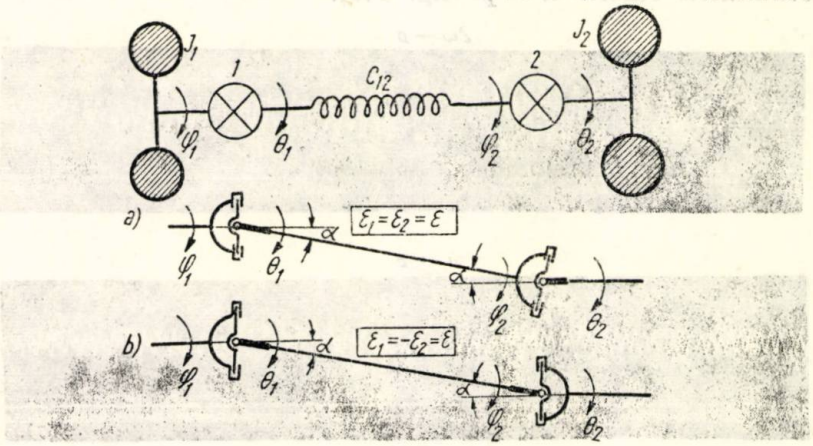


Fig. 15

danice asincrone. Ecuația vibrațiilor torsionale se obține cu particularizarea ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$) a ecuației (57) obținute anterior:

$$\ddot{z} + p^2 (1 + \varepsilon b_2 \cos 2\omega t)\, z = \varepsilon h_2 \sin 2\omega t, \tag{61}$$

în care

$$\varepsilon b_2 = 2\varepsilon \frac{J_2 - J_1}{J_1 + J_2}; \quad \varepsilon h_2 = -8\, \varepsilon \omega^2. \tag{62}$$

În vibrograma din figura 16 *a*, pentru acest caz sînt înregistrate vibrațiile torsionale puternice în vecinătatea valorii $2\omega = p$, iar în cea din figura 16*b* în vecinătatea valorii $\omega = p$. Alte creșteri ale amplitudinilor nu s-au înregistrat.

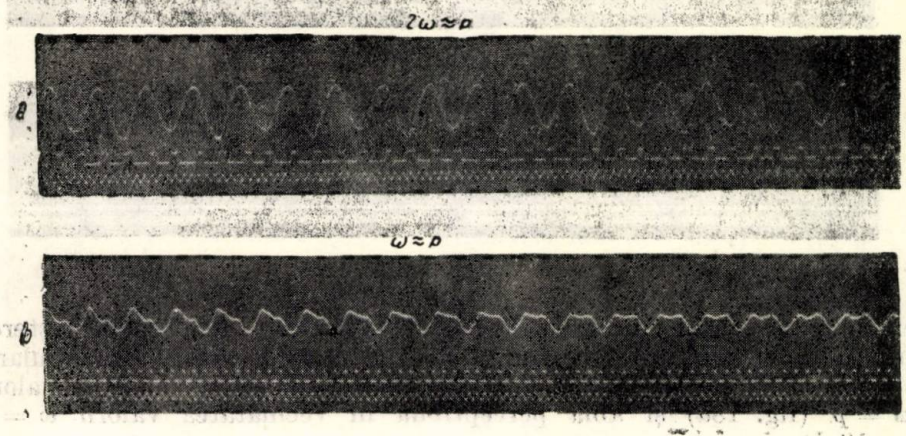


Fig. 16

În vibrogramele din figura 17 este înregistrată creșterea amplitudinilor în timpul măririi lente a vitezei unghiulare. Se observă creșterea intensă în vecinătatea valorii $2\omega = p$ (fig. 17 *a*) și mai puțin intensă în vecinătatea valorii $\omega = p$ (fig. 17*b*).

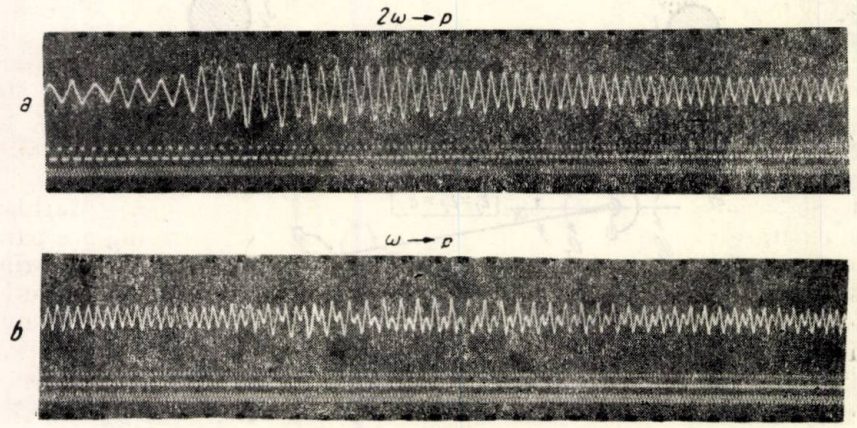


Fig. 17

c. *Sistem bimasic bicardanic sincron.* Dacă în modelul fizic considerat (fig. 15)] furcile intermediare sînt sinfazate și $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, se obține cazul transmisiei bicardanice sincrone ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$; fig. 15 *b*). Ecuația vibrațiilor torsionale se obține ca particularizare ($\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon$) din ecuația (57) dedusă anterior

$$\ddot{z} + p^2 (1 + 2\varepsilon \cos 2\omega t)\, z = 0. \qquad (63)$$

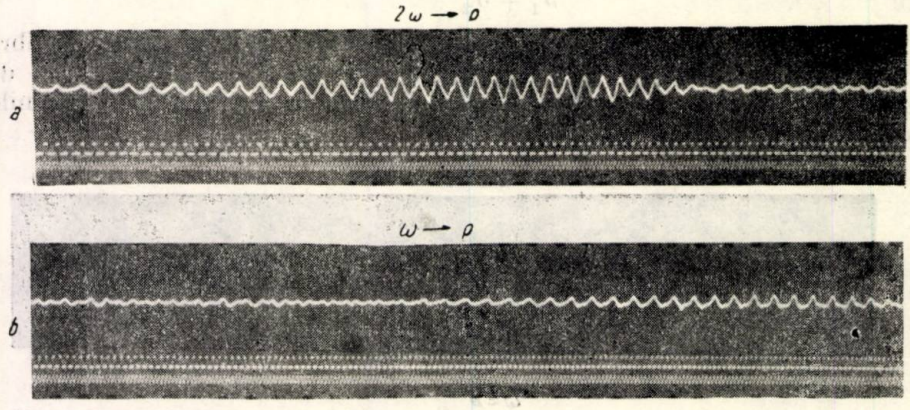


Fig. 18

Pentru acest caz, în vibrogramele din figura 18 este înregistrată creșterea amplitudinilor vibrațiilor în timpul măririi lente a vitezei unghiulare. Se observă creșterea moderată a amplitudinilor în vecinătatea valorii $2\omega = p$ (fig. 18*a*) și abia perceptibilă în vecinătatea valorii $\omega = p$ (fig. 18 *b*).

7. CONCLUZII

1. Vibrațiile torsionale libere în *transmisiile mecanice polimasice cu articulații cardanice* sînt descrise în primă aproximație (unghiurile articulațiilor $\alpha_i < 20°$) de un *sistem de ecuații diferențiale liniare neomogene cu coeficienți periodici* (27).

2. Vibrațiile torsionale libere în transmisiile mecanice reductibile la modele bimasice, care includ *transmisii policardanice asincrone*, sînt descrise în primă aproximație de *ecuația Mathieu neomogenă* (40), iar cele care includ *transmisii policardanice sincrone de ecuația Mathieu omogenă* (42).

3. Se știe că, în cazul vibrațiilor descrise de ecuația Mathieu, teoretic există un spectru infinit de zone de instabilitate (rezonanțe parametrice, fig. 11 *a*). Se știe, de asemenea, că în realitate, datorită frecărilor vîscoase inerente (fig. 11*b*), micilor neliniarități, influenței sursei energetice de putere limitată a sistemului [14], [15] etc., prezintă interes cel mult două domenii de instabilitate ($\lambda' = 0{,}25$; $\lambda = 1$, fig. 11*b*). Din experiențe (vezi vibrogramele) rezultă că, dintre aceste două domenii, pericol real prezintă domeniul în vecinătatea valorii $\lambda = 1$, adică $2\,\omega = p$ (fig. 11). Deși, conform teoriei ecuației Mathieu, era de așteptat ca creșterea preponderentă a amplitudinilor să apară în vecinătatea valorii $\lambda = 0{,}25$ ($\omega = p$), datorită asincronismului remanent (membrul neomogen al ecuației), pricinuit printre altele, și de deformațiile unghiulare inerente ale arborilor cardanici intermediari în timpul transmiterii momentului de torsiune, creșterea intensă a amplitudinilor are loc în vecinătatea valorii $\lambda = 1$ ($2\,\omega = p$), adică *rolul hotărîtor îl are factorul neomogen al ecuației Mathieu* (40), (57), (59), (61), adică asincronismul transmisiilor cardanice. Deci pericolul rezonanțelor parametrice, care crește cu creșterea unghiurilor din articulații (α_i) și scade cu creșterea amortizării vîscoase (fig. 11*b*), apare cu pregnanță în transmisiile cardanice asincrone (fig. 14, 16 și 17) în vecinătatea valorii $2\,\omega = p$.

4. Deoarece în transmisiile cardanice de forță deformația arborilor intermediari este inevitabilă, va exista totdeauna pe lîngă asincronismul cinematic remanent (pricinuit de erori cinematice [7]) un asincronism dinamic (pricinuit de deformații elastice), pericolul principal al rezonanțelor, așa cum rezultă și din vibrograma din figura 18, apare în vecinătatea valorii $2\,\omega = p$.

Bazați pe această observație importantă, se poate afirma că, în transmisiile mecanice reductibile la modele bimasice care includ articulații cardanice, vibrațiile torsionale parametrice pot fi descrise cu suficientă precizie pentru practică de ecuația neomogenă cu coeficienți constanți [7]

$$\ddot{y} + p^2 y = \varepsilon h \sin 2\omega t, \tag{64}$$

obținută din ecuația Mathieu neomogenă (40) prin reținerea numai a factorului neomogen care caracterizează asincronismul (41), iar în transmisiile mecanice polimasice cu articulații cardanice de sistemul de ecuații diferențiale neomogene cu coeficienți constanți

$$\ddot{X} + AX = \varepsilon H \sin 2\omega t, \tag{65}$$

obținut cu particularizare din sistemul (27).

Deci creșterea însemnată a amplitudinilor vibrațiilor torsionale în cazul general al transmisiilor mecanice (sisteme cu mai multe grade de libertate) care includ articulații cardanice va avea loc atunci cînd una dintre pulsațiile proprii ale sistemului considerat cu articulații sincrone (sistemul (65) omogen) coincide cu dublul vitezei unghiulare ($p_i = 2\,\omega$; $i = 1, 2, \ldots$).

Primită la redacție la 11 aprilie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. Bolotin, *Dinamiceskaia ustoicivosti uprughih sistem*, Moskva, GITTL, 1956.
2. F. Böhm, *Schwingungsbeanspruchung von Kardanwellen in Lokomotiv-Drehgestellen*, Viena, Maschinenbau und Warmewirtschaft, *6*, 1957.
3. R. B. Bossler, Flannelly W. G., *How to predict drive-train vibration caused by Hooke-' joints*, Machine Design, June 18 (1964).
4. R. Campbell, *Theorie generale de l'equation de Mathieu et quelques autres equations differentielles de la mecanique*, Paris, Masson et Cie, 1955.
5. L. Cezari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary diferential equations*, Berlin-Gottingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1959.
6. A. Dornig, *Instabilita dinamiche nelle macchine dovute alla presenza di transmissioni a dopio giunto cardanico*, Riv. di Ingegneria, Milano, 7 (1965).
7. Fl. Dudiță, *Autovibrații determinate de transmisia cardanică a automobilului*, Construcția de mașini, 5 (1963).
8. — *Frecvențe proprii în transmisia automobilului*. Construcția de mașini, *3* (1964).
9. — *Transmissions homocinetiques aux joints cardaniques*, Rev. roum. sci. techn.-mec. appl., *6* (1965).
10. — *Transmisii cardanice*, București, Edit. tehnică, 1966.
11. Fr. Holzwessig, H. Dressig, H. Tersch, *Über die Berechnung des dynamischen Verhaltens von ungleichformig über setzenden Getrieben innerhalb einer Schwingungskette*, Wiss. Z. der T. U., Dresden, *12*, 4 (1963).
12. H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Springer-Verlag, 1958.
13. A. E. Kobrinski, *Mehanizmi s uprughimi sveazami*, Moskova, Izd. Nauka, 1964.
14. B. O. Kononenko, K. B. Frolov, *O rezonansnih svoistvah parametriceskoi kolebatelnoi sistemi*, Izv. AH CCCP, Mehanika i mașinostroenie, *3* (1962).
15. V. O. Kononenko, *Kolebatelnte sistemi s ogranicenim vozbujdeniem*, Moskva, Izd. Nauka, 1964.
16. G. Kotowsky, *Losungen der inhomogenen Mathieuschen Differential Gleichungen mit periodischer Storfunktion beliebiger Frequenz*, ZAMM, 1943, p. 149–155.
17. N. Minorsky, *Nonlinear oscilations*, Princeton-New Jersey, Van Nostrand.
18. C. C. Pasquarelli, *Studio delle vibrazioni dovute ai giunti cardanici nel carello motore di una locomotiva*, Ingengneria Ferroviaria, *12* (1963).
19. B. A. Porter, *A theoretical analysis of the torsional oscilations of a system incorporating a Hooke's joint*, J. Mech. Engng. Sci., **3**, *4* (1961).
20. — *The stability of systems governed by a special form of Hill's equation*, Internat. J. Med. Sci., *4* (1962).
21. B. Porter, R. W. Gregory, *Non linear torsional oscilations of a system incorporating a Hooke's joint*, The Journal of Mech. Engineering Science (1963).
22. B. Porter, *Critical speeds of torsional oscilations of geared-shaft systems due to the presence of displacement exitation*, Journal of applied mechanics, *1* (1964).
23. H. Tersch, *Schwingungen in Mechanismen*, Maschinenbautechnik, *11* (1965).

RECENZII

ŞTEFAN BĂLAN şi IGOR IVANOV, *Din istoria mecanicii*, Bucureşti, Edit. ştiinţifică, 1966, 762 p.

În această cuprinzătoare operă, elaborată de acad. prof. dr. ing. Ştefan Bălan şi de conf. ing. Igor Ivanov, se încearcă un nou mod de a prezenta istoria unei ştiinţe. S-a pornit de la început pe linia marcată de cele mai importante principii ale mecanicii, luîndu-le de la naşterea lor şi urmărindu-le dezvoltarea pînă la formulările moderne din timpurile noastre.

Sistemul a avut succes. Lucrarea, care a văzut lumina tiparului, oferă cititorului o bună parte din drumul pe care l-a parcurs mecanica de la primele ei începuturi; forma adoptată de autori pentru expunere este în conexiune la fiecare pas cu marile principii ale ştiinţei, strîns legate, la rîndul lor, de concret şi de ideile creatoare, acestea fiind prezentate totdeauna ca fiind izvorîte din aplicarea lor tehnică.

Prima parte a lucrării urmăreşte cronologic apariţia şi dezvoltarea principiilor mecanicii. Capitolele acestei părţi sînt însoţite de o vastă bibliografie de peste 1 500 de titluri, precum şi de numeroase citate originale şi comentarii. Ele poartă pe cititor de-a lungul mileniilor prin lupte şi cercetări aproape toate încununate de succes.

Pornind de la semnele lăsate de omul primitiv în peşteri, partea întîi a lucrării trece în revistă începuturile mecanicii de la şcoala filozofică ionică, la multilateralul Aristotel, fondatorul şcolii peripateticiene, acela pe care Marx l-a numit „cel mai mare cugetător al antichităţii". Ajunge apoi la Arhimede, figura cea mai de seamă a mecanicii antice greceşti, „mare teoretician şi inventator al unor mecanisme şi aparate diferite".

Intrînd şi mai adînc în istorie, cartea urmăreşte cu interes lupta aprigă de idei în întunecatul ev mediu, la începutul căruia singurele realizări înviorătoare sînt datorate ştiinţei din Orient (Asia centrală şi ţările arabe).

Evoluţia fericită a mecanicii în atmosfera viguroasă a Renaşterii este luminată de figura marelui Leonardo da Vinci, care a fost „nu numai un mare pictor, dar şi un mare matematician, mecanic şi inginer, cu descoperiri importante în cele mai diferite domenii ale fizicii" (Engels).

Mecanica progresează mult în decursul secolelor XVI—XVIII. Aceasta este epoca în care mecanica îşi cristalizează principiile. Fundamentul lor este clădit de către Galileo Galilei, unul dintre cei mai celebri învăţaţi şi ingineri ai timpului său, de către îndrăzneţul Descartes, de către inventivul Huygens şi desăvîrşit de către marele Newton, unanim recunoscut ca întemeietor al „mecanicii clasice".

În secolul al XVIII-lea, Bernoulli, Euler, Lomonosov, D'Alembert, Lagrange, Carnot şi alţii contribuie la consolidarea mecanicii newtoniene, aprofundîndu-i şi extinzîndu-i noţiunile şi principiile fundamentale.

Caracterizat printr-un puternic avînt al tehnicii şi industriei, secolul al XIX-lea favorizează în mod obiectiv dezvoltarea mecanicii analitice, la care contribuie mari mecanicieni, precum Hamilton, Laplace, Fourier, Boltzman, Gibbs şi mulţi alţii.

Autorii acestei interesante cărţi conduc apoi expunerea în plină epocă modernă, cînd Albert Einstein, „marele transformator al ştiinţelor naturii", cum îl caracterizează Lenin, extinde graniţele mecanicii clasice şi pune bazele mecanicii relativiste. Astfel apar în mod natural bazele mecanicii ondulatorii prin lucrările celebrului Louis de Broglie şi cele ale mecanicii cuantice relativiste cu fizicienii Heisenberg şi Dirac.

Ultimul capitol al acestei prime părţi, „Istoriografi ai mecanicii", oferă celor interesaţi posibilitatea de a completa sau extinde studiile diferitelor probleme prin trecerea în revistă a cîtorva dintre cei mai importanţi biografi, instoriografi şi istorici ai mecanicii, în ale căror lucrări se găsesc indicaţii biografice şi bibliografice, materiale documentare sau cercetări istorice din domeniul mecanicii.

Partea a doua a lucrării, intitulată „Fundamentele staticii", oferă cititorului de specialitate un tablou foarte cuprinzător şi riguros al evoluţiei ideilor de pîrghie, plan înclinat, moment, compunere a forţelor, centre de greutate, principiul lucrului mecanic virtual.

Cele 1 700 de titluri ale bibliografiei, reproducerile după lucrări originale, comentariile aparţinînd unor personalităţi ştiinţifice de prestigiu din epocile respective şi comentariile aparţinînd autorilor în lumina mecanicii clasice moderne vin în sprijinul elucidării cît mai complete a faptelor ştiinţifice a căror evoluţie se urmăreşte.

Autorii lucrării, legaţi strîns de problemele de istorie a ştiinţei prin însăşi activitatea lor de catedră, au reuşit, cu talent şi competenţă, să desprindă din noianul de fapte pe acelea care au făcut din mecanică o ştiinţă. Ei au putut să strîngă laolaltă şi să interpreteze în mod ştiinţific, dialectic, diversitatea documentelor de istorie a mecanicii.

Astfel autorii au contribuit prin această lucrare, unică în felul ei, la creşterea prestigiului internaţional al ştiinţei româneşti.

Acad. Victor Vîlcovici

ALEXANDRU NICA, *Sisteme de lubrificaţie*, Bucureşti, Edit. Academiei 1967, 262 p.

În contextul general al dezvoltării contemporane vertiginoase a ştiinţelor, lubrificaţia s-a detaşat pe plan mondial ca o disciplină de sine stătătoare, numeroase lucrări îmbogăţind în ultimele decenii literatura ştiinţifică în acest domeniu, care prin universalitatea şi diversitatea aplicaţiilor se recomandă a fi unul dintre cele mai complexe ale tehnicii şi ale cărui rezultate condiţionează direct progresul acesteia.

În România, impulsul imprimat ştiinţei şi tehnicii în perioada actuală s-a reflectat şi în această specialitate prin realizări şi lucrări, în rîndul cărora se integrează ca o continuare şi o completare volumul *Sisteme de lubrificaţie* de Al. Nica.

Lucrarea constituie o prezentare cuprinzătoare, selectivă şi unitară a sistemelor şi metodelor folosite în lubrificaţie — de la premisele fizice şi teoretice pînă la datele de calcul şi proiectare —, bazată atît pe datele cele mai noi din ţară şi din străinătate, cît şi pe rezultatele cercetărilor ştiinţifice efectuate în acest domeniu vreme îndelungată de către autor.

În primul capitol se face o trecere în revistă a sistemelor de lubrificaţie, cu precădere a mecanismului ungerii cu lubrifianţi solizi şi cu strate metalice subţiri în vederea unei mai bune înţelegeri a realizării şi funcţionării sistemelor de ungere bazate pe astfel de lubrifianţi, cu un larg cîmp de aplicaţii.

Capitolul al doilea conține o expunere unitară a calculului sistemelor de ungere atît cu lubrifianți fluizi, cît și semifluizi, mergîndu-se pînă la datele de calcul și chiar la aplicații numerice.

Capitolele al treilea și al patrulea cuprind principiile funcționale ale sistemelor de ungere, caracteristicile constructive și părțile lor componente, acolo unde este cazul dîndu-se și date de calcul și de proiectare. Este prezentat astfel un tablou sistematic și cuprinzător al problemei, cu un profund caracter de generalitate.

În capitolul al cincilea se tratează problemele teoretice și tehnice generale ale sistemelor de lubrificație legate de caracteristicile funcționale ale cuplurilor de frecare pentru care se realizează sistemul de ungere respectiv. Astfel tratarea aspectelor funcționale și constructive ale sistemelor de lubrificație este completată cu prezentarea unitară a acestora și din punctul de vedere al finalității lor.

Capitolul al șaselea tratează, pe de o parte, caracteristicile funcționale ale lubrifianților utilizați la diversele tipuri de sisteme de lubrificație, iar pe de altă parte, într-o succesiune sistematică, procedeele și materialele antifricțiune, care uneori pot asuma și funcția de lubrifiant. Este de remarcat tratarea unor probleme particulare, cum ar fi ungerea la temperaturi ridicate, procedee de ungere și lubrifianți pentru procesele de prelucrare a metalelor etc.

Ultimul capitol este consacrat tratării sistemelor de lubrificație bazate pe principii mai deosebite, cum ar fi ungerea magnetohidrodinamică și lagărele electrostatice și magnetice. De asemenea sînt prezentate sistemele de lubrificație realizate pentru condiții cu totul speciale, de exemplu pentru a lucra în vid înaintat și într-un domeniu larg de temperaturi sau în medii radioactive.

O parte din material este conceput pe baza lucrărilor realizate de autor, putîndu-se da ca exemple în acest sens problema calculului sistemelor de ungere cu lubrifianți fluizi, aceea a calculului debitelor de lubrifianți, determinarea caracteristicilor funcționale ale unor materiale de lagăre etc., ceea ce conferă lucrării un pronunțat caracter de originalitate.

Lucrarea este prima de acest fel apărută în literatura noastră de specialitate și oferă avantajul unei prezentări ample, generale a problemelor ridicate de sistemele de lubrificație față de lucrările din acest domeniu apărute pînă în prezent în alte țări, care prezintă materialul doar din punctul de vedere al particularităților diverselor tipuri de mașini, fără a se indica metode generale de calcul și soluții constructive cu largi aplicații.

Cantitatea și diversitatea materialului prezentat, precum și modul de tratare, relevă atît nivelul științific ridicat, cît și elementele originale ale lucrării și o impune ca o contribuție valoroasă la dezvoltarea cercetărilor teoretice și realizărilor tehnice în domeniul lubrificației. Interesul și utilitatea sa sînt multiple, adresîndu-se atît celor care se ocupă cu proiectarea și realizarea sistemelor și metodelor de ungere, cît și învățămîntului tehnic superior și cercetătorilor din domeniul ungerii și frecării.

Ing. I. Dincă

H. PARKUS, *Mechanik der festen Körper* (Mecanica corpurilor solide), ed. 2, Viena-New York, Springer-Verlag, 1966, X + 368 p.

Această a doua ediție a cărții prof. H. Parkus de la Politehnica din Viena este dedicată, ca și prima ediție *), unei prezentări cu caracter general a mecanicii corpului solid, înțelegînd prin aceasta atît rezultatele obținute în cadrul mecanicii generale (în special rezultatele privind

*) Recenzată în St. cerc. mec. apl., **XIII**, *1* (1962).

corpul rigid), cît şi rezultatele privind corpurile cu proprietăţi elastice (metode de rezistenţă a materialelor — ipoteze simplificatoare — şi metode de teoria elasticităţii).

Lucrarea cuprinde tot 21 de capitole, o anexă cu cele mai importante formule din algebra şi analiza vectorială şi un indice de probleme, numărul de pagini crescînd însă de la 264 la 368.

Lucrarea a fost completată cu probleme privind sistemele de masă variabilă, teorii de rezistenţă a materialelor şi probleme noi de stabilitate elastică (flambaj din încovoiere cu răsucire, voalarea plăcilor plane circulare). Menţionăm de asemenea completările făcute la metodele variaţionale de calcul, în special în ceea ce priveşte metoda Krîlov-Bogoliubov. Au fost adăugate un număr de 123 de probleme la sfîrşitul fiecărui capitol, multe dintre acestea avînd şi un interes teoretic deosebit.

Ca şi în prima ediţie, cartea este scrisă deosebit de clar şi cu multă rigurozitate, fiind destinată în primul rînd studenţilor de la institutele tehnice superioare; ea poate fi însă folosită cu succes de toţi cei care vor să aibă o orientare cu caracter general în domeniul mecanicii corpului solid.

P. P. Teodorescu

TELEMACO VAN LANGENDONCK, *Charneiras plásticas em lajes rectangulares de pontes* (Articulaţii plastice în plăcile de poduri), São Paolo, Associaçao Brasileira de Cimento Portland, 1965, 76 p. + 35 fig.

În lucrare se studiază capacitatea de rezistenţă a plăcilor de poduri pe baza teoriei liniilor de rupere.

În prima parte se dau ipotezele specifice calculului static al plăcilor de poduri şi se definesc noţiunile de izotropie, anizotropie şi ortotropie pentru aceste elemente de construcţie.

Partea a doua a lucrării cuprinde aplicarea teoriei liniilor de rupere la plăcile în consolă. Sînt luate în consideraţie cazurile în care latura încastrată este de lungime finită sau infinită. Solicitarea este produsă fie de o sarcină concentrată, fie de două sarcini concentrate, aplicate în puncte diferite ale laturii libere paralele cu latura încastrată. În două paragrafe separate se dau indicaţii pentru cazul în care pe latura liberă paralelă cu latura încastrată se aplică mai multe sarcini concentrate şi pentru cazul în care de-a lungul acestei laturi acţionează o sarcină uniform distribuită. La sfîrşitul acestei părţi sînt date rezultate numerice pentru diferite lungimi ale laturii încastrate.

Studiul plăcilor dreptunghiulare încastrate pe tot conturul, solicitate de sarcini concentrate, face obiectul părţii a treia a lucrării. Sînt luate în consideraţie următoarele moduri de solicitare: o sarcină concentrată aplicată într-un punct oarecare al plăcilor, două sarcini concentrare aplicate pe una dintre axele de simetrie ale plăcilor, trei sarcini concentrate aplicate pe una din axele de simetrie ale plăcilor, patru sarcini concentrate dispuse simetric şi şase sarcini concentrate dispuse de asemenea simetric. În toate aceste cazuri, plăcile sînt considerate izotrope. Într-un paragraf separat se dau elementele necesare de calcul pentru cazul în care plăcile sînt ortotrope. Această parte se încheie cu indicaţii practice pentru cazurile de plăci prevăzute de normele braziliene pentru calculul podurilor.

Ultima parte a lucrării cuprinde trei exemple de calcul, tratate în detaliu.

Volumul cuprinde un material bogat, bine studiat din punct de vedere teoretic. El se adresează atît cercetătorilor, cît şi inginerilor specializaţi în proiectarea podurilor de beton armat.

Valeriu Ivelcu

Л. Н. РЕШЕТОВ и Е. И. ТОРОПЫГИН. *Профилирование кулачков по кривым конического сечения* (Profilarea camelor după secţiuni conice), Москва. Издательство Машиностроение, 1966, 150 p. + 51 fig.

În lucrare se dau cîteva metode de sinteză a mecanismelor cu came plane şi spaţiale. Aceste metode sînt valabile în cazurile în care procesul tehnologic nu impune ca tachetul, în timpul mişcării lui, să reproducă o lege de mişcare bine determinată. Cu alte cuvinte, lucrarea se referă la acele cazuri în care se cere doar ca la momentul dat tachetul să ocupe o poziţie dinainte stabilită.

Se recomandă ca în astfel de cazuri profilele camelor să fie formate din arce de elipsă sau de hiperbolă, deoarece aceste profile pot fi prelucrate prin metoda rostogolirii, ceea ce reprezintă avantaje esenţiale faţă de metoda copierii, în prezent folosită pe scară largă. Se menţionează că metoda copierii impune folosirea unor desene complicate, a unor şabloane şi etaloane; de asemenea sînt necesare şi lucrări de trasare, precum, şi alte operaţii intermediare. Prelucrînd camele prin rostogolire, se elimină toate aceste operaţii, realizînd economii însemnate şi asigurînd totodată o precizie mai mare decît în cazul metodei copierii. În carte se indică şi dispozitivele necesare pentru prelucrarea camelor prin metoda rostogolirii, acestea fiind construcţii originale elaborate de autori.

În lucrare se demonstrează că profilele camelor în formă de hiperbolă şi de parabolă (a cărei axă de simetrie este înclinată cu un unghi oarecare faţă de direcţia de deplasare a tachetului), precum şi a unui profil a cărei acceleraţie se exprimă de relaţia $a = s_0 - kt$, asigură ca forţele care acţionează asupra tachetului din partea camei să fie aproximativ constante în orice poziţie a mecanismului. Se arată că în cazul profilelor amintite forţele sînt egale în două puncte. Folosind un profil a cărui lege de variaţie a acceleraţiei are forma $a = a_0 - kt + kt^2$, forţa transmisă va avea aceeaşi valoare în trei puncte.

Merită atenţie metoda iteraţiei (p. 74), folosită la rezolvarea unor ecuaţii transcendente, care se pare mai simplă şi duce la rezultat mai repede decît cele tratate în literatura de specialitate.

În concluzie se poate sublinia faptul că aplicarea metodelor de sinteză tratate în lucrare duce la o precizie mai mare a profilelor camelor, la o tehnologie de prelucrare mai ieftină şi la folosirea mai judicioasă a materialului camei (prin asigurarea unei forţe constante).

Problemele abordate în carte reprezintă o contribuţie originală la teoria şi sinteza mecanismelor cu came. Lucrarea este utilă atît cercetătorilor, cît şi proiectanţilor.

I. Székely

Elsevier's Dictionary of Aeronautics, compiled by A. F. Dorian, D. Litt and J. Osenton, Technical Editors, Londra, 1964.

În prestigioasa serie a dicţionarelor *Elsevier* a apărut un nou volum, în şase limbi, consacrat aeronauticii şi domeniilor conexe.

Utilizînd cele mai recente şi mai autorizate surse de informare, autorii au explicat (în limba engleză), cu o remarcabilă claritate şi competenţă, nu mai puţin de 5 919 termeni din aerodinamică, mecanica zborului, construcţii aeronautice, tehnologia şi fabricaţia avioanelor, planoarelor şi elicopterelor, navigaţia aeriană, meteorologie, radiocomunicaţii, radar, aeroporturi şi transporturi aeriene etc. Fiecare termen este tradus în franceză, spaniolă, italiană, portugheză şi germană.

Deşi dicţionarul nu conţine foarte multe cuvinte din vocabularul specific aeronautici militare, deci este incomplet, el poate fi considerat drept una dintre cele mai valoroase lucrări de specialitate. Aceasta nu numai datorită rigorii ştiinţifice cu care a fost scris, ci şi datorită modului ingenios în care a fost conceput.

Prima parte a dicţionarului *Elsevier* cuprinde cei 5 919 termeni, numerotaţi, explicaţi şi traduşi în cele şase limbi. A doua cuprinde cinci glosare de cuvinte în franceză, spaniolă, italiană, portugheză şi germană, fiecare cuvînt avînd indicat în dreptul lui numărul de ordine care corespunde noţiunii respective în prima parte a lucrării. Astfel, în oricare dintre cele şase limbi, dicţionarul poate fi consultat rapid şi comod.

Elsevier's dictionary of aeronautics este foarte util cercetătorilor ştiinţifici şi specialiştilor care lucrează în transporturile aeriene sau în industria aeronautică.

Constantin Sabin Ioan

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

● Studii originale de înalt nivel cu caracter de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice în care se expun : stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române sau străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astromecanică (optimizarea traiectoriilor, calcul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, reintrarea în atmosferă densă, frînare şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statistica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnice, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

★

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 26, nr. 5 1967

SUMAR

STUDII

Pag.

V.N. CONSTANTINESCU şi MARTHA SĂLCUDEAN, Distribuţia presiunilor în lagărele circulare lubrificate cu gaze, alimentate prin două şiruri de orificii 947

ŞT. N. SĂVULESCU şi V. TOMA, Unele aspecte ale tranziţiei în stratul limită la numere Reynolds mici 961

ELIE CARAFOLI şi ADRIANA NĂSTASE, Aripa subţire de rezistenţă minimă avînd viteza finită la bordurile de atac, în curent supersonic 971

N. S. PÎRVULESCU, Curgerea continuă a fluidului bifazic prin tuburi verticale 981

GEORGE BĂRĂNESCU şi GHEORGHE ZĂTREANU, O teorie a echilibrajului forţelor de inerţie la motoarele cu două linii de cilindri 991

C. TEODOSIU, Contribuţii la teoria macroscopică a dislocaţiilor şi tensiunilor iniţiale (I) 1005

VIRGIL BOGDAN, Expresiile eforturilor unitare care se produc în discuri în rotaţie solicitate prin eforturi care variază în lungul axei lor 1023

C. AVRAM şi R. MARINOV, Studiul fotoelastic şi analitic al concentrării tensiunilor la capătul fisurii într-o grindă supusă la încovoiere pură 1033

I. APPELTAUER, E. CUTEANU, V. GIONCU, A. GEIER, N. SCHRAMM şi G. FRIEDRICH, Flambajul prin încovoiere-răsucire al barelor de oţel cu secţiune monosimetrică, solicitate de momente încovoitoare cu variaţie liniară 1045

M. IFRIM, S. LARIONESCU, AL. DOBRESCU şi I. BĂRBULESCU, O metodă simplificată de determinare a caracteristicilor dinamice ale structurilor etajate cu ajutorul calculatorului electronic cifric 1069

EINAR KEINTZEL, Contribuţii la sistematizarea calculului la forţe orizontale al diafragmelor cu goluri la construcţii multietajate 1085

N.I. MANOLESCU şi IOSIF TEMPEA, Sinteza structurală şi cinematică a mecanismelor-motor plane cu articulaţii multiple şi două grade de mobilitate $M_3 = 2$ „total" şi $M_3^p = 2$ „parţial" (II) 1101

AL. MARINESCU, Asupra vibraţiilor rachetei 1129

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

VASILE MARCU şi TRAIAN CIOBANU, A 5-a Conferinţă internaţională de metalizare prin pulverizare 1149

RECENZII 1165

St. Cerc. Mec. Apl., Tom. 26, Nr. 5, P. 945–1170, Bucureşti 1967

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

DISTRIBUȚIA PRESIUNILOR ÎN LAGĂRELE CIRCULARE LUBRIFICATE CU GAZE, ALIMENTATE PRIN DOUĂ ȘIRURI DE ORIFICII [1)]

V. N. CONSTANTINESCU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România
și M. SĂLCUDEAN
Institutul de cercetări metalurgice

621.82 ; 533

Se extinde metoda de determinare aproximativă a distribuției presiunilor în lagărele lubrificate cu gaze, alimentate printr-un șir central de orificii [1], la cazul lagărelor alimentate prin două rînduri de orificii.
Rezultatele sînt puse sub formă de relații simple și de diagrame și scot în evidență condițiile de optimum care apar.
Se constată că pe lîngă condițiile de optim puse în evidență în cazul lagărelor alimentate printr-un șir central de orificii mai apare o condiție suplimentară relativă la poziția optimă a șirurilor de orificii.

Într-o lucrare anterioară [1] a fost prezentată o metodă pentru determinarea aproximativă a distribuției presiunilor în lagărele lubrificate cu gaze, alimentate printr-un șir central de orificii. În lucrarea de față ne propunem să extindem metoda menționată pentru cazul lagărelor alimentate prin două rînduri de orificii.

În acest scop să considerăm lagărul prezentat în figura 1. Se observă că extremitățile lagărului (zonele extreme $b - b'$) pot fi considerate ca semilagăre alimentate printr-un șir de orificii. În consecință, pentru aceste porțiuni vor fi valabile relațiile de debit și presiuni deduse pentru lagărele alimentate printr-un șir de orificii, iar în zona centrală b' a lagărului va avea loc o mișcare cu un debit total nul pe circumferință. Ca și pentru lagărele cu un singur șir de orificii, vom considera mai întîi cazul unei scurgeri pur axiale, iar ulterior vom lua în considerare influența mișcării

[1)] Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl. (în limba engleză) **12**, *4*, (1967)

în lungul circumferinței lagărului. De asemenea, vom admite aceleași ipoteze simplificatoare și anume :

1) înlocuirea fiecărui șir de n orificii de alimentare cu o fantă continuă ;

2) utilizarea unei metode de liniarizare față de cazul $\varepsilon = 0$.

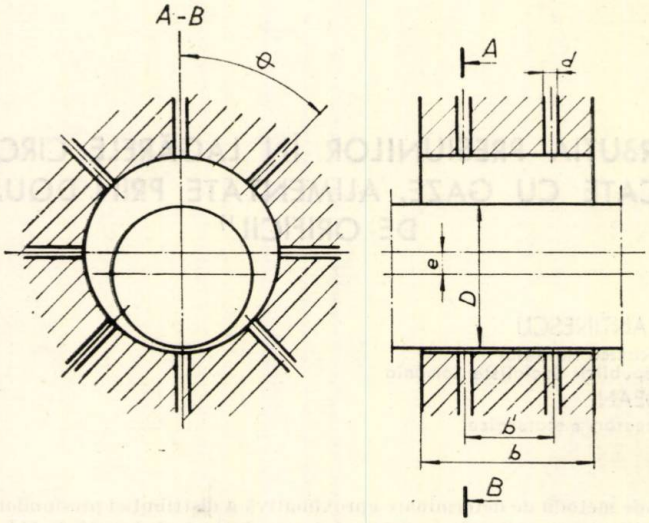


Fig. 1. — Lagăr circular alimentat prin două rînduri de orificii.

Cazul $\varepsilon = 0$

Debitul masic de intrare și cel de ieșire au aceleași expresii ca și în cazul lagărelor alimentate printr-un singur șir de orificii, cu observația că prin secțiunea de intrare S_{10} se va înțelege în acest caz secțiunea totală de intrare prin ambele șiruri de orificii.

Din egalarea debitului de intrare cu cel de ieșire, rezultă, ca și în cazul lagărelor alimentate printr-un șir de orificii, relația

$$\Lambda_{ef} = \frac{\overline{p}_{10}^2 - 1}{\overline{p}_{10}\left(\frac{p_s}{p_{10}}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\sqrt{\left(\frac{p_s}{p_{10}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}}. \tag{1}$$

Pentru scurgerea subcritică se folosește formula (1), unde Λ_{ef} este același parametru adimensional (vezi formula (8) din [1]), cu diferența că în locul lungimii b trebuie să se considere lungimea efectivă b_{ef} :

$$b_{ef} = b - b' ; \quad \lambda_{ef} = \lambda - \lambda' ; \quad \lambda' = \frac{b'}{2r}. \tag{2}$$

Rezultă deci pentru Λ_{ef} expresia

$$\Lambda_{ef} = \frac{6\mu\lambda_{ef}\, c_D\, S_{10}\sqrt{RT}}{\pi c^3\, p_a}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = \frac{\lambda_{ef}}{\lambda}\Lambda = \left(1 - \frac{b'}{b}\right)\Lambda. \qquad (3)$$

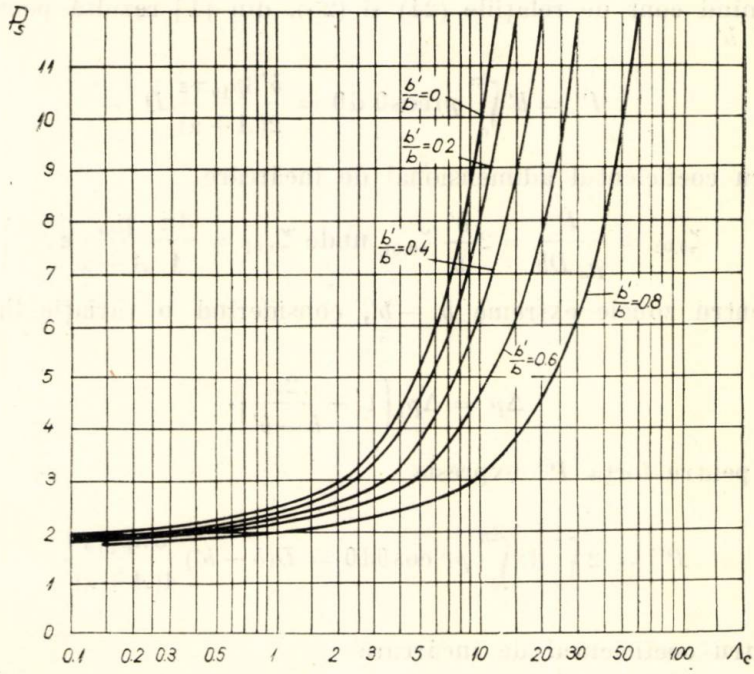


Fig. 2. — Valoarea critică a parametrului Λ pentru diferite presiuni de alimentare p_s în cazul aerului pentru diferite valori ale raportului $\frac{b'}{b}$ (scurgere sonică prin restrictor).

Pentru determinarea valorii critice Λ_c (corespunzătoare atingerii vitezei critice în restrictor) în funcţie de p_s, rămîne valabilă diagrama din figura 2 [1], ea reprezentînd în acest caz Λ_{efc} în funcţie de p_s. Pentru a obţine valorile Λ_c în funcţie de p_s se va împărţi atunci valoarea lui Λ_{efc} cu expresia $\left(1 - \frac{b'}{b}\right)$, obţinîndu-se o familie de curbe avînd ca parametru raportul $\frac{b'}{b}$.

Relaţiile de debit rămîn aceleaşi ca în cazul alimentării printr-un singur şir de orificii, diagrama din figura 4 [1] continuînd să fie valabilă, cu observaţia că în locul lui Λ se introduce Λ_{ef}.

SCURGERE PUR AXIALĂ

Pentru lagăre cu alungiri mici se poate neglija mișcarea gazului în direcția θ, considerîndu-se o scurgere pur axială. În acest caz se poate admite că în zona centrală b' presiunea este independentă de z, iar pentru zonele extreme $b - b'$ se consideră o variație a lui p în funcție de z similară cazului unui singur rînd de orificii [1].

Ținînd cont de relațiile (24) și (25), din [1] rezultă pentru zona centrală b'

$$P' = b' \int_0^{2\pi} pr\cos\theta \, d\theta = \frac{b' 3 p_{10} \pi \varepsilon}{2(A+\alpha)} D \tag{4}$$

și pentru coeficientul adimensional de încărcare

$$\zeta'_{0,02} = \frac{P}{p_a D b} = 2\frac{b'}{b}\zeta_{0,01} \text{ unde } \zeta_{0,01} = \frac{3\pi}{4}\frac{\overline{p}_{10}}{A+\alpha}\varepsilon. \tag{5}$$

Pentru zonele extreme $b - b'$, considerînd o variație liniară de forma

$$\Delta p = \Delta p_1 \left(1 - \frac{2z}{b-b'}\right), \tag{6}$$

rezultă pentru forța P'' expresia

$$P'' = 2\int_{\frac{b'}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int_0^{2\pi} pr\cos\theta d\theta = D(b-b')\frac{3\pi p_{10}\varepsilon}{4(A+\alpha)}, \tag{7}$$

iar pentru coeficientul de încărcare

$$\zeta''_{0.02} = \zeta_{0.01}\frac{b-b'}{D}. \tag{8}$$

Coeficientul total de încărcare va avea astfel forma

$$\zeta_{0,02} = \zeta'_{0.02} + \zeta''_{0.02} = \zeta_{0.01}\left(1 + \frac{b'}{b}\right) \tag{9}$$

sau, ținînd seama de expresia coeficientului $\zeta_{0,01}$,

$$i\zeta_{0.02} = i\frac{3\pi}{4}\frac{\overline{p}_{10}}{A+\alpha}\varepsilon\left(1+\frac{b'}{b}\right)\begin{cases} i = 1 & \text{compensare prin orificii,} \\ i = \dfrac{3}{2} & \text{compensare inerentă.} \end{cases} \tag{10}$$

Se constată că relațiile de calcul rămîn în continuare simple, dar intervine în plus parametrul $\frac{b'}{b}$. În acest mod se pot trasa curbele $\frac{d\zeta}{d\varepsilon}$ în funcție de Λ pentru diverse valori ale parametrului $\frac{b'}{b}$ și diferite pre-

siuni de alimentare p_s. Pentru fiecare raport $\frac{b'}{b}$ vor apărea valori Λ optime, analoge celor din cazul lagărelor alimentate printr-un singur rînd de orificii. Din formula (10) mai rezultă că în principiu încărcarea lagărului poate crește cu $\frac{b'}{b}$ față de cazul lagărelor cu un singur șir de orificii. Există deci teoretic posibilitatea de a dubla capacitatea de încărcare a lagărului.

În realitate, cînd raportul $\frac{b'}{b} \to 1$, parametrul $\Lambda \to \infty$. Astfel, la valori $\frac{b'}{b}$ mari rezultă valori Λ mari, deci jocuri foarte mici. În plus, în aceste condiții calculele de mai sus își pierd valabilitatea, deoarece nu se mai poate admite Δp_{10} constant pe porțiunea centrală $\left(-\frac{b'}{2} < z < +\frac{b'}{2}\right)$ din cauza influenței scurgerii în direcția θ.

În cazul mai corect în care se consideră o variație parabolică a presiunii în zona $b - b'$ de forma

$$\overline{p}^2 = \overline{p}_1^2 + \left(1 - \overline{p}_1^2\right)\frac{2z}{b - b'}, \tag{11}$$

rezultă pentru coeficientul de încărcare următoarele expresii: pentru zona b' rămîne valabilă relația (5), iar pentru zona $b - b'$ rezultă, conform relației (33) din [1],

$$\zeta''_{0.2} = \zeta_{01}\left(1 - \frac{b'}{b}\right) = \zeta_{0.01}F\left(1 - \frac{b'}{b}\right);\ F = \frac{4}{3}\frac{\overline{p_{10}}\,(\overline{p_{10}} + 2)}{(\overline{p_{10}} + 1)^2}. \tag{12}$$

Coeficientul total de încărcare al lagărului va fi deci egal cu

$$\zeta_{0.2} = \zeta_{0.01}\left[2\frac{b'}{b} + F\left(1 - \frac{b'}{b}\right)\right]. \tag{13}$$

Se observă că pentru $F = 1$ relația (12) se reduce la relația (9). Influența factorului F se micșorează pe măsura creșterii raportului $\frac{b'}{b}$.

În figura 3 sînt reprezentate curbele $\frac{d\zeta}{d\varepsilon}$ pentru diferite presiuni și valori ale raportului $\frac{b'}{b}$.

Pe măsura creșterii raportului $\frac{b'}{b}$, valorile optime pentru $\frac{d\zeta}{d\varepsilon}$ se deplasează spre valori mari ale lui Λ.

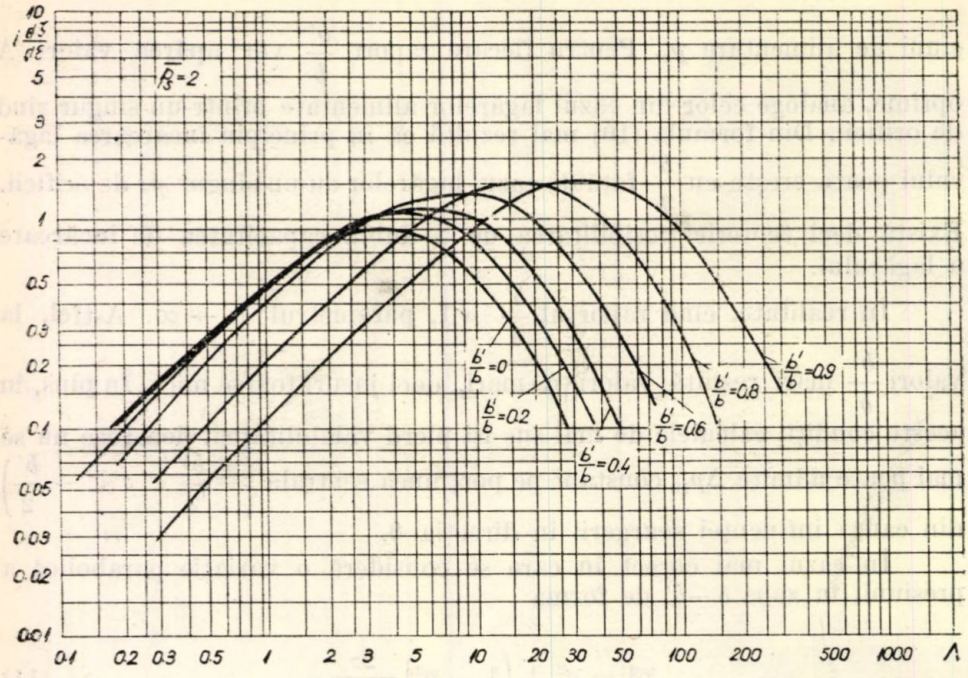

$\bar{R}_3 = 2$
$\frac{b'}{b} = 0$
$\frac{b'}{b} = 0.2$
$\frac{b'}{b} = 0.4$
$\frac{b'}{b} = 0.6$
$\frac{b'}{b} = 0.8$
$\frac{b'}{b} = 0.9$
10
5
3
2
1
0.5
0.3
0.2
0.1
0.05
0.03
0.02
0.01
0.1
0.2
0.3
0.5
1
2
3
5
10
20
30
50
100
200
500
1000
Λ

Fig. 3 a

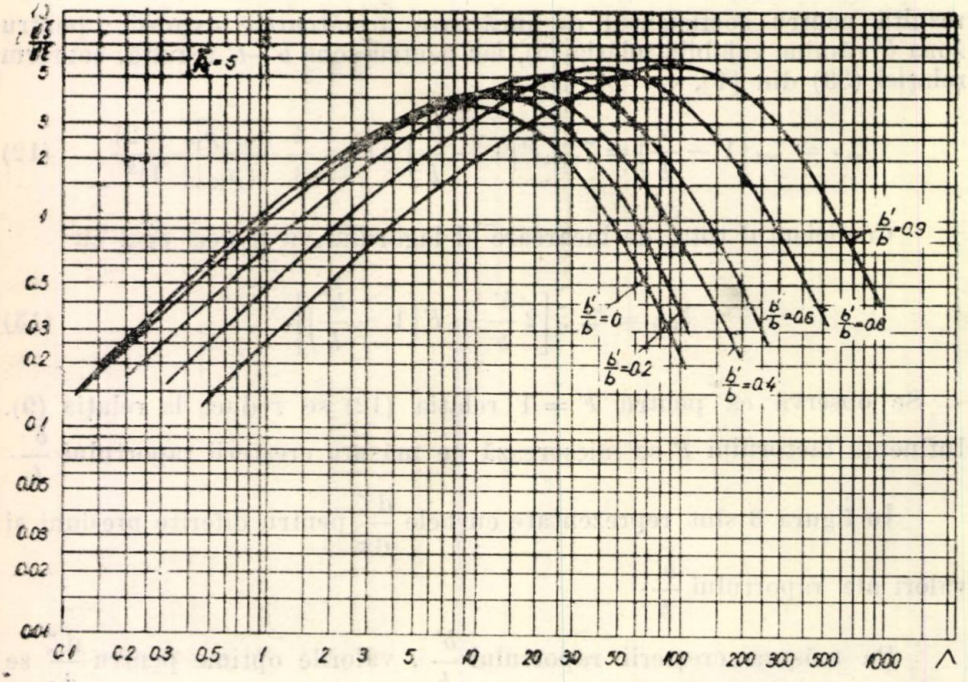

$\bar{R} = 5$
$\frac{b'}{b} = 0$
$\frac{b'}{b} = 0.2$
$\frac{b'}{b} = 0.4$
$\frac{b'}{b} = 0.6$
$\frac{b'}{b} = 0.8$
$\frac{b'}{b} = 0.9$
5
3
2
1
0.5
0.3
0.2
0.1
0.05
0.03
0.02
0.01
0.1
0.2
0.3
0.5
1
2
3
5
10
20
30
50
100
200
300
500
1000
Λ

Fig. 3 b

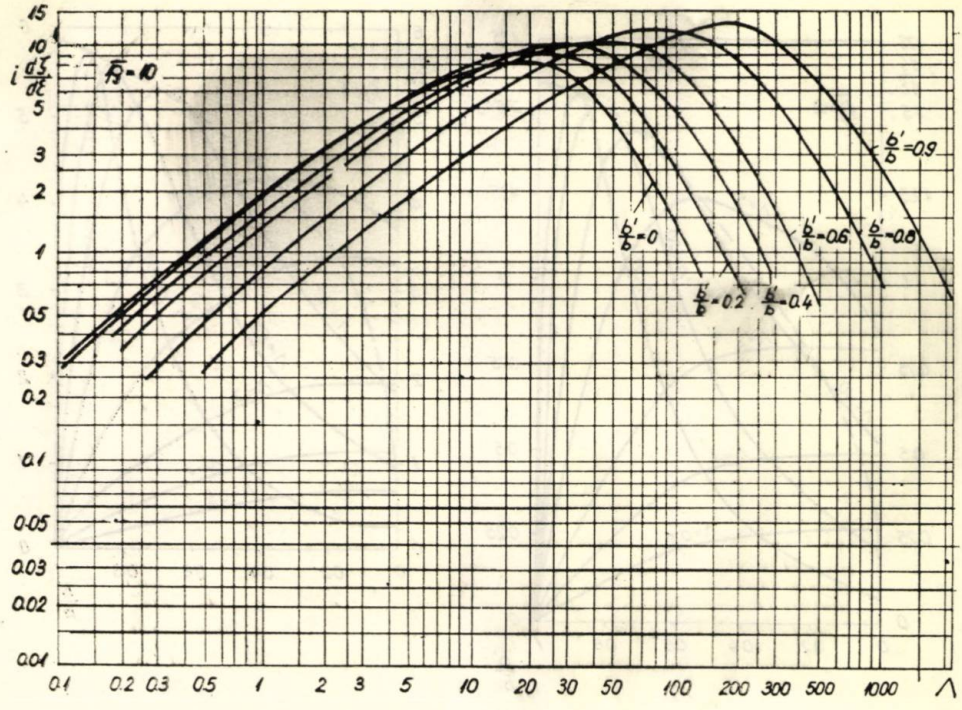


Fig. 3 c

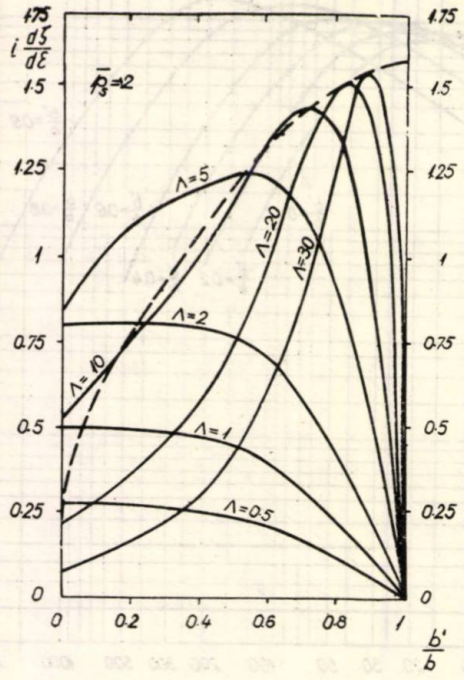
Fig. 3 *a*, *b*, *c*. — Capacitatea de încărcare în funcție de Λ pentru diverse rapoarte $\frac{b'}{b}$ și presiuni p_s.

Formula $i\zeta_{0.2} = i\zeta_{0.01}\left[2\frac{b'}{b} + F\left(1 - \frac{b'}{b}\right)\right]$.

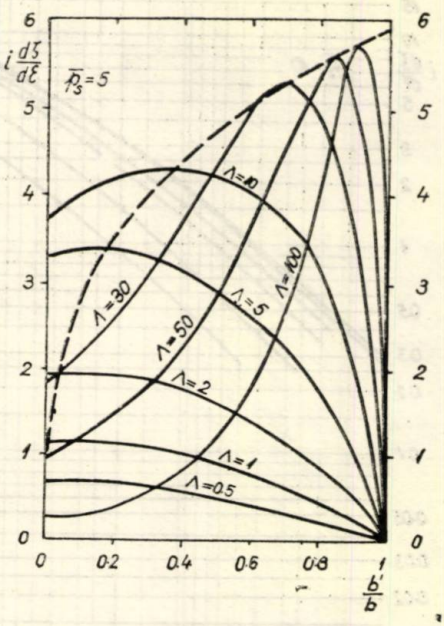
i = 1 compensare prin orificii,

i = 2/3 compensare inerentă.

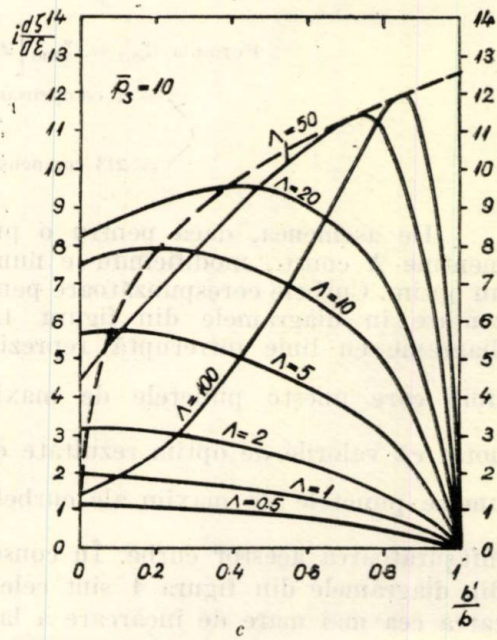
De asemenea, dacă pentru o presiune de alimentare p_s dată se menține Λ const., modificîndu-se numai b'/b, va apărea de asemenea un optim. Curbele corespunzătoare pentru diferite valori Λ, p_s sînt reprezentate în diagramele din figura 4. Curbele reprezentate în aceste diagrame cu linie întreruptă reprezintă condiția de optim, respectiv linia care unește punctele de maxim ale curbelor $\frac{d\zeta}{d\varepsilon}\left(\frac{b'}{b}\right)$. Este de notat că valorile de optim rezultate din figura 4 nu reprezintă linia ce unește punctele de maxim ale curbelor $\frac{d\zeta}{d\varepsilon}$ din figura 3, ci reprezintă înfășurătoarea acestor curbe. În consecință, valorile de optim rezultate din diagramele din figura 4 sînt cele care dau pentru Λ impus capacitatea cea mai mare de încărcare a lagărului.



a



b



c

Fig. 4 *a*, *b*, *c*. — Condiţiile de optim în funcţie de $\frac{b'}{b}$ pentru diferitele valori ale parametrului Λ.

CONSIDERAREA MIŞCĂRII ÎN LUNGUL CIRCUMFERINŢEI LAGĂRULUI

Pentru excentricităţi mici, întocmai ca pentru cazul unui singur rînd de orificii, funcţia este armonică, iar soluţia corespunzătoare poate fi construită în mod simplu. Astfel, dacă notăm cu indicii α, β domeniile $|z| < \frac{b'}{2}$ şi $\frac{b'}{2} < |z| < \frac{b}{2}$, se poate scrie

$$\bar{\eta}_\alpha = \bar{p}_{i0}^2 + \Delta\bar{\eta}_\alpha\,;\quad \bar{\eta}_\beta = \bar{p}_{i0}^2 - \frac{\bar{p}_{i0}^2 - 1}{\lambda_{ef}}\bar{z}' + \Delta\eta_\beta\,;\quad \bar{z}' = \bar{z} - \lambda', \tag{14}$$

cu condiţiile la limită

$$\begin{aligned} &\Delta\bar{\eta}_\alpha = \Delta\bar{\eta}_\beta \text{ la } \bar{z} = \lambda',\ \bar{z}' = 0,\\ &\Delta\bar{\eta}_\beta = 0 \text{ la } \bar{z} = \lambda,\ \bar{z}' = \lambda_{ef}. \end{aligned} \tag{15}$$

În plus, putem scrie o condiţie de debit analogă cu cea din cazul alimentării printr-un singur şir de orificii la $z = \frac{b'}{2}$, egalînd debitul de intrare pe un element $d\theta$ cu debitul ce se scurge în direcţia z către capetele lagărului şi către interior. Rezultă deci

$$A(\Delta\bar{\eta})_{\bar{z}=\lambda'} - \lambda_{ef}\,\alpha\left[-\left(\frac{\partial\Delta\bar{\eta}_\alpha}{\partial\bar{z}}\right)_{\bar{z}=\lambda'} + \left(\frac{\partial\Delta\bar{\eta}_\beta}{\partial\bar{z}}\right)_{\bar{z}'=0}\right] = -6\,\bar{p}_{i0}^2\,\varepsilon\cos\theta\,; \tag{16}$$

în cazul compensării prin orificii (în cazul compensării inerente $6\,\bar{p}_{i0}^2\,\varepsilon\cos\theta$ se înlocuieşte cu $4\,\bar{p}_{i0}^2\,\varepsilon\cos\theta$).

Se poate demonstra că funcţiile armonice care îndeplinesc condiţiile la limită (15) sînt

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_\alpha &= \bar{p}_{i0}^2 - \frac{6\,\bar{p}_{i0}^2\,\varepsilon\cos\theta\,\mathrm{ch}\bar{z}}{A + \lambda_{ef}\,\alpha\,(\mathrm{cth}\lambda_{ef} + \mathrm{th}\lambda')\,\mathrm{ch}\lambda'},\\ \bar{\eta}_\beta &= \bar{p}_{i0}^2 - \frac{\bar{p}_{i0}^2 - 1}{\lambda_{ef}}\bar{z}' - \frac{6\,\bar{p}_{i0}^2\,\varepsilon\cos\theta}{A + \lambda_{ef}\,\alpha\,(\mathrm{cth}\lambda_{ef} + \mathrm{th}\lambda')}\,\frac{\mathrm{sh}\,(\lambda_{ef} - \bar{z}')}{\mathrm{sh}\,\lambda_{ef}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Din relaţiile (17) se pot apoi deduce expresiile presiunilor sub forma

$$\begin{aligned} \bar{p}_\alpha &= \bar{p}_{10} - \frac{3\,\bar{p}_{10}\,\varepsilon\cos\theta}{A + \alpha\lambda_{ef}\,(\mathrm{cth}\lambda_{ef} + \mathrm{th}\lambda')}\,\frac{\mathrm{ch}\,\bar{z}}{\mathrm{ch}\,\lambda},\\ \bar{p}_\beta &= \bar{p}_{10}\sqrt{1 - \frac{\bar{z}'\,(\bar{p}_{10}^2 - 1)}{\lambda_{ef}\,\bar{p}_{10}^2}} - \\ &- \frac{3\,\bar{p}_{10}\,\varepsilon\cos\theta}{A + \alpha\,\lambda_{ef}\,(\mathrm{cth}\,\lambda_{ef} + \mathrm{th}\lambda')}\,\frac{1}{\mathrm{sh}\,\lambda_{ef}}\,\frac{\mathrm{sh}(\lambda_{ef} - \bar{z})}{\sqrt{1 - \frac{\bar{z}'(\bar{p}_{10}^2 - 1)}{\lambda_{ef}\,\bar{p}_{10}^2}}}, \end{aligned} \tag{18}$$

În sfîrşit, rezultanta presiunilor va avea expresia

$$\zeta = \zeta_\alpha + \zeta_\beta = \zeta_{0,01}\left[2\frac{b'}{b}k'_\lambda + \left(1-\frac{b'}{b}\right)k_{\lambda_{ef}}\right] = \zeta_{0,01}K_\lambda F, \qquad (19)$$

unde

$$F = 2\frac{b'}{b}F'_\lambda + \left(1-\frac{b'}{b}\right)F_{\lambda_{ef}},$$

$$k'_\lambda = K_\lambda F'_\lambda,\ K_\lambda = \frac{A+\alpha}{A+\lambda_{ef}\,\alpha(\mathrm{cth}\lambda_{ef}+\mathrm{th}\lambda')},\ F'_\lambda = \frac{\mathrm{th}\lambda'}{\lambda'} \qquad (20)$$

şi, respectiv,

$$k_{\lambda_{ef}} = K_\lambda F_{\lambda_{ef}},\ F_{\lambda_{ef}} = \frac{2}{\lambda_{ef}\,\mathrm{sh}\lambda_{ef}}\int_0^{\lambda_{ef}} \frac{\mathrm{sh}(\lambda_{ef}-\bar{z}')}{\sqrt{1-\dfrac{\bar{z}'(\bar{p}_{10}^2-1)}{\lambda_{ef}\,\bar{p}_{10}^2}}}\,\mathrm{d}\bar{z}'. \qquad (21)$$

Se constată că formulele deduse sînt similare cu cele obţinute la calculul lagărelor cu un singur şir de orificii şi se reduc la acestea din urmă în cazul în care $\frac{b'}{b} \to 0$. Pentru determinarea lui $F_{\lambda_{ef}}$ se poate folosi diagrama din figura 7 din [1], cu condiţia ca să se considere λ_{ef} în loc de λ.

Din relaţiile (18) şi (19) se constată că dacă $\frac{b'}{b} \to 1$, iar Λ creşte corespunzător, se poate mări capacitatea portantă a unui lagăr în principiu cu factorul maxim $2\frac{\mathrm{th}\lambda'}{\lambda'}$ (egal cu valoarea 2 cînd $\lambda \to 0$, dar care scade cînd λ creşte).

În figura 5 se arată influenţa scurgerii în direcţia θ, care reduce valorile Δp pentru un exemplu de lagăr cu $\lambda = 2$, $\frac{b'}{b} = 0{,}5$, $\Lambda = 10{,}4$, $\varepsilon = 0{,}3$, cu $\bar{p}_s = 5\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^2}$.

Rezultatele de mai sus permit calculul coeficientului de încărcare. Calculele respective sînt sintetizate în diagramele din figura 6, în care s-au reprezentat curbele $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\varepsilon}$ în funcţie de Λ pentru diferite alungiri λ, considerînd, de exemplu, o presiune de alimentare $p_s = 5$. Se constată că şi în acest caz creşterea alungirii micşorează destul de mult coeficientul de încărcare.

Debitul de lubrifiant rămîne în continuare constant într-o primă aproximaţie şi egal cu cel calculat pentru cazul $\varepsilon = 0$.

★

Rezultă deci că metoda preconizată permite, prin procedee analitice relativ simple, calculul distribuţiei presiunilor şi al rezultantei presiunilor în lagărele alimentate sub presiune prin două rînduri de orificii.

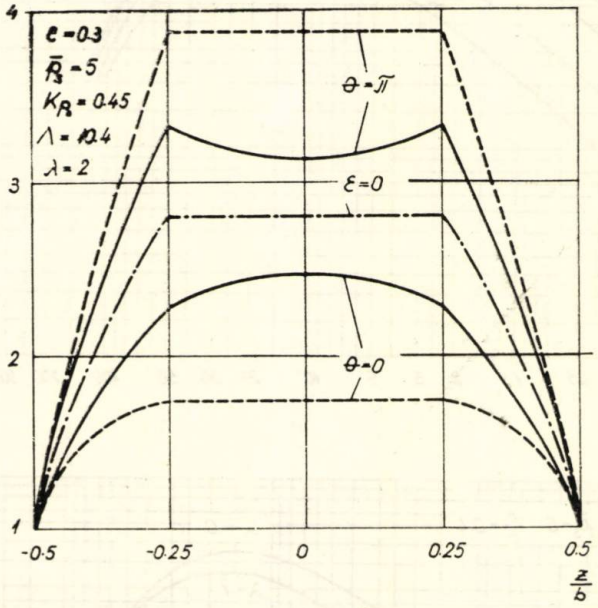
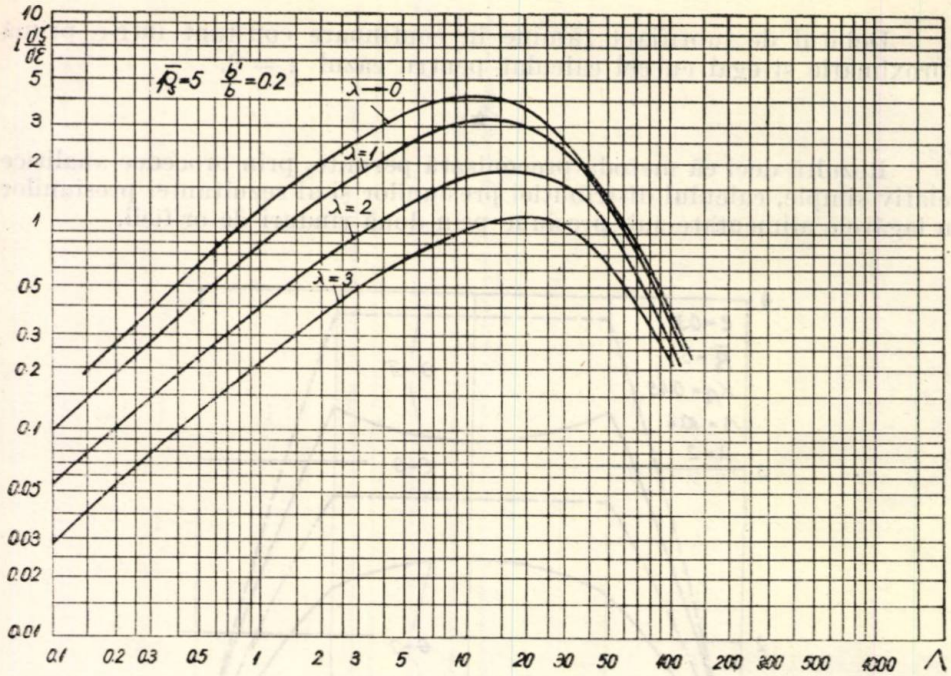


Fig. 5. — Influenţa scurgerii în direcţia θ asupra distribuţiei de presiuni.

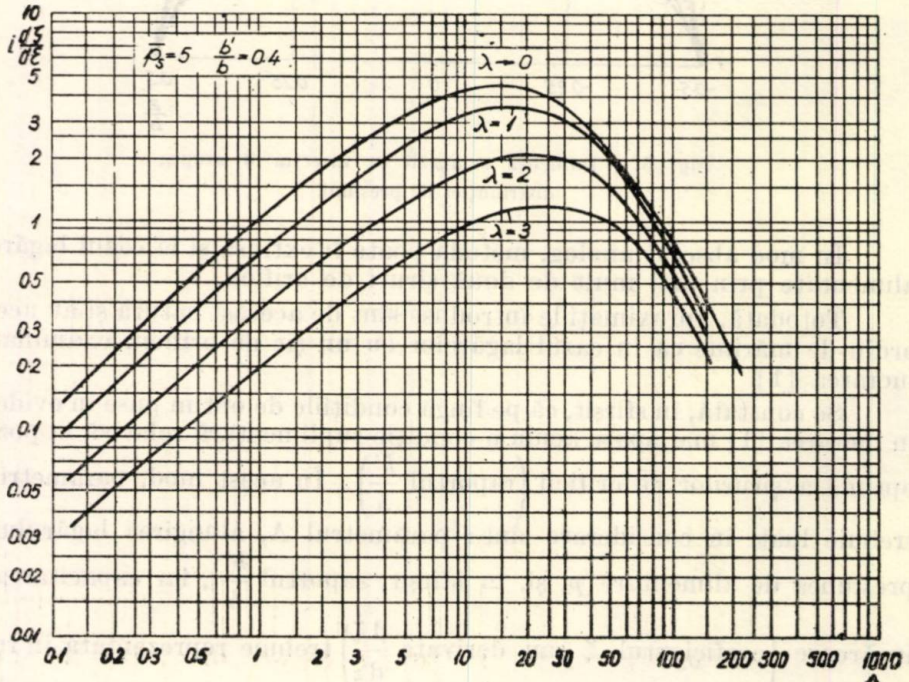
În mod absolut analog, metoda poate fi extinsă şi la cazul lagărelor alimentate prin mai mult de două şiruri de orificii.

Totodată, aproximaţiile introduse sînt de aceeaşi natură şi au acelaşi ordin de mărime ca în cazul lagărelor cu un şir de orificii, examinat în lucrarea [1].

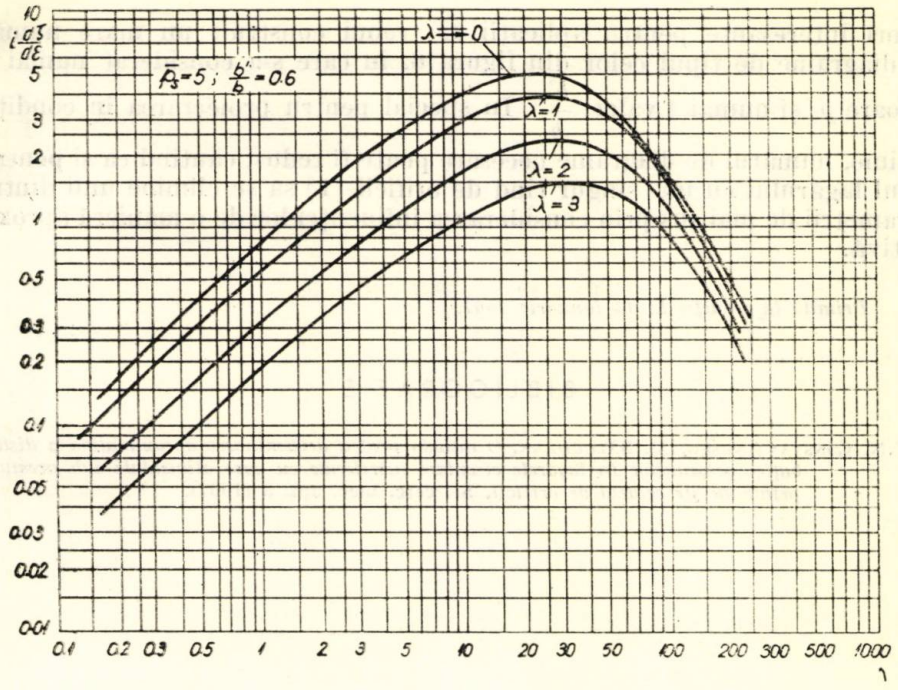
Se constată, în sfîrşit, că pe lîngă condiţiile de optim puse în evidenţă în lucrarea [1] mai apare acum o condiţie suplimentară relativă la poziţia optimă a şirurilor de orificii $\left(\text{raportul } \frac{b'}{b}\right)$. În acest mod, parametrii ce trebuie luaţi în considerare sînt : parametrul Λ, alungirea lagărului λ, presiunea de alimentare p_s şi, în sfîrşit, raportul $\frac{b'}{b}$, iar capacitatea de încărcare $\left(\text{coeficientul } \zeta \text{ sau derivata } \frac{d\zeta}{d\varepsilon}\right)$ trebuie reprezentată în funcţie de toţi aceşti parametri. De aceea, pentru a acoperi cîmpul de


$\bar{P}_3$=5 $\frac{b'}{b}$=0.2
λ→0
λ=1
λ=2
λ=3
i
10
5
3
2
1
0.5
0.3
0.2
0.1
0.05
0.03
0.02
0.01
0.1 0.2 0.3 0.5 1 2 3 5 10 20 30 50 100 200 300 500 1000
Λ

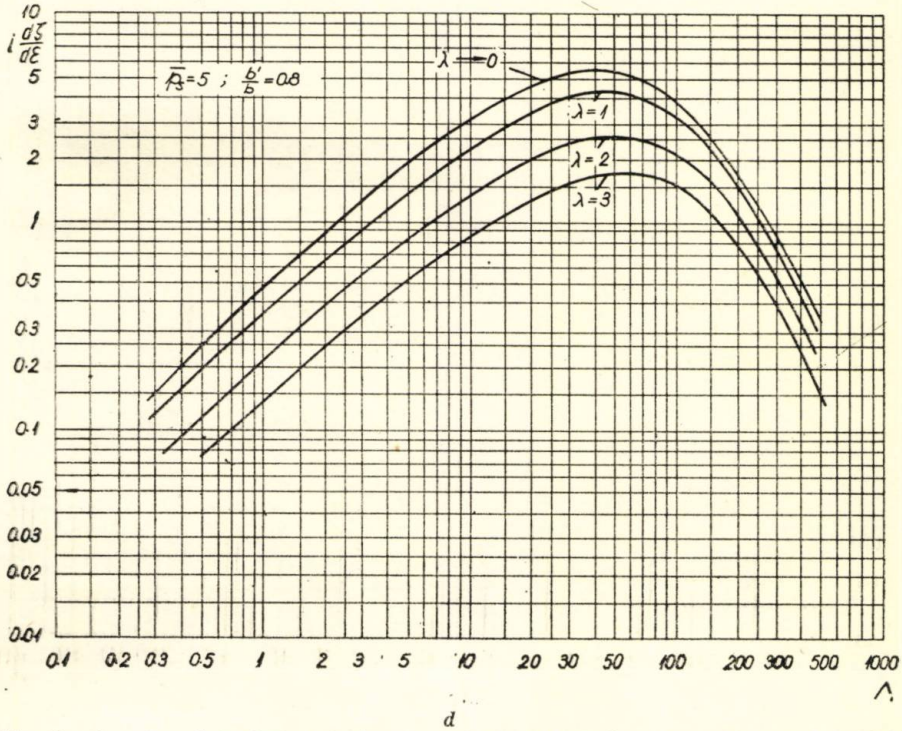
a


$\bar{P}_3$=5 $\frac{b'}{b}$=0.4
λ→0
λ=1
λ=2
λ=3
i
10
5
3
2
1
0.5
0.3
0.2
0.1
0.05
0.03
0.02
0.01
0.1 0.2 0.3 0.5 1 2 3 5 10 20 30 50 100 200 300 500 1000
Λ

b



c



d

Fig. 6 *a, b, c, d.* — Capacitatea de încărcare în funcție de Λ pentru diferite alungiri λ, la presiunea de alimentare $p_s = 5$.

valori interesante pentru aplicații ar trebui construit un mare număr de diagrame de tipul celor din figura 6, în care s-a considerat numai o valoare p_s și numai 4 valori $\frac{b'}{b}$. În special pentru proiectarea în condiții optime, numărul de diagrame necesare poate fi redus, căutînd ca și pentru cazul lagărului cu un singur rînd de orificii [1] să se elimine unii dintre parametrii de mai sus prin considerarea influenței lor de o manieră aproximativă.

Primită la redacție la 13 ianuarie 1967.

BIBLIOGRAFIE

1. V.N. CONSTANTINESCU, M. SĂLCUDEAN, *O metodă pentru determinarea aproximativă a distribuției presiunilor în lagărele circulare lubrificate cu gaze alimentate sub presiune printr-un șir central de orificii*, St. cerc. mec. apl. 3 (1967).

UNELE ASPECTE ALE TRANZIȚIEI ÎN STRATUL LIMITĂ, LA NUMERE REYNOLDS MICI [1])

ȘT. N. SĂVULESCU și V. TOMA
Institutul de mecanica fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Scopul acestei cercetări este de a obține date pentru cunoașterea profundă a „turbulenței" în stratul-limită la $250 < \mathcal{R}e_{\delta^*} < 450$, un domeniu sub valorile critice binecunoscute. Un mare număr de experiențe făcute în stratul-limită perturbat în mod special arată două profile de viteză diferite: „laminar" și „turbulent". Modelul teoretic permite de asemenea o determinare a distribuției de energie „turbulentă" dacă termenii care apar în ecuația integro-diferențială a energiei devin fluctuații cu unele proprietăți statistice. Aceasta se poate întîmpla chiar la numere Reynolds subcritice.
De asemenea este dată o discuție calitativă asupra structurii scurgerii în tranziție.

I. OBSERVAȚII INTRODUCTIVE

Pentru stratul-limită pe o placă plană, datele existente [1] [2] asupra numărului Reynolds critic $\mathcal{R}e_{\delta^*} = \frac{U_e \delta^*}{\nu}$ (U_e fiind viteza exterioară de scurgere, δ^* grosimea de deplasare și ν viscozitate cinematică) sînt următoarele:

$\mathcal{R}e_{\delta^*}$ = 575 (o valoare între 325 și 680), valoarea teoretică critică pentru instabilitate la perturbații mici;

$\mathcal{R}e_{\delta^*}$ = 615, cea mai joasă valoare experimentală pentru tranziție, provocată artificial;

$\mathcal{R}e_{\delta^*}$ = 1730, cea mai joasă valoare experimentală pentru tranziție naturală cu grad mare de turbulență exterioară în jurul valorii 0,01.

[1]) Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl. (în limba engleză) **12**, 5 (1967).

Exceptînd cercetările asupra scurgerilor la numere Reynolds foarte mici ($0{,}1 < \mathcal{R}e_{\delta^*} < 10$), domeniul intermediar $100 < \mathcal{R}e_{\delta^*} < 500$ este puţin cunoscut, deoarece pentru aplicaţiile cele mai obişnuite se depăşesc mult valorile critice. Aceste fapte conduc de obicei la „lupta" împotriva turbulenţei. Contrar acesteia, scopul nostru este de a produce turbulenţă. Aceasta este o sarcină dificilă care poate să fie justificată prin:

— oarecare îndoieli privind folosirea ecuaţiilor Navier-Stokes în domeniul intermediar, în care acestea sînt nejustificate;

— scara mare a timpului ($f = 20 \div 80$ Hz) şi a spaţiului ($\delta \sim 10$ mm) care înlesnesc observaţiile experimentale a fenomenului, cu toate că vitezele mici (0,2 —1,5 m/s) cer o mai mare exactitate decît în cazul vitezelor obişnuite (> 3 m/s).

Probleme care prezintă un interes special în acest domeniu subcritic al numerelor Reynolds sînt următoarele:

a) diferenţa dintre perturbaţiile mici şi cele finite;

b) unele clarificări asupra mecanismului care controlează evoluţia perturbaţiilor;

c) existenţa şi caracteristicile mişcării „turbulente";

d) eficienţa maximă a dispozitivelor de perturbaţie;

e) existenţa unui $\mathcal{R}e$ critic sub care nu sînt mijloace de produs turbulenţă.

În cadrul acestui articol se va trata punctul *c*) (existenţa şi producerea turbulenţei), atît teoretic, cît şi experimental. Numărul mare de experienţe făcute în stratul-limită de perete (vezi fig. 1 şi 2), la $\mathcal{R}e_{\delta^*} < 450$, permit, de asemenea, o discuţie calitativă şi asupra altor probleme.

II. MODELUL TEORETIC

Vom considera scurgerea incompresibilă într-un strat vîscos, referit la un sistem cartezian $O\,x\,y\,z$, cu Ox, orientat în lungul curentului principal şi mărginit de suprafeţele $y = 0$ şi $y = \delta(x, y, t)$, ca în figura 1. Folosind notaţiile: $\overline{V} = u \cdot \bar{i} + v \cdot \bar{j} + w \cdot \bar{k}$, unde $\overline{V}$ este vectorul instantaneu de viteză într-un punct, p — presiunea şi ρ = densitatea, sîntem interesaţi să obţinem distribuţia energiei cinetice $E = 1/2\,(u^2 + v^2 + w^2)$, în stratul vîscos. Datorită variaţiilor mari în lungul lui y, putem scrie

$$\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial z} \ll \frac{\partial E}{\partial y}, \quad v,\ w \ll u. \tag{1}$$

Din ecuaţiile Navier-Stokes se obţine sistemul următor:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (\overline{V} \cdot \overline{\nabla})\, E \cdot \frac{1}{\rho}\, \overline{\nabla}\,(p\overline{V}) + \nu\Phi = \nu \Delta E, \quad \overline{\nabla} \cdot \overline{V} = 0, \tag{2}$$

unde $\overline{\nabla} = \bar{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}$, $\quad \Delta = \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla}$, $\quad \Phi = \Sigma \left(\dfrac{\partial u_e}{\partial x_m}\right)^2$.

Ca într-o lucrare prealabilă [3], vom introduce variabilele noi

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{\int_0^y E\,dy}{\int_0^\delta E\,dy} = \frac{\bar{\Psi}}{\bar{\Psi}_\delta}, \quad \zeta = z, \quad \tau = t. \tag{3}$$

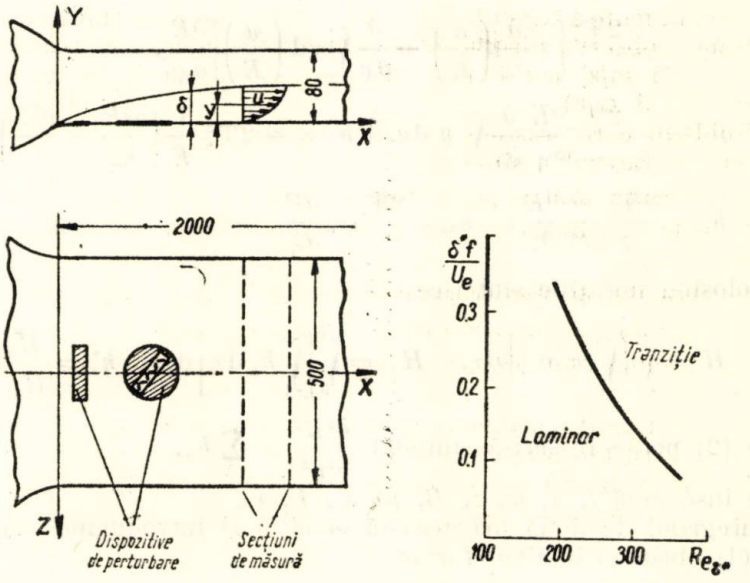


Fig. 1. — Prezentare sintetică a cîtorva rezultate experimentale.

Condițiile la limită sînt:

$$\begin{aligned} y = 0 \to \eta = 0, \quad E = E_0 = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2), \\ y = \delta \to \eta = 1, \quad E = E_0 = \frac{1}{2}(U_e^2 + V_e^2 + W_e^2). \end{aligned} \tag{4}$$

Cu ajutorul ecuației de continuitate putem să transformăm termenii convectivi și difuzivi astfel:

$$u\frac{\partial E}{\partial x} + v\frac{\partial E}{\partial y} + w\frac{\partial E}{\partial z} = u\frac{\partial E}{\partial \xi} + u\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial \eta} - \left[\int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dy + v_0\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{E}{\Psi_\delta}\frac{\partial E}{\partial \eta} + w\frac{\partial E}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{E}{2\Psi_\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(E^2).$$

Termenii transformați și cei neschimbați au fost grupați arbitrar și notați în felul următor:

$$h_t = \frac{2\Psi_\delta^2}{\nu}\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t}, \quad h_B = -\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_\delta^2)\frac{\partial E}{\partial \eta}\int_0^\eta \frac{u}{E}\,\mathrm{d}\eta,$$

$$h_\xi = \frac{2\Psi_\delta^2}{\nu}\frac{u}{E}\frac{\partial E}{\partial \xi}, \qquad h_p = \frac{2\Psi_\delta^2}{\nu}\frac{1}{\rho E}\overline{\nabla}(p\overline{V}),$$

$$h_x = -\frac{2\Psi_\delta^2}{\nu}\left[\eta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{E}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\eta \eta\mathrm{d}\left(\frac{u}{E}\right)\right]\frac{\partial E}{\partial \eta}, \tag{5}$$

$$h_w = -\frac{2\Psi_\delta}{\nu}\frac{\partial E}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^y w\,\mathrm{d}y, \quad h_E = -2\Psi_\delta^2\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right),$$

$$h_z = \frac{2\Psi_\delta^2}{\nu}\frac{w}{E}\frac{\partial E}{\partial z}, \quad h_{v_0} = \frac{2\Psi_\delta}{\nu}v_0\frac{\partial E}{\partial \eta}.$$

Folosind notațiile sintetice

$$H_\alpha = \int_0^\eta\left[\int_1^\eta h_\alpha\,\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta, \quad H_{\alpha_1} = \int_0^1\left[\int_1^\eta h_\alpha\,\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta, \quad h_\alpha^* = \frac{H_\alpha}{H_{\alpha_1}}, \tag{6}$$

ecuația (2) poate fi scrisă simplu: $\dfrac{\partial^2 E^2}{\partial \eta^2} = \sum_\alpha h_\alpha$,

unde α înseamnă t, x, w, z, B, p, Φ, E, v_0.

Integrînd de două ori această ecuație și introducînd condițiile la limită (4) obținem în final forma

$$E^2 = h_B^* E_e^2 + \sum_\alpha H_{\alpha_1}(h_\alpha^* - h_B^*) + 2\Psi_\delta Q_e(\eta - h_B^*) + E_0^2(1 - h_B^*) \tag{7}$$

și, în același timp, ecuațiile asociate pentru Ψ_δ ($\eta = 1$, $E = E_e$):

$$E_e^2 = H_{B_1} + \sum_\alpha H_{\alpha_1} + 2\Psi_\delta Q_e + E_0^2.$$

În privința formulării integro-diferențială a ecuației energiei, observăm că expresia generală a lui

$$h_\alpha^* = \frac{\int_0^\eta\left[\int_1^\eta h_\alpha\,\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta}{\int_0^1\left[\int_1^\eta h_\alpha\,\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta}, \tag{8}$$

sau

$$h_0^* = \eta(2 - \eta) \text{ (pentru } h_0 = \text{const)}, \tag{9}$$

reprezintă un operator care permite o clasificare a lui h_α, după cum urmează:

a) h_α este tipic transformabil dacă $|h_\alpha^* - h_0^*| \ll 1$,

b) h_α este tipic netransformabil dacă $|h_\alpha^* - h_0^*| \sim 1$,

pentru $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Există o mare varietate de funcţii tipic transformabile. Forma

$$h_B^* = \frac{\int_0^\eta \left\| \int_1^\eta \left[\int_0^\eta \frac{u}{E} \, d\eta \right] dE \right\| d\eta}{\int_0^1 \left\{ \int_1^\eta \left[\int_0^\eta \frac{u}{E} \, d\eta \right] dE \right\} d\eta} \tag{10}$$

rămîne în mod practic neschimbată cînd E sau u se schimbă considerabil.

Termenii $H_{\alpha_1}(h_\alpha^* - h_B^*)$ devin mici şi schimbă uşor semnul, adică au caracter oscilant, dacă h_α este tipic transformabilă. Ei reprezintă mecanisme diferite (contracţie şi întindere a vîrtejurilor, instaţionaritate, difuzie, disipaţie etc), precum şi diferite influenţe exterioare (E_e, Q_e, E_0). Fie că scara timpului mecanismului diferă, fie că efectele exterioare sînt distribuite statistic, termenii $H_{\alpha_1}(h_\alpha^* - h_B^*)$ devin relativ independenţi. Aceste variaţii pot să fie numite fluctuaţii. În consecinţă vom admite ipoteza: *dacă termenii* $H_{\alpha_1}(h_\alpha^* - h_B^*)$ *sînt mici, numeroşi şi variabili, ei fluctuează astfel încît realizează un minim al întregei lor contribuţii energetice.*

În acest fel avem o condiţie de mecanică variaţională:

$$\int (E^2 - h_B^* E_e^2) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \, d\tau \Rightarrow \text{minim.} \tag{11}$$

Această integrală acoperă un domeniu referitor la scara scurgerii ($\xi \sim \lambda_x$, $\zeta \sim \lambda_z$, $\tau \sim T$), unde λ_x, λ_z şi T sînt lungimile de undă în direcţia scurgerii şi respectiv normal pe ea, precum şi perioada oscilaţiilor primare respective, iar $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Pentru stratul-limită, la numere Reynolds subcritice, variaţia în lungul lui η este cea mai importantă, pentru că λ_x, λ_z sînt mai mari decît δ şi T este de asemenea mare. Astfel, modelul teoretic prezentat arată:

1. Distribuţia „turbulentă" a lui E este obţinută din (11) cînd $H_{\alpha_1}(h_\alpha^* - h_B^*)$ sînt fluctuaţii. O aproximaţie brută

$$\frac{u}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n; \quad E \approx \frac{1}{2} u^2; \quad Q_e = 0; \quad E_0 = 0$$

conduce la $n = \frac{1}{6}$, valoare obţinută din (11) pentru minimul zero (fig. 2).

2. Termenii $H_{\alpha_1}(h_z^* - h_B^*)$ devin fluctuaţii cînd:

a) numărul Reynolds $\left(\frac{\Psi_\delta}{U\nu}\right)$ creşte şi de aceea o parte a mecanismelor interioare joacă rol de amplificator;

b) diferenţa $h_\alpha^* - h_B^*$ creşte dacă h_α este tipic netransformabil $\left[h_\alpha(\eta = 1) < 0; \int_0^1 h_\alpha \, d\eta \sim 0\right]$, mai ales datorită scurgerii exterioare variabile.

Cazul *a*) reprezintă tranziţia naturală la turbulenţă, în timp ce cazul *b*) conduce la o turbulenţă produsă artificial.

III. REZULTATE EXPERIMENTALE

Pentru a produce turbulență la numere Reynolds subcritice a fost folosită o mare varietate de dispozitive de perturbare (jeturi + obstacole); cîteva rezultate bazate pe anemometrie sînt prezentate în figura 1. Curentul de intrare al sufleriei de mică turbulență nu are o influență importantă asupra stratului-limită de perete. Gradul de turbulență nu este mai mare decît 0,002 cînd tunelul lucrează la $U_e < 2$ m/s.

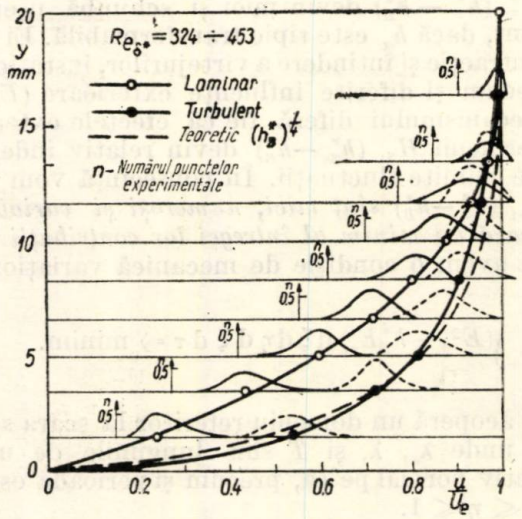


Fig. 2. — Distribuții de viteză „laminară" și „turbulentă" la numere Reynolds subcritice.

Aceste prime experiențe arată că sub $\mathcal{R}e \approx 300$ nu se produce turbulență. Probabil că cu un alt procedeu de perturbare, mai special pregătit, această limită poate fi coborîtă.

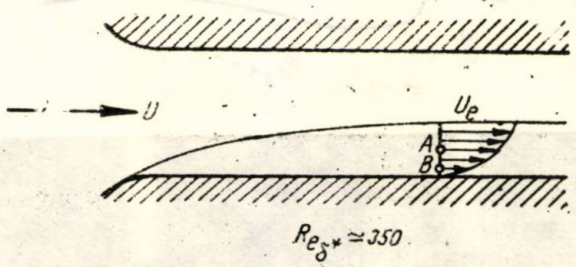
Alte experiențe au fost făcute cu scopul de a găsi o mai mare varietate de profile de viteză în stratul-limită perturbat. Aceasta s-a făcut prin explorarea domeniului tranzițional, iar rezultatele sînt înscrise în diagrama statistică din figura 2.

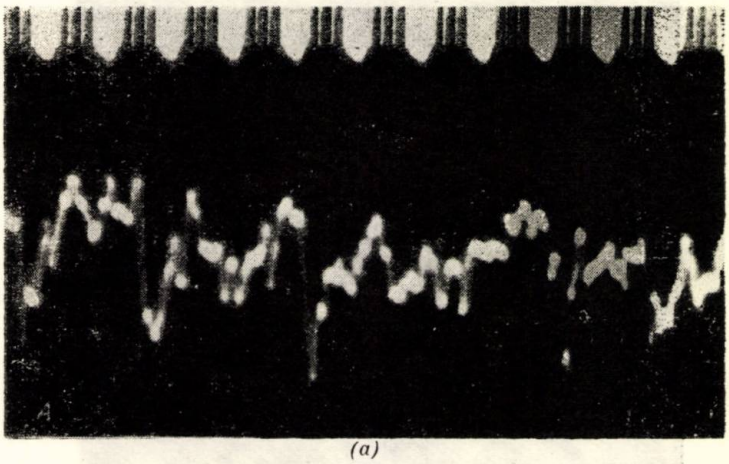
A fost imposibil să se găsească un profil de viteze determinat între cele două arătate pe figură, fiindcă cea mai mare fluctuație observată la perete arată tendința către una sau alta a celor două distribuții.

IV. CONCLUZII

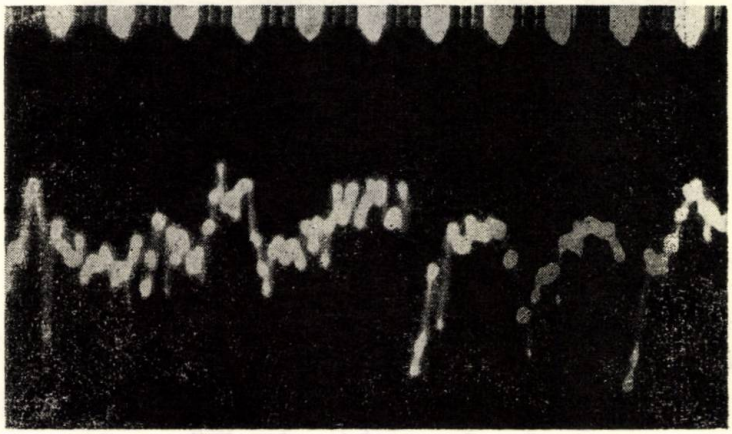
a) La numere Reynolds subcritice, maximul perturbațiilor finite introduse în stratul-limită nu trebuie să depășească 0,02 U_e, valoare măsurată la $y > \delta$ în domeniul de studiat. Pentru obstacol aceasta înseamnă o înălțime de 0,5 δ.

b) Binecunoscutul mecanism al tranziției este de asemenea prezent în numere Reynolds subcritice, manifestîndu-se prin amplificarea perturbațiilor finite, contracția și întinderea vîrtejului, întreruperea scurgerii „laminare", aceasta prezentînd „spoturi" caracteristice (vezi oscilogramele *A* și *B* din figura 3). Însă, contrar fenomenelor binecunoscute, lîngă perete





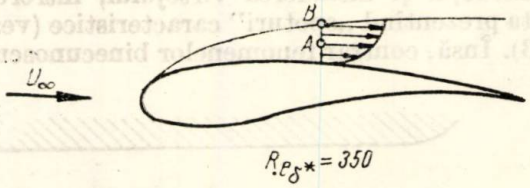
(*a*)



(*b*)

Fig. 3. — Oscilograme obținute în domeniul **tranziției** cu diferite scurgeri la numere Reynolds subcritice.

($y = 0{,}2\ \delta$) s-au observat spoturi ca în oscilograma *A* din figura 4), spoturi prezente şi în dîra unei aripi (profil aerodinamic, vezi fig.5) şi la fel în



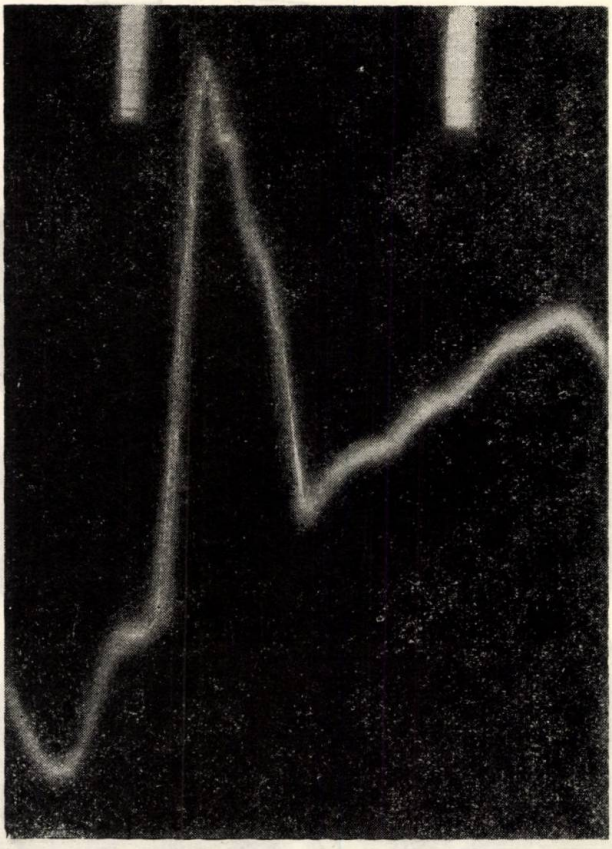


Fig. 4. — Oscilograme obţinute în domeniul tranziţiei cu diferite scurgeri la numere Reynolds subcritice.

domeniile unde $u = \text{const.}$ (oscilogramele *A* şi *B* din figura 6). Explicaţia dată de Stuart [4] poate fi aplicată dacă vom considera relaţia

$$u = 1 - e^{-k\gamma u} = F(e^{-\gamma u}, \pm \mu t),$$

cu $k > 1$, astfel încît $u \approx \text{const.}$

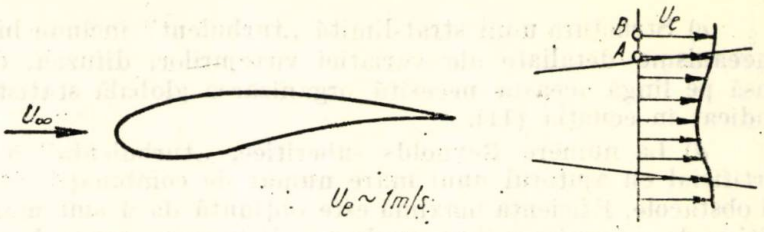
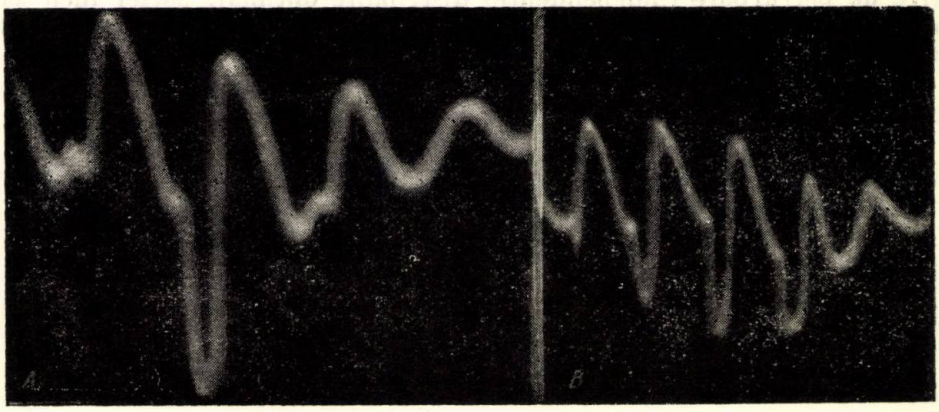


Fig. 5. — Oscilograme obținute în domeniul tranziției cu diferite scurgeri la numere Reynolds subcritice.



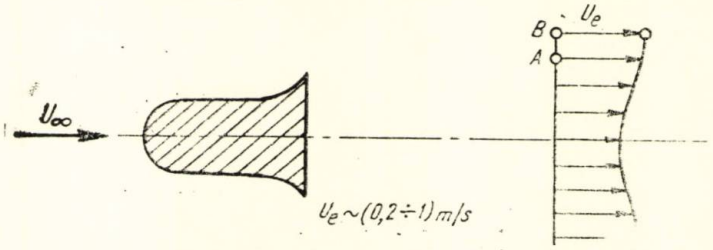
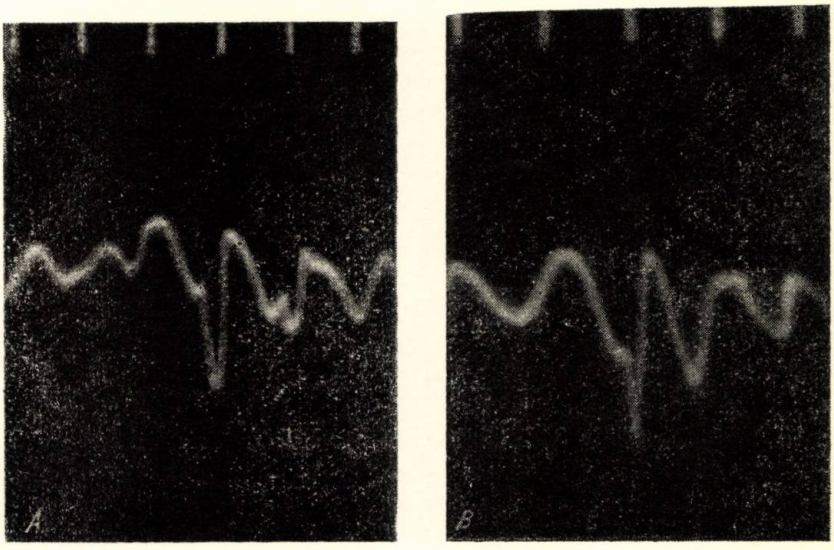


Fig. 6. — Oscilograme obținute în domeniul tranziției cu diferite scurgeri la numere Reynolds subcritice.



c) Structura unui strat-limită „turbulent" include binecunoscutele mecanisme detaliate ale variației vîrtejurilor, difuziei, disipației etc., însă pe lîngă aceasta necesită organizarea globală statistică, cum este indicat în ecuația (11).

d) La numere Reynolds subcritice, „turbulența" a fost produsă artificial cu ajutorul unui mare număr de combinații între jeturi mici și obstacole. Eficiența maximă este obținută dacă sînt mai multe dispozitive de perturbare (independente) distribuite optimal, astfel încît să poată influența scurgerea exterioară. În orice caz, o distanță de (5—50) δ este necesară pentru evoluția perturbațiilor finite.

e) Încercarea de a produce turbulență sub numărul Reynolds $\mathcal{R}e_{\delta^*} = 300$, a fost fără succes.

Primită la redacție la 18 aprilie 1967.

BIBLIOGRAFIE

1. J. L. VAN INGEN, *Dissertation*, Technische Hogeschool te Deft, 1965.
2. H. SCHLICHTING, *Entstehung der Turbulenz*, Handbuch der Physik, vol. VIII, 1959.
3. ȘT. N. SĂVULESCU, Rev. Mec. appl., **10**, 5 (1965).
4. J. T. STUART, NPL Aero Report 1147, May 1965.

ARIPA SUBȚIRE DE REZISTENȚĂ MINIMĂ AVÎND VITEZA FINITĂ LA BORDURILE DE ATAC ÎN CURENT SUPERSONIC

ELIE CARAFOLI și ADRIANA NĂSTASE
nstitutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

În prezenta lucrare se determină forma optimă a suprafeței unei aripi delta subțiri în curent supersonic, la care sînt date proiecția în plan, portanța, momentul de picaj și care are viteza axială de perturbație nulă pe bordurile de atac ale aripii, pentru a evita, la zborul de croazieră, apariția vîrtejurilor în cornet pe bordurile de atac subsonice ale aripii.

În lucrările anterioare [1]—[4] de rezistență minimă s-a determinat forma optimă a suprafeței unei aripi subțiri, la care sînt date portanța, momentul de picaj și proiecția în plan (fig. 1).

Acest calcul s-a făcut în ipoteza că incidența aripii este foarte mică, așa încît s-au putut neglija efectele de desprindere a curentului pe bordurile de atac.

În această ipoteză s-au inclus în rezistența de înaintare a aripii și forțele de sarcină care apar pe bordurile de atac subsonice ale aripii subțiri.

În realitate, chiar la incidențe destul de mici apar desprinderile de curent sub forma unor vîrtejuri în cornet (fig. 2).

Apariția acestor vîrtejuri în cornet modifică în mod radical distribuția de viteze pe aripă, atît pe extradosul, cît mai ales pe intradosul aripii.

Apariția vîrtejurilor în cornet reprezintă, pe de altă parte, o mărime a rezistenței la înaintare a aripii.

În prezenta lucrare ne-am propus să studiem o clasă de aripi la care apariția vîrtejurilor în cornet poate fi evitată la un regim determinat al zborului. În acest caz, viteza este finită (sau nulă) pe bordurile de atac

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 26, Nr. 5, 1967, p. 971—979.

subsonice şi prin aceasta distribuţia de presiuni pe aripă nu mai prezintă incompatibilităţi fizice, în conformitate de altfel cu fenomenul real.

În acest sens vom pune condiţia ca viteza axială de perturbaţie, pe care o vom nota cu u, să se anuleze în lungul bordurilor sale de atac subsonice.

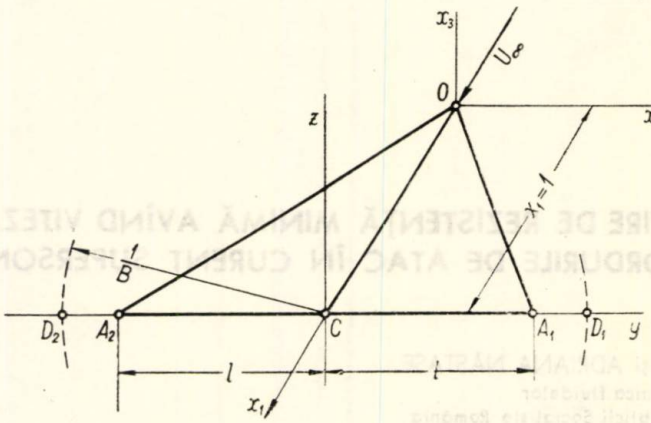


Fig. 1

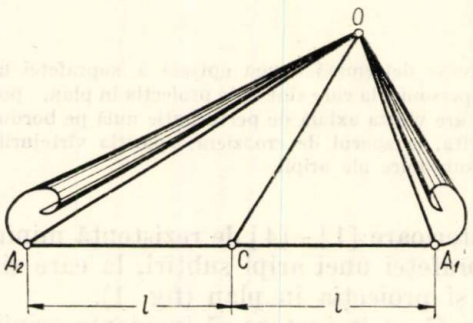


Fig. 2

Din punctul de vedere al aplicaţiilor, importanţa problemei este evidentă. Într-adevăr, pentru anumite zboruri de regim, cum ar fi cel de „croazieră" spre exemplu, evitarea apariţiei acestui sistem de vîrtejuri în cornet corespunde cu evitarea întregului cortegiu de inconveniente generate de aceasta, cum ar fi în primul rînd creşterea rezistenţei, fenomenele oscilatorii etc.

În studiul unei aripi pentru utilizarea ei în construcţiile aeronautice, apare deci necesitatea ca la un anumit regim să se poată asigura o scurgere „liniştită", lipsită de inconvenientele pomenite mai sus şi care se poate obţine operînd asupra lui u. Scopul acestei lucrări constă acum de a găsi în această *clasă de aripi* aripa de rezistenţă minimă.

Vom remarca în plus că, în ipoteza de mai sus, formulele care dau viteza axială u sînt confirmate de experienţă (într-o bună măsură) chiar

la bordurile de atac, unde, fără această ipoteză, apar singularități incompatibile cu fenomenul fizic.

Să considerăm acum aripa raportată la un sistem triortogonal $Ox_1 x_2 x_3$, avînd axa Ox_1 paralelă cu direcția curentului de la infinit U_∞, iar aripa fiind presupusă aplatisată în planul $Ox_1 x_2$.

Viteza verticală de perturbație w pe aripă o vom presupune exprimată sub forma unor superpoziții de polinoame omogene în x_1 și x_2 și simetrice în x_2. Vom putea deci scrie

$$w = \sum_{m=1}^{N} w_{m-1} = \sum_{m=1}^{N} x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,\,k} \, |y|^k, \quad \left(y = \frac{x_2}{x_1}\right) \tag{1}$$

unde $w_{m-k-1,\,k}$ sînt constante, iar $N-1$ este gradul polinomului de cel mai mare ordin luat în considerație în expresia lui w.

Dacă viteza verticală de perturbație w este dată sub forma (1), atunci viteza axială de perturbație u în cazul aripilor delta subțiri cu bordurile de atac subsonice, prevăzute cu o muchie centrală OC, în ipoteza incidențelor foarte mici în care neglijăm efectul de desprindere, are următoarea formă [16]—[18] pe aripă :

$$u = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{A_{n,2q}\, y^{2q}}{\sqrt{l^2 - y^2}} + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{n,2q}\, y^{2q} \operatorname{arcgh} \sqrt{\frac{l^2}{y^2}} \right\}. \tag{2}$$

Condiția ca viteza axială de perturbație u să fie nulă în lungul bordurilor de atac subsonice este

$$E_n \equiv \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} A_{n,2q}\, l^{2q} = 0, \quad (n = 2, \ldots, N). \tag{3}$$

Dacă ținem seama de această condiție, viteza axială de perturbație u se poate scrie sub forma

$$u = \sum_{n=2}^{N} x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} A_{n,2q}\, y^{2q} \sqrt{l^2 - y^2} + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{n,2q}\, y^{2q} \operatorname{arcgh} \sqrt{\frac{l^2}{y^2}} \right\}. \tag{4}$$

În legătură cu formulele de mai sus vom face următoarea remarcă. Mișcarea conică propriu-zisă ($n = 1$) nu satisface condiția (3), deci nu a mai fost introdusă în expresia (4). Pentru același motiv, în expresia (1) a vitezei verticale de perturbație w vom lua $2 \leqslant m \leqslant N$, iar în expresia vitezei axiale u din (2) și în relația (3) vom lua $2 \leqslant n \leqslant N$.

Se știe că relațiile dintre coeficienții vitezei axiale de perturbație u și cei ai vitezei verticale de perturbație w sînt liniare și perfect determinate sub forma dată anterior [1]—[4], [10], [12]; vom putea deci scrie

$$A_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{2q,j}\, w_{n-j-1,\,j}, \tag{5a}$$

$$C_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} c_{2q,j}^{(n)}\, w_{n-j-1,\,j}. \tag{5b}$$

În aceste expresii $a_{2l,j}^{(n)}$ și $c_{2l,j}^{(n)}$ sînt funcții care depind de forma în plan a aripii l și de numărul Mach (M_∞). Pentru o viteză de croazieră dată și pentru o formă în plan dată, aceste expresii sînt existente în problema de extremum considerată și sînt date în [18] și [20].

Trebuie să observăm mai departe că, impunînd o viteză axială de perturbație u finită, pe bordurile de atac subsonice nu mai avem forța de succiune.

Problema de extremum propusă constă în determinarea cotelor suprafeței aripii delta subțiri, prevăzute eventual și cu o muchie centrală, care realizează minimul rezistenței la înaintare (c_d = minim), cu condițiile impuse, amintite mai sus, adică portanța (c_l), momentul de picaj (c_m) și forma în plan date, și care satisfac în plus condițiile (3) de anulare a vitezei de perturbații axiale u pe bordurile de atac subsonice ale aripii; vom scrie deci

$$c_l = \text{const.}, \quad c_m = \text{const.}, \quad E_n = 0, \ (n = 2, \ldots, N). \tag{6}$$

Problema se reduce la calculul extremumului fără legături a funcției hamiltoniene

$$H = c_d + \lambda^{(1)} c_l + \lambda^{(2)} c_m + \sum_{n=2}^{N} \lambda_n E_n, \tag{7}$$

în care $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, λ_m sînt multiplicatorii lui Lagrange. Calculul extremumului lui H se obține anulînd prima sa variație, adică, făcînd $\delta H = 0$; ca și în lucrările precedente de rezistență minimă [1]—[4], [14], [15], problema conduce la determinarea valorilor optime ale coeficienților $w_{n-j-1,\,j}$ și deci a distribuției optime a vitezei verticale de perturbație w, iar prin integrare în raport cu x_1 a vitezei verticale de perturbație obținem forma optimă $Z(x_1, x_2)$ a suprafeței aripii:

$$Z(x_1, x_2) = \int w \, \mathrm{d}x_1 + f(x_2). \tag{8}$$

În cele ce urmează vom căuta să explicităm expresiile caracteristicilor aerodinamice care intervin în formularea condiției de mai sus.

Astfel, ca și în [2], condiția ca coeficientul de portanță să fie dat, adică c_z = const., devine

$$c_z \equiv \sum_{n=2}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{nj} w_{n-j-1,\,j} = \text{const.}, \tag{9}$$

unde, ținînd seama de (5), vom scrie

$$\Lambda_{nj} = \frac{8}{lU_\infty (n+1)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{2q,\,j}^{(n)} \mathcal{J}_{2q} + l \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c_{2q,\,j}^{(n)}}{2q+1} \mathcal{J}_{2q} \right\}. \tag{10}$$

$\mathcal{J}_k$, la rîndul său, are următoarele valori:

$$\mathcal{J}_{2t} = \int_0^l \frac{y^{2t} \, \mathrm{d}y}{\sqrt{l^2 - y^2}} = \frac{\pi (2t)!}{2^{2t+1} (t!)^2} l^{2t}, \quad (k = 2t), \tag{11a}$$

$$\mathcal{J}_{2t+1} = \int_0^l \frac{y^{2t+1}\,dy}{\sqrt{l^2-y^2}} = \frac{2^{2t}\,(t!)^2\,l^{2t+1}}{(2t+1)!}, \quad (k = 2t+1). \tag{11b}$$

Analog, condiția ca coeficientul de tangaj să fie dat devine

$$c_m \equiv \sum_{n=2}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n+1}{n+2}\,\Lambda_{nj}\,w_{n-j-1,\,j} = \text{const.}, \tag{12}$$

în care Λ_{nj} are semnificația din (9).

În sfîrșit, expresia coeficientului de rezistență c_d devine în acest caz

$$c_d = \sum_{n=2}^{N} \sum_{m=2}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_{nmkj}\,w_{m-k-1,\,k}\,w_{n-j-1,\,j}, \tag{13}$$

în care am notat cu Ω_{nmkj} următoarele expresii:

$$\Omega_{nmkj} = \frac{8}{U_\infty^2\,l\,(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{2q,\,j}^{(n)}\,\mathcal{J}_{k+2q} + l \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c_{2q,\,j}^{(n)}}{k+2q+1}\,\mathcal{J}_{k+2q} \right\}, \tag{14}$$

avînd semnificația din (10).

De asemenea, dacă ținem seama de (5 a), condițiile (3) se pot scrie sub forma

$$E_n \equiv \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} A_{n,\,2q}\,l^{2q} = \sum_{j=0}^{n-1} \Psi_{nj}\,w_{n-j-1,\,j} = 0, \tag{15}$$

unde am făcut notația

$$\Psi_{nj} = \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} l^{2q}\,a_{2q,\,j}^{(n)}. \tag{16}$$

Avînd acum explicitați toți termenii care intervin în expresia lui H_a' putem deci calcula variația lui H. Anulînd această variație și ținînd seama că coeficienții $w_{n-j-1,\,j}$ sînt independenți, vom obține prin anularea coeficienților variațiilor $\delta w_{\theta\sigma}$ ecuații de forma

$$\sum_{n=2}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} (\Omega_{\theta+\sigma+1,\,n,\,j,\,\sigma} + \Omega_{n,\,\theta+\sigma+1,\,\sigma,\,j})\,w_{n-j-1,\,j} + \left(\lambda^{(1)} + \frac{\theta+\sigma+2}{\theta+\sigma+3}\,\lambda^{(2)}\right)\Lambda_{\theta+\sigma+1\sigma} +$$

$$+ \lambda_{\theta+\sigma+1}\,\Psi_{\theta+\sigma+1,\,\sigma} = 0, \tag{17}$$

unde

$$\sigma = 1, \ldots, N-1, \quad \theta = 0, \ldots, N-2.$$

Ecuațiile (17) împreună cu condițiile de legătură (6) formează un sistem liniar care determină în mod univoc valorile optime ale coeficienților $w_{n-j-1,\,j}$, precum și valorile multiplicatorilor $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ și λ_m.

Problema poate fi socotită rezolvată.

Observație. Dacă în sistemul (17) de mai sus eliminăm condițiile de legătură (3), adică facem $\lambda_m = 0$, cădem peste sistemul dat anterior [2],

în care nu sînt cuprinse și forțele de succiune deși în acest caz aceste forțe trebuie incluse în mod obligatoriu așa cum rezultă din teorie.

APLICAȚIE. Viteza verticală de perturbație w o presupunem dată sub forma unei superpoziții de polinoame omogene de ordin 2 și 3 adică

$$w = x_1 (w_{10} + w_{01} |y|) + x_1^2 (w_{20} + w_{11} |y| + w_{02} y^2). \tag{18}$$

Viteza axială de perturbație u va fi în acest caz de forma

$$u = x_1 \left(\frac{A_{20} + A_{22} y^2}{\sqrt{l^2 - y^2}} \right) + x_1^2 \left(\frac{A_{30} + A_{32} y^2}{\sqrt{l^2 - y^2}} + C_{32} y^2 \operatorname{arcch} \sqrt{\frac{l^2}{y^2}} \right). \tag{19}$$

Conform cu formulele (5 a, b) și ținînd seamă și de [18] coeficienții A_{ij} și C_{ij} ai vitezei axiale de perturbație u (18) pot fi scriși sub forma

$$A_{20} = a_{00}^{(2)} w_{10} + a_{01}^{(2)} w_{01}, \tag{20 a}$$

$$A_{22} = a_{20}^{(2)} w_{10} + a_{21}^{(2)} w_{01}, \tag{20 b}$$

$$A_{30} = a_{00}^{(3)} w_{20} + a_{01}^{(3)} w_{11} + a_{02}^{(3)} w_{02}, \tag{20 c}$$

$$A_{32} = a_{20}^{(3)} w_{20} + a_{21}^{(3)} w_{11} + a_{22}^{(3)} w_{02}, \tag{20 d}$$

$$C_{32} = c_{21}^{(3)} w_{11}. \tag{20 e}$$

Ținînd seama de [18] [20] și de relația (18), coeficienții $a_{ij}^{(n)}$ și $C_{ij}^{(n)}$ au următoarele valori:

— pentru $n = 2$

$$a_{00}^{(2)} = - \frac{2l^2 (1 - B^2 l^2)}{N_2}, \tag{21 a}$$

$$a_{01}^{(2)} = - \frac{2 l^3}{\pi N_2} [E(k) - B^2 l^2 K(k)], \tag{21 b}$$

$$a_{20}^{(2)} = \frac{1 - B^2 l^2}{N_2}, \tag{21 c}$$

$$a_{22}^{(2)} = \frac{2l}{\pi N_2} B^2 l^2 (E(k) - K(k)), \tag{21 d}$$

unde

$$N_2 = (1 - 2B^2 l^2) E(k) + B^2 l^2 K(k); \tag{22}$$

— pentru $n = 3$

$$a_{00}^{(3)} = \frac{2l^2}{N_3} [2 (3 - 5B^2 l^2 + B^4 l^4) E(k) - (3 - 5B^2 l^2) B^2 l^2 K(k)], \tag{23 a}$$

$$a_{01}^{(3)} = \frac{6l^3}{N_3} [(4 + B^2 l^2) E^2(k) - 8B^2 l^2 E(k) K(k) + 3B^4 l^4 K^2(k)], \tag{23 b}$$

$$a_{02}^{(3)} = - \frac{2l^4}{N_3} [(1 + B^2 l^2) E(k) - 2B^2 l^2 K(k)], \tag{23 c}$$

$$a_{20}^{(3)} = -\frac{2}{N_3}\left[(4 - 7B^2l^2 + B^4l^4)\,E(k) - 2(1 - 2B^2l^2)\,B^2l^2\,K(k)\right], \quad (23\,d)$$

$$a_{21}^{(3)} = -\frac{2l}{\pi N_3}\left[(12 - 17B^2l^2 + 10B^4l^4)\,E^2(k) - 4B^2l^2(2 - B^2l^2 + B^4l^4)\,E(k)\,K(k) + (1 + 2B^2l^2)\,B^4l^4\,K^2(k)\right], \quad (23\,e)$$

$$a_{22}^{(3)} = \frac{2B^2l^4}{N_3}\left[2(2 - B^2l^2)\,E(k) - (3 - B^2l^2)\,K(k)\right], \quad (23\,f)$$

$$c_{21}^{(3)} = -\frac{1}{\pi}, \quad (23\,g)$$

unde

$$N_3 = (4 - 19B^2l^2 + 4B^4l^4)\,E^2(k) + 8B^2l^2\,E(k)\,K(k) - 5B^4l^4\,K^2(k), \quad (24)$$

iar $K(k)$ și $E(k)$ sînt intregrale eliptice complete de speța întîia și a doua de modul $k = \sqrt{1 - B^2l^2}$.

În acest caz condițiile de legătură (6) devin:

a) portanță dată $c_l = c_{l_0} = \text{const.}$

$$c_l = \Lambda_{20}w_{10} + \Lambda_{21}w_{01} + \Lambda_{30}w_{20} + \Lambda_{31}w_{11} + \Lambda_{32}w_{02} =$$
$$= \frac{\pi}{lU_\infty}\left\{\frac{4}{3}\left(a_{00}^{(2)} + \frac{1}{2}l^2a_{20}^{(2)}\right)w_{10} + \frac{4}{3}\left(a_{01}^{(2)} + \frac{l^2}{2}a_{21}^{(2)}\right)w_{01} + \left(a_{00}^{(3)} + \frac{l^2}{2}a_{20}^{(3)}\right)w_{20} + \left(a_{01}^{(3)} + \frac{l^2}{2}a_{21}^{(3)} + \frac{l^3}{6}c_{21}^{(3)}\right)w_{11} + \left(a_{02}^{(3)} + \frac{l^2}{2}a_{22}^{(3)}\right)w_{02}\right\} = c_{z_0}, \quad (25)$$

b) moment de picaj dat $c_m = c_{m_0}$

$$c_m = -\frac{3}{4}(\Lambda_{20}w_{10} + \Lambda_{21}w_{01}) - \frac{4}{5}(\Lambda_{30}w_{20} + \Lambda_{31}w_{11} + \Lambda_{32}w_{02}) = c_{m_0}, \quad (26)$$

unde Λ_{ij} au semnificația din (25).

c) Condițiile de anulare a vitezei axiale de perturbație u pe bordurile de atac sînt în acest caz

$$A_{20} + A_{22}l^2 = 0, \quad (27\,a)$$

$$A_{30} + A_{32}l^2 = 0, \quad (27\,b)$$

adică

$$(a_{00}^{(2)} + a_{20}^{(2)}l^2)\,w_{10} + (a_{01}^{(2)} + l^2a_{21}^{(2)})\,w_{01} = 0, \quad (28\,a)$$

$$(a_{00}^{(3)} + l^2a_{20}^{(3)})\,w_{20} + (a_{01}^{(3)} + l^2a_{21}^{(3)})\,w_{11} + (a_{02}^{(3)} + l^2a_{22}^{(3)})\,w_{02} = 0. \quad (28b)$$

În sfîrşit, coeficientul de rezistenţă de undă va avea în acest caz următoarea expresie

$$\begin{aligned} c_d = {} & \Omega_{2200} w_{10}^2 + (\Omega_{2210} + \Omega_{2201}) w_{10} w_{01} + \Omega_{2211} w_{01}^2 + \\ & + (\Omega_{2300} + \Omega_{3200}) w_{10} w_{20} + (\Omega_{2310} + \Omega_{3201}) w_{10} w_{11} + \\ & + (\Omega_{2320} + \Omega_{3202}) w_{10} w_{02} + (\Omega_{2301} + \Omega_{3210}) w_{01} w_{20} + \\ & + (\Omega_{2311} + \Omega_{3211}) w_{01} w_{11} + (\Omega_{2321} + \Omega_{3212}) w_{01} w_{02} + \\ & + \Omega_{3300} w_{20}^2 + \Omega_{3311} w_{11}^2 + \Omega_{3322} w_{02}^2 + (\Omega_{3310} + \Omega_{3301}) w_{20} w_{11} + \\ & + (\Omega_{3320} + \Omega_{3302}) w_{20} w_{02} + (\Omega_{3321} + \Omega_{3312}) w_{11} w_{02}, \end{aligned} \tag{29}$$

iar Ω_{nmkj} au forma dată în (14). Integralele care apar aici au următoarele valori :

$$\begin{gathered} \mathcal{J}_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \mathcal{J}_2 = \frac{\pi l^2}{4}, \quad \mathcal{J}_4 = \frac{3\pi l^4}{16}, \quad \mathcal{J}_6 = \frac{5\pi l^6}{32}, \\ \mathcal{J}_1 = l, \quad \mathcal{J}_3 = \frac{2}{3} l^3, \quad \mathcal{J}_5 = \frac{8l^5}{5}. \end{gathered} \tag{30}$$

Mai departe, utilizînd ecuaţiile (17) împreună cu relaţiile de legătură (6), aflăm valorile optime ale coeficienţilor $w_{n-j-1,\,j}$.

Primită la redacţie la 1 iunie 1967

BIBLIOGRAFIA

1. ELIE CARAFOLI, ADRIANA NĂSTASE, *Trapeţievidnie krilea s minimalnim lobovim soprotivleniem v sverhzvukovom potoke*, Mehanika, *I*, (Moskva), (1961).
2. — *Triangular Wing with Minimum Drag Fitted with Separation Ridge in Supersonic Flow*, Rev. Méc. appl., **5**, *5* (1960).
3. — *L'utilisation de la méthode des residus dans le problème de resistance minimum de l'aile trapezoïdale en courant supersonique*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, **16**, *3* (1964) , Fluid Dynamic Transaction, **6B**, *2* (1965).
4. ADRIANA NĂSTASE, *Der Düne Kreuzflugel mit Minimum Widerstand in Uberschallströmung*, Dresden, 1964 (sub tipar).
5. ELIE CARAFOLI, ŞT. STAICU, *Asupra teoriei aripii delta subţiri cu separaţia curentului la bordurile de atac*, St. cerc. mec. apli. **22**, *4* (1966).
6. K.W. MANGLER, J.H. SMITH, *A Theory of the Flow Past a Slender Delta Wing with Leading Edge Separation*, Proc. Roy. Soc., May 1959.
7. D. KUCHEMANN, *A Non-Linear Lifting Surface Theory for Wings of Small Aspect Ration with Edge Separation*, RAE rep. 2540, 1955 April.
8. L.S. SQUIRE, *The Estimation of the Non-Linear Lift of Delta Wings at Supersonic Speeds*, Journ. RAS, August (1963).
9. M. ROY, *Sur la theorie de l'aile delta. Tourbillons d'apex et nappes en cornets*, CR. Ac. Sc. RA 56 (1957).
10. M. ROY, *De la formation des zones tourbillonaires dans les écoulements à faible viscosité*, Conf. L. Prandtl, mai 1959, Zeits. für Flugw, August, 1959.
11. R. LEGENDRE, *Nappes en cornets au bord d'attaque d'une aile en delta*, RA 70 (1959).
12. R. LEGENDRE, *Nappes et tourbillons en cornets*, CR, Ac. Sc., Janv. 1964.
13. N. WERLÉ, C. FIANT, *Visualisation hydrodynamique de l'écoulements à basse vitesse autour d'une maquette d'avion du type „Concorde"*, ONERA, La Recherche Aérospatiale, *102* (1954).

14. R. H. Ewards, *Leading-Edge Separation from Delta Wings*, JAS, Febr. 1954.
15. Elie Carafoli, Șt. Staicu, *Antisymmetrical Thin Delta Wing with Flow Separation at the Leading Edges*, Rev. Roum. Sci. Techn. – Méc. appl., **11**, *6* (1966).
16. Elie Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*, București, Edit. tehnică, 1956.
17. Elie Carafoli, M. Ionescu, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à epaisseur symétrique*, Rev. Sci. Techn. - Méc. appl. **2**, *1* (1957).
18. Elie Carafoli, Adriana Năstase, *L'étude des ailes triangulaires minces à symétrie forcé en courant supersonique*, Rev. Sci. Techn. - Méc. appl., **4**, *3* (1958).
19. P. Germain, *La théorie des mouvements homogénes et son application au calcul de certaines ailes delta en régime supersonique*, La Recherche Aéronautique, *7* (1949).
20. G.N. Lance, *The Delta Wing in Non-Uniform Supersonic Stream*, Aeronautical, Quarterly, **V**, part. *I*, p. 55 (1954).
21. Elie Carafoli, Adriana Năstase, *On the Minimum Drag Problem of the Wing of Symmetrical Thickhess in Supersonic Flow*, Rev. Sci. Techn. - Méc. appl., **7**, *2* (1962).
22. — *The Optimum Shape of the Cruciform Wing of Symmetrical Thickness in Supersonic Flow*, Rev. Roum. Sci. Techn. - Méc. appl., **12**, *2* (1967).

CURGEREA CONTINUA A FLUIDULUI BIFAZIC PRIN TUBURI VERTICALE

N. S. PÎRVULESCU
Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti

532

Se consideră ascensiunea ansamblului gaz-lichid printr-un tub în care gazul păstrează o poziţie centrală, lichidul prezentînd o secţiune inelară.
În prealabil se studiază curgerea fluidului prin tubul de secţiune inelară cu ambii pereţi mobili şi apoi se trece la studiul ascensiunii gazului împreună cu lichidul. Se obţine expresia debitului de lichid Q_1 şi a submersiunii H^* (în funcţie de datele problemei), inclusiv a valorii β^*, ca şi cum aceasta ar fi o variabilă independentă. În cele din urmă se dă o tabelă cu valorile expresiilor care intră în formule.

Deşi ne referim mai ales la pomparea apei cu motocompresorul „Mamuth", studiul de faţă este valabil în general la extragerea unui fluid printr-un tub vertical cu ajutorul unui gaz (aer) comprimat.

Stabilit cu premise simplificatoare, acest studiu constituie o teorie schematizată a erupţiei artificiale.

Vom lua în considerare cazul curgerei continue a gazului şi lichidului, ca şi cum ar fi o bulă de gaz de lungime nemărginită.

Ne bazăm pe studiul anterior [1] şi păstrăm deocamdată aceleaşi premise. Considerăm ascensiunea ansamblului gaz-lichid prin tub, gazul păstrînd o poziţie centrală în curgere continuă (fără întreruperi), şi nu luăm în considerare compresibilitatea gazului şi solubilitatea sa în lichid.

În lucrarea citată [1] s-a pornit de la relaţia fundamentală (4), şi anume

$$u = \frac{K}{4} r^2 + C_1 \ln r + C_2; \qquad (1)$$

valabilă pentru fluide vîscoase în cazul mișcării axial simetrică și curgere staționară, în care :

u este viteza punctului considerat,
r — depărtarea punctului de axul tubului,
K — un coeficient care în cazul curgerii laminare are expresia

$$-K = \frac{g}{\nu} \mathcal{J}, \tag{2}$$

g — accelerația gravitației,
ν — viscozitatea cinematică,
$\mathcal{J}$ — gradientul de presiune (panta hidraulică).

Pentru un *tub de secțiune inelară cu peretele interior mobil* s-au determinat constantele de integrare C_1, C_2, și anume

$$C_1 = -\frac{u^* + \left(1 - \frac{r^{*2}}{R^2}\right) R^2 \frac{K}{4}}{\ln \frac{R}{r^*}}, \tag{3}$$

$$C_2 = -\frac{K}{4} R^2 + \frac{\ln R}{\ln \frac{R}{r^*}} \left[u^* + \frac{K}{4} R^2 \left(1 - \frac{r^{*2}}{R^2}\right) \right], \tag{4}$$

în care

u^* este viteza peretelui interior,
r^* — raza cilindrului interior (mobil),
R — raza tubului exterior.

Să extindem în prealabil această teorie pentru a cuprinde cazul cînd și peretele exterior este mobil.

1. CURGEREA FLUIDULUI PRIN TUB DE SECȚIUNE INELARĂ CU AMBII PEREȚI MOBILI

Procedăm în mod analog cazului precedent.

Pornind tot de la relația (1) și, punînd condițiile la limită :

— pentru $r = R$ să avem $u = U$, în care U este viteza peretelui exterior ;

— pentru $r = r^*$ să avem $u = u^*$,

se determină constantele

$$C_1 = \frac{U - u^* - \frac{K}{4} R^2 (1 - \beta^{*2})}{\ln \frac{1}{\beta^*}}, \tag{5}$$

$$C_2 = U - \frac{K}{4} R^2 + \frac{\ln R}{\ln \frac{1}{\beta^*}} \left[\frac{K}{4} R^2(1 - \beta^{*2}) + u^* - U \right]. \tag{6}$$

Relaţia (1) devine deci

$$\frac{u - U + \frac{K}{4} R^2(1 - \beta^2)}{u^* - U + \frac{K}{4} R^2(1 - \beta^{*2})} = \frac{\ln \beta}{\ln \beta^*}, \tag{7}$$

în care s-a folosit notaţia modificată

$$\beta^* = \frac{r^*}{R} \tag{8}$$

pentru a introduce notaţia

$$\beta = \frac{r}{R}. \tag{9}$$

Pentru $U = 0$, din relaţiile (5), (6) regăsim relaţiile (3), (4).

Pentru o secţiune circulară plină avem $r^* = 0 = \beta^*$, şi astfel relaţiile (5) şi (6) devin:

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = U - \frac{K}{4} R^2, \tag{10}$$

iar relaţia (1) ia forma

$$u - U = -\frac{K}{4} (R^2 - r^2). \tag{11}$$

Pentru $r = 0$, relaţia (11) devine

$$u = u_{\max} = U - \frac{K}{4} R^2, \tag{12}$$

ceea ce se deduce şi din (7).

Pentru $U = 0$, ţinînd seama de (2), relaţia (11) devine

$$u = \frac{g\mathcal{J}_l}{4\nu} (R^2 - r^2), \tag{13}$$

regăsindu-se astfel cunoscuta formulă a curgerii prin conducte.

În ceea ce priveşte viteza medie u_m dată prin definiţie de expresia

$$u_m S = 2\pi \int_{r^*}^{R} ur\,dr, \tag{14}$$

în care secţiunea S este dată de expresia

$$S = \pi R^2(1 - \beta^{*2}), \tag{15}$$

procedăm ca în cazul anterior [1]. Făcînd înlocuirile date de relaţiile (1), (5), (6) şi integrînd, relaţia (14) devine

$$u_m - U = (u^* - U)\chi - \frac{KR^2}{8}\xi, \tag{16}$$

în care

$$\chi = \frac{\varepsilon - \beta^{*2}}{1 - \beta^{*2}}, \quad \xi = 1 + \beta^{*2} - 2\varepsilon, \tag{17}$$

$$\varepsilon = \frac{1 - \beta^{*2}}{\ln \frac{1}{\beta^{*2}}}, \tag{18}$$

ceea ce se poate obţine şi direct, ţinînd seama de relativitatea vitezelor în relaţia (11) din [1].

Pentru secţiunea circulară plină $r^* = 0$ şi deci $\chi = 0$, $\xi = 1$, iar relaţia (16) devine

$$u_m - U = -\frac{KR^2}{8}. \tag{19}$$

Dacă şi $U = 0$, ţinînd seama de (2), regăsim cunoscuta formulă pentru conducte

$$u_m = \frac{gR^2}{8\nu}\mathcal{J}. \tag{20}$$

2. ASCENSIUNEA GAZULUI ÎMPREUNĂ CU LICHIDUL

Folosim aceeaşi metodă din lucrarea citată [1] şi ca să putem folosi formulele stabilite păstrăm aceleaşi notaţii. Am deosebit domeniul 1 al lichidului, în care notaţiile au indicele 1 şi domeniul 2 al gazului, cu indicele 2.

Pentru domeniul 1 se foloseşte relaţia (16) din care, anulînd pe U, se obţine

$$u_{m1} = u^*\chi - \frac{K_1 R^2}{8}\xi, \tag{21}$$

precum şi relaţia (16) din [1], în care u^* este viteza la frontiera dintre gaz şi lichid.

În domeniul 2 folosim relaţia (19), în care U devine u^*, iar R devine r^* astfel

$$u_{m2} = u^* - \frac{K_2}{8} r^{*2}, \tag{22}$$

în care r^* este raza vînei de gaz.

Eliminînd pe u^* din (21) şi (22) se obţine relaţia dintre vitezele medii ale celor două fluide :

$$\chi u_{m2} - u_{m1} = \frac{R^2}{8}(K_1\xi - K_2\beta^{*2}\chi). \tag{23}$$

Admiţînd acelaşi gradient de presiune $\mathcal{J}$ pentru ambele fluide, din relaţia (2) se obţine

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\nu_1}{\nu_2}. \tag{24}$$

şi astfel relaţia (23) devine

$$\chi u_{m2} - u_{m1} = \frac{R^2 K_1}{8}\left(\xi - \frac{\nu_1}{\nu_2}\beta^{*2}\chi\right). \tag{25}$$

Ţinînd seama de (2), se obţine

$$\chi u_{m2} - u_{m1} = \frac{R^2 g \mathcal{J}}{8\nu_1}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\beta^{*2}\chi - \xi\right), \tag{26}$$

care se poate pune sub forma

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{01}\,\Xi_{01}, \tag{27}$$

în care

$$\mathcal{J}_{01} = \frac{32\nu_1 u_{m1}}{gd^2}, \quad d = 2R, \tag{28}$$

$$\Xi_{01} = \frac{1 - \chi\dfrac{u_{m2}}{u_{m1}}}{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} = \xi - \beta^{*2}\chi\frac{\nu_1}{\nu_2}, \tag{29}$$

unde ξ, dat de (17), se mai poate pune şi sub forma

$$\xi = (1-\beta^{*2})(1-2\chi) = \beta^{*2}\chi\frac{\psi}{\varphi}$$
$$\left(\varphi = \frac{\beta^{*2}}{1-\beta^{*2}}, \quad \psi = \frac{1-2\chi}{\chi}\right) \tag{30}$$

încît ultima expresie (29) devine

$$\mathfrak{M} = \beta^{*2}\chi\left[\frac{\psi}{\varphi} - \frac{\nu_1}{\nu_2}\right]. \tag{31}$$

Observăm că $\mathcal{J}_{01}$, reprezintă gradientul curgerii laminare a lichidului prin conducte de secţiune circulară plină.

3. DEBITELE

Am admis ca premisă simplificatoare curgerea staţionară cu fluide incompresibile şi, prin urmare, debitele Q se menţin constante şi sînt date de expresiile

$$Q_1 = S_1 u_{m1}, \quad Q_2 = S_2 u_{m2}. \tag{32}$$

Constanţa debitului de gaze Q_2 implică lipsa unui rezervor de acumulare a gazului.

Avînd în vedere (15), expresiile secţiunilor respective devin

$$S_1 = \pi R^2(1 - \beta^{*2}), \quad S_2 = \pi R^2 \beta^{*2}, \tag{33}$$

care, înlocuite în (32), ne dau

$$u_{m1} = \frac{Q_1}{\pi R^2(1 - \beta^{*2})}, \quad u_{m2} = \frac{Q_2}{\pi R^2 \beta^{*2}}. \tag{34}$$

Expresia (26), în acest caz, devine, pentru $\frac{u_{m1}}{u_{m2}} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\beta^{*2}}{1-\beta^{*2}}$, următoarea :

$$\frac{\chi Q_2}{\beta^{*2}} - \frac{Q_1}{1-\beta^{*2}} = \frac{\pi}{8} R^4 g \mathcal{J} \left[\beta^{*2} \frac{\chi}{\nu_2} - \frac{\xi}{\nu_1} \right]. \tag{35}$$

4. SUBMERSIUNEA

Vom presupune că punctul de injecţie al gazului în ţeava de extracţie se găseşte în vecinătatea capătului de jos al acestei ţevi (fig. 1), cu alte cuvinte, neglijăm efectul prelungirei ţevii de extracţie sub punctul de injecţie al gazului.

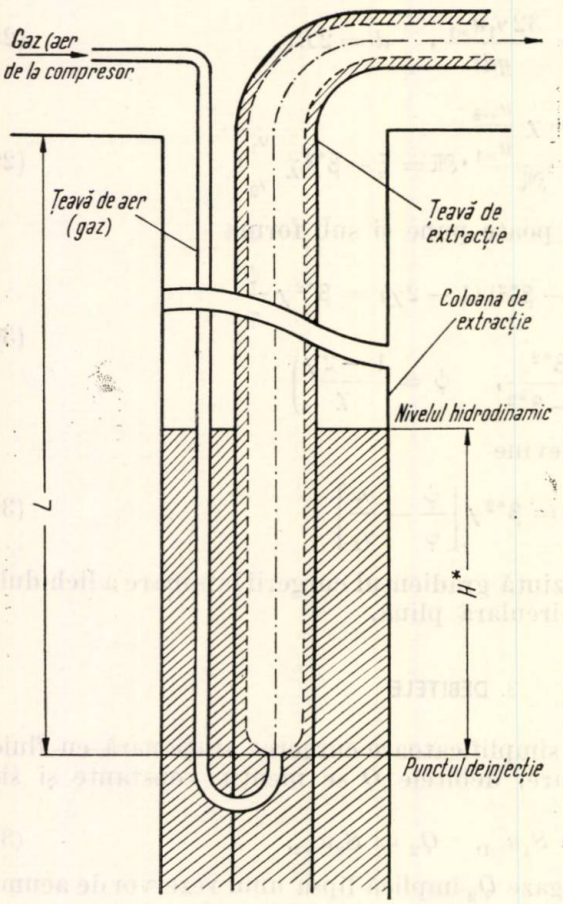


Fig. 1

Principiul vaselor comunicante ne dă

$$\gamma_1 H^* = L \frac{\gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2}{S_1 + S_2} + \gamma_1 \Delta H, \tag{36}$$

în care

L este adîncimea punctului de injecţie al gazului în ţeava de extracţie faţă de punctul de alimentare (suprafaţă),

H^* — adîncimea de scufundare a punctului de injecţie sub nivelul hidrodinamic (submersiunea),

ΔH — căderea de sarcină dinamică datorită frecărilor şi acceleraţiilor.

Folosind expresia

$$H = H^* - \Delta H \tag{37}$$

şi ţinînd seama de (33), expresia (36) devine

$$\frac{H}{L} = 1 - \beta^{*2}\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right). \tag{38}$$

Dacă γ_2/γ_1 este neglijabil faţă de unitate, relaţia (38) devine

$$\frac{H}{L} \approx 1 - \beta^{*2}. \tag{39}$$

Neglijînd efectul acceleraţiei, căderea de presiune, prin definiţie are expresia

$$\mathcal{J} = \frac{\Delta H}{L}. \tag{40}$$

Făcînd înlocuirile date de (38), (40), relaţia (37) devine

$$\mathcal{J} = \frac{H^*}{L} - (1 - \beta^{*2}), \tag{41}$$

unde H^*/L este o dată a problemei independentă de β^*.

Folosind notaţia

$$\mathcal{J}_0 = \frac{32\nu_1}{gd^2}, \tag{42}$$

unde $\mathcal{J}_0$, independent de β^*, constituie o dată a problemei, expresia (28 devine

$$\mathcal{J}_{01} = \mathcal{J}_0 u_{m1} \tag{43}$$

şi, ţinînd seama de (34) şi (30), rezultă

$$\mathcal{J}_{01} = \frac{\mathcal{J}_2}{\beta^{*2}\zeta}, \quad \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_0 \frac{4Q_2}{\pi d^2}, \quad \zeta = \frac{u_{m2}}{u_{m1}} = \frac{Q_2}{\varphi Q_1}. \tag{44}$$

Avînd în vedere (29) şi prima relaţie (44), expresia (27) devine

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{J}_2}{\beta^{*2}\mathfrak{M}}\left(\frac{1}{\zeta} - \chi\right) \tag{45}$$

şi, ţinînd seama de (30) şi de ultima relaţie (44),

$$\frac{Q_1}{Q_2} = (1 - \beta^{*2})\mathfrak{M}\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_2} + \frac{\chi}{\varphi}. \tag{46}$$

5. DETERMINAREA EXPRESIEI β^*

Necunoscuta Q_1 este dată de expresia (46), unde Q_2 şi $\mathcal{J}_2$ sînt datele cunoscute ale problemei, iar celelalte valori sînt funcţii de β^*. Aplicăm principiul travaliului minim, ceea ce revine la obţinerea debitului Q_1

maxim cînd variem pe β^*. Prin urmare, pentru determinarea valorii β punem condiția

$$\frac{dQ_1}{d\beta^*} = 0. \tag{47}$$

Avînd în vedere că

$$\frac{1}{ABC}\frac{d}{d\beta^*}(ABC) = \frac{1}{A}\frac{dA}{d\beta^*} + \frac{1}{B}\frac{dB}{d\beta^*} + \frac{1}{C}\frac{dC}{d\beta^*}, \tag{48}$$

vom deriva expresia (46):

$$\frac{d}{d\beta^*}\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) = (1-\beta^{*2})\,\mathfrak{M}\,\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_2}\left[-\frac{2}{\beta^*}\varphi + \frac{1}{\mathfrak{M}}\frac{d\mathfrak{M}}{d\beta^*} + \frac{1}{\mathcal{J}}\frac{d\mathcal{J}}{d\beta^*}\right] + \frac{d}{d\beta^*}\left(\frac{\chi}{\varphi}\right) \tag{49}$$

și succesiv expresiile (17), (18), (30), (31), (41):

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\beta^*} = \frac{2}{\beta^*}\psi, \quad \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{d\beta^*} = \frac{2}{\beta^*}\left(\varphi - 2\frac{\chi}{\psi}\right), \quad \frac{1}{\chi}\frac{d\chi}{d\beta^*} = \frac{2}{\beta^*}(\chi - \varphi\psi),$$

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{d\beta^*} = \frac{2}{\beta^*}, \quad \frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{d\beta^*} = \frac{2}{\beta^*}\left(\frac{\varphi}{\chi} - \frac{1}{\psi}\right), \tag{50}$$

$$\frac{1}{\beta^*\chi}\frac{d\mathfrak{M}}{d\beta^*} = \frac{2}{\beta^*}\left[\psi - 2\frac{\chi}{\varphi} - \frac{\nu_1}{\nu_2}(1 + \chi - \varphi\psi)\right], \quad \frac{d\mathcal{J}}{d\beta^*} = \frac{2}{\beta^*}\beta^{*2}.$$

Cu condiția (47) și ținînd seama de (50), expresia (49) devine

$$\mathcal{J} = \frac{1 - \beta^{*2} - \dfrac{\mathcal{J}_2\mathfrak{N}}{\beta^{*2}\mathfrak{M}}}{1 - \mathcal{C}}, \tag{51}$$

unde

$$\frac{2}{\beta^*}\mathcal{C} = \frac{1}{\varphi\mathfrak{M}}\frac{d\mathfrak{M}}{d\beta^*}, \quad \mathfrak{N} = (1-\chi)\left(1 + \frac{\chi}{\varphi}\right), \tag{52}$$

și, avînd în vedere (41),

$$\frac{H^*}{L} = 1 - \beta^{*2} + \frac{1}{1-\mathcal{C}}\left[1 - \beta^{*2} - \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\frac{I_2}{\beta^{*2}}\right]. \tag{53}$$

Ținînd seama de (50), (51), relația (52) devine

$$\mathcal{C} = \frac{\psi - 2\dfrac{\chi}{\varphi} - \dfrac{\nu_1}{\nu_2}(1 + \chi - \varphi\psi)}{\psi - \varphi\dfrac{\nu_1}{\nu_2}}, \tag{54}$$

care, ținînd seama de (31), se mai poate pune sub forma

$$\mathcal{C} = \frac{1+\chi}{\varphi} - \psi - \frac{1-\chi}{\varphi\mathfrak{M}}[1 - \beta^{*2}(1+\psi)]. \tag{55}$$

CONCLUZII

S-a obținut expresia (46) a debitului de lichid Q_1 în raport cu debitul de aer Q_2 și în funcție de valorile β^*, χ, ε, φ, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}$, ale căror expresii respective sînt (8), (17), (18), (30), (31), (44), (45).

Submersiunea H^* în raport cu L este dată de formula (53) în funcție de valorile menționate și de $\mathfrak{N}$ și $\mathfrak{C}$, exprimate prin formulele (52) și (55).

Explicitarea debitului de lichid în funcție de submersiune fiind prea complicată, am preferat să păstrăm ca variabilă independentă pe β^*, căreia, dîndu-i diferite valori arbitrare în tabulate, să-i corespundă valorile H^* și Q_2 respective. Fiind dat H^*, se obține din tabelă β^* respectiv, cu ajutorul căruia se calculează Q_2 și invers.

Pentru a înlesni calculul am redat în tabela 1 valorile ε, χ, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{C}$ pentru următoarele valori β^{*2}: 0,99; 0,97; 0,95; 0,93; 0,90; 0,85; 0,84, și care au fost calculate cu formulele (17), (18), (31), (52) și (55).

Tabela 1

β^{*2}	ε	χ	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{C}$
0,99	0,944.995	0,499.50	0,503.03	0.033.066	0.014.37
0.97	0,984.924	0,497.47	0,510.26	0,032.124	0,045.87
0,95	0,974.786	0,495.72	0,517.44	0,031.072	0,090.15
0,93	0,964.577	0,493.96	0,524.86	0,029.881	0,148.20
0,90	0,949.122	0,491.22	0,536.55	0,027.815	0,267.80
0,87	0,933.492	0,488,40	0,584.94	0,025.405	0,441.73
0,85	0,922.969	0,486.46	0,557.63	0,023.595	0,601.03
0,84	0,917.676	0,485.48	0,562.10	0,022.629	0,698.37
0,83	0,912.362	0,484.48	0,566.67	0,021.621	0,810.55

Primită la redacție la 25 iulie 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. N.S. Pîrvulescu, *Ascesiunea gazului prin lichid în tuburi verticale*, St. cerc. mec. apl. **XIV**, 3 (1963).

O TEORIE A ECHILIBRAJULUI FORȚELOR DE INERȚIE LA MOTOARELE CU DOUĂ LINII DE CILINDRI

GEORGE BĂRĂNESCU,
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
și GHEORGHE ZĂTREANU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

621.43

Se prezintă o teorie generală a echilibrajului forțelor de inerție la motoarele cu două linii de cilindri și cu arbori cotiți identici, în fiecare linie aprinderile fiind uniform repartizate.

Sînt stabilite condițiile ce trebuie îndeplinite în vederea echilibrării oricărei armonici care subzistă în fiecare linie de cilindri, armonicile care se echilibrează simultan, condițiile în care se asigură cel mai bun echilibraj al forțelor de inerție, precum și echilibrajul realizat în cazul repartiției uniforme a aprinderilor pe întregul motor.

1. INTRODUCERE

La motoarele cu ardere internă cu număr mare de cilindri, o soluție prin care se limitează dimensiunile de gabarit este plasarea cilindrilor în două linii, fiecare avînd un arbore cotit propriu, axele de rotație ale arborilor cotiți fiind paralele.

Echilibrajul acestor motoare prezintă anumite particularități care decurg atît din plasarea cilindrilor cît și din posibilitățile de decalare funcțională a liniilor de cilindri.

Pornind de la teoria generală a echilibrajului motoarelor în linie [1], în lucrare se studiază echilibrajul forțelor de inerție la motoarele cu i cilindri dispuși în două linii ,planele formate de axele cilindrilor din fiecare linie (numite în continuare planele cilindrilor) făcînd între ele un unghi oarecare γ. Se consideră că arborii cotiți sînt identici, în fiecare linie aprinderile fiind uniform repartizate.

2. ECHILIBRAJUL FORȚELOR DE INERȚIE ÎN FIECARE LINIE DE CILINDRI

Deoarece în fiecare linie cilindrii sînt indentici și aprinderile uniform repartizate forțele de inerție ale maselor cu mișcare de rotație se echilibrează reciproc.

Ordinele p ale armonicilor forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație care dau în fiecare linie o rezultantă sînt precizate de formula

$$p = \varkappa \frac{i}{\tau}, \tag{1}$$

unde $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$, iar τ este numărul de timpi [1], [2]; formula este valabilă pentru $i \geqslant 4$.

Deoarece pe de o parte ordinul unei armonici este un număr întreg, iar pe de altă parte la mecanismul bielă-manivelă normal și axat seria Fourier a forței de inerție a maselor cu mișcare de translație are numai armonica întîia și armonicile pare, în anumite situții formula (1) duce și la ordine care nu există. Ca urmare, la motoarele în patru timpi trebuie considerate în formula (1) numai valorile pare ale factorului $\varkappa$ cînd $\frac{i}{4}$ este un număr impar și motorul este prevăzut cu mecanisme bielă-manivelă axate, sau cînd $\frac{i}{2}$ este un număr impar și motorul este prevăzut cu mecanisme bielă-manivelă dezaxate; tot la motoarele în patru timpi, dacă $\frac{i}{2}$ este un număr impar însă mecanismele bielă-manivelă sînt axate, trebuie considerate pentru factorul $\varkappa$ numai valorile multiplu de patru. La motoarele în doi timpi echipate cu mecanisme bielă-manivelă axate dacă $\frac{i}{2}$ este un număr impar, ordinele armonicilor care dau rezultantă în fiecare linie se obțin din formula (1) în care $\varkappa$ este un multiplu de patru.

În fiecare linie rezultanta $\mathcal{R}_p$ a unei armonici care subzistă este egală la un moment oarecare cu proiecția pe planul cilindrilor a unui vector de mărime constantă $R_p = \frac{i}{2} F_p$, unde F_p este amplitudinea armonicii de ordinul p a unui cilindru, care se rotește în sensul de rotație al arborelui cotit cu o viteză unghiulară constantă, de p ori mai mare decît viteza unghiulară ω a arborelui cotit și care în momentul de timp ales ca origine ($\alpha = 0$) face cu direcția ox unghiul φ_p. Se poate deci scrie

$$\mathcal{R}_p = R_p \cos(p\alpha + \varphi_p), \tag{2}$$

$\alpha = \omega t$ fiind unghiul descris de o manivelă oarecare din linia respectivă de exemplu la manivela numărul 1, măsurat față de planul cilindrilor în sensul de rotație al arborelui cotit (fig. 1).

Pentru fiecare linie se numerotează cilindrii consecutiv cu $1, 2, 3, \ldots \frac{i}{2}$, cilindrii cu numărul de ordine 1 fiind situați la aceeași extremitate a

motorului. Aprinderile consecutive din fiecare linie se numerotează cu I, II, III, ... $\frac{i}{2}$, începînd cu aprinderea din cilindrul 1. Indicii s și d arată respectiv linia din stînga sau din dreapta, față de un observator care privește motorul dinspre extremitatea unde se află cilindrii numărul 1.

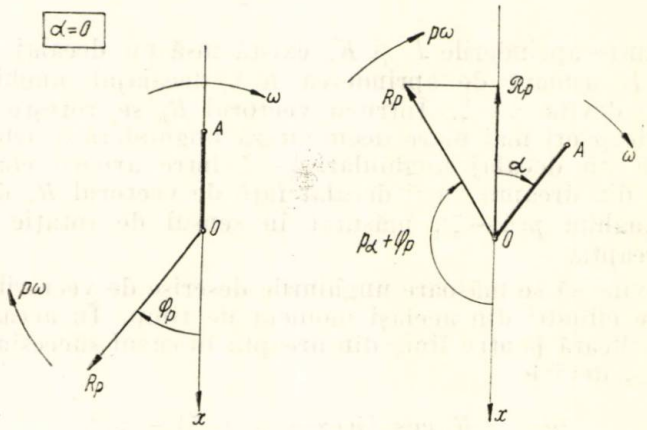


Fig. 1. — Interpretarea vectorială a rezultantei armonicii de ordinul p a forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație pentru o linie de cilindri.

3. ECHILIBRAJUL FORȚELOR DE INERȚIE LA MOTOARELE CU DOUĂ LINII DE CILINDRI

Se consideră cazul general al alternării aprinderilor între cele două linii de cilindri. Declanșarea aprinderilor simultan cîte două (fiecare aprindere dintr-o linie fiind însoțită de o aprindere în cealaltă linie) constituie un caz particular al cazului general.

Scriind relația (2) pentru linia din stînga se obține

$$\mathcal{R}_{ps} = R_p \cos(p\alpha + \varphi_p). \tag{3}$$

Pentru linia din dreapta, rezultanta armonicii de ordinul p are tot amplitudinea R_p, însă va fi defazată față de rezultanta armonicii de același ordin din linia din stînga cu un unghi ce depinde de succesiunea aprinderilor în cele două linii de cilindri.

Dacă s-ar realiza cuplajul aprinderilor I_s I_d (aprinderea I_s simultană cu aprinderea I_d) manivelele cilindrilor cu numărul de ordine 1 ar forma în orice moment cu planele cilindrilor respectivi și în sensul lor de rotație unghiuri egale, deoarece arborii cotiți sînt identici.

Pentru realizarea unui alt cuplaj de aprinderi simultane, de pildă cuplajul I_s K_d $\left[K_d = I_d, II_d\ III_d, ..., \left(\frac{i}{2}\right)_d\right]$, arborele cotit din dreapta

trebuie să fie decalat în sensul său de rotație cu un unghi egal cu multiplul corespunzător cuplajului unghiului dintre două aprinderi consecutive din aceeași linie

$$\psi = (K_i - 1)\,\frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}. \tag{4}$$

Dacă între aprinderile I_s și K_d există însă un decalaj unghiular ζ (aprinderea I_s urmată de aprinderea K_d), decalajul unghiular dintre arborii cotiți devine $\psi - \zeta$. Întrucît vectorul R_p se rotește cu o viteză unghiulară de p ori mai mare decît viteza unghiulară a arborelui cotit, rezultă că la un decalaj unghiular $\psi - \zeta$ între arborii cotiți vectorul R_p din linia din dreapta va fi decalat față de vectorul R_p din linia din stînga cu unghiul $p(\psi - \zeta)$, măsurat în sensul de rotație al arborelui cotit din dreapta.

Se convine să se măsoare unghiurile descrise de vectorii R_p ai celor două linii de cilindri din același moment de timp. În această situație, relația (2), aplicată pentru linia din dreapta în cazul succesiunii aprinderilor $I_s \to K_d$, devine

$$\mathcal{R}_{p_d} = R_p \cos\,[p\,(\alpha + \psi - \zeta) + \varphi_p].$$

Cu rotația $\chi = p\psi$ se obține

$$\mathcal{R}_{p_d} = R_p \cos\,[p(\alpha - \zeta) + \chi + \varphi_p]. \tag{5}$$

Avînd în vedere expresia (4) și ținînd seama că p nu ia decît valorile din (1) se deduce

$$\chi = \varkappa\,\frac{i}{\tau}(K_d - 1)\,\frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}} = \varkappa\,(K_d - 1)\,2\pi.$$

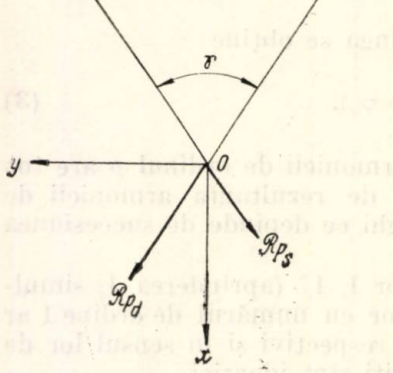


Fig. 2. — Schema compunerii rezultantelor unei armonici a forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație la motorul cu două linii de cilindri.

Unghiul χ fiind deci un multiplu de 2π, relația (5) poate fi scrisă sub forma

$$\mathcal{R}_{p_d} = R_p \cos\,[p(\alpha - \zeta) + \varphi_p]. \tag{6}$$

Această expresie arată că poziția vectorului R_p din linia din dreapta nu depinde de succesiunea aprinderilor între cele două linii de cilindri, deoarece expresia nu conține unghiul ψ, deci nici numărul de ordine K_d.

Alegînd ca axe de coordonate bisectoarele unghiului dintre liniile de cilindri (fig. 2) și proiectînd pe aceste axe rezul-

tantele $\mathcal{R}_{p_s}$ și R_{p_d} date de formulele (3) și (6) se obține

$$X_p = R_p \{\cos [p(\alpha - \zeta) + \varphi_p] + \cos (p\alpha + \varphi_p)\} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$Y_p = R_p \{\cos [p(\alpha - \zeta) + \varphi_p] - \cos (p\alpha - \varphi_p)\} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Folosind formulele trigonometrice

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2},$$

se deduce

$$X_p = 2R_p \cos p \frac{\zeta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \left[p\left(\alpha - \frac{\zeta}{2}\right) + \varphi_p\right],$$

$$Y_p = 2R_p \sin p \frac{\zeta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \left[p\left(\alpha - \frac{\zeta}{2}\right) + \varphi_p\right].$$

Cu notațiile

$$\left.\begin{aligned} A_p &= 2R_p \cos p \frac{\zeta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ B_p &= 2R_p \sin p \frac{\zeta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

se obține

$$X_p = A_p \cos \left[p\left(\alpha - \frac{\zeta}{2}\right) + \varphi_p\right],$$

$$Y_p = B_p \sin \left[p\left(\alpha - \frac{\zeta}{2}\right) + \varphi_p\right],$$

sau

$$\frac{X_p^2}{A_p^2} + \frac{Y_p^2}{B_p^2} = 1. \tag{8}$$

Expresia (8) arată că la motoarele cu două linii de cilindri rezultanta unei armonici care subzistă în cele două linii de cilindri este o forță rotitoare aplicată într-un punct situat pe linia de intersecție a planelor cilindrilor și a cărei mărime variază după o elipsă, avînd axele perpendiculare pe această linie și situate în planele bisectoare ale unghiului γ.

3.1. Prin alegerea corespunzătoare a unghiurilor γ și ζ se pot echilibra unele din armonicile care dau rezultante în fiecare linie.

Astfel, echilibrarea armonicii de ordinul p se obține dacă $A_p\, B_p = 0$. Avînd în vedere expresiile (7) armonica de ordinul p se echilibrează dacă sînt îndeplinite simultan condițiile

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\gamma}{2} &= 0, \\ \cos p\,\frac{\zeta}{2} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

sau condițiile

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{\gamma}{2} &= 0, \\ \sin p\,\frac{\zeta}{2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

3.1.1. Din condițiile (9) se deduce

$$\gamma = 0, \tag{11}$$

$$\zeta = (2\lambda - 1)\,\frac{\pi}{p}, \tag{12}$$

unde factorul $\lambda \geqslant 1$ poate lua numai anumite valori întregi, precizate în continuare.

Aceste relații arată că la motorul cu două linii paralele de cilindri ($\gamma = 0$) componenta după axa oy a forțelor $\mathcal{R}_{p_s}$ și $\mathcal{R}_{p_d}$ este nulă pentru orice armonică, iar componenta după axa ox a armonicii de ordinul p este nulă pentru toate valorile unghiului ζ date de relația (12).

Deoarece unghiul ζ este cel mult egal cu unghiul dintre două aprinderi consecutive din aceeași linie

$$\zeta \leqslant \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}; \tag{13}$$

pentru o armonică dată factorul λ din (12) nu poate lua decît valorile care îndeplinesc condiția

$$(2\lambda - 1)\,\frac{\pi}{p} \leqslant \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}},$$

adică

$$\lambda \leqslant \frac{\tau p}{i} + \frac{1}{2}.$$

Conform relației (1) termenul $\frac{\tau p}{i}$ este un număr întreg. Ca urmare, condiția precedentă se poate scrie $\lambda \leqslant \frac{\tau p}{i}$, adică

$$\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ldots\ \frac{\tau p}{i}. \tag{14}$$

Valorile unghiului ζ care asigură echilibrarea armonicii de ordinul p pentru motorul cu două linii paralele de cilindri se obțin deci din relația (12) în care λ poate lua numai valorile din (14).

a) Echilibrarea unei armonici pentru ansamblul celor două linii antrenează și echilibrarea altor armonici. Se presupune că s-a echilibrat armonica de ordinul p_0 prin decalarea corespunzătoare a aprinderilor între cele două linii de cilindri. Pentru precizarea acestui decalaj se alege una din valorile λ din (14), de pildă valoarea λ_0; cu ajutorul acestei valori se calculează din formula (12) decalajul căutat

$$\zeta_0 = \frac{2\lambda_0 - 1}{p_0}\,\pi.$$

Pentru același decalaj ζ_0 se constată că formula (12) este îndeplinită de toate valorile λ și p, care asigură egalitatea [1])

$$\frac{2\lambda - 1}{p} = \frac{2\lambda_0 - 1}{p_0} \tag{15}$$

Rezultă deci că o dată cu echilibrarea armonicii de ordinul p_0 se echilibrează și armonicile de ordinele

$$p = (2\lambda - 1)\frac{p_0}{2\lambda_0 - 1}. \tag{16}$$

Armonica de ordinul p_0 este una din armonicile care subzistă în fiecare linie de cilindri și ca urmare ea face parte din șirul de armonici ale căror ordine sînt precizate de formula (1), adică

$$p_0 = \varkappa_0 \frac{i}{\tau}.$$

Înlocuind în (16) se obține

$$p = (2\lambda - 1)\,\frac{\varkappa_0 \dfrac{i}{\tau}}{2\lambda_0 - 1}. \tag{17}$$

Din (1) se constată că p nu poate fi decît un multiplu de $\frac{i}{\tau}$. Avînd în vedere acest fapt se deosebesc două cazuri:

1) Numerele $\varkappa_0$ și $2\lambda_0 - 1$ nu au divizori comuni. În acest caz formula (17) este îndeplinită pentru valorile λ ce rezultă din egalitatea

$$2\lambda - 1 = \mu(2\lambda_0 - 1),$$

[1]) În egalitatea (15) λ_0 îndeplinește condiția (14) deoarece este valoarea folosită la determinarea unghiului ζ_0. Din moment ce ζ_0 satisface restricția (13), λ și p din (12) pot lua toate valorile care asigură egalitatea (15).

unde μ este evident un număr impar. Ca urmare se constată din (16) că echilibrarea armonicii de ordinul p_0 antrenează și echilibrarea armonicilor ale căror ordine sînt multipli impari ai lui p_0.

2) Numerele $\varkappa_0$ și $2\lambda_0 - 1$ au divizori comuni. Notînd cu d cel mai mare divizor comun, relația (17) se poate scrie sub forma

$$p = (2\lambda - 1)\frac{\frac{\varkappa_0}{d}\frac{i}{\tau}}{\frac{2\lambda_0 - 1}{d}}, \tag{18}$$

care arată că λ poate lua numai valorile ce rezultă din egalitatea

$$2\lambda - 1 = \nu\frac{2\lambda_0 - 1}{d},$$

ν fiind de asemenea un număr impar. După simplificări, formula (18) devine

$$p = \nu\frac{\varkappa_0}{d}\frac{i}{\tau}.$$

În cazul considerat echilibrarea armonicii de ordinul p_0 antrenează deci echilibrarea tuturor armonicilor ale căror ordine sînt multipli impari ai ordinului

$$p_0^* = \frac{\varkappa_0}{d}\frac{i}{\tau}.$$

b) Echilibrarea unei armonici prin alegerea corespunzătoare a decalajului ζ determină mărirea amplitudinii rezultantei pentru întregul motor a altor armonici. Într-adevăr, în cazul cercetat ($\gamma = 0$) se obține din formulele (7) $B_p = 0$ și

$$A_p = 2R_p \cos p\frac{\zeta}{2}. \tag{19}$$

Se presupune că s-a echilibrat armonica de ordinul p_0; valoarea corespunzătoare a decalajului ζ, dedusă din formula (12), este

$$\zeta_0 = (2\lambda_0 - 1)\frac{\pi}{p_0},$$

unde λ_0 poate lua toate valorile precizate de relația (14). Pentru armonicile ale căror ordine sînt multipli pari de p_0 rezultă

$$p\frac{\zeta_0}{2} = 2\xi p_0(2\lambda_0 - 1)\frac{\pi}{2p_0} = \xi(2\lambda_0 - 1)\pi, \qquad (\xi = 1, 2, 3, \ldots).$$

Relația (19) devine deci pentru $p = 2\xi p_0$ și $\zeta = \zeta_0$

$$|A_p| \to |A_{p\max}| = 2R_p.$$

Astfel, echilibrarea armonicii de ordinul p_0, care antrenează echilibrarea armonicilor ale căror ordine sînt multipli impari de p_0, este însoțită de valori maxime ale amplitudinilor rezultantelor armonicilor ale căror ordine sînt multipli pari de p_0.

c) Cel mai bun echilibraj al motorului cu două linii paralele de cilindri se obține cînd se realizează echilibrarea armonicii de ordinul cel mai mic, adică a armonicii de ordinul

$$p_0^* = \varkappa_0^* \frac{i}{\tau},$$

unde $\varkappa_0^*$ are valoarea 1, 2 sau 4, conform cazurilor arătate la punctul 2. Pentru echilibrarea acestei armonici (și implicit a armonicilor ale căror ordine sînt multipli impari de p_0^*), conform relației (12), decalajul ζ_0^* dintre două aprinderi consecutive trebuie să aibe valoarea

$$\zeta_0^* = (2\lambda - 1) \frac{\tau\pi}{\varkappa_0^* i}. \tag{20}$$

Avînd în vedere că decalajul dintre două aprinderi consecutive este supus restricției (13) este necesar ca

$$(2\lambda - 1) \frac{\tau\pi}{\varkappa_0^* i} \leqslant \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}},$$

sau

$$2\lambda - 1 \leqslant 2\varkappa_0^*.$$

Această condiție arată că λ din (20) poate lua valoarea 1 cînd $\varkappa_0^* = 1$, valorile 1 și 2 cînd $\varkappa_0^* = 2$ și valorile 1, 2, 3, 4 cînd $\varkappa_0^* = 4$.

d) Un decalaj avantajos al aprinderilor este cel care asigură repartiția uniformă a aprinderilor, adică $\zeta = \frac{\tau\pi}{i}$. Prin înlocuirea acestei valori în (12) se obțin ordinele armonicilor care se echilibrează la motorul cu două linii paralele de cilindri și aprinderi uniform repartizate

$$p = (2\lambda - 1) \frac{i}{\tau}.$$

În cazurile în care multiplul $\varkappa$ din (1) ia numai valori pare, repartiția uniformă a aprinderilor nu permite echilibrarea nici uneia din armonicile care subzistă în fiecare linie de cilindri.

3.1.2. Alte posibilități de echilibrare a armonicilor forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație se obțin din condițiile (10) care dau

$$\gamma = \pi, \tag{21}$$

$$\zeta = 2\lambda \frac{\pi}{p}. \tag{22}$$

Rezultă deci că liniile de cilindri trebuie să fie opuse (condiție care asigură echilibrarea componentei după axa ox a forțelor $\mathcal{R}_{ps}$ și $\mathcal{R}_{pd}$ pentru orice armonică) și totodată ζ trebuie să aibă valorile din (22) corespunzătoare armonicii care se echilibrează.

Deoarece unghiul ζ este supus restricției (13) factorul λ din formula (22) poate lua numai valorile ce îndeplinesc condiția

$$2\lambda \frac{\pi}{p} \leqslant \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}},$$

sau

$$\lambda \leqslant \frac{\tau p}{i},$$

adică

$$\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots \frac{\tau p}{i}. \tag{23}$$

Pentru valoarea $\lambda = 0$ se obține $\zeta = 0$, ceea ce înseamnă că fiecare aprindere dintr-o linie este însoțită de o aprindere în cealaltă linie. Această soluție, care conduce la o neuniformitate însemnată a momentului motor rezultant, prezintă avantajul echilibrării momentelor care basculează fiecare linie în jurul axelor de rotație ale arborilor cotiți, în cazul rotirii celor doi arbori cotiți în sensuri contrare.

a) Și în acest caz, echilibrarea unei armonici pentru ansamblul celor două linii de cilindri antrenează echilibrarea altor armonici. Fie ζ_0 valoarea unghiului ζ dedusă din formula (22), care corespunde uneia din valorile λ din (23), de exemplu valorii λ_0 pentru care se echilibrează armonica de ordinul p_0, adică

$$\zeta_0 = 2\lambda_0 \frac{\pi}{p_0}.$$

Pentru acest decalaj ζ_0, formula (22) este îndeplinită de toate valorile λ și p ce satisfac egalitatea

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{\lambda_0}{p_0},$$

ceea ce înseamnă că o dată cu echilibrarea armonicii de ordinul p_0 se echilibrează și armonicile de ordinele

$$p = \lambda \frac{p_0}{\lambda_0}. \tag{24}$$

Armonica de ordinul p_0 este una din armonicile care subzistă în fiecare linie de cilindri, deci una din armonicile ale căror ordine sînt precizate de formula (1)

$$p_0 = \varkappa_0 \frac{i}{\tau}.$$

Înlocuind în (24) se obține

$$p = \lambda \frac{\varkappa_0 \frac{i}{\tau}}{\lambda_0}. \tag{25}$$

Deoarece, conform relației (1), ordinul p nu poate fi decît un multiplu de $\frac{i}{\tau}$, se deosebesc următoarele două cazuri:

1) Numerele $\varkappa_0$ și λ_0 nu au divizori comuni. În acest caz formula (25) este îndeplinită pentru valorile λ ce rezultă din egalitatea

$$\lambda = \rho\lambda_0,$$

unde ρ este un număr întreg oarecare. În consecință, se constată din (24) că echilibrarea armonicii de ordinul p_0 antrenează și echilibrarea armonicilor ale căror ordine sînt multipli ai lui p_0.

2) Numerele $\varkappa_0$ și λ_0 au divizori comuni. Punînd relația (25) sub forma

$$p = \lambda \frac{\frac{\varkappa_0}{\delta} \frac{i}{\tau}}{\frac{\lambda_0}{\delta}}, \tag{26}$$

unde δ este cel mai mare divizor comun al lui $\varkappa_0$ și λ_0, se observă că λ poate lua numai valorile

$$\lambda = \sigma \frac{\lambda_0}{\delta},$$

σ fiind un număr întreg oarecare. După simplificări, formula (26) devine

$$p = \sigma \frac{\varkappa_0}{\delta} \frac{i}{\tau},$$

deci o dată cu armonica de ordinul de p_0 se echilibrează toate armonicile ale căror ordine sînt multipli ai ordinului

$$p_0^* = \frac{\varkappa_0}{\delta} \frac{i}{\tau}.$$

Acești multipli conțin evident și multiplii ordinului p_0.

b) Echilibrarea unor armonici antrenează creșterea amplitudinii rezultantelor altor armonici. Pentru $\gamma = \pi$ formulele (7) dau $A_p = 0$ și

$$B_p = 2R_p \sin p\frac{\zeta}{2}. \tag{27}$$

Fie ζ_0 valoarea decalajului ζ care asigură echilibrarea armonicii de ordinul p_0. Această valoare se obține din formula (22)

$$\zeta_0 = 2\lambda_0 \frac{\pi}{p_0}, \tag{28}$$

factorul λ_0 putînd lua valorile din relația (14). Din (27) și (28) se deduce

$$B_p = 2R_p \sin \frac{2\lambda_0 p}{p_0} \frac{\pi}{2},$$

expresie care arată că armonicile ale căror ordine nu sînt un multiplu de p_0, dar au o valoare pentru care raportul $\frac{2\lambda_0 p}{p_0}$ este un număr impar, dau rezultante cu amplitudine maximă.

c) Deoarece în cazul motoarelor cu două linii opuse de cilindri echilibrarea unei armonici p_0 antrenează echilibrarea armonicilor ale căror ordine sînt multipli a lui p_0, forțele de inerție ale maselor cu mișcarea de translație vor fi complet echilibrate dacă se folosește un decalaj ζ_0^* care echilibrează armonica de ordinul cel mai mic ce subzistă în fiecare linie, adică armonica de ordinul

$$p_0^* = \varkappa_0^* \frac{i}{\tau},$$

unde $\varkappa_0^*$ are valoarea 1, 2 sau 4, conform cazurilor specificate la punctul 2 Înlocuind p_0^* în (22) se obține

$$\zeta_0^* = 2\lambda \frac{\tau\pi}{\varkappa_0^* i}.$$

Valorile posibile ale factorului λ se deduc ținînd seama că unghiul ζ_0^* este supus restricției (13)

$$2\lambda \frac{\tau\pi}{\varkappa_0^* i} \leqslant \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}},$$

deci $\lambda \leqslant \varkappa_0^*$. Ca urmare λ poate lua valoarea 1 cînd $\varkappa_0^* = 1$, valorile 1 și 2 cînd $\varkappa_0^* = 2$ și valorile 1, 2, 3, 4 cînd $\varkappa_0^* = 4$. Dintre aceste valori sînt de reținut $\lambda = 1$, în cazul $\varkappa_0^* = 2$ și $\lambda = 2$, în cazul $\varkappa_0^* = 4$, deoarece ele duc la repartiția uniformă a aprinderilor pentru întregul motor $\left(\zeta_0^* = \frac{\tau\pi}{i}\right)$.

d) Dacă aprinderile sînt uniform repartizate pentru întregul motor armonicile care se echilibrează se deduc din relația (22) în care se folosește condiția $\zeta = \frac{\tau\pi}{i}$; rezultă astfel

$$p = 2\lambda \frac{i}{\tau},$$

adică toate armonicile pare care subzistă în fiecare linie de cilindri. Cînd factorul $\varkappa$ din (1) ia numai valori pare, sau multiplu de patru, repartiția uniformă a aprinderilor asigură echilibrarea tuturor forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație.

3.2. Dacă este îndeplinită numai una din condițiile (11), (12) sau una din condițiile (21), (22) se poate echilibra componenta după axa *ox* sau după axa *oy* a rezultantei armonicii considerate pentru ansamblul celor două linii de cilindri, ceea ce înseamnă limitatea la un singur plan a trepidațiilor produse de armonica considerată. Formulele (7) arată însă că orice măsură care micșorează amplitudinea trepidațiilor într-unul din planele bisectoare antrenează creșterea amplitudinii trepidațiilor în celălalt plan bisector.

3.3. Rezultanta unei armonici care subzistă în cele două linii de cilindri este o forță rotitoare de mărime constantă dacă $\pm A_p = B_p$. Ținînd seama de expresiile (7) se obține condiția

$$\pm \cos p\frac{\zeta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin p\frac{\zeta}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

deci

$$\operatorname{tg} p\frac{\zeta}{2} = \pm \operatorname{tg}\left(\lambda\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right), \qquad (\lambda = 1, 2, 3,...),$$

din care se deduce

$$p = (2\lambda - 1)\frac{\pi}{\zeta} \mp \frac{\gamma}{\zeta},$$

sau

$$\zeta = (2\lambda - 1)\frac{\pi}{p} \mp \frac{\gamma}{p}. \qquad (29)$$

Ultimele două relații precizează legătura care trebuie să existe între unghiurile ζ și γ pentru care rezultanta armonicii de ordinul p_0 să fie o forță rotitoare de mărime constantă. Valorile posibile ale factorului λ din (29) se determină avînd în vedere restricția (13):

$$(2\lambda - 1)\frac{\pi}{p} \mp \frac{\gamma}{p} \leqslant \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}},$$

sau

$$\lambda - \frac{1}{2} \mp \frac{\gamma}{2\pi} \leqslant \frac{\tau p}{i}.$$

Deoarece $\frac{\tau p}{i}$ este un număr întreg, această condiție este îndeplinită pentru valorile lui λ din (14); în cazul $\gamma = \pi$, λ poate lua și valoarea $\frac{\tau p}{i} + 1$.

4. CONCLUZII

Teoria precedentă cu privire la echilibrajul forţelor de inerţie la motoarele cu două linii de cilindri este generală. Ea permite stabilirea condiţiilor ce trebuie îndeplinite în vederea echilibrării oricărei armonici care subzistă în fiecare linie, armonicile care se echilibrează simultan condiţiile în care se asigură cel mai bun echilibraj al forţelor de inerţie, precum şi echilibrajul realizat în cazul repartiţiei uniforme a aprinderilor pentru întregul motor.

Primită la redacţie la 12 iulie 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. G. BĂRĂNESCU, *O teorie a echilibrajului forţelor de inerţie la motoarele policilindrice în linie în doi timpi cu număr par de cilindri şi aprinderi uniform repartizate*, St. cerc. mec. apl., *4* (1959).
2. G. BĂRĂNESCU, N. APOSTOLESCU, B. GRÜNWALD, *Solutions de vilbrequins pour les moteurs polycylindriques en ligne, optima du point de vue de l'équilibrage*, Buletinul Institutului politehnic „Gh. Gheorghiu Dej", **XXI**, *3* (1959).
3. TRAIAN DUDAŞ, *Unele probleme de dinamică ale motoarelor în patru timpi cu două linii paralele de cilindri*, Buletinul Institutului politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej", *1* (1965).
4. G. BĂRĂNESCU, *Stabilirea ordinii de aprindere optime la motoarele în patru timpi cu două linii paralele de cilindri*, St. cerc. mec. apl., *4* (1964).

CONTRIBUȚII LA TEORIA MACROSCOPICĂ A DISLOCAȚIILOR ȘI TENSIUNILOR INIȚIALE [1]

(I)

C. TEODOSIU
Centrul de mecanica solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

539.3

Această lucrare reprezintă prima parte a unui studiu mai amplu, consacrat teoriei materialelor cu tensiuni și hipertensiuni inițiale produse de dislocații sau cvasidislocații. Se studiază geometria continuului în starea naturală, starea de referință și cea deformată. Apoi, se stabilesc ecuațiile de echilibru și condițiile la limită, pornind de la principiul lucrului mecanic virtual și de la ipoteza că densitatea energiei de deformație depinde de distorsiunile elastice și de derivatele covariante totale ale acestora.

INTRODUCERE

Majoritatea studiilor dezvoltate cu succes în cadrul teoriei macroscopice a dislocațiilor se referă la determinarea tensiunilor inițiale și a deformațiilor reziduale generate de o distribuție dată de surse de tensiuni inițiale (dislocații sau cvasidislocații [2]).

Problema determinării tensiunilor (simetrice) generate de dislocații poate fi considerată principial rezolvată prin lucrările lui E. Kröner și A. Seeger [1], [2], care au folosit și dezvoltat rezultatele lui K. Kondo [3]—[5] ca și pe cele ale lui B.A. Bilby, R. Bullough și E. Smith [6], [7] privind teoria geometrică neliniară a distribuțiilor continue de dislocații, completîndu-le cu studii privind integrarea ecuațiilor statice și rezolvarea prin aproximații succesive a problemelor la limită în cazul neliniarității geometrice și fizice.

O etapă nouă în dezvoltarea teoriei macroscopice a dislocațiilor a început în 1958, cînd W. Günther [8] a arătat că modelul cinematic folosit

[1] Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., **12**, 4 (1967) (în limba engleză).
[2] Vom denumi cvasidislocații sursele de tensiuni și hipertensiuni inițiale.

de teoria dislocațiilor este cel al unui continuu Cosserat cu deformații incompatibile. Ecuațiile cinematice și dinamice ale acestui continuu au fost stabilite încă din 1909 de către E. și F. Cosserat [9]. Ecuațiile constitutive și metodele de integrare a ecuațiilor dinamice au fost studiate însă abia în ultimii șase ani, prin lucrările [10]—[15] pentru mediile Cosserat cu rotații constrînse și prin lucrările [16]—[19] pentru cazul general al rotațiilor independente.

Apariția cuplurilor de tensiuni ca reacții specifice ale mediului împotriva curbărilor de structură produse de dislocații a fost semnalată în numeroase lucrări [2], [20]—[22], fără a fi elaborată însă o metodă de determinare cantitativă a lor. E. Kröner [23] a obținut expresia cuplurilor de tensiuni produse de o distribuție uniformă de dislocații-treaptă, prin sumarea cîmpurilor de tensiuni generate de fiecare dislocație izolată. Ulterior, această metodă a fost folosită de către F. Hehl și E. Kröner [24] pentru studiul distribuțiilor uniforme de dislocații șurub, obținîndu-se ecuații constitutive care leagă cuplurile de tensiuni generate de dislocații de curbările de structură.

Autorul [25]—[26] a elaborat o metodă de determinare a tensiunilor și cuplurilor de tensiuni inițiale produse de distribuțiile continue de dislocații în medii izotrope, finite sau infinite. Pe calea construirii unei soluții particulare a sistemului de ecuații, problema determinării tensiunilor și a cuplurilor de tensiuni generate de dislocații a fost redusă la o problemă la limită asociată pentru un mediu Cosserat cu rotații constrînse. Metoda a fost aplicată în cazul distribuțiilor uniforme de dislocații și al dislocațiilor singulare.

O altă linie de generalizare a teoriei clasice a elasticității, dezvoltată în acest deceniu și care a condus de asemenea la introducerea cuplurilor de tensiuni, este cea a materialelor de grad 2 sau mai mare [3]). Teoria materialelor de grad 2 a făcut obiectul studiilor mai multor autori, contribuția majoră revenindu-i lui R.A. Toupin [13], [27], care a demonstrat că teoria mediilor Cosserat cu rotații constrînse reprezintă un caz particular al teoriei materialelor de grad 2. R. Stojanovitch, S. Djuritch și L. Vujoshevitch [28]—[29] au dat o generalizare a teoriei materialelor de grad 2, obținută prin introducerea răspunsului materialului la deformarea unor directori care dau gradele suplimentare interne de libertate ale materialului. În sfîrșit, E. Kröner și F. Hehl [30], [24] au menționat legătura dintre teoria dislocațiilor și teoria materialelor de grad 2 și au emis ipoteza că răspunsul materialului la curbările de structură corespunzătoare rotațiilor constrînse este neglijabil față de răspunsul la curbările de structură produse de dislocații.

Lucrarea de față are ca obiect elaborarea unei teorii a materialelor de grad 2 cu tensiuni și hipertensiuni inițiale produse de dislocații sau cvasidislocații, în ipoteza că energia de deformație depinde de distorsiunile elastice și de derivatele lor covariante totale. Această teorie generalizează de fapt pe cea a materialelor de grad 2 fără tensiuni și hipertensiuni inițiale, pentru care distorsiunile A_{λ}^{k} și derivatele lor covariante totale $A_{\lambda;\mu}^{k}$ se reduc la derivatele covariante de primele două ordine ale deformației.

[3]) Un material se numește „material de grad N", dacă N este ordinul celui mai înalt gradient al vectorului de poziție, care intervine în expresia energiei elastice.

Pe de altă parte, rezultatele obținute generalizează pe cele date anterior de autor, care reduceau problema determinării tensiunilor și hipertensiunilor inițiale, în ipoteze mai restrictive asupra răspunsului materialului, la o problemă la limită pentru medii Cosserat cu rotații constrînse. Unele rezultate cuprinse în prima parte a lucrării de față au fost expuse într-o formă rezumativă în [31].

Primele trei paragrafe ale lucrării sînt consacrate teoriei geometrice a unui continuu material cu tensiuni inițiale, solicitat de forțe exterioare, care sînt suficient de mici pentru ca deformația suplimentară indusă de ele să fie reversibilă. Continuul material este considerat simultan în trei stări :

— *starea de referință* (K), în care continuul material este liber de orice solicitări externe, dar poate conține surse de tensiuni și hipertensiuni inițiale (dislocații, vacanțe, atomi interstițiali etc.), a căror generare a avut un caracter neelastic ;

— *starea naturală* ($\varkappa$), care poate fi obținută din starea de referință prin tăierea continuului material în elemente foarte mici și prin relaxarea individuală a acestora [4] ;

— *starea deformată* (k), care rezultă din starea de referință prin acțiunea sarcinilor externe asupra interiorului și frontierei continuului material.

În starea de referință și în cea deformată, continuul material, scufundat în spațiul euclidian real, poate fi raportat la două sisteme de coordonate olonome. În starea naturală elementele de volum pot fi raportate fiecare în parte la cîte un sistem de coordonate carteziene ortogonale, dar nu există un sistem de coordonate al acestei stări olonom în raport cu cel al stărilor (k) sau (K). Dacă se descrie însă geometria stării naturale în coordonatele stărilor (k) sau (K), elementele materiale ale stării naturale devin spații materiale euclidiene tangente la un spațiu cu conexiune afină, a cărui torsiune este egală cu densitatea surselor de autotensiuni.

Relațiile care privesc geometria stărilor (k) și (K) sînt duale, așa cum se întîmpla și în cazul deformațiilor compatibile ([10], p. 242) ; aici însă dualitatea se extinde și asupra relațiilor de legătură dintre cele două stări și starea naturală. Relațiile duale se obțin unele din altele prin înlocuirea literelor latine mici cu cele mari și invers. O altă dualitate există între starea naturală, pe de o parte și starea de referință sau cea deformată, pe de altă parte. Relațiile duale se obțin în acest caz schimbînd între ele literele grecești cu cele latine mari sau respectiv mici. Primele trei paragrafe cuprind o sistematizare a rezultatelor cunoscute din teoria geometrică neliniară a dislocațiilor, în sensul punerii în evidență a acestor două dualități. Pe de altă parte, introducerea stării deformate ca stare distinctă de cea de referință facilitează, după cum vom vedea în § 5, formularea principiului lucrului mecanic virtual.

În paragraful 4 se introduce ipoteza că energia de deformație a corpului depinde de distorsiunile A^k_λ și de derivatele lor covariante totale $A^k_{\lambda;\mu}$. Această ipoteză a permis obținerea riguroasă a ecuațiilor constitutive,

[4] Denumirea acestei stări este folosită atît de K. Kondo [4], cît și de E. Kröner [2]. Întrucît E. Kröner studiază numai problema determinării tensiunilor inițiale, el denumește starea de referință, stare finală sau deformată.

folosind procedeele obișnuite din teoriile moderne ale mecanicii corpului solid.

Paragraful 5 cuprinde o formulare a principiului lucrului mecanic virtual echivalent cu ecuațiile de conservare a impulsului liniar și cu condițiile la limită, care generalizează pe cea dată de R.A. Toupin [13], [27] pentru materiale de grad 2 fără tensiuni și hipertensiuni inițiale. Întrucît $A^k_\lambda \neq x^k_{;\lambda}$, a fost necesară deducerea relațiilor care dau variațiile distorsiunilor și ale derivatelor lor covariante totale. Pe de altă parte, întrucît $A^k_{\lambda;\mu} \neq A^k_{\mu;\lambda}$, hipertensiunile h^{lkm} introduse de R.A. Toupin nu mai sînt simetrice în perechea de indici l, m, ceea ce ridică numărul componentelor lor distincte de la 18 la 27. La sfîrșitul acestui paragraf se deduc ecuațiile de conservare a impulsului unghiular din condiția invarianței energiei de deformație față de deplasările de corp rigid și se introduce un tensor simetric al tensiunilor [27], ceea ce, după cum se arată în [32], este totdeauna posibil în cazul static.

În § 6 se folosește principiul obiectivității materiale și teorema lui Cauchy pentru a demonstra că energia de deformație nu poate depinde decît de tensorul deformației și de cel al hiperdeformației. Acesta din urmă are de asemenea 27 de componente distincte, spre deosebire de cazul materialelor de grad 2 fără tensiuni și hipertensiuni inițiale, pentru care numărul componentelor distincte se reduce la 18. În continuare se analizează semnificația geometrică a tensorului hiperdeformației și se arată că acesta se anulează numai dacă vectorii paraleli și de aceeași lungime, în puncte infinit vecine ale continuului în starea deformată, rămîn paraleli și de aceeași lungime în spațiul local euclidian al stării naturale.

Pe baza rezultatelor obținute în § 6, se obțin în § 7 ecuațiile constitutive, care leagă tensiunile și hipertensiunile de deformații și hiperdeformații. În § 8 se studiază posibilitatea de considerare a simetriei materialului și în particular se arată ce devin ecuațiile constitutive în cazul corpurilor izotrope.

Paragraful 9 reprezintă o adaptare la contextul lucrării a deducerii ecuațiilor generalizate de compatibilitate dată de E. Kröner și A. Seeger [1], [2]. La sfîrșitul acestui paragraf se arată că partea antisimetrică în primii doi indici a tensorului hiperdeformației este echivalentă cu tensorul curbărilor de structură.

În încheierea primei părți a lucrării (§ 10) se arată că în cazul unei densități date a cvasidislocațiilor, geometria și statica continuului sînt complet descrise prin 66 de funcții, care trebuie să satisfacă 66 de ecuații neliniare cu derivate parțiale și 6 condiții la limită.

Partea a doua a lucrării se ocupă cu teoria liniară a dislocațiilor și autotensiunilor, în medii izotrope. În § 11 sînt liniarizate ecuațiile constitutive, în ipoteza că se pot neglija produsele dintre deformații și densitatea cvasidislocațiilor sau derivatelor ei covariante totale. În § 12 se arată că în cazul unei densități date a cvasidislocațiilor, problemele la limită se pot reduce la integrarea unui sistem de șase ecuații cu derivate parțiale cu șase funcții necunoscute (componentele tensorului deformației), care trebuie să satisfacă șase condiții la limită.

În § § 13 și 14 se indică două posibilități de abordare a problemelor la limită liniare, în cazul unei densități cunoscute a cvasidisloca-

țiilor. Aceste metode constau în construirea soluției ca sumă dintre o soluție particulară a sistemului de ecuații și soluția unei probleme la limită asociate pentru același corp, dar fără tensiuni și hipertensiuni inițiale. Rezolvarea problemei la limită asociate comportă integrarea unui sistem de trei ecuații cu derivate parțiale de ordinul patru, cu șase condiții la limită, avînd ca necunoscute componentele deplasării elastice; pentru aceasta se pot folosi reprezentările de tip Neuber-Papkovici, date de R.D Mindlin [33] în teoria liniară a corpurilor cu microstructură. La sfîrșitul § 13 se demonstrează că în cazul cînd densitatea energiei este o formă pătratică, pozitiv definită de argumentele sale, soluția problemei liniarizate este unică.

Paragrafele 15 și 16 cuprind rezolvarea efectivă a problemei determinării tensiunilor și hipertensiunilor inițiale generate de o distribuție uniformă de dislocații-treaptă într-o placă plană infinită și de o dislocație-șurub într-o bară cilindrică infinită.

În § 17 este dată o generalizare a schemei folosite de E. Kröner, A. Seeger și H. Pfleiderer [1], [2], [34] pentru rezolvarea prin aproximații succesive a problemelor la limită în cazul neliniar.

Lucrarea se încheie prin discutarea rezultatelor obținute, a posibilităților de extindere a teoriei, precum și a corelației dintre rezultatele obținute și teoriile microstructurale (§ 18).

În anexă au fost incluse unele elemente de teoria cîmpurilor tensoriale duble (definiția translatorilor, a derivatei covariante totale etc.), obținute prin extinderea relațiilor corespunzătoare homeomorfismului dintre cele două spații pe care sînt definiți tensorii dubli [35], în cazul cînd într-unul din spații se folosesc componente neolonome.

§ 1. CORPURI CU TENSIUNI INIȚIALE. STAREA NATURALĂ ȘI STAREA DE REFERINȚĂ

Fie M un continuu material scufundat în spațiul euclidian tridimensional E. Vom nota simbolic cu (F) sistemul de sarcini externe care acționează asupra interiorului și frontierei lui M, ca efect al interacțiunii lui cu restul universului material. Numim *stare de referință* a lui M, starea corespunzătoare anulării sistemului (F) la un moment anumit. Notăm cu (K), (L), ..., sistemele de coordonate la care este raportat M în starea de referință și cu X (X^K) punctele lui M în această stare.

În starea de referință, deci în absența lui (F), între elementele materiale ale lui M mai pot exista încă interacțiuni macroscopice denumite tensiuni inițiale, a căror prezență este legată de existența în material a unor defecte ale rețelei atomice (dislocații, vacanțe, atomi străini) a căror generare a avut un caracter neelastic.

Dispariția tensiunilor inițiale poate fi realizată prin secționarea continuului M în elemente foarte mici și relaxarea lor individuală. Această stare a lui M în care elementele sale formează un agregat amorf, liber de tensiuni inițiale, poate fi denumită stare naturală [4]. Tăierea materialului nu trebuie să fie de ordinul perioadei rețelei atomice. Fiecare element trebuie să conțină încă un număr suficient de mare de atomi astfel încît să poată fi considerat un continuu material. Această ipoteză ne permite să asimilăm elementele lui M înainte de secționare, cu elementele de

volum infinitezimale dV ale unei teorii macroscopice. Pe de altă parte, întrucît secționarea este realizată macroscopic, relaxarea fiecărui element va fi de asemenea macroscopică; tensiunile microscopice care apar la scara perioadei atomice se pot menține chiar în starea naturală [36]. Întrucît fiecare element relaxat cuprinde încă un număr mare de atomi, rețeaua sa atomică nu va fi în general perfectă, ci numai aproape perfectă.

În § 2 ne vom ocupa cu descrierea geometriei stării naturale. Aceasta se poate realiza în două moduri. Fie se raportează elementele secționate fiecare la cîte un sistem propriu de referință neolonom în raport cu (K), fie se consideră elementele secționate scufundate într-un spațiu metric cu conexiune afină. Adoptînd al doilea punct de vedere, ceea ce vom face de altfel în această lucrare, putem considera elementele relaxate ca spații materiale euclidiene tangente la spațiul neeuclidian în care sînt scufundate. Tensiunile inițiale apar atunci datorită constrîngerilor reciproce exercitate între elemente secționate pentru a rămîne în spațiul euclidian al stării de referință.

Putem înțelege mai bine cele spuse pînă acum pe cazul unei plăci plane subțiri. Dacă placa este încălzită neuniform și constrînsă să rămînă plană, în ea se dezvoltă în general tensiuni inițiale. Placa poate fi însă relaxată, dacă este lăsată să flambeze astfel încît elementele ei să-și reia dimensiunile naturale corespunzătoare distribuției neuniforme de temperatură. În acest caz suprafața mediană a plăcii devine o suprafață curbă bidimensională, a cărei metrică este determinată de deformațiile locale induse de distribuția neuniformă de temperatură. Alternativ, putem considera că tăiem placa plană cu tensiuni inițiale în elemente mici, pe care le relaxăm individual; în acest caz, elementele relaxate reprezintă spații materiale euclidiene tangente la suprafața mediană curbă obținută în primul caz [20], [37].

§ 2. GEOMETRIA STĂRII NATURALE

Considerăm elementele relaxate ale stării naturale ca spații materiale euclidiene și le raportăm pe fiecare dintre ele la cîte un sistem cartezian ortogonal de coordonate $(\varkappa)$. Notînd cu dX^K și $(d\xi)^\varkappa$ componentele contravariante ale vectorilor care unesc aceleași puncte ale unui element material în starea de referință și în cea naturală, vom presupune că ele sînt legate prin relația liniară

$$(d\xi)^\varkappa = A^\varkappa_K \, dX^K. \tag{2.1}$$

După E. Kröner [2], vom denumi matricele de transformare $A^\varkappa_K$ *distorsiuni*, și vom presupune că există matricele inverse $A^K_\varkappa$ astfel încît

$$dX^K = A^K_\varkappa \, (d\xi)^\varkappa, \tag{2.2}$$

$$A^K_\varkappa \, A^\varkappa_L = \delta^K_L, \quad A^\varkappa_K \, A^K_\lambda = \delta^\varkappa_\lambda, \tag{2.3}$$

unde δ^K_L și $\delta^\varkappa_\lambda$ sînt simbolurile lui Kronecker în sistemele (K) și $(\varkappa)$. Vom presupune de asemenea că $A^\varkappa_K$ sînt continuu diferențiabile de trei ori în interiorul fiecărui element, ca funcții de X^K.

Ecuațiile (2.1) reprezintă în general forme Pfaff neintegrabile, deci nu există în general funcțiile $\xi^{\varkappa}(X^K)$. Așadar poziția elementelor în starea naturală nu poate fi definită unic ca funcție de coordonatele stării de referință. Ecuațiile (2.1) și (2.2) stabilesc numai local (în interiorul fiecărui element) un homeomorfism între starea naturală și cea de referință.

Distanțele dintre punctele fiecărui element, precum și paralelismul direcțiilor în interiorul elementelor vor fi definite în starea naturală. Astfel, în sistemul cartezian ortogonal al unui anumit element în starea naturală, pătratul distanței dintre două puncte vecine ale elementului este dat de relația

$$\mathrm{d}\,\sigma^2 = \delta_{\varkappa\lambda}\,(\mathrm{d}\,\xi)^{\varkappa}(\mathrm{d}\,\xi)^{\lambda}\,. \tag{2.4}$$

Ținînd seama de (2.1), obținem

$$\mathrm{d}\,\sigma^2 = C_{KL}\,\mathrm{d}\,X^K\,\mathrm{d}\,X^L\,, \tag{2.5}$$

unde

$$C_{KL} \equiv \delta_{\varkappa\lambda}\,A^{\varkappa}_K\,A^{\lambda}_L\,. \tag{2.6}$$

Pentru definirea paralelismului în coordonatele stării de referință vom considera două puncte vecine ale lui M, $O\,(X^M)$ și $O'\,(X^M + \mathrm{d}\,X^M)$, în interiorul aceluiași element și vom nota cu o și o' punctele care le corespund în elementul relaxat și cu $(\mathrm{d}\,\xi)^{\mu}$ componentele vectorului care unește aceste puncte. Doi vectori cu originile în o și o' sînt paraleli și de aceeași lungime în starea naturală, dacă au aceleași componente în sistemul cartezian ortogonal al elementului, deci, dacă

$$V^{\varkappa}(o) = V^{\varkappa}(o')\,. \tag{2.7}$$

În coordonatele stării finale această relație devine

$$V^{\varkappa}(X^M) = V^{\varkappa}(X^M + \mathrm{d}\,X^M)\,,$$

sau încă

$$A^{\varkappa}_K\,V^K = (A^{\varkappa}_K + \partial_M\,A^{\varkappa}_K\,\mathrm{d}\,X^M)(V^K + \mathrm{d}\,V^K)\,, \tag{2.8}$$

unde $\partial_M \equiv \partial/\partial X^M$. Neglijînd termenii de ordinul doi și ținînd seama de (2.3), rezultă [5])

$$\mathrm{d}\,V^K = -A^K_{\varkappa}\,\partial_M\,A^{\varkappa}_L\,V^L\,\mathrm{d}\,X^M\,. \tag{2.9}$$

Comparînd acum relația (2.9) cu legea transportului paralel într-un spațiu cu conexiune afină

$$\mathrm{d}\,V^K = -\Gamma^K_{ML}\,V^L\,\mathrm{d}\,X^M\,, \tag{2.10}$$

obținem coeficienții conexiunii

$$\Gamma^K_{ML} = A^K_{\varkappa}\,\partial_M\,A^{\varkappa}_L = -A^{\varkappa}_L\,\partial_M\,A^K_{\varkappa}\,. \tag{2.11}$$

Se verifică ușor că această conexiune este metrică în raport cu tensorul C_{KL}.

[5]) Mai clar, (2.9) este condiția care trebuie satisfăcută de vectorii materiali V^K și $V^K + \mathrm{d}V^K$, cu originile în punctele $O\,(X^M)$ și $O'\,(X^M + \mathrm{d}\,X^M)$, astfel ca să devină paraleli și să aibă lungimi egale după relaxare (vezi și § 6).

Într-adevăr, dacă notăm cu $|M$ derivata covariantă în raport cu X^M, corespunzătoare conexiunii Γ^K_{ML}, avem

$$C_{KL|M} = \partial_M C_{KL} - \Gamma^S_{MK} C_{SL} - \Gamma^S_{ML} C_{KS}, \tag{2.12}$$

de unde, ţinînd seama de (2.6) şi (2.3), rezultă

$$C_{KL|M} = 0. \tag{2.13}$$

Recapitulînd cele de mai sus, constatăm că relaţiile (2.4) şi (2.7) definesc distanţa între punctele vecine şi transportul paralel în interiorul elementului relaxat. Transcriind aceste relaţii în coordonatele stării de referinţă obţinem ecuaţiile (2.5) şi (2.10) care definesc starea naturală ca un spaţiu metric cu conexiune afină. Tensorul metric şi coeficienţii conexiunii acestui spaţiu sînt definiţi de relaţiile (2.6), respectiv (2.11), iar X^M reprezintă „coordonate adevărate" ale acestui spaţiu [38]. Formele Pfaff (2.1) definesc atunci o transformare neolonomă de coordonate.

Tensorul torsiunii corespunzător conexiunii (2.11) este

$$S^{\cdot\cdot K}_{ML} \equiv \Gamma^K_{[ML]} = A^K_\varkappa \partial_{[M} A^\varkappa_{L]}. \tag{2.14}$$

El se anulează numai dacă formele Pfaff (2.1) sînt integrabile, deci dacă există funcţiile $\xi^\varkappa(X^K)$ astfel încît

$$A^\varkappa_K = \partial_K \xi^\varkappa. \tag{2.15}$$

Tensorul de torsiune reprezintă deci o măsură a abaterii distorsiunii de la gradientul unei deformaţii euclidiene. Dacă dislocaţiile sînt singurele surse de tensiuni şi hipertensiuni iniţiale, acest tensor este identic cu tensorul densităţii dislocaţiilor, definit cu ajutorul conturului Frank-Burgers (vezi, de exemplu, [2]).

Ţinînd seama de (2.3) şi (2.11) deducem că tensorul de curbură al conexiunii Γ^K_{ML} se anulează, adică

$$R^{\cdot\cdot\cdot K}_{NML} \equiv 2(\partial_N \Gamma^K_{ML} + \Gamma^K_{NR} \Gamma^R_{ML})_{[NM]} = 0. \tag{2.16}$$

Prin urmare, conexiunea (2.11) defineşte un spaţiu cu paralelism la distanţă. În § 18 se va arăta că admiterea unui caz mai general în care $R^{\cdot\cdot\cdot K}_{NML}$ este nenul, dar este a priori cunoscut, nu complică esenţial problema determinării tensiunilor şi hipertensiunilor iniţiale.

Este demn de remarcat faptul că în starea naturală elementele se pot deplasa şi roti liber [36], deci poziţiile şi orientările lor nu pot fi unic determinate. Neunicitatea poziţiei implică neintegrabilitatea formelor Pfaff (2.1). Neunicitatea orientării ne arată că distorsiunile $A^\varkappa_K$ nu pot fi determinate decît în afara unei transformări ortogonale $O^\varkappa_{\varkappa'}$, constantă pentru fiecare element,

$$A^\varkappa_K = O^\varkappa_{\varkappa'} A^{\varkappa'}_K, \tag{2.17}$$

unde

$$O^\varkappa_{\varkappa'} O^\lambda_{\lambda'} \delta_{\varkappa\lambda} = \delta_{\varkappa'\lambda'}. \tag{2.18}$$

Se poate arăta însă că relaţiile (2.6) şi (2.11) definesc invariant metrica şi

conexiunea față de transformările de forma (2.16). Într-adevăr, din (2.17) și (2.18) rezultă

$$\delta_{\varkappa\lambda} A^{\varkappa}_{K} A^{\lambda}_{L} = \delta_{\varkappa\lambda} O^{\varkappa}_{\varkappa'} A^{\varkappa'}_{K} O^{\lambda}_{\lambda'} A^{\lambda'}_{L} = \delta_{\varkappa'\lambda'} A^{\varkappa'}_{K} A^{\lambda'}_{L}, \tag{2.19}$$

$$A^{K}_{\varkappa} \partial_M A^{\varkappa}_{L} = A^{K}_{\varkappa} \partial_M (O^{\varkappa}_{\varkappa'} A^{\varkappa'}_{L}) = A^{K}_{\varkappa} O^{\varkappa}_{\varkappa'} \partial_M A^{\varkappa'}_{L} = A^{K}_{\varkappa'} \partial_M A^{\varkappa'}_{L}. \tag{2.20}$$

În ultima relație am ținut seama că $O^{\varkappa}_{\varkappa'}$ este constant pentru un același element și că

$$O^{\varkappa}_{\varkappa'} A^{K}_{\varkappa} = O^{\varkappa}_{\lambda'} A^{\lambda'}_{L} A^{L}_{\varkappa'} A^{K}_{\varkappa} = A^{\varkappa}_{L} A^{L}_{\varkappa'} A^{K}_{\varkappa} = A^{K}_{\varkappa'}. \tag{2.21}$$

După cum se știe (vezi de exemplu [39], p. 132), o conexiune metrică afină poate fi exprimată cu ajutorul derivatelor tensorului metric și al tensorului torsiunii. În cazul nostru, avem [6])

$$\Gamma^{K}_{ML} = \frac{1}{2} C^{KS} (\partial_M C_{SL} + \partial_L C_{MS} - \partial_S C_{ML}) + S_{ML}^{\cdot\cdot K} + S^{K}_{\cdot ML} - S^{K}_{L\cdot M}, \tag{2.22}$$

sau încă

$$\Gamma_{MLK} = \frac{1}{2} \partial_{\{M} C_{KL\}} + S_{\{MLK\}}, \tag{2.23}$$

unde

$$\Gamma_{MLK} \equiv \Gamma^{S}_{ML} C_{KS}, \quad S_{MLK} \equiv S_{ML}^{\cdot\cdot R} C_{KR} \tag{2.24}$$

și am folosit notația lui J.A. Schouten ([39], p. 132) pentru obiectele geometrice cu trei indici

$$\Psi_{\{MLK\}} \equiv \Psi_{MLK} - \Psi_{LKM} + \Psi_{KML}. \tag{2.25}$$

§ 3. GEOMETRIA STĂRII DE REFERINȚĂ ȘI A STĂRII DEFORMATE

Revenind acum la geometria euclidiană a stării de referință, vom nota cu G_{KL} componentele tensorului metric într-un sistem arbitrar de coordonate X^K. Prin urmare, pătratul distanței dintre punctele X^K și $X^K + \mathrm{d}X^K$ este

$$\mathrm{d}S^2 = G_{KL} \mathrm{d}X^K \mathrm{d}X^L. \tag{3.1}$$

Vectorii V^K și $V^K + \mathrm{d}V^K$, cu originile în punctele X^M și $X^M + \mathrm{d}X^M$, sînt paraleli dacă

$$\mathrm{d}V^K = - \left\{ {K \atop ML} \right\} V^L \mathrm{d}X^M, \tag{3.2}$$

unde $\left\{ {K \atop ML} \right\}$ sînt simbolurile lui Christoffel de speța a doua, avînd expresia

$$\left\{ {K \atop ML} \right\} \equiv \frac{1}{2} G^{KS} (\partial_M G_{SL} + \partial_L G_{MS} - \partial_S G_{ML}). \tag{3.3}$$

---

[6]) C^{KS} din (2.22) se calculează din relațiile $C^{KS} C_{SL} = \delta^{K}_{L}$, ca pentru orice tensor metric. Deci $C^{KL} = \delta^{\varkappa\lambda} A^{K}_{\varkappa} A^{L}_{\lambda}$, $C^{KL} \neq G^{KR} G^{LS} C_{RS}$.

Dacă continuului aflat în starea de referință i se aplică un sistem de sarcini externe (F), el va suferi o deformație, rămînînd în spațiul euclidian tridimensional. Vom nota sistemele de coordonate ale stării deformate cu (k), (l),... și cu x^k coordonatele lui X în starea deformată. Distanța și paralelismul se definesc prin formule analoge lui (3.1) și (3.2) și anume

$$ds^2 = g_{kl}\, dx^k\, dx^l, \tag{3.4}$$

$$dV^k = -\left\{{k \atop ml}\right\} V^l\, dx^m, \tag{3.5}$$

unde g_{kl} este tensorul metric al stării deformate, iar

$$\left\{{k \atop ml}\right\} \equiv \frac{1}{2} g^{ks} (\partial_m g_{sl} + \partial_l g_{ms} - \partial_s g_{ml}). \tag{3.6}$$

Presupunem că prin aplicarea sistemului (F) tensiunile și hipertensiunile inițiale rămîn neschimbate și considerăm numai cazul static. Atunci, deformația continuului M din starea de referință în cea deformată este dată de ecuațiile

$$x^k = x^k(X^K). \tag{3.7}$$

Vom presupune de asemenea că funcțiile $x^k(X^K)$ sînt de clasă C^4 și că admit inversele

$$X^K = X^K(x^k). \tag{3.8}$$

Pentru uniformitate, folosim notațiile

$$A^K_k \equiv \partial_k X^K, \quad A^k_K \equiv \partial_K x^k, \tag{3.9}$$

unde $\partial_k \equiv \partial/\partial x^k$ și

$$A^K_k A^k_L = \delta^K_L, \quad A^k_K A^K_l = \delta^k_l. \tag{3.10}$$

Folosind relațiile (3.7)—(3.10) putem descrie geometria stării naturale în coordonatele (adevărate) ale stării deformate. Se poate însă ușor constata că putem folosi un principiu de dualitate care generalizează pe cel dat în [10], p. 242. Anume, dacă într-o relație relativă la geometria stării de referință se înlocuiesc literele latine mici prin litere latine mari se obține o nouă relație adevărată pentru geometria stării deformate, respectiv pentru descrierea stării naturale în coordonatele stării deformate. Excepție de la această regulă fac simbolurile A, Γ, S și R, care sînt duale cu ele înseși. Prin dualitate se obțin imediat relațiile

$$d\sigma^2 = c_{kl}\, dx^k\, dx^l, \quad c_{kl} \equiv \delta_{\varkappa\lambda} A^\varkappa_k A^\lambda_l, \tag{3.11}$$

$$dV^k = -\Gamma^k_{ml} V^l\, dx^m, \tag{3.12}$$

$$\Gamma^k_{ml} = A^k_\varkappa \partial_m A^\varkappa_l = -A^\varkappa_l \partial_m A^k_\varkappa, \tag{3.13}$$

$$\Gamma_{mlk} = \frac{1}{2} \partial_{\{m} c_{kl\}} + S_{\{mlk\}}, \tag{3.14}$$

$$R^{\cdot\cdot\cdot k}_{nml} \equiv 2(\partial_n \Gamma^k_{ml} + \Gamma^k_{nr} \Gamma^r_{ml})_{[nm]} = 0, \tag{3.15}$$

unde distorsiunile $A_k^{\varkappa}$ și inversele lor sînt definite prin relațiile

$$A_k^{\varkappa} \equiv A_K^{\varkappa} A_k^K, \quad A_{\varkappa}^k \equiv A_{\varkappa}^K A_K^k. \tag{3.16}$$

În cele ce urmează vom folosi numai geometria stării deformate și vom deduce prin dualitate ecuațiile corespunzătoare geometriei stării de referință.

§ 4. ENERGIA DE DEFORMAȚIE

Vom presupune, ca în cazul teoriei clasice a elasticității, că energia acumulată într-un volum v al corpului, în starea deformată, este

$$\int_v j W \, \mathrm{d}v, \tag{4.1}$$

unde W este densitatea energiei pe unitatea de volum a corpului în starea naturală, iar $j = \rho/\rho_0$ este raportul densităților masei din starea deformată și cea naturală care, ținînd seama de condiția de conservare a masei, este egal cu raportul invers al elementelor de volum și deci este dat de relația (A.22)

$$j = \frac{1}{\sqrt{g}} \det |A_k^{\varkappa}|. \tag{4.2}$$

Generalizînd teoria dezvoltată de R.A. Toupin [13], pentru materialele de grad 2 fără tensiuni și hipertensiuni inițiale, vom presupune că densitatea energiei depinde de distorsiunile A_{λ}^k și de derivatele lor covariante totale $A_{\lambda;\mu}^k = A_{\lambda,m}^k A_{\mu}^m$, adică

$$W = W(A_{\lambda}^k, A_{\lambda;\mu}^k). \tag{4.3}$$

Aplicînd relația (A.4) obținem

$$A_{\lambda;\mu}^k = (\partial_m A_{\lambda}^k + \left\{ {k \atop ml} \right\} A_{\lambda}^l) A_{\mu}^m, \tag{4.4}$$

sau încă, ținînd seama de $(3.13)_2$,

$$A_{\lambda;\mu}^k = (\left\{ {k \atop ml} \right\} - \Gamma_{ml}^k) A_{\lambda}^l A_{\mu}^m. \tag{4.5}$$

Forma postulată pentru densitatea energiei prin relația (4.3) include ipoteza că ecuațiile constitutive sînt aceleași pentru toate elementele de volum. În terminologia folosită de C. Truesdell [40], [41], materialele de acest fel se numesc uniforme. Pe de altă parte, așa cum am văzut în §§ 2 și 3, nu există o configurație unică a elementelor de volum în starea naturală, pentru care (4.3) să fie valabilă. În aceeași terminologie, materialele de acest fel se numesc neomogene. Așadar, putem spune că teoria bazată pe expresia (4.3) a energiei de deformație este o teorie a materialelor uniforme neomogene de grad 2.

§ 5. UN PRINCIPIU AL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL PENTRU ECUAȚIILE DE ECHILIBRU

Pentru a obține ecuațiile de echilibru și condițiile la limită pentru o parte a continuului material, care ocupă în starea deformată un volum v, mărginit de o suprafață netedă s, vom adopta principiul variațional postulat de R.A. Toupin [13], introducînd însă variațiile distorsiunilor și ale derivatelor lor covariante totale. Pentru aceasta, vom considera o familie de stări deformate $x^k = \hat{x}^k(X^K, \lambda)$, depinzînd de un parametru λ, astfel încît $\hat{x}^k(X^K, 0)$ să reprezinte configurația de echilibru a stării deformate dată de (3.7). Atunci, deplasările virtuale vor fi definite ca de obicei ([42], p. 128), prin

$$\delta x^k \equiv \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0,\ X=\text{const.}} d\lambda \cdot \tag{5.1}$$

Din definiția variațiilor [42], [10] rezultă că simbolul δ poate fi comutat cu derivata parțială $\partial/\partial X^K$ și că $\delta(\quad)/d\lambda$ este similară cu derivata materială, timpul t fiind însă înlocuit cu λ. Pe de altă parte, întrucît deplasările virtuale lasă neschimbate configurațiile stării naturale și ale stării de referință, avem evident

$$\delta(A_K^{\varkappa}) = \delta(A_{\varkappa}^K) = 0 . \tag{5.2}$$

Principiul lucrului mecanic virtual afirmă că pentru orice variații $\delta x^k(X^K)$, pentru care $\delta(\rho dv) = 0$, are loc egalitatea

$$\delta \int_v j\, W\, dv = \int_v f^k\, \delta x_k\, dv + \int_s (t^k\, \delta x_k + h^k D\delta x_k)\, da , \tag{5.3}$$

unde ρ este densitatea masei pe unitatea de volum a stării deformate, f^k este forța masică pe unitatea de volum deformat, t^k și h^k sînt forțele și hiperforțele pe unitatea de arie deformată, iar $D\delta x_k$ reprezintă derivata normală a variației δx_k, adică [7])

$$D\,\delta x_k \equiv (\delta x_k)_{,l}\, n^l . \tag{5.4}$$

Din (4.3) rezultă

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial A_\lambda^k}\,\delta A_\lambda^k + \frac{\partial W}{\partial A_{\lambda;\mu}^k}\,\delta A_{\lambda;\mu}^k \cdot \tag{5.5}$$

Pentru a obține acum expresiile variațiilor δA_λ^k și $\delta A_{\lambda;\mu}^k$, vom folosi relațiile fundamentale ([42], p. 403)

$$\delta(\partial_L x^k) = (\delta x^k)_{,l}\,\partial_L x^l ,$$
$$\delta(f^{\cdots}{}_{,k}) = (\delta f^{\cdots})_{,k} - f^{\cdots}{}_{,l}\,(\delta x^l)_{,k} .$$

Atunci, ținînd seama de (3.9), (3.16), (5.2) și (A.2), avem

$$\delta A_\lambda^k = \delta(A_\lambda^L\,\partial_L x^k) = A_\lambda^L\,(\delta x^k)_{,l}\,\partial_L x^l = A_\lambda^l\,(\delta x^k)_{,l} , \tag{5.6}$$

[7]) Notăm cu $,k$ derivata covariantă în raport cu x^k, corespunzătoare conexiunii $\{{k \atop ml}\}$, și cu n_l versorul normalei exterioare la s.

$$\delta A^k_{\lambda;\,\mu} = \delta\,(A^k_{\lambda,\,m}\,A^m_\mu) = A^m_\mu\,\delta A^k_{\lambda,\,m} + A^k_{\lambda,\,m}\,\delta A^m_\mu =$$

$$= A^m_\mu\,[(\delta A^k_\lambda)_{,\,m} - A^k_{\lambda,\,l}\,(\delta x^l)_{,\,m}] + A^k_{\lambda,\,m}\,\delta A^m_\mu = A^m_\mu\,(\delta A^k_\lambda)_{,\,m}. \tag{5.7}$$

Introducînd acum (5.6) și (5.7) în (5.5), obținem

$$j\delta W = \left[j\frac{\partial W}{\partial A^k_\lambda} - \left(j\frac{\partial W}{\partial A^k_{\lambda;\,\mu}}A^m_\mu\right)_{,\,m}\right]\delta A^k_\lambda + \left(j\frac{\partial W}{\partial A^k_{\lambda;\,\mu}}A^m_\mu\,\delta A^k_\lambda\right)_{,\,m} =$$

$$= \left[j\frac{\partial W}{\partial A^k_\lambda} - \left(j\frac{\partial W}{\partial A^k_{\lambda;\,\mu}}A^m_\mu\right)_{,\,m}\right]A^l_\lambda\,(\delta x^k)_{,\,l} + \left[j\frac{\partial W}{\partial A^k_{\lambda;\,\mu}}A^m_\mu\,A^l_\lambda\,(\delta x^k)_{,\,l}\right]_{,\,m}. \tag{5.8}$$

Vom defini acum *tensorul tensiunii* t^{kl} și *tensorul hipertensiunii* h^{lkm}, prin relațiile [8])

$$t^{kl} = g^{ks}\left[j\frac{\partial W}{\partial A^s_\lambda} - \left(j\frac{\partial W}{\partial A^s_{\lambda;\,\mu}}A^m_\mu\right)_{,\,m}\right]A^l_\lambda, \tag{5.9}$$

$$h^{lkm} = j\,g^{ks}\frac{\partial W}{\partial A^s_{\lambda;\,\mu}}A^l_\lambda\,A^m_\mu. \tag{5.10}$$

Relația (5.8) devine acum

$$j\delta W = (t^{kl}\,\delta x_k)_{,\,l} - t^{kl}_{\ldots,\,i}\,\delta x_k + [h^{lkm}\,(\delta x_k)_{,\,l}]_{,\,m}. \tag{5.11}$$

Pe de altă parte, avem

$$\delta\,(j\mathrm{d}v) = \delta\left(\frac{\rho}{\rho_0}\,\mathrm{d}v\right) = \frac{1}{\rho_0}\,\delta\,(\rho\,\mathrm{d}v) = 0 \tag{5.12}$$

și din (5.11) obținem, aplicînd teorema lui Green,

$$\delta\int_v jW\,\mathrm{d}v = -\int_v t^{kl}_{\ldots,\,l}\,\delta x_k\,\mathrm{d}v + \int_s [t^{kl}\,\delta x_k\,n_l + h^{lkm}\,(\delta x_k)_{,\,l}\,n_m]\mathrm{d}a. \tag{5.13}$$

Transformînd mai departe această relație ca în [13], obținem în cele din urmă

$$\int_v j\delta W\,\mathrm{d}v = -\int_v t^{kl}_{\ldots,\,l}\,\delta x_k\,\mathrm{d}v + \int_s [t^{kl}\,n_l - D_l\,h^{lkm}\,n_m + h^{lkm}\,(b_{lm} -$$

$$- b^p_p\,n_l\,n_m)]\,\delta x_k\,\mathrm{d}a + \int_s h^{lkm}\,n_l\,n_m\,D\delta x_k\,\mathrm{d}a, \tag{5.14}$$

unde b_{lm} este a doua formă fundamentală a frontierei deformate, iar $D_l\,h^{lkm}$ este gradientul de suprafață al hipertensiunii, definit prin

$$h^{lkm}_{\ldots,\,l} = Dh^{lkm}\,n_l + D_l\,h^{lkm}. \tag{5.15}$$

Introducînd acum (5.14) în (5.3) și ținînd seama de caracterul arbitrar al variațiilor δx_k și $D\delta x_k$ pe s, deducem condițiile necesare și sufi-

[8]) Relația $(jA^m_\mu)_{,\,m} = 0$ nu este adevărată decît dacă tensorul torsiunii este nul, ceea ce explică diferența dintre (5.9) și definiția adoptată de R.A. Toupin [27].

ciente pentru ca variația energiei să fie egală cu lucrul mecanic virtual, pentru orice deplasare virtuală din poziția de echilibru

$$t^{kl}_{\ldots l} + f^k = 0, \quad x \in v, \tag{5.16}$$

$$t^{kl} n_l - D_l h^{lkm} n_m + h^{lkm} (b_{lm} - b^p_p n_l n_m) = t^k, \quad x \in s, \tag{5.17}$$

$$h^{lkm} n_l n_m = h^k, \quad x \in s. \tag{5.18}$$

Acestea sînt ecuațiile de echilibru și condițiile la limită corespunzătoare principiului lucrului mecanic virtual (5.3).

Vom impune acum condiția ca energia fiecărei părți a corpului să fie invariantă față de deplasările de corp rigid ale continuului deformat. În coordonate carteziene ortogonale, o deplasare de felul acesta are forma

$$\delta z_k = (a_k + \in_{krs} \omega_r z_s)\, d\lambda, \tag{5.19}$$

unde a_k și ω_r sînt constante arbitrare [9]). Introducînd această expresie în (5.11) și impunînd condiția ca variația energiei δW să se anuleze pentru orice deplasare δz_k, obținem

$$t^{[kl]} + h^{[lk]m}_{\ldots\ldots m} = 0, \tag{5.20}$$

care fiind o ecuație tensorială este valabilă în toate sistemele de coordonate. Această ecuație completează sistemul de ecuații pe care trebuie să le satisfacă tensiunile și hipertensiunile.

Se poate arăta de asemenea [27], folosind principiul variațional (5.3), că pentru existența soluției este necesar ca forțele de volum și de suprafață să satisfacă condițiile de compatibilitate (exprimate în coordonate carteziene ortogonale z_i)

$$\int_v f_i \, dv + \int_s t_i \, da = 0, \tag{5.21}$$

$$\int_v z_{[i} f_{j]} \, dv + \int_s (z_{[i} t_{j]} + n_{[i} h_{j]}) \, da = 0. \tag{5.22}$$

De aici rezultă că $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{h}$ este un cuplu pe unitatea de arie deformată. Componenta normală $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h}$ a hiperforței superficiale nu intervine în condițiile de compatibilitate (5.21) —(5.22). Ea reprezintă o distribuție de forțe static echivalentă cu zero.

Tensorul antisimetric $h^{[kl]m}$ este echivalent cu tensorul de ordinul doi al cuplurilor de tensiuni μ_{ij}, legătura dintre ei fiind dată de relațiile

$$\mu_{ij} = \varepsilon_{ikl} h^{[kl]}_{\ldots j}, \quad h^{[kl]m} = \frac{1}{2} \varepsilon^{kls} \mu_s^{\ m}. \tag{5.23}$$

Menționăm de asemenea că pentru simplificarea formulării problemelor la limită este indicat să introducem un nou tensor al tensiunii, definit prin relația

$$\sigma^{kl} \equiv t^{kl} + h^{lkm}_{\ldots\ldots m}. \tag{5.24}$$

[9]) Notăm cu $\in_{klm}$ și ε_{klm} componentele tensorului total antisimetric de ordinul trei, în coordonatele carteziene ortogonale z_k, și respectiv în coordonatele oarecare x^k.

Din (5.20) rezultă atunci

$$\sigma^{[kl]} \equiv 0, \qquad \sigma^{kl} \equiv \sigma^{(kl)}, \tag{5.25}$$

deci σ^{kl} este un tensor simetric. Introducînd acum (5.24) în (5.16) și (5.17), aceste ecuații devin respectiv

$$\sigma^{kl}_{\ldots,l} - h^{lkm}_{\ldots,lm} + f^k = 0, \qquad x \in v, \tag{5.26}$$

$$\sigma^{kl} n_l - D h^{lkm} n_l n_m - 2 D_l h^{(l|k|m)} n_m + h^{lkm} (\delta_{lm} - b^p_p n_l n_m) = t^k, \quad x \in s. \tag{5.27}$$

Remarcăm că în ecuațiile statice și în condițiile la limită, h^{lkm} intervine numai prin partea sa simetrică în l, m. Partea antisimetrică în l, m apare numai în ecuațiile (5.10).

Primită la redacție la 12 noiembrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. E. Kröner, A. Seeger, *Nicht-lineare Elastizitätstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Arch. Rational Mech. Anal., **3**, *1*, p. 97–119 (1959).
2. E. Kröner, *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Arch. Rational Mech. Anal., **4**, *1*, p. 273–334 (1959).
3. K. Kondo, *On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding*, Proc. of the 2nd Japan National Congr. Appl. Mech., p. 41–47 (1952).
4. K. Kondo, *Geometry of elastic deformation and incompatibility*, RAAG Memoirs, **1**, C–I, p. 361–373 (1955).
5. K. Kondo, *Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint*, RAAG Memoirs, **1**, D–I, p. 458–469 (1955).
6. B.A. Bilby, R. Bullough, E. Smith, *Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **231**, p. 263–273 (1955).
7. B.A. Bilby, E. Smith, *Continuous distributions of dislocations*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **236**, p. 481–505 (1956).
8. W. Günther, *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums*, Abh. Braunschw. Wiss. Ges., **10**, p. 195–213 (1958).
9. E. et F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, A. Herman et Fils, Paris, 1909.
10. C. Truesdell, R.A. Toupin, *The classical field theories*, Encyclopedia of Physics, **III/1**, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer Verlag, 1960.
11. G. Grioli, *Elasticità asimmetrica*, Ann. Mat. pura ed appl., ser. IV, **50**, p. 389–417 (1960).
12. E.L. Aero, E.V. Kuvșinski, *Osnovnie uravneniia teorii uprughih sred s vraşceatelno vzaimodeistviem ceastiţ*. Fiz. tverd. tela, **2**, *7*, p. 1399–1409 (1960).
13. R.A. Toupin, *Elastic materials with couple-stresses*, Arch. Rational Mech. Anal., **11**, *5*, p. 385–414 (1962).
14. R.D. Mindlin, H.F. Tiersten, *Effects of couple-stresses in linear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **11**, *5*, p. 415–448 (1962).
15. W.T. Koiter, *Couple-stresses in the theory of elasticity*, I and II, Proc. koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, series B, **67**, *1*, p. 17–44 (1964).
16. H. Schaefer, *Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat Kontinuums*, Miszellaneen der Angewandten Mechanik, Akademie-Verlag, p. 277–292, Berlin, 1962.
17. E.V. Kuvșinski, E.L. Aero, *Teoria kontinuuma asimmetriceskoi uprugosti*, Uciot "vnutrennego" vraşceniia. Fiz. tverd. tela, **5**, *9*, p. 2591–2598 (1963).
18. V.A. Palmov, *Osnovnie uravneniia teorii nesimmetricinoi uprugosti*, Prikl. Mat. Meh., **28**, *3*, p. 401–408 (1964).
19. S. Kessel, *Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums*, Abh. Braunschw. Wiss. Ges., **16**, p. 1–22 (1964).

20. E. KRÖNER, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Erg. angew. Math., **5**, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1958.
21. F.A. Mc. CLINTOCK, *Contribution of interface couples to the energy of a dislocation*, Acta metallurgica, **8**, p. 127–128 (1960).
22. E. KRÖNER, *Dislocations and continuum mechanics*, Appl. Mech. Rev., **15**, *8*, p. 599–606 (1962).
23. E. KRÖNER, *On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci. **1**, p. 261–278 (1963).
24. F. HEHL, E. KRÖNER, *Zum Materialgesetz eines elastischen Mediums mit Momentenspannungen*, Z. Naturforschung, **20 a**, *3*, p. 336–350 (1965).
25. C. TEODOSIU, *On the determination of internal stresses and couple-stresses in the continuum theory of dislocations*, Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. techn., **12**, *12*, p. 605–610 (1964).
26. C. TEODOSIU, *The determination of stresses and couple-stresses generated by dislocations in isotropic media*, Rev. roum. sci. techn., méc. appl., **10**, *6*, p. 1461–1480 (1965).
27. R.A. TOUPIN, *Theories of elasticity with couple-stress*, Arch. Rational Mech. Anal., **17**, *2*, p. 85–112 (1964).
28. R. STOJANOVITCH, S. DJURITCH, L. VUJOSHEVITCH, *Stress-strain relations for the elastic Cosserat continuum*, Conference of the Department of Continuous Media, Zakopane, sept. 1964.
29. S. ĐURIĆ, *Dinamika kontinuuma sa unutrašnjom orijentacijom i njegove male oscilacjie*, Thesis presented at the Belgrade University, June, 1964.
30. E. KRÖNER, *Das physikalische Problem der antisymmetrischen Spannungen und der sogenannten Momentspannungen*, Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech., München, 1964, p. 143–150, Springer, 1966.
31. C. TEODOSIU, *Non-linear theory of the materials of grade 2 with initial stresses and hyperstresses, I and II*, Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. techn., **15**, *2* (1967).
32. S. KALINSKI, Z. PŁOCHOCKI, D. ROGULA, *Asymmetric stress tensor and the angular momentum conservation law in the equations of combined mechanical and electromagnetic field in a continuous medium*, Proc. vibr. problems, **3**, *3*, p. 253 – 260 (1962).
33. R.D. MINDLIN, *Micro-structure in linear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **16**, *1*, p. 51–78 (1964).
34. H. PFLEIDERER, A. SEEGER, E. KRÖNER, *Nichtlineare Elastizitätstheorie geradliniger Versetzungen*, Z. Naturforschung, **15 a**, *7*, p. 758–772 (1960).
35. J.L. ERICKSEN, *Tensor fields, Encyclopedia of Physics, Vol. III/1*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1966.
36. S. AMARI, *On some primary structures of non-Riemannian plasticity theory*, RAAG Memoirs, **3**, D–IX, p. 99–108 (1962).
37. B.A. BILBY, *Continuous distributions of dislocations, Progress in Solid Mechanics*, **1**, Cap. VII, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.
38. G. VRĂNCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*, vol. I, Bucureşti, Ed. Academiei Republicii Socialiste România, 1947.
39. J.A. SCHOUTEN, *Ricci-calculus*, 2nd edition, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer Verlag, 1964.
40. C. TRUESDELL, *Die rationale Mechanik der Kontinua*, Z. angew. Math. Mech., **44**, *8–9*, p. 341–347 (1964).
41. C. TRUESDELL, *The modern spirit in applied mathematics*, ICSU review of world science, **6**, *4*, p. 195–205 (1964).
42. A.C. ERINGEN, *Non-linear theory of continuous media*, New York - San Francisco - Toronto - London, McGraw-Hill, 1962.
43. J.D. ESHELBY, *The continuum theory of lattice defects*, Solid State Physics, New York, **3**, p. 79–144 (1956).
44. M.E. GURTIN, *A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal., **13**, *5*, p. 321–329 (1963).
45. J. FRIEDEL, *Dislocations*, Oxford-London-Edinburgh-New York-Paris-Frankfurt, Pergamon Press, 1964.
46. V. VOLTERRA, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, Ann. Ecole Normale Sup., Sér. 3, **24**, p. 401–517 (1907).
47. K. KONDO, Y. HIRANO, S. MINAGAWA, *The compensation of the Riemann-Christoffel curvature tensor by dislocation pairs*, RAAG Memoirs, **3**, D–XI, p. 134–150 (1962).
48. E. KRÖNER, *Dislocation : a new concept in the continuum theory of plasticity*, J. Math. Phys., **42**, *1*, p. 27–37 (1963).

49. A.E. Green, *Micro-materials and multipolar continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci., **3**, *5*, p. 533–537 (1965).
50. A.E. Green, R.S. Rivlin, *Multipolar continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal., **17**, *2*, p. 113–147 (1964).
51. A.C. Eringen, E.S. Suhubi, *Non-linear theory of simple microelastic solids — I.* Int. J. Engng. Sci., **2**, p. 189–203 (1964).
52. E.S. Suhubi, A.C. Eringen, *Non-linear theory of simple microelastic solids — II.* Int. J. Engng. Sci., **2**, p. 389–404 (1964).
53. C. Teodosiu, *Microstructure in the continuum theory of dislocations*, Conference of the Department of Continuous Media, Augustów, 7–16 sept., 1965.
54. C. Teodosiu, *Descrierea macroscopică a distribuțiilor microscopice de dislocații și tensiuni inițiale*, Conferința de Mecanică, București, 28–30 septembrie, 1965.

EXPRESIILE EFORTURILOR UNITARE CARE SE PRODUC ÎN DISCURI ÎN ROTAȚIE SOLICITATE PRIN EFORTURI CARE VARIAZĂ ÎN LUNGUL AXEI LOR [1)]

VIRGIL BOGDAN
Institutul politehnic, „Gh. Gheorghiu-Dej"

539.4

Se cercetează starea de eforturi unitare și de deformație dintr-un disc de formă axial simetrică aflat în mișcare de rotație uniformă în jurul axei sale. Studiul este făcut fără neglijarea eforturilor unitare τ_{rz} care se pot produce în disc. Soluția problemei este dată de o funcție Φ care satisface ecuația lui Poisson și din care deplasările radială (u) și axială (w) se deduc din formulele:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Funcția Φ poate servi drept soluție și pentru rezolvarea tuburilor axial simetrice încărcate cu o sarcină axial simetrică oarecare.

Calculul de rezistență al discurilor cu diametru interior și exterior variind în lungul axei z care se rotesc uniform în jurul axei lor este tratat în lucrările de rezistența materialelor și de teoria elasticității, în ipoteza că eforturile unitare tangențiale τ sînt mici și ca atare neglijabile [1], [2].

Dacă se cercetează un ansamblu de discuri din materiale diferite [3] așezate ca în figura 1, în straturile de adeziv iau naștere eforturi unitare tangențiale, produse de tendințele diferite de deformare ale discurilor, care nu mai pot fi neglijate.

Pentru efectuarea studiului se consideră un element de volum al discului ca în figura 2, cuprins între doi cilindrii avînd axa z, între două

[1)] Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl. (în limba germană) **12**, 5 (1967).

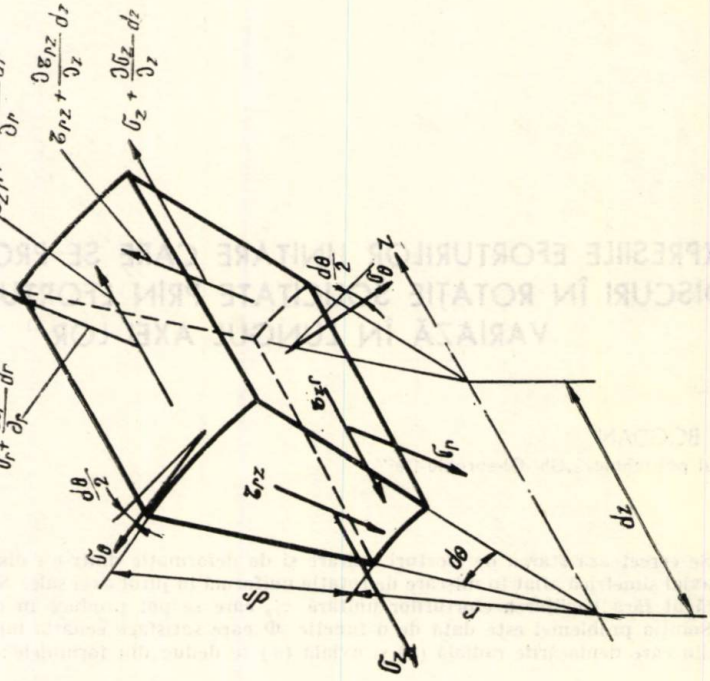


Fig. 2.

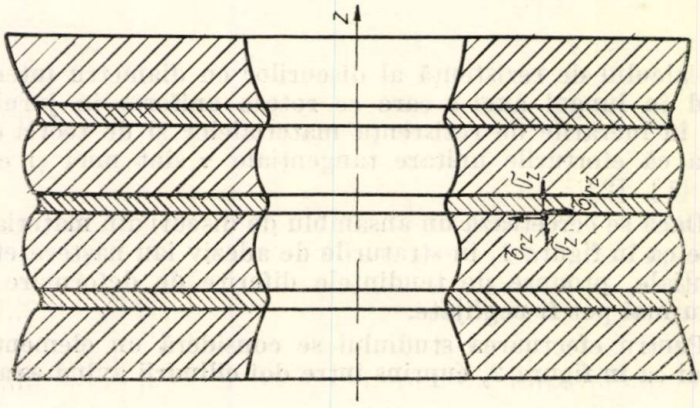


Fig. 1.

plane normale la axa z și între două plane axiale. Pe fețele acestui element acționează eforturile unitare arătate în figura 2. Întrucît starea de solicitare este axial simetrică, eforturile unitare $\tau_{\theta z}$ și $\tau_{r\theta}$ sînt nule, iar eforturile σ_θ au același modul.

Asupra elementului de volum mai acționează forța de inerție elementară.

$$df_i = r\omega^2 dm = \rho\omega^2 r\, dV = \rho\omega^2 r^2\, d\theta\, dr\, dz.$$

Ecuațiile de echilibru ale forțelor care solicită elementul de volum se reduc la

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \rho\,\omega^2 r = 0. \\ &\frac{\tau_{zr}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ținînd seamă de legea lui Hooke generalizată și de expresiile deformațiilor specifice scrise în coordonate cilindrice, se obține:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_r + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_v\right] = \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right], \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_\theta + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_v\right] = \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{u}{r} + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right], \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_v\right] = \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right], \\ \tau_{rz} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{zr} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right], \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

unde u și w reprezintă deplasările (radială și axială),

ε_r, ε_θ, ε_z, γ_{rz} sînt deformațiile specifice, iar ε_v deformația specifică de volum.

Înlocuind expresiile (2) în ecuațiile (1) acestea capătă forma

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{E}{1+\mu}\left[\frac{1-\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2(1-2\mu)}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}\right]+\rho\omega^2 r=0,\\
&\frac{E}{1+\mu}\left[\frac{1}{2(1-2\mu)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{1-\mu}{1-2\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]=0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Din analiza sistemului de ecuații diferențiale (3) se observă că problema poate fi rezolvată în deplasări dacă se presupune că deplasările u și w derivă dintr-un potențial Φ astfel încît:

$$\left.\begin{aligned}
u&=\frac{\partial\Phi}{\partial r},\\
w&=\frac{\partial\Phi}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Într-adevăr, substituind expresiile (4) în ecuațiile (3) se obține

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^3\Phi}{\partial r^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^3\Phi}{\partial r\,\partial z^2}=-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)E}\rho\omega^2 r,\\
&\frac{\partial^3\Phi}{\partial z\,\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial r}+\frac{\partial^3\Phi}{\partial z^3}=0,
\end{aligned}\right\}$$

expresii care pot fi scrise sub forma

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)=-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)E}\rho\omega^2 r,\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Întrucît cantitatea din paranteza membrului stîng al ecuațiilor (5) este laplacianul funcției Φ, exprimat în coordonate cilindrice, rezultă că cele două ecuații de echilibru (1) devin:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2\Phi)=-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)E}\rho\omega^2 r,\\
&\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\Phi)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Integrînd prima ecuație (6) în raport cu r și a doua în raport cu z se obține

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\Phi &= -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)E}\rho\omega^2 r^2 + \psi(z) + C, \\ \nabla^2\Phi &= \varphi(r), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

în care $\psi(z)$ este o funcție arbitrară de z, $\varphi(r)$ o funcție arbitrară de r, iar C o constantă arbitrară.

Punînd condiția ca expresiile (7) să fie egale între ele se obține

$$\varphi(r) = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)E}\rho\omega^2 r^2 + \psi(z) + C,$$

de unde rezultă

$$\varphi(r) = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)E}\rho\omega^2 r^2 + C,$$

$$\psi(z) = 0$$

și ca urmare

$$\nabla^2\Phi = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)E}\rho\omega^2 r^2 + C. \tag{8}$$

Se constată deci că deplasările u și w derivă dintr-un potențial Φ care trebuie să satisfacă ecuația lui Poisson (8).

Funcția Φ astfel stabilită poate servi ca potențial al deplasărilor u și w în cazul tuburilor de formă axial simetrică și discurilor solicitate axial simetric. În cazul tuburilor $\omega = 0$ și ecuația (8) devine

$$\nabla^2\Phi = C \tag{9}$$

Întrucît

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},$$

iar

$$\varepsilon_v = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \nabla^2\Phi. \tag{10}$$

laplacianul funcției Φ reprezintă de fapt deformația specifică de volum a elementului din disc sau tub.

Lunecarea specifică γ_{rz} se poate de asemenea exprima în funcție de potențialul Φ

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z} = 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}. \tag{11}$$

Dacă se înlocuiesc expresiile (10) și (11) în (2), expresiile eforturilor unitare devin :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\mu}{1-2\mu}\nabla^2\Phi\right],\\
\sigma_\theta &= \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\mu}{1-2\mu}\nabla^2\Phi\right],\\
\sigma_z &= \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\mu}{1-2\mu}\nabla^2\Phi\right],\\
\tau_{rz} &= \frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Starea de eforturi unitare a unui disc în rotație sau a unui tub încărcat simetric se poate determina deci căutînd o funcție care să îndeplinească condiția (8) sau (9) și care totodată să satisfacă condițiile la limită (pe fețele discului) :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_z+\sigma_r) - \frac{1}{2}(\sigma_z-\sigma_r)\cos 2\varphi + \tau_{rz}\sin 2\varphi,\\
\tau_{ln} &= \frac{1}{2}(\sigma_z-\sigma_r)\sin 2\varphi + \tau_{rz}\cos 2\varphi,
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

în care semnificațiile notațiilor σ_n, τ_{ln} și φ rezultă din figura 3, unde una dintre fețele elementului aparține suprafeței exterioare a discului.

★

Determinarea expresiei eforturilor unitare care se produc în disc revine la soluționarea ecuației lui Poisson (8). Soluția generală a acestei ecuații se compune din soluția Φ_1, a membrului stîng și soluția particulară Φ_0 dată de membrul drept. Membrul stîng reprezintă ecuația lui Laplace a cărei soluție se va considera că are forma produsului

$$\Phi_1(r,z) = R(r)\cdot Z(z). \tag{14}$$

Înlocuind această soluție în membrul stîng al ecuației (8) se obține :

$$R''Z + \frac{1}{r}R'Z + RZ'' = 0. \tag{15}$$

După împărțirea cu RZ și separarea variabilelor ecuația (15) devine :

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = \pm\alpha^2, \tag{16}$$

unde α este o constantă.

Din expresiile (16) rezultă două sisteme de ecuații diferențiale :

$$\left.\begin{aligned}
R'' + \frac{1}{r}R' - \alpha^2 R &= 0,\\
Z'' + \alpha^2 Z &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

și

$$\left.\begin{aligned} R'' + \frac{1}{r} R' + \alpha^2 R = 0, \\ Z'' - \alpha^2 Z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

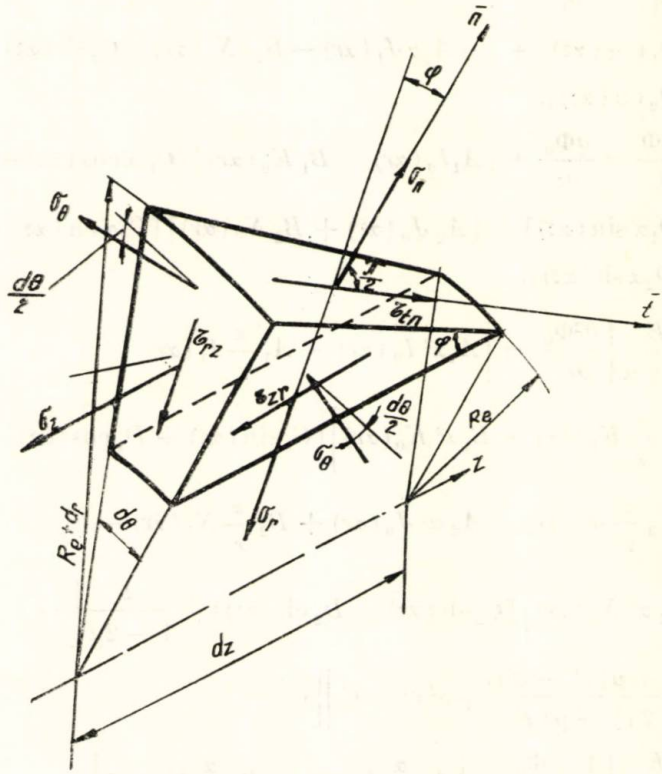


Fig. 3

Sistemul de ecuații (17) are soluția generală

$$\Phi_1 = [A_1 I_0(\alpha r) + B_1 K_0(\alpha r)]\,[C_1 \sin(\alpha z) + D_1 \cos(\alpha z)], \tag{19}$$

unde $I_0(\alpha r)$ este funcția Bessel de argument imaginar, iar $K_0(\alpha r)$ este funcția Neumann de argument imaginar și de indice zero. A_1, B_1, C_1, D_1 sînt constante de integrare.

Sistemul de ecuații (18) are soluția generală

$$\Phi_2 = [A_2 J_0(\alpha r) + B_2 N_0(\alpha r)]\,[C_2 \operatorname{sh}(\alpha z) + D_2 \operatorname{ch}(\alpha z)], \tag{20}$$

în care $J_0(\alpha r)$ este funcția Bessel de argument real și indice zero, $N_0(\alpha r)$ este funcția Neumann de argument real și indice zero, iar A_2, B_2, C_2, D_2 sînt constante de integrare.

Soluția generală a ecuației (8) este reprezentată de suma expresiilor (19) și (20), la care se adaugă soluția particulară Φ_0.

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_0 + [A_1 I_0(\alpha r) + B_1 K_0(\alpha r)]\,[C_1 \sin(\alpha z) + D_1 \cos(\alpha z)] + \\ + [A_2 J_0(\alpha r) + B_2 N_0(\alpha r)]\,[C_2 \operatorname{sh}(\alpha z) + D_2 \operatorname{ch}(\alpha z)]. \end{aligned} \tag{21}$$

Substituind expresia (21) a funcției Φ în formulele (4) și (12) se obține

$$
\left.\begin{aligned}
u &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + [A_1 \alpha I_1(\alpha r) - B_1 \alpha K_1(\alpha r)][C_1 \sin(\alpha z) + \\
&+ D_1 \cos(\alpha z)] + [-A_2 \alpha J_1(\alpha r) - B_2 \alpha N_1(\alpha r)][C_2 \operatorname{sh}(\alpha z) + \\
&+ D_2 \operatorname{ch}(\alpha z)], \\
w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + [A_1 I_0(\alpha r) + B_1 K_0(\alpha r)][C_1 \alpha \cos(\alpha z) - \\
&- D_1 \alpha \sin(\alpha z)] + [A_2 J_0(\alpha r) + B_2 N_0(\alpha r)][C_2 \alpha \operatorname{ch}(\alpha z) + \\
&+ D_2 \alpha \operatorname{sh}(\alpha z)],
\end{aligned}\right\} \tag{22}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} + \left[A_1 \alpha^2 I_0(\alpha r) - A_1 \frac{\alpha}{r} I_1(\alpha r) + \right.\right. \\
&+ \left. B_1 \frac{\alpha}{r} K_1(\alpha r) + B_1 \alpha^2 K_0(\alpha r)\right][C_1 \sin(\alpha z) + D_1 \cos(\alpha z)] + \\
&+ \left[A_2 \frac{\alpha}{r} J_1(\alpha r) - A_2 \alpha^2 J_0(\alpha r) + B_2 \frac{\alpha}{r} N_1(\alpha r) - \right. \\
&- \left.\left. B_2 \alpha^2 N_0(\alpha r)\right][C_2 \operatorname{sh}(\alpha z) + D_2 \operatorname{ch}(\alpha z)] + \frac{\mu}{1-2\mu}\left[- \right.\right. \\
&- \left.\left. \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)E} \rho \omega^2 r^2 + C\right]\right\}, \\
\sigma_0 &= \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \left[A_1 \frac{\alpha}{r} I_1(\alpha r) - B_1 \frac{\alpha}{r} K_1(\alpha r)\right] \times \right. \\
&\times [C_1 \sin(\alpha z) + D_1 \cos(\alpha z)] + \left[- A_2 \frac{\alpha}{r} J_1(\alpha r) - \right. \\
&- \left. B_2 \frac{\alpha}{r} N_1(\alpha r)\right][C_2 \operatorname{sh}(\alpha z) + D_2 \operatorname{ch}(\alpha z)] + \frac{\mu}{1-2\mu}\left[- \right. \\
&- \left.\left. \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)E} \rho \omega^2 r^2 + C\right]\right\}, \\
\sigma_z &= \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + [A_1 I_0(\alpha r) + B_1 K_0(\alpha r)][- C_1 \alpha^2 \sin(\alpha z) - \right. \\
&- D_1 \alpha^2 \cos(\alpha z)] + [A_2 J_0(\alpha r) + B_2 N_0(\alpha r)][C_2 \alpha^2 \operatorname{sh}(\alpha z) + \\
&+ \left. D_2 \alpha^2 \operatorname{ch}(\alpha z)] + \frac{\mu}{1-2\mu}\left[- \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)E} \rho \omega^2 r^2 + C\right]\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{23}
$$

$$\tau_{rz}=\frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r\partial z}+[A_1\alpha I_1(\alpha r)-B_1\alpha K_1(\alpha r)][C_1\alpha\cos(\alpha z)-\right.$$
$$-D_1\alpha\sin(\alpha z)]+[-A_2\alpha J_1(\alpha r)-B_2\alpha N_1(\alpha r)]\times \tag{23}$$
$$\left.\times[C_2\alpha\,\mathrm{ch}(\alpha z)+D_2\alpha\,\mathrm{sh}(\alpha z)]\right\},$$

Comparînd starea de solicitare considerată în lucrare cu starea de solicitare bazată pe ipoteza stării plane de eforturi unitare se poate găsi o soluție particulară Φ_0 de forma

$$\Phi_0=\left(A_0\ln r+\frac{B_0}{2}r^2\right)(C_0z^2+D_0z+E_0)-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{32(1-\mu)E}\rho\omega^2r^4-$$
$$-\frac{B_0C_0}{6}z^4-\frac{B_0D_0}{3}z^3+\frac{G_0}{2}z^2+H_0z-\frac{B_0C_0}{16}r^4- \tag{24}$$
$$-\frac{A_0C_0}{2}r^2\left(\ln r-\frac{1}{2}\right),$$

în care A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, G_0 și H_0 sînt constante arbitrare.

Funcția Φ_0 astfel aleasă satisface ecuațiile de echilibru (3) și ecuația lui Poisson (8). Într-adevăr, din condiția (14) rezultă că

$$\nabla^2\Phi=\nabla^2\Phi_0=G_0+2B_0E_0-A_0C_0-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)E}\rho\omega^2r^2=$$
$$=C-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)E}\rho\omega^2r^2. \tag{25}$$

În consecință, valoarea constantei C din relația (8) este

$$C=G_0+2B_0E_0-A_0C_0 \tag{26}$$

Rezultatele stabilite mai sus sînt valabile și în cazul tuburilor cu pereți groși.

Soluția pentru tuburile cu pereți groși încărcate cu sarcini axial simetrice se deduce din cele anterioare, punînd condiția ca viteza unghiulară (ω) să fie nulă.

Studiul prezentat are un caracter general, el putînd fi aplicat atît la calculul discurilor, cît și al tuburilor de formă axial simetrică avînd o încărcare axial simetrică oarecare. Determinarea constantelor A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, G_0, H_0, A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 și a argumentelor func-

ţiilor Bessel se face cu ajutorul condiţiilor la limită (13), corespunzătoare fiecărui caz particular.

Primită la redacţie la 11 iunie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. S.D. PONOMARIOV ş.a., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, vol. III, Edit. tehnică, Bucureşti, 1964.
2. S. TIMOSHENKO, *Théorie de l'élasticité*, Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège, 1948.
3. A. PETRE, V. BOGDAN, *Discuri neomogene în mişcare de rotaţie*, St. cerc. mec. apl., **20**, 5, Bucureşti (1965).

STUDIUL FOTOELASTIC ŞI ANALITIC AL CONCENTRĂRII TENSIUNILOR LA CAPĂTUL FISURII ÎNTR-O GRINDĂ SUPUSĂ LA ÎNCOVOIERE PURĂ [1])

C. AVRAM şi R. MARINOV
Centrul de cercetări tehnice al
Academiei Republicii Socialiste România, Timişoara

Elementele încovoiate din materiale fragile (beton, roci naturale, fontă etc.) se rup totdeauna prin fisurarea zonei întinse după plastificarea acestei zone, rezistenţa la întindere fiind în toate cazurile mai mică decît cea de compresiune.
Conform teoriei lui K.A. Malţev, după apariţia fisurii, elementul poate suporta în continuare momentul încovoietor datorită apariţiei unei forţe concentrate la capătul fisurii.
În prezentul studiu se verifică teoria lui K.A. Malţev în domeniul elastic, demonstrînd pe cale analitică şi experimentală concentrarea tensiunilor la capătul fisurii şi faptul că forţa concentrată echivalentă creşte proporţional cu adîncimea fisurii.

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Studiul concentrării tensiunilor la capătul unei fisuri din zona întinsă a unei grinzi încovoiate apare ca o problemă legată de studiul capacităţii portante a elementelor încovoiate din materiale fragile.

Cum rezultă din numeroase studii [1], capacitatea portantă relativă a elementelor încovoiate din materiale fragile scade cînd înălţimea secţiunii transversale a elementului creşte. Conform teoriei lui K.A. Malţev [4], elementele încovoiate fisurate pot suporta în continuare momentul încovoietor datorită apariţiei unei forţe concentrate la extremitatea fisurii, care creşte în acelaşi timp cu creşterea adîncimii fisurii şi care menţine echilibrul în secţiunea fisurată.

În prezentul studiu se face o analiză a concentrării tensiunilor în secţiunea fisurată utilizînd metoda analitică asociată cu cea fotoelastică, pentru verificarea teoriei lui K.A. Malţev.

[1]) Publicată şi în Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **12**, *4* (1967), (în limba franceză).

2. DETERMINAREA STĂRII DE TENSIUNE ÎNTR-O LAMELĂ ÎNCOVOIATĂ

Determinarea stării de tensiune plană în cazul unei lamele dreptunghiulare avînd o tăietură (fisură) transversală în zona întinsă și fiind supusă la încovoiere pură, constituie o problemă dificilă.

Prin încercări de fotoelasticitate pe modele se poate determina diferența tensiunilor principale $\sigma_1 - \sigma_2$ în orice punct, precum și traseul izostaticelor.

Determinarea experimentală a sumei tensiunilor principale $\sigma_1 + \sigma_2$ este mai dificilă, fiind necesară măsurarea deformațiilor transversale ε_t ale lamelei în punctele foarte apropiate (la extremitatea fisurii) și utilizarea unor instrumente de înaltă precizie (interferometre, extensometre laterale) :

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\varepsilon_t \cdot \frac{E}{\mu}. \tag{1}$$

Valorile sumei $(\sigma_1+\sigma_2)$ sînt determinate pe cale analitică, problema fiind ușurată de faptul că se caută valorile tensiunilor într-o singură secțiune și anume cea cu fisură.

2.1. *Determinarea lui* $(\sigma_1 + \sigma_2)$. Se știe că suma $(\sigma_1 + \sigma_2)$ este o funcție armonică în sistemul de coordonate x, y, adică

$$\nabla(\sigma_1 + \sigma_2) = 0. \tag{2}$$

Pentru determinarea acestei funcții se face apel la teoria lui Kolosov-Mușhelișvilli [2]. Conform acestei teorii, dacă în planul z (fig. 1), plan simplu conex limitat de conturul Γ, sînt date funcțiile de tensiuni $\varphi(z)$ și $\psi(z)$ olomorfe în domeniul cuprins în Γ, atunci expresiile tensiunilor σ_x și σ_y sînt date de formulele

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\ \mathcal{R}e\ [\varphi'(z)], \tag{3}$$

$$\sigma_x - \sigma_y + 2\ i\tau = 2[\bar{z}\cdot\varphi''(z) + \psi'(z)], \tag{4}$$

unde

$$z = x + \mathrm{i}\cdot y\,;\quad \bar{z} = x - \mathrm{i}\cdot y. \tag{5a,b}$$

Cunoscînd funcția $\varphi_1(\zeta)$ pentru un domeniu Δ al planului ζ (fig. 2), printr-o transformare conformă $z = \omega(\zeta)$ în domeniul D al planului z (fig. 1), se poate găsi expresia

$$\varphi[\omega(\zeta)] = \varphi_1(\zeta). \tag{6}$$

Plecînd de la proprietatea de păstrare a armonicității funcțiilor în transformarea conformă, vom avea

$$\sigma_\zeta + \sigma_\eta = 4\ \mathcal{R}e\ [\varphi_1'(\zeta)], \tag{7}$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\ \mathcal{R}e\left[\frac{\varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]. \tag{8}$$

Funcția $z = \omega(\zeta)$ trebuie să fie olomorfă în domeniul D, de asemenea și funcția $1/\omega'(\zeta)$.

În cazul problemei noastre, trebuie găsită funcția $\omega(\zeta)$ care transformă domeniul cuprins în banda $0 \leqslant \eta \leqslant 2H$ a planului ζ (fig. 2) în domeniul cuprins în banda $0 \leqslant y \leqslant 2H$ cu tăietură (fisură) de adîncime h pe axa Oy în planul z (fig. 1).

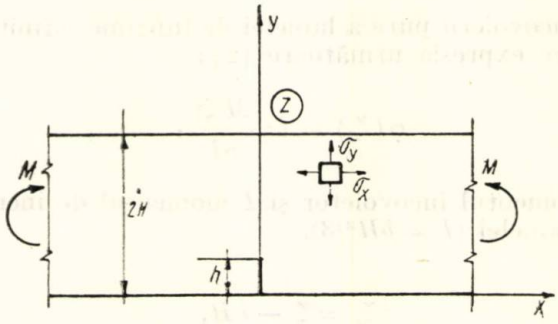


Fig. 1

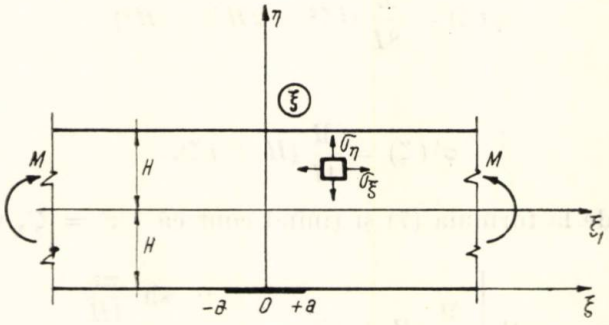


Fig. 2

Această transformare este satisfăcută aproximativ de funcția

$$\operatorname{th}\frac{\pi\zeta}{4H} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\dfrac{\pi h}{4H}}{\operatorname{ch}^2\dfrac{\pi z}{4H}}}, \tag{9}$$

de unde

$$\zeta' = \frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{4H}}{\operatorname{ch}^2\dfrac{\pi z}{4H} - \cos^2\dfrac{\pi h}{4H}}. \tag{10}$$

Trebuie remarcat că în transformarea (9), punctelor situate pe axa y pentru care $0 \leqslant y \leqslant h$ (pe înălțimea fisurii) le corespund punctele situate

pe axa ξ pentru care $-a \leqslant \xi \leqslant +a$. Aceste puncte trebuie eliminate din domeniul D, respectiv Δ:

$$\operatorname{th} \frac{\pi a}{4H} = \sin \frac{\pi h}{4H}. \tag{11}$$

În cazul încovoierii pure a lamelei de lungime infinită, funcţia $\varphi(\zeta)$ din planul ζ are expresia următoare [2]:

$$\varphi(\zeta_1) = i \cdot \frac{M \zeta_1^2}{8I}, \tag{12}$$

unde M este momentul încovoietor şi I momentul de inerţie al secţiunii transversale a lamelei ($I = bH^3/3$).
Cu

$$\zeta_1 = \zeta - iH, \tag{13}$$

vom avea:

$$\varphi(\zeta) = \frac{M}{8I}(i\zeta^2 + 2H\zeta - iH^2) \tag{14}$$

şi

$$\varphi'(\zeta) = \frac{M}{4I}(H + i\zeta). \tag{15}$$

Plecînd de la formula (7) şi ţinînd cont că $1/z' = \zeta'$, va rezulta

$$\sigma_x + \sigma_y = 4R_e\left[\frac{M}{4I}(H + i\zeta) \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{4H}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi z}{4H} - \cos^2 \frac{\pi h}{4H}}}\right]. \tag{16}$$

Vom căuta valorile tensiunilor pentru secţiunea fisurată, pentru care vom avea

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2.$$

În acest caz, expresia (16) devine

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M}{I}(H - \eta) \cdot \frac{\sin \frac{\pi y}{4H}}{\cos^2 \frac{\pi y}{4H} - \cos^2 \frac{\pi h}{4H}}, \tag{17}$$

cu $0 \leqslant \eta \leqslant 2H$ şi $h \leqslant y \leqslant 2H$.

Pentru calculul numeric s-au considerat patru cazuri:

$$h = 0{,}2H;\ h = 0{,}4H;\ h = 0{,}6H;\ h = 1{,}0H.$$

Notînd cu $\sigma_0 = MH/I$ tensiunea din fibra extremă a lamelei fără tăietură (nefisurată), în tabela 1 se dau valorile relative $\varkappa = (\sigma_1 + \sigma_2)/\sigma_0$ în diferite puncte pe înălțimea secțiunii fisurate.

Tabela 1

Valorile relative ale lui $\varkappa = (\sigma_1 + \sigma_2)/\sigma_0$

Nr. crt.	$\frac{\eta}{H}$	$h = 0{,}2\,H$		$h = 0{,}4\,H$		$h = 0{,}6\,H$		$h = 1{,}0\,H$	
		$\frac{y}{H}$	$\varkappa$	$\frac{y}{H}$	$\varkappa$	$\frac{y}{H}$	$\varkappa$	$\frac{y}{H}$	$\varkappa$
1	0	0,200	∞	0,400	∞	0,600	∞	1,000	∞
2	1/8	0,235	+1,142	0,420	+1,590	0,615	+3,780	1,010	+5,730
3	1/4	0,322	+0,732	0,468	+0,865	0,650	+1,580	1,030	+3,550
4	1/2	0,357	+0,260	0,634	+0,305	0,770	+0,460	1,090	+1,440
5	1	1,014	0,000	1,060	0,000	1,135	0,000	1,332	0,000
6	5/4	1,260	−0,260	1,290	−0,282	1,345	−0,440	1,485	−0,850
7	3/2	1,508	−0,512	1,526	−0,586	1,565	−0,810	1,650	−1,450
8	7/4	1,754	−0,870	1,772	−0,883	1,780	−1,030	1,823	−2,070
9	2	2,000	−1,040	2,000	−1,160	2,000	−1,360	2,000	−2,700

2.2. *Determinarea lui* $\sigma_1 - \sigma_2$. Pentru determinarea diferenței $\sigma_1 - \sigma_2$ s-a utilizat metoda experimentală foto-elastică. În acest scop s-a folosit un model de araldit de 6 mm grosime, cu dimensiunile și schema de încărcare din figura 3.

Modelul a fost etalonat înainte de executarea tăieturii prin încovoiere pură astfel ca să se distingă 8 —10 izocromatice. Prin etalonare în lumină polarizată de Na cu $\lambda = 5893$A°, s-a stabilit valoarea lui $\sigma_c = 16{,}3$ kgf/cm², care corespunde valorii lui $C = 55$ brewsteri.

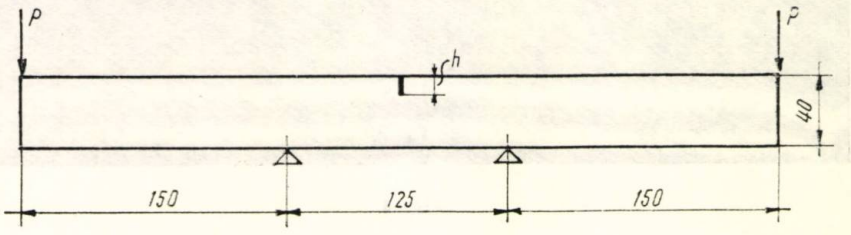


Fig. 3

Valorile absolute ale lui $\sigma_1 - \sigma_2$ sînt date de legea cantitativă a lui Wertheim [3]:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{k\lambda}{eC} = k\sigma_c, \tag{18}$$

unde

k = 0, 1, 2 ..., este ordinul izocromaticelor,
λ — lungimea de undă a luminii polarizate (Na),
e — grosimea lamelei,
C — constanta fotoelastică a materialului.

După etalonare s-au efectuat tăieturile în mijlocul lamelelor în zona întinsă, avînd adîncimile $h = 4$; 8; 12 și 20 mm, corespunzătoare raportului h/H admis în studiul analitic.

Fotografiile izocromaticelor sînt date în figurile 4, 5, 6 și 7.

Pe baza acestor fotografii s-au calculat și trasat diagramele $\sigma_1 - \sigma_2$ în secțiunea fisurată. Valorile relative $\delta = (\sigma_1 - \sigma_2)/\sigma_0$ sînt date în tabela 2.

Tabela 2

Valorile relative ale lui $\delta = (\sigma_1 - \sigma_2)/\sigma_0$

Nr. crt.	$h = 0{,}2\,H$		$h = 0{,}4\,H$		$h = 0{,}6\,H$		$h = 1{,}0\,h$	
	$\frac{y}{H}$	δ	$\frac{y}{H}$	δ	$\frac{y}{H}$	δ	$\frac{y}{H}$	δ
1	0,200	∞	0,400	∞	0,600	∞	1,000	∞
2	0,250	1,455	0,430	1,615	0,615	1,460	1,010	+2,130
3	0,300	0,855	0,470	1,127	0,650	0,615	1,050	+1,570
4	0,600	0,347	0,600	0,388	0,770	0,000	1,100	+0,860
5	0,970	0,000	0,910	0,000	1,000	−0,209	1,332	0,000
6	1,200	−0,255	1,200	−0,259	1,300	−0,473	1,490	−0,780
7	1,400	−0,462	1,500	−1,452	1,500	−0,655	1,650	−1,360
8	1,700	−0,770	1,800	−0,640	1,750	−0,935	1,830	−1,950
9	2,000	−1,040	2,000	−1,160	2,000	−1,360	2,000	−2,700

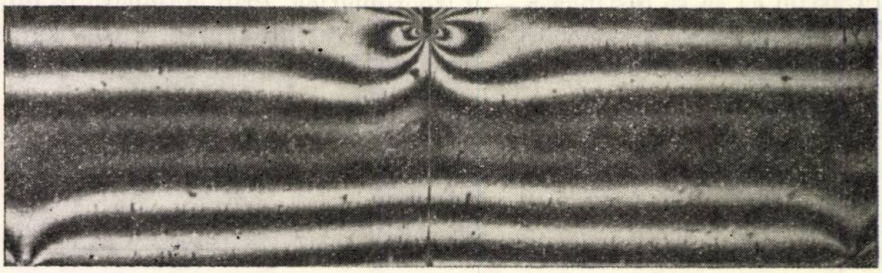


Fig. 4

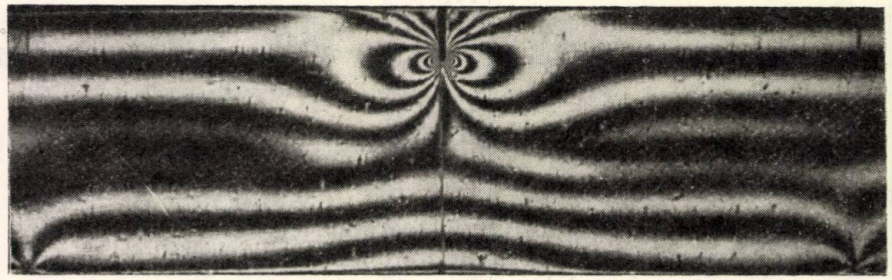


Fig. 5

Plecînd de la valorile lui $(\sigma_x + \sigma_y) = (\sigma_1 + \sigma_2)$ și $(\sigma_x - \sigma_y) = (\sigma_1 - \sigma_2)$ se pot ușor calcula și trasa diagramele tensiunilor normale principale $\sigma_x = \sigma_1$ și $\sigma_y = \sigma_2$;

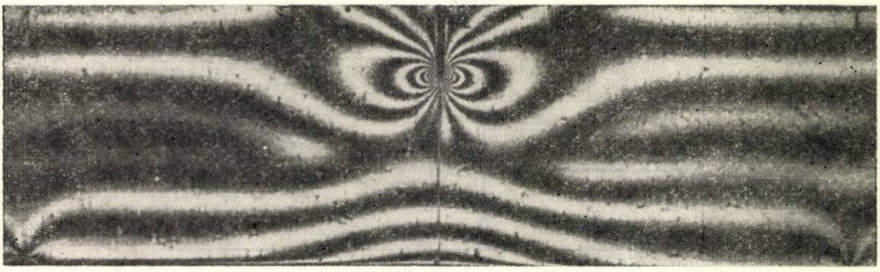


Fig. 6

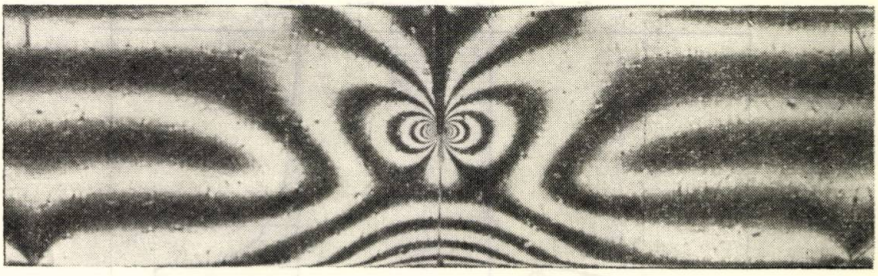


Fig. 7

pentru secțiunea transversală fisurată diagramele lui σ_x și σ_y sînt date în figurile 8, 9, 10 și 11.

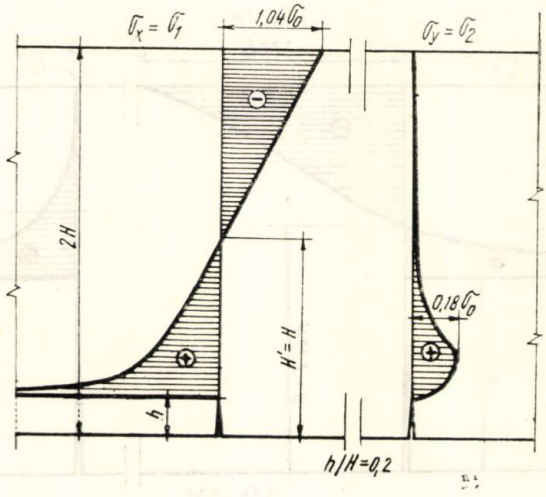


Fig. 8

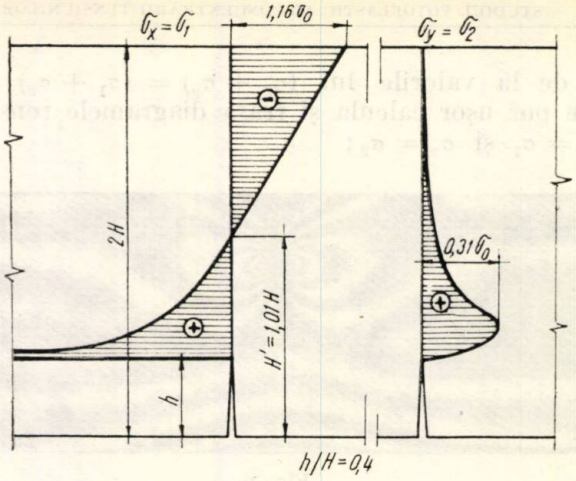


Fig. 9

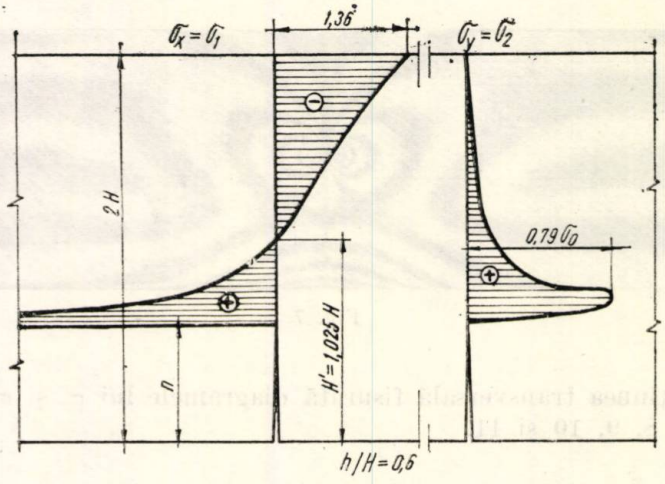


Fig. 10

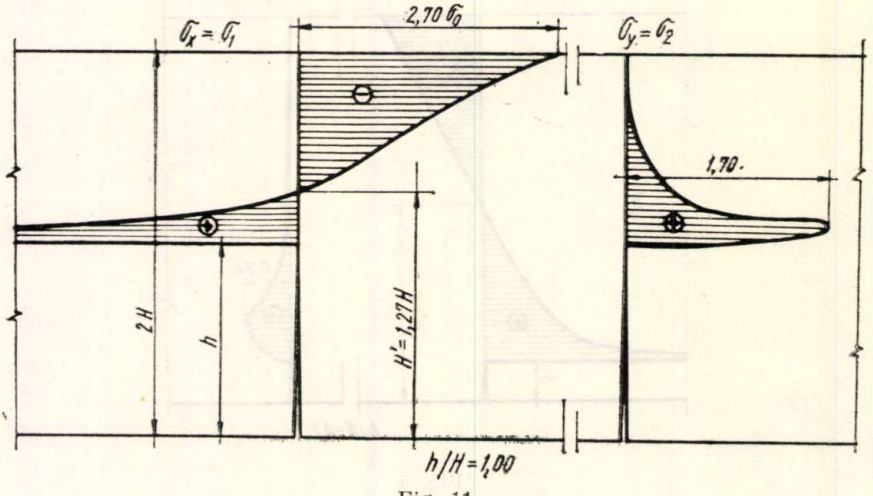


Fig. 11

3. INTERPRETAREA DIAGRAMELOR DE TENSIUNI

Examinînd diagramele din figurile 8, 9, 10 și 11 se remarcă concentrarea din ce în ce mai mare a tensiunilor $\sigma_x = \sigma_1$ la capătul fisurii pe măsură ce înălțimea h a fisurii crește; în toate cazurile tensiunea extremă (inferioară) de întindere $\sigma_x = \sigma_1 \to +\infty$.

Pentru valorile mici ale raportului h/H (fig. 8), tensiunea $\sigma_x = \sigma_1$ are o variație liniară în zona comprimată și aproape pe toată înălțimea zonei întinse. Tensiunea $\sigma_y = \sigma_2$ (de întindere) are valori relativ mici: $\sigma_{y\,max} = 0{,}18\ \sigma_0$.

Pe măsură ce raportul h/H crește, diagrama $\sigma_x = \sigma_1$ se curbează din ce în ce mai mult în zona întinsă și pentru valoarea $h/H = 1$, se curbează de asemenea și în zona comprimată.

Tensiunea extremă (superioară) de compresiune $\sigma_x = \sigma_1$, pentru același moment de încovoiere M, trece de la valoarea $1{,}04\ \sigma_0$ la valoarea $2{,}70\ \sigma_0$; în același timp valoarea maximă a tensiunii $\sigma_y = \sigma_2$ (întindere) trece de la valoarea $0{,}18\ \sigma_0$ la valoarea $1{,}75\ \sigma_0$.

Pe baza acestor observații se poate înlocui diagrama reală $\sigma_x = \sigma_1$ printr-o diagramă liniară în zona comprimată și întinsă (legea lui Navier) și o forță concentrată suplimentară S în zona întinsă, echivalentă cu suprafața cuprinsă între diagrama reală și cea liniară (fig. 12).

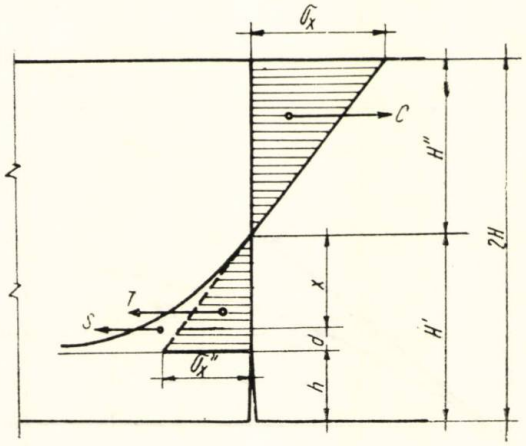


Fig. 12

Valoarea forței concentrate S și a distanței x la axa neutră pot fi determinate scriind condițiile de echilibru în secțiunea fisurată (fig. 12):

$$S = C - T, \tag{19}$$

$$xS + \frac{2}{3}(H' - h)\,T + \frac{2}{3}H''\,C = M, \tag{20}$$

unde

$C = \sigma_x \cdot bH''/2$ este rezultanta tensiunilor de compresiune;
$T = \sigma'_x b (H' - h)/2$ — rezultanta tensiunilor de întindere (diagrama triunghiulară);
b — lățimea secțiunii transversale;
H' — înălțimea totală a zonei întinse (dată în fig. 8, 9, 10 și 11);
$H'' = (2H - H')$ — înălțimea zonei comprimate;
h — adîncimea fisurii;
σ_x — tensiunea în fibra extremă comprimată (dată în fig. 8, 9, 10 și 11);
$\sigma'_x = \sigma_x (d + x)\ H''$ — tensiunea în fibra extremă întinsă la capătul fisurii (diagrama triunghiulară);
M — momentul încovoietor;
$d = H' - (h + x)$ — distanța de la forța S la capătul fisurii.

Introducînd în ecuațiile (19) și (20) valorile lui h, H' și σ_x, date în figurile 8, 9, 10 și 11, se obțin valorile relative ale lui S și d, date în tabela 3.

Tabela 3

Valorile relative ale lui S și d

$h/H =$	0,200	0,400	0,600	1,000
$S/\sigma_0 bH =$	0,214	0,386	0,546	0,850
$d/H =$	0,045	0,068	0,084	0,110

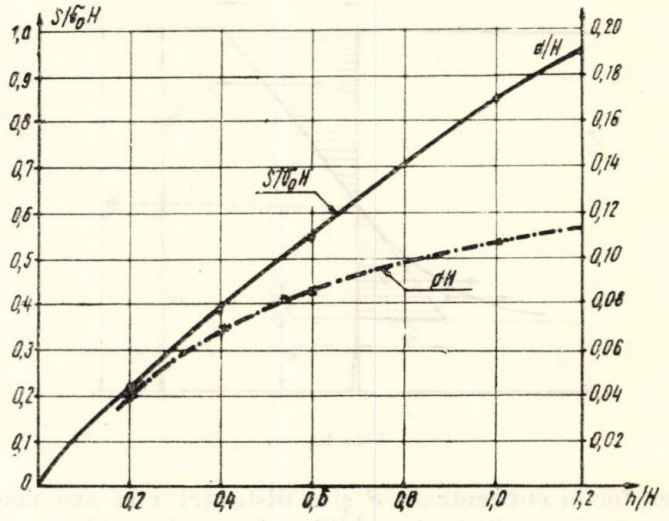


Fig. 13

În figura 13 s-au trasat variațiile relative ale forței concentrate S și ale distanței d la capătul fisurii în funcție de înălțimea relativă h a fisurii.

Se remarcă variația aproape liniară a forței S față de h și localizarea poziției lui S la 0,04 —0,10 H de la capătul fisurii.

4. CONCLUZII

Prezentul studiu confirmă ipoteza lui K.A. Malţev privind creşterea forţei concentrate la extremitatea fisurii proporţional cu creşterea adîncimii fisurii. Această ipoteză este fundamentală pentru stabilirea criteriilor de similitudine la ruperea materialelor fragile după teoria lui K.A. Malţev.

Această ipoteză a fost verificată numai în domeniul elastic; rămîne de elucidat problema concentrării tensiunilor la extremitatea fisurii în domeniul elasto-plastic şi plastic (în măsura în care materialul se comportă plastic, spre exemplu, betonul).

Primită la redacţie la 4 august 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Avram C., Filimon I., Marinov R., *Aspects concernant la plastification partielle des éléments fléchis en béton et microbéton*, Bucarest, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **10**, *5* (1965).
2. Babuska I., Rektorys K., *Matematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme*, Berlin, Akademie Verlag, 1960.
3. Föcht M. M., *Photoelasticity*, Vol. I şi II, New York, Ed. John Willey, 1948—1949.
4. Malţev A. K., *Le sens physique de la résistance conventionnelle de rupture en traction du béton mesurée par flexion*, Paris, Béton armé, *21* (1960).

FLAMBAJUL PRIN ÎNCOVOIERE-RĂSUCIRE AL BARELOR DE OȚEL CU SECȚIUNE MONOSIMETRICĂ, SOLICITATE DE MOMENTE ÎNCONVOITOARE CU VARIAȚIE LINIARĂ[1)]

I. APPELTAUER, E. CUTEANU, V. GIONCU,
A. GEIER, N. SCHRAMM și G. FRIEDRICH
INCERC Timișoara; Institutul politehnic Timișoara

539.3

S-a rezolvat energetic cu metoda Galerkin flambajul prin încovoiere-răsucire al barei de oțel cu secțiunea monosimetrică, solicitate de momente de capăt. Rezultatele s-au prezentat în tabele și diagrame în funcție de caracteristicile barei și ale încovoierii.

1. INTRODUCERE

1.1. *Definirea problemei.* În [1], [2], verificarea divergenței echilibrului la barele reale de oțel s-a aproximat printr-un calcul de rezistență de ordinul doi, limitat prin plasticizări parțiale atît de mici, încît practic nu trebuie abandonat domeniul deformațiilor elastice. Calculul de rezistență de ordinul doi cuprinde un calcul static de ordinul doi, condus cu includerea imperfecțiunilor barelor reale de obicei în planul cadrului transversal și verificarea secțiunilor, avînd în vedere și deformațiile prin încovoiere-răsucire ale barelor cu pereți subțiri în urma imperfecțiunilor care acționează longitudinal structurii. Astfel, în cazul încovoierii după axa de inerție maximă cu forță axială, formula de verificare se scrie

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x^{II}}{K_x W_x} + \bar{\sigma}_{N,M} \leqslant R, \tag{1}$$

[1)] Prezentată la Conferința de mecanică, București, septembrie 1967.

unde

N este forţa axială de calcul,

M_x^{II} — momentul încovoietor de calcul de ordinul doi (solicitările de calcul fiind solicitările normate majorate cu coeficienţii de supraîncărcare).

K_x — coeficientul de plasticizare parţială în conformitate cu [3],

$\bar{\sigma}_{N,M}$ — efortul unitar suplimentar care ţine seama de efectul imperfecţiunilor în deformaţia de încovoiere după axa minimă şi în cea de răsucire.

Efortul unitar suplimentar se calculează cu formula

$$\bar{\sigma}_{N,M} = E \frac{c_{0y}}{10^3 K_y} \cdot \frac{1}{\bar{n} - 1}, \tag{2}$$

unde

E este modulul de elasticitate,

c_{0y} — coeficientul în funcţie de calitatea oţelului, racordat la coeficienţii de flambaj din [3],

K_y — coeficientul de plasticizare parţială corespunzător axei minime,

$\bar{n}$ — coeficientul flambajului prin încovoiere-răsucire, care majorează toate încărcările aplicate pe bara ideală, echilibrul acesteia devenind indiferent.

În [1], [2] s-a dat pentru coeficientul $\bar{n}$ formula aproximativă de suprapunere neliniară a diferitelor solicitări:

$$\bar{n} = \frac{N_y}{\Omega_1}(\Omega_2 \pm \sqrt{\Omega_2^2 + \Omega_0 \Omega_1}), \tag{3}$$

unde

$$N_y = \frac{\pi^2 E I_y}{(\mu l)^2}, \tag{4}$$

$$\Omega_0 = \rho^2 = \frac{I_\omega \left(\frac{\mu l}{\mu_0 l_0}\right)^2 + 0{,}039\,(\mu l)^2 I_r}{I_y}, \tag{5}$$

$$\Omega_1 = -N^2 i_p^2 + \left[1 - 0{,}15\left(\frac{\mu l}{\mu_0 l_0} - 1\right)^2\right]\left(\Sigma c_1 c_4 \frac{M}{\alpha_1}\right)^2 - 2N\Sigma \frac{M}{\alpha_1}\omega - $$

$$- 0{,}28\, y_c N \left(\frac{\mu l}{\mu_0 l_0} - 1\right)\left(N y_c - \Sigma \alpha_0 \frac{M}{\alpha_1}\right), \tag{6}$$

$$\Omega_2 = -\frac{N}{2}(\rho^2 + i_p^2 + y_c^2) + \Sigma \frac{M}{\alpha_1}(c_1 y_c - \omega), \tag{7}$$

cu

$$\omega = \frac{1}{2}(c_3 \alpha_3 r_x + c_2 \alpha_2 y_p), \tag{8}$$

$$r_x = \frac{1}{I_x}\int_A (x^2 + y^2)\, y \cdot \mathrm{d}A. \tag{9}$$

În relațiile de mai sus s-a notat :

I_y, I_r și I_ω — momentul de inerție axial la răsucire și sectorial;
i_p — raza de inerție polară raportată la centrul de greutate al secțiunii;
y_c — ordonata centrului de răsucire (fig. 1);
r_x — o caracteristică liniară a secțiunii monosimetrice;
y_p — distanța nivelului de încărcare la centrul de greutate al secțiunii;
l și l_0 — lungimea barei, respectiv lungimea între două rigidizări active la răsucire;
μ și μ_0 — coeficienți pentru caracterizarea posibilității de rotație în jurul axei y (fig. 1), respectiv de strîmbare a secțiunilor de capăt. Dacă rotația și strîmbarea sînt libere, $\mu = \mu_0 = 1$; dacă ambele sînt împiedicate, $\mu = \mu_0 = 0{,}5$ (formulele (5) —(8) s-au scris în ipoteza $\mu_0 \leqslant \mu$ pentru condiții de rezemare identice la ambele capete ale barei);
$c_1 \ldots c_4$ — coeficienți în funcție de μ și μ_0 pentru încărcări transversale, de valoare unitară pentru momente de capăt;
$\alpha_0 \ldots \alpha_3$ — coeficienți de încărcare;
M — Momentul încovoietor maxim al unei încărcări date.

Pentru a putea folosi formulele de mai sus, trebuie cunoscuți coeficienții α corespunzători diferitelor încărcări.

Datele din literatura de specialitate nu au fost suficiente pentru determinarea coeficienților α corespunzători încărcării unei bare monosimetrice cu momente de capăt (în cazul încărcării cu momente de capăt, din scrierea formulelor (6) și (8) rezultă că $\alpha_0 = 2$, iar $\alpha_2 = 0$, astfel încît trebuie determinați numai coeficienții α_1 și α_3).

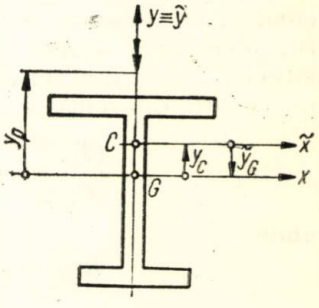


Fig. 1

1.2. *Cercetări premergătoare privitoare la flambajul prin încovoiere-răsucire al barelor ideale încărcate cu momente de capăt.* În general s-a rezolvat direct problema barei încărcate cu momente de capăt și forță axială. Salvadori [4] și Ciuvikin [5] tratează numai secțiunea dublu simetrică, în timp ce Nylander [6] abordează, printre altele, bara de secțiune monosimetrică cu axa de răsucire impusă constructiv. Aplicînd metoda energetică, Nylander aproximează deformata răsucirii printr-o serie trigonometrică cu doi termeni și reprezintă grafic un factor al încărcării critice, avînd drept parametru raportul momentelor de capăt.

Abstracție făcînd de faptul că formulele lui Nylander pretind un calcul iterativ relativ greoi, Salvadori a arătat că pentru $\beta = -1$, unde

$$\beta = \frac{M_2}{M_1}, \tag{10}$$

M_1 fiind momentul de capăt maxim în valoare absolută ($-1 \leqslant \beta \leqslant 1$), trebuie consideraţi cel puţin trei termeni în seria deformatei.

Pettersson [7] dă în disertaţia sa, pe lîngă multe alte probleme rezolvate, momentele critice în cazurile $\beta \geqslant 0$, integrînd ecuaţiile diferenţiale ale problemei prin serii de puteri. Lipsa valorilor negative ale lui β, importante în practică (de exemplu la stîlpii de cadru), este însoţită şi de particularizarea rezultatelor pentru o secţiune transversală tipică, cu raporturi fixe între dimensiunile elementelor componente.

Kraus [8] rezolvă numeric ecuaţia integrală a flambajului prin încovoiere-răsucire, corespunzătoare încărcării barei cu secţiunea în T, cu rapoarte între dimensiunile elementelor componente similare cu cele din [7], numai prin momente de capăt. Secţiunea aleasă simplifică calculul, întrucît nu apare strîmbarea liniei mediane, în schimb este relativ rar folosită în practică.

În [1] şi [2] s-au determinat pentru coeficienţii α_1 şi α_3 formule de interpolare raţionale, obţinute prin integrarea numerică cu metoda poligonului funicular a ecuaţiilor diferenţiale ale problemei, ajustînd coeficienţii numerici ai rezultatului după soluţiile cazurilor particulare cunoscute ([4] şi [8]). Întrucît nu se cunoaşte în ce măsură aproximaţiile făcute pot fi extinse şi asupra barelor cu pereţi subţiri din tablă formată la rece, în prezenta lucrare s-a considerat mai exact efectul momentelor de capăt asupra flambajului prin încovoiere-răsucire al barei monosimetrice cu pereţi subţiri.

2. DEDUCEREA EXPRESIILOR DE CALCUL PENTRU COEFICIENŢII α_1, α_3

2.1. *Ecuaţia diferenţială a problemei.* Deoarece efectul diferitelor condiţii de rezemare este inclus în formulele (5)—(8), este suficient să se considere bara simplu rezemată atît din punctul de vedere al încovoierii laterale, cît şi din cel al răsucirii ($\mu = \mu_0 = 1$). În acest caz, în sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} Bu^{IV} - (M\varphi)'' = 0, & (11) \\ C_\omega \varphi^{IV} - C\varphi'' - Mu'' + r_{\tilde{x}}(M\varphi')' = 0, & (12) \end{cases}$$

unde

$$B = EI_y, \qquad C = GI_r, \qquad C_\omega = EI_\omega,$$

$$r_{\tilde{x}} = r_x - 2y_c, \qquad (13)$$

iar u şi φ sînt deplasarea centrului de răsucire după axa $\tilde{x}$, respectiv rotaţia secţiunii transversale în jurul centrului de răsucire, ecuaţia încovoierii (11), integrată de două ori, devine

$$Bu'' - M\varphi = 0, \qquad (11')$$

întrucît constantele de integrare sînt nule (pentru $z = 0$, respectiv l: $u = u'' = \varphi = \varphi'' = 0$). Eliminînd u'' din (11') şi (12), se obţine

$$\varphi^{IV} - \frac{C - r_{\tilde{x}} M}{C_\omega}\varphi'' + \frac{r_{\tilde{x}} T}{C_\omega}\varphi' - \frac{M^2}{BC_\omega}\varphi = 0. \qquad (14)$$

Cu (fig. 2)

$$M = M_1\left[1 - (1-\beta)\frac{z}{l}\right] \text{ și } T = -\frac{M_1(1-\beta)}{l}$$

și cu notațiile intermediare

$$\frac{C}{C_\omega} = a, \tag{15}$$

$$\frac{r_{\widetilde{x}}}{C_\omega} = b, \tag{16}$$

$$\frac{1}{BC_\omega} = c, \tag{17}$$

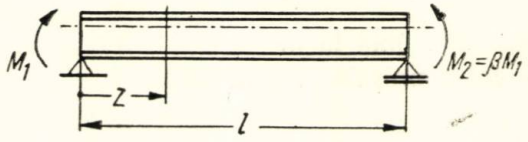


Fig. 2

ecuația (14) se scrie

$$\varphi^{IV} - \left\{a - bM_1\left[1-(1-\beta)\frac{z}{l}\right]\right\}\varphi'' - bM_1(1-\beta)\frac{1}{l}\varphi' -$$

$$- cM_1^2\left[1 - 2(1-\beta)\frac{z}{l} + (1-\beta)^2\frac{z^2}{l^2}\right]\varphi = 0, \tag{14'}$$

2.2. *Aplicarea metodei variaționale Galerkin.* Alegînd în general pentru φ seria trigonometrică

$$\varphi = \sum_n \varphi_n \sin\frac{n\pi z}{l}, \tag{18}$$

care satisface deopotrivă condițiile de margine geometrice și mecanice, ecuația (14′) devine

$$\sum_n \varphi_n \left\{\left[\frac{n^4\pi^4}{l^4} + (a - bM_1)\frac{n^2\pi^2}{l^2} - cM_1^2\right]\sin\frac{n\pi z}{l} -\right.$$

$$- bM_1(1-\beta)\frac{1}{l}\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi z}{l} + \left[bM_1(1-\beta)\frac{1}{l}\frac{n^2\pi^2}{l^2} +\right.$$

$$\left.\left. + 2cM_1^2(1-\beta)\frac{1}{l}\right]z\sin\frac{n\pi z}{l} - cM_1^2(1-\beta)^2\frac{1}{l^2}z^2\sin\frac{n\pi z}{l}\right\} = 0. \tag{14''}$$

Aplicarea metodei variaţionale Galerkin conduce la condiţiile

$$\sum_n \varphi_n \left\{ \left[\frac{n^4\pi^4}{l^4} + (a - bM_1)\frac{n^2\pi^2}{l^2} - cM_1^2 \right] \int_0^l \sin\frac{n\pi z}{l} \sin\frac{i\pi z}{l}\,dz - \right.$$

$$- bM_1(1-\beta)\frac{1}{l}\frac{n\pi}{l}\int_0^l \cos\frac{n\pi z}{l}\sin\frac{i\pi z}{l}\,dz +$$

$$+ \left[bM_1(1-\beta)\frac{1}{l}\frac{n^2\pi^2}{l^2} + 2cM_1^2(1-\beta)\frac{1}{l} \right] \int_0^l z\sin\frac{n\pi z}{l}\sin\frac{i\pi z}{l}\,dz -$$

$$\left. - cM_1^2(1-\beta)^2\frac{1}{l^2}\int_0^l z^2\sin\frac{n\pi z}{l}\sin\frac{i\pi z}{l}\,dz \right\} = 0, \tag{19}$$

unde i variază de la 1 pînă la n.

Integralele din condiţiile (19) devin

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi z}{l}\sin\frac{i\pi z}{l}\,dz = \begin{cases} 0 \text{ pentru } i \neq n, \\ \dfrac{l}{2} \text{ pentru } i = n, \end{cases}$$

$$\int_0^l \cos\frac{n\pi z}{l}\sin\frac{i\pi z}{l}\,dz = \begin{cases} 0 \text{ pentru } n+i \text{ par}, \\ \dfrac{2l}{\pi}\,\dfrac{i}{i^2-n^2} \text{ pentru } n+i \text{ impar}, \end{cases}$$

$$\int_0^l z\sin\frac{n\pi z}{l}\sin\frac{i\pi z}{l}\,dz = \begin{cases} 0 \text{ pentru } n+i \text{ par}, \\ -\dfrac{l^2}{\pi^2}\cdot\dfrac{4in}{(i^2-n^2)^2} \text{ pentru } n+i \text{ impar}, \\ \dfrac{l^2}{4} \text{ pentru } i = n, \end{cases}$$

$$\int_0^l z^2\sin\frac{n\pi z}{l}\sin\frac{i\pi z}{l}\,dz = \begin{cases} (-1)^{n-i}\cdot\dfrac{l^3}{\pi^2}\cdot\dfrac{4in}{(i^2-n^2)^2} \text{ pentru } i \neq n, \\ \dfrac{l^3}{6} - \dfrac{l^3}{4n^2\pi^2} \text{ pentru } i = n. \end{cases}$$

2.3. *Aproximarea deformatei printr-o serie cu trei termeni.* Limitînd seria (18) la primii trei termeni:

$$\varphi = \varphi_1 \sin\frac{\pi z}{l} + \varphi_2 \sin\frac{2\pi z}{l} + \varphi_3 \sin\frac{3\pi z}{l}, \tag{18'}$$

condiţiile (19) conduc la ecuaţiile liniare şi omogene :

$$\left\{\frac{\pi^2}{l^2}+a-bM_1\frac{1+\beta}{2}-cM_1^2\frac{l^2}{\pi^2}\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right]\right\}\varphi_1-$$

$$-\left[bM_1(1-\beta)\frac{40}{9\pi^2}+cM_1^2\frac{16\,l^2}{9\pi^4}(1-\beta^2)\right]\varphi_2-cM_1^2(1-\beta)^2\frac{6l^2}{16\pi^4}\varphi_3=0, \quad (20)$$

$$-\left[bM_1(1-\beta)\frac{40}{9\pi^2}+cM_1^2\frac{16\,l^2}{9\pi^4}(1-\beta^2)\right]\varphi_1+\left\{16\frac{\pi^2}{l^2}+4a-2bM_1(1+\beta)-\right.$$

$$\left.-cM_1^2\frac{l^2}{\pi^2}\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{8\pi^2-3}{24\pi^2}\right]\right\}\varphi_2-\left[bM_1(1-\beta)\frac{312}{25\pi^2}+\right.$$

$$\left.+cM_1^2(1-\beta^2)\frac{48\,l^2}{25\,\pi^4}\right]\varphi_3=0, \quad (21)$$

$$-cM_1^2(1-\beta)^2\frac{6l^2}{16\pi^4}\varphi_1-\left[bM_1(1-\beta)\frac{312}{25\pi^2}+cM_1^2\frac{48\,l^2}{25\pi^4}(1-\beta^2)\right]\varphi_2+$$

$$+\left\{81\frac{\pi^2}{l^2}+9a-9bM_1\frac{1+\beta}{2}-cM_1^2\frac{l^2}{\pi^2}\left[\beta+(1-\beta^2)\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\right]\right\}\varphi_3=0. \quad (22)$$

Dacă se anulează determinantul sistemului (20)—(22), se obţine cu notaţiile

$$M_1=\frac{b}{c}\frac{\pi^2}{l^2}\gamma, \quad (23)$$

$$K_1=\frac{c}{b^2}\left(1+a\frac{l^2}{\pi^2}\right), \quad (24)$$

$$K_2=\frac{4c}{b^2}\left(4+a\frac{l^2}{\pi^2}\right), \quad (25)$$

$$K_3=\frac{9c}{b^2}\left(9+a\frac{l^2}{\pi^2}\right) \quad (26)$$

următoarea ecuaţie de gradul şase în γ :

$$\left\{-\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right]\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{8\pi^2-3}{24\pi^2}\right]\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\right]+\right.$$

$$+\frac{48^2}{25^2\pi^4}(1-\beta^2)^2\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right]+\frac{16^2}{9^2\pi^4}(1-\beta^2)^2\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\right]-$$

$$\left.-\frac{48\times12}{9\times25\pi^6}(1-\beta^2)^2(1-\beta)^2+\frac{36}{256\pi^4}(1-\beta)^4\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{8\pi^2-3}{24\pi^2}\right]\right\}\gamma^6+$$

$$+\left\{-\frac{1+\beta}{2}\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{8\pi^2-3}{24\pi^2}\right]\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\right]-\right.$$

$$-2(1+\beta)\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right]\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\right]-$$

$$-9\frac{1+\beta}{2}\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right]\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{8\pi^2-3}{24\pi^2}\right]+$$

$$+\frac{48^2}{25^2\pi^4}\frac{1+\beta}{2}(1-\beta^2)^2+\frac{2\times48\times312}{25^2\pi^4}(1-\beta)(1-\beta^2)\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right]+$$

$$+\frac{9\times16^2}{9^2\pi^4}\frac{1+\beta}{2}(1-\beta^2)^2+\frac{2\times16\times40}{9^2\pi^4}(1-\beta^2)(1-\beta)\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\right]-$$

$$-\frac{16\times312\times12}{9\times25\times16\pi^6}(1-\beta^2)(1-\beta)^3-\frac{40\times48\times12}{9\times25\times16\pi^6}(1-\beta^2)(1-\beta)^3+$$

$$+\frac{2\times36}{256\pi^4}(1+\beta)(1-\beta)^4\Big\}\gamma^5+\Big\{K_1\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{8\pi^2-3}{24\pi^2}\right]\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\right]-$$

$$-(1+\beta)^2\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\right]-\frac{9}{4}(1+\beta)^2\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{8\pi^2-3}{24\pi^2}\right]+$$

$$+K_2\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right]\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\right]-9(1+\beta)^2\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right]+$$

$$+K_3\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right]\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{8\pi^2-3}{24\pi^2}\right]-K_1\frac{48^2}{25^2\pi^4}(1-\beta^2)^2+$$

$$+\frac{48\times312}{25^2\pi^4}(1-\beta^2)^2+\frac{312^2}{25^2\pi^4}(1-\beta)^2\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right]-K_3\frac{16^2}{9^2\pi^4}(1-\beta^2)^2+$$

$$+\frac{9\times16\times40}{9^2\pi^4}(1-\beta^2)^2+\frac{40^2}{9^2\pi^4}(1-\beta)^2\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\right]-$$

$$-\frac{40\times312\times12}{9\times25\times16\pi^6}(1-\beta)^4-K_2\frac{36}{256\pi^4}(1-\beta)^4\Big\}\gamma^4+$$

$$+\Big\{2K_1(1+\beta)\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\right]+9K_1\frac{1+\beta}{2}\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{8\pi^2-3}{24\pi^2}\right]+$$

$$+K_2\frac{1+\beta}{2}\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\right]-\frac{9}{2}(1+\beta)^3+$$

$$+K_3\frac{1+\beta}{2}\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{8\pi^2-3}{24\pi^2}\right]+9K_2\frac{1+\beta}{2}\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right]+$$

$$+2K_3(1+\beta)\left[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right]-K_1\frac{2\times48\times312}{25^2\pi^4}(1-\beta^2)(1-\beta)+$$

$$+\frac{312^2}{25^2\pi^4}\frac{1+\beta}{2}(1-\beta)^2-K_3\frac{2\times16\times40}{9^2\pi^4}(1-\beta^2)(1-\beta)+$$

$$+\frac{9\times40^2}{9^2\pi^4}\frac{1+\beta}{2}(1-\beta)^2\Big\}\gamma^3+\Big\{-K_1K_2\Big[\beta+(1-\beta)^2\frac{6\pi^2-1}{18\pi^2}\Big]+$$

$$+9K_1(1+\beta)^2-K_1K_3\Big[\beta+(1-\beta)^2\frac{8\pi^2-3}{24\pi^2}\Big]+\frac{9}{4}K_2(1+\beta)^2+K_3(1+\beta)^2-$$

$$-K_2K_3\Big[\beta+(1-\beta)^2\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\Big]-K_1\frac{312^2}{25^2\pi^4}(1-\beta)^2-K_3\frac{40^2}{9^2\pi^4}(1-\beta)^2\Big\}\gamma^2-$$

$$-\Big[K_1K_2\frac{9}{2}(1+\beta)+K_1K_32(1+\beta)+K_2K_3\frac{1+\beta}{2}\Big]\gamma+K_1K_2K_3=0. \quad (27)$$

Introducînd parametrii geometrici ai barei:

$$d=\frac{C_\omega}{Br_x^2} \quad (28)$$

și

$$e=\frac{Cl^2}{\pi^2C_\omega} \quad (29)$$

notațiile (24) și (26) devin cu (15) și (16)

$$K_1=d(1+e), \quad (24')$$

$$K_2=4d(4+e), \quad (25')$$

$$K_3=9d(9+e). \quad (26')$$

Astfel ecuația (27) depinde de parametrul mecanic β și de parametrii geometrici d și e. Dintre cele șase rădăcini ale ecuației, sens mecanic nu au decît două, și anume rădăcina pozitivă cea mai mică și rădăcina negativă cea mai mare, celelalte patru rădăcini reprezentînd valori proprii superioare ale problemei. Întrucît în mod evident nu se pot găsi formule pentru rădăcinile semnificative γ_1 și γ_2, ecuația (27) s-a calculat pentru valorile $\beta=0{,}5$; $0{,}0$; $-0{,}5$ și $-1{,}0$. S-a eliminat valoarea $\beta=1{,}0$, întrucît în acest caz momentul încovoietor este constant în lungul barei și soluția este bine cunoscută în literatură. S-a găsit astfel următorul grup de ecuații:

— pentru $\beta=0{,}5$:

$$-0{,}1702188\,\gamma^5-3{,}2064119\,\gamma^5+[d(4{,}4597985\,e+30{,}9676485)-$$

$$-14{,}9985362]\gamma^4+[d(41{,}4078713\,e+243{,}0824637)-14{,}5455007]\gamma^3+$$

$$+d[d(-28{,}0932550\,e^2-330{,}9261740\,e-795{,}8900710)+59{,}8940009\,e+$$

$$+278{,}9938705]\gamma^2-27\,d^2(3e^2+28\,e+49)\gamma+36\,d^3(e^3+14e^2+$$

$$+49\,e+36)=0; \quad (30)$$

— pentru $\beta = 0{,}0$:

$$-0{,}0105740\ \gamma^6 - 0{,}3096258\ \gamma^5 + [d(0{,}9557792\ e + 6{,}2403177) - \\ - 2{,}1420929]\gamma^4 + [d(12{,}4210260\ e + 70{,}2201360) - 2{,}7880020]\gamma^3 + \\ + d[d(-14{,}3730560\ e^2 - 167{,}7051640\ e - 397{,}5615800) + \\ + 23{,}5769040\ e + 107{,}9754840]\gamma^2 - 18d^2(3e^2 + 28\ e + 49)\gamma + \\ + 36\ d^3(e^3 + 14\ e^2 + 49e + 36) = 0; \tag{31}$$

— pentru $\beta = -0{,}5$:

$$-0{,}0016745\ \gamma^6 - 0{,}0015826\ \gamma^5 + [d(0{,}2380548\ e + 1{,}3928199) + \\ + 0{,}4375991]\gamma^4 + [d(1{,}7236518\ e + 6{,}7476292) + 1{,}3634978]\gamma^3 + \\ + d[d(-7{,}8393710\ e^2 - 88{,}3365220\ e - 198{,}0132470) - 0{,}9539911\ e - \\ - 9{,}0551615]\gamma^2 - 9d^2(3\ e^2 + 28e + 49)\ \gamma + 36\ d^3(e^3 + 14\ e^2 + \\ + 49e + 36) = 0; \tag{32}$$

— pentru $\beta = -1{,}0$:

$$-0{,}0049516\ \gamma^6 + [d(0{,}4904129\ e + 3{,}3604998) + 0{,}3956437]\gamma^4 - \\ - d[d(8{,}4922010\ e^2 + 92{,}8202980\ e + 197{,}2451210) + 13{,}6959840\ e + \\ + 72{,}0980640]\gamma^2 + 36\ d^3(e^3 + 14e^2 + 49\ e + 36) = 0. \tag{33}$$

2.4. *Aproximarea deformatei printr-o serie cu doi termeni.* Dacă se reţin numai primii doi termeni din (18′), rămîn semnificativi tot primii doi termeni din ecuaţiile (20)—(21). Anulînd determinantul acestui sistem de ecuaţii, se ajunge cu notaţiile (23) şi (24)—(25) la o ecuaţie de gradul patru în γ, principial corespunzătoare cu (27). Introducînd din nou parametrii geometrici (28)—(29), se găseşte următorul grup de ecuaţii : pentru $\beta = 0{,}5$:

$$0{,}3128318\ \gamma^4 + 2{,}0862938\ \gamma^3 + [2{,}1993037 - d\ (2{,}8628390\ e + \\ + 9{,}7108550)]\gamma^2 - 3\ d\ (2e + 5)\ \gamma + 4\ d^2(e^2 + 5e + 4) = 0; \tag{34}$$

— pentru $\beta = 0{,}0$:

$$0{,}0581982\ \gamma^4 + 0{,}5634520\ \gamma^3 + [0{,}7972150 - d\ (1{,}4513600\ e + \\ + 4{,}8434360)]\gamma^2 - 2\ d\ (2e + 5) + 4d^2(e^2 + 5e + 4) = 0; \tag{35}$$

— pentru $\beta = -0{,}5$:

$$0{,}0118766\ \gamma^4 + 0{,}0088833\ \gamma^3 - [0{,}2062663 + d\ (0{,}7655590\ e + \\ + 2{,}3977270)]\gamma^2 - d\ (2e + 5) + 4d^2(e^2 + 5e + 4) = 0; \tag{36}$$

— pentru $\beta = -1{,}0$;

$$0{,}0369428\ \gamma^4 - [0{,}8111400 + d\ (0{,}8054370\ e + 2{,}3737290)]\gamma^2 + \\ + 4d^2(e^2 + 5e + 4) = 0. \tag{37}$$

2.5. *Formulele coeficienților* α_1 și α_3. Ecuația de gradul doi din care rezultă formula (3) a coeficientului flambajului prin încovoiere-răsucire este

$$\Omega_1 \bar{n}^2 - 2N_y \Omega_2 \bar{n} - N_y^2 \Omega_3 = 0, \tag{38}$$

știind că

$$\bar{n} = \frac{M_{1cr}}{M_1}. \tag{39}$$

Din (23) rezultă cu (16)—(17)

$$M_{1cr} = \frac{b}{c} \frac{\pi^2}{l^2} \gamma_{cr} = r_{\tilde{x}} N_y \gamma_{cr}. \tag{23'}$$

Astfel, definiția (39), respectiv ecuația (38), devine

$$\bar{n} = \frac{r_{\tilde{x}} N_y}{M_1} \cdot \gamma_{cr}, \tag{39'}$$

$$\frac{r_{\tilde{x}}^2}{M_1^2} \Omega_1 \gamma_{cr}^2 - 2 \frac{r_{\tilde{x}}}{M_1} \Omega_2 \gamma_{cr} - \Omega_0 = 0. \tag{38'}$$

Aplicînd relațiile dintre rădăcini și coeficienți, se obține

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{2M_1}{r_{\tilde{x}}} \frac{\Omega_2}{\Omega_1}, \tag{40}$$

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = -\frac{M_1^2}{r_{\tilde{x}}^2} \frac{\Omega_0}{\Omega_1}. \tag{41}$$

Valoarea lui Ω_3 rezultă cu (28) —(29) direct din (5) :

$$\Omega_0 = \frac{I_\omega + \dfrac{G}{\pi^2 E} l^2 I_r}{I_y} = \frac{C_\omega}{B}\left(1 + \frac{Cl^2}{\pi^2 C_\omega}\right) = r_{\tilde{x}}^2 d(1+e). \tag{5'}$$

Introducînd (5') în (41), rezultă

$$\Omega_1 = -M_1^2 \frac{d(1+e)}{\gamma_1 \gamma_2}. \tag{42}$$

Întrucît în cazul încărcării cu momentele de capăt M_1 și M_2 formula (6) se reduce în cazul simplei rezemări la

$$\Omega_1 = \frac{M_1^2}{\alpha_1^2}, \tag{6'}$$

din identificarea relațiilor (6') și (42) rezultă

$$\alpha_1 = \sqrt{-\frac{\gamma_1 \gamma_2}{d(1+e)}}. \tag{43}$$

Explicitînd acum cu (42) pe Ω_2 din (40), se obţine cu (13)

$$\Omega_2 = M_1 \left(\frac{r_x}{2} - y_c \right) \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\alpha_1^2} . \tag{44}$$

În cazul tratat, formulele (7) — (8) se reduc la

$$\Omega_2 = \frac{M_1}{\alpha_1} \left(y_c - \alpha_3 \frac{r_x}{2} \right). \tag{7'}$$

Identificînd (7') cu (44), rezultă

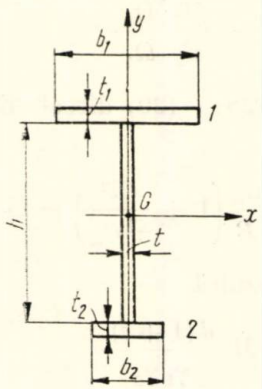
$$\alpha_3 = \frac{y_c - c_5 \left(y_c - \dfrac{r_x}{2} \right)}{\dfrac{r_x}{2}}, \tag{45}$$

unde

$$c_5 = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\alpha_1} . \tag{46}$$

3. CALCULUL NUMERIC AL COEFICIENŢILOR α_1 ŞI c_5

3.1. *Domeniul de variaţie al parametrilor d şi e.* Pentru a stabili domeniul de variaţie al parametrilor *d* şi *e* s-a studiat mai întîi secţiunea transversală tip a lui Pettersson [7] (fig. 3). Variind parametrul



$$b_1 = \frac{h}{2{,}5}$$

$$t_1 \cong t_2 = \frac{h}{40}$$

$$t = \frac{h}{100}$$

$$b_2 = \nu b_1 = \frac{\nu h}{2{,}5}$$

Fig. 3

$\nu = b_2/b_1$ între 0 şi 1, s-au obţinut pentru $l = 10$ h următoarele valori :

ν	1,00	0,75	0,50	0,25	0,00
d	∞	1,400	0,185	0,0198	0,00
e	2,624	3,910	9,076	55,7650	∞

Se constată că valorile d și e variază în mod invers.

Întrucît secțiunea tip Pettersson modelează mai mult secțiunea unei rigle, s-a construit în continuare secțiunea tip a unui stîlp de hală

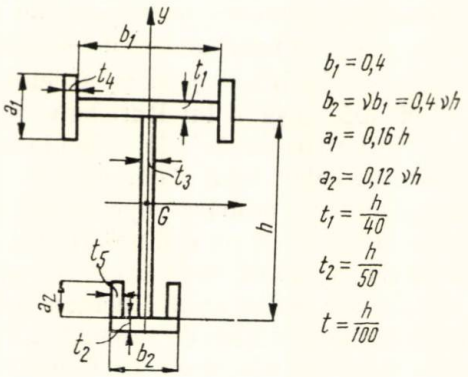


Fig 4

industrială cu pod rulant (fig. 4). Variind parametrul $\nu = b_2/b_1$ între 0,5 și 1,0, s-au obținut pentru $l = 10\ h$ următoarele valori :

ν	1,00	0,75	0,50
d	13,555	0,738	0,122
e	0,346	0,596	1,581

Se observă că rămîne valabilă aceeași variație inversă a parametrilor d și e.

Ghidat și de cîteva verificări numerice ale unor cazuri concrete care nu s-au încadrat în rapoartele studiate mai sus, s-a ales $0{,}001 \leqslant d \leqslant 100$ și $0{,}05 \leqslant e \leqslant 5\,000$ pentru a acoperi cu oarecare siguranță întregul domeniu practic. Împerecherea valorilor d și e s-a făcut după următoarea schemă :

d \ e	5 000	1 000	100	10	5	1	0,5	0,1	0,05
0,001	×	×	×						
0,01		×	×	×	×	×			
0,1		×	×	×	×	×	×	×	
0,5			×	×	×	×	×	×	
1			×	×	×	×	×	×	
5			×	×	×	×	×	×	
10				×	×	×	×	×	×
20				×	×	×	×	×	×
100					×	×	×	×	×

3.2. *Programarea şi efectuarea calculelor la calculatorul electronic ELLIOTT —803.* Partea aceasta a problemei a fost efectuată de colectivul A. Geier, N. Schramm şi G. Friedrich.

Ecuaţiile de gradul şase (30) —(33), precum şi cele de gradul patru (34) —(37), trebuiau rezolvate numeric pentru cîte 50 de perechi de valori d şi e, ceea ce echivalează cu un total de 400 de ecuaţii de grad superior.

Pentru aproximarea rădăcinilor γ_1 şi γ_2 a celor 400 de ecuaţii s-a preconizat algoritmul cît-diferenţă al lui Rutishauser [9]. Acest algoritm aproximează în acelaşi timp toate rădăcinile reale ale unei ecuaţii algebrice şi permite uşor discernarea celor două rădăcini utile γ_1 şi γ_2. Pe de altă parte, în acest proces iterativ, numărul operaţiilor aritmetice necesare pentru aflarea a cîte unui iterat de un ordin oarecare pentru toate rădăcinile este mai mic decît numărul operaţiilor necesare pentru calculul a cîte unui iterat de acelaşi ordin numai pentru cele două rădăcini γ_1 şi γ_2, folosind metoda coardei sau metoda tangentei. Din cauza numărului mare al ecuaţiilor de rezolvat ale căror coeficienţi nu erau cunoscuţi numeric, nu s-au putut face aprecieri cu privire la convergenţa procesului iterativ. Semnificaţia mecanică a ecuaţiilor a exclus existenţa rădăcinilor complexe.

Întrucît forma particulară a ecuaţiilor (33) şi (37) pentru $\beta = -1{,}0$ n-a fost convenabilă pentru aplicarea algoritmului cît-diferenţă, s-a efectuat transformarea $\gamma = \bar{\gamma} + 1$. În consecinţă, din punctul de vedere al programării, ecuaţiile s-au grupat în următoarele patru categorii:

1) 150 de ecuaţii de gradul patru în γ, pentru $\beta = 0{,}5$; $0{,}0$ şi $-0{,}5$;
2) 50 de ecuaţii de gradul patru în $\bar{\gamma}$ pentru $\beta = -1{,}0$;
3) 150 de ecuaţii de gradul şase în γ pentru $\beta = 0{,}5$; $0{,}0$ şi $-0{,}5$;
4) 50 de ecuaţii de gradul şase în $\bar{\gamma}$ pentru $\beta = -1{,}0$.

Schemele logice de program, distincte pentru fiecare categorie de ecuaţii, prezintă următoarele etape comune:

— calculul coeficienţilor pentru perechea de valori d şi e;
— aproximarea rădăcinilor cu o eroare absolută maximă de $0{,}5 \cdot 10^{-4}$;
— aflarea celor două rădăcini semnificative γ_1 şi γ_2;
— calculul coeficienţilor α_1 şi c_5.

Problema a fost programată pentru automatul ELLIOTT —803 de la Combinatul siderurgic Hunedoara, folosind autocodul MARK-III. S-au întocmit astfel patru programe, care conţin în medie cîte 110 instrucţii autocod fiecare.

Rapiditatea de convergenţă a procesului iterativ a fost foarte variată: pentru valori mici ale parametrului d, coeficienţii α_1 şi c_5 au fost calculaţi în fracţiuni de minut (minim 15 s), iar pentru unele valori mari ale lui d timpul necesar a atins maxim 12 min. Timpul mediu a fost de circa 2,25 min de ecuaţie, iar problema a fost complet rezolvată în aproximativ 14 ore de calcul efectiv.

4. DISCUȚIA REZULTATELOR

Rezultatele tipărite de calculatorul electronic cu cîte cinci cifre semnificative au fost grupate în tabele și reprezentate pentru valorile $e = 1\,000$, 100, 10 și 1,0 în diagramele 1—4. În diagrama 5 nu s-au mai trasat decît curbele $e = 1\,000$ și 10.

4.1. Urmărind variația curbelor α_1 în funcție de mărimea d caracteristică monosimetriei, parametrice în e, se observă că, pe măsură ce crește β, curbele se strîng din ce în ce mai mult în jurul valorii corespunzătoare secțiunii dublu simetrice. Pentru valoarea $\beta = 0{,}5$, acest fenomen este atît de accentuat, încît , fără a comite o eroare relativă maximă mai mare de 4,6%, se poate alege valoarea constantă $\alpha_1 = 1{,}31$, corespunzătoare secțiunii dublu simetrice. (Pentru marea majoritate a valorilor α_1 calculate, eroarea relativă este sub 1%.)

Curbele parametrice ale coeficientului c_5 prezintă aceeași tendință de concentrare, astfel încît pentru $\beta = 0{,}5$ se poate alege valoarea constantă $c_5 = 1{,}0$, eroarea relativă maximă fiind de 3,8% pentru majoritatea cazurilor calculate, însă rămînînd sub 1%.

De aceea în lucrare nu s-au mai dat decît tabelele 1—3 pentru coeficienții α_1 ($\beta = -1{,}0$, $-0{,}5$ și 0,0) și tabelele 4 și 5 pentru coeficienții c_5 ($\beta = -0{,}5$ și 0,0) (în cazul $\beta = -1{,}0$, $c_5 = 0$, întrucît în urma antimetriei încărcării $\gamma_1 = -\gamma_2$). Valorile numerice din tabelele 1—5 au fost rotunjite la două cifre zecimale.

În concluzie se poate afirma că efectul monosimetriei scade pe măsură ce crește β.

4.2. Tot din examinarea diagramelor 1—3 rezultă că, pe măsură ce crește β, curbele parametrice α_1 calculate din ecuațiile de gradul patru se apropie din ce în ce mai mult de cele calculate din ecuațiile de gradul șase. Pentru $\beta = 0{,}5$ se poate considera că cele două categorii de curbe practic se suprapun. Concluzii similare rezultă din diagramele 4 și 5, privitoare la curbele parametrice ale coeficientului c_5. Înseamnă că deformata echilibrului indiferent poate fi aproximată cu suficientă exactitate printr-o serie cu doi termeni în domeniul $\beta \geqslant 0{,}0$. Pentru valori negative ale lui β trebuie însă considerați cel puțin trei termeni în seria deformatei. Acești trei termeni sînt în același timp și suficienți, chiar și în cazul extrem $\beta = -1{,}0$. Într-adevăr, studiind variația coeficientului α_1, calculat la rînd cu un termen, cu doi termeni, respectiv cu trei termeni ai seriei deformatei, se poate ajunge la concluzia că, în cazul cel mai defavorabil, eroarea relativă a valorii calculate cu trei termeni nu depășește 3% față de un eventual calcul cu patru termeni. De altfel și în [4] se consideră seria cu trei termeni ca suficient de exactă.

Primită la redacție la 20 octombrie 1965.

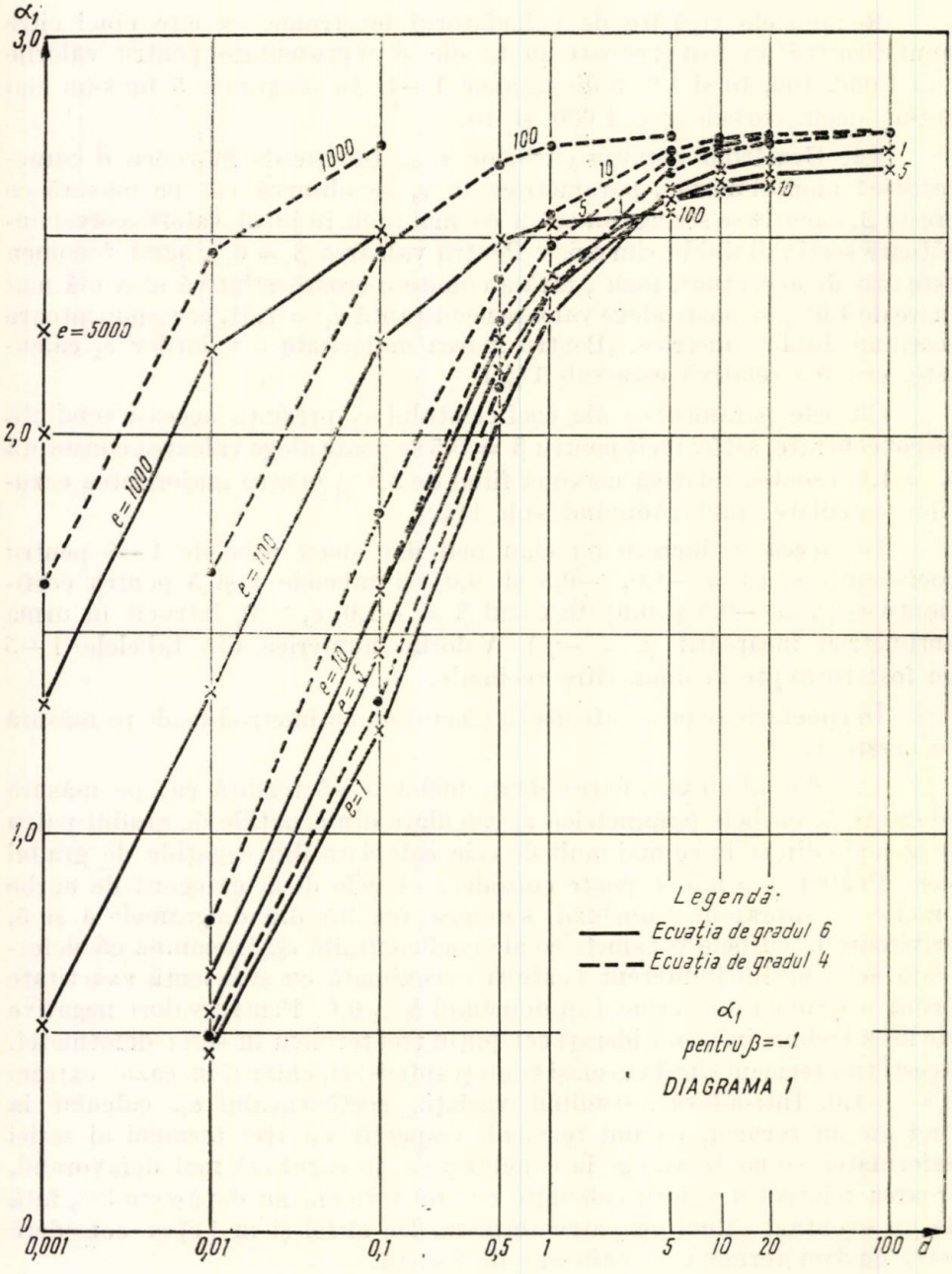

α1
3,0
2,0
1,0
0
0,001
0,01
0,1
0,5
1
5
10
20
100
α
e=5000
ρ=1000
ρ=100
ρ=10
ρ=5
ρ=1
1000
100
10
5
1
100
10
5
1
Legendă:
Ecuația de gradul 6
Ecuația de gradul 4
α1
pentru β=-1
DIAGRAMA 1

Diagrama 1

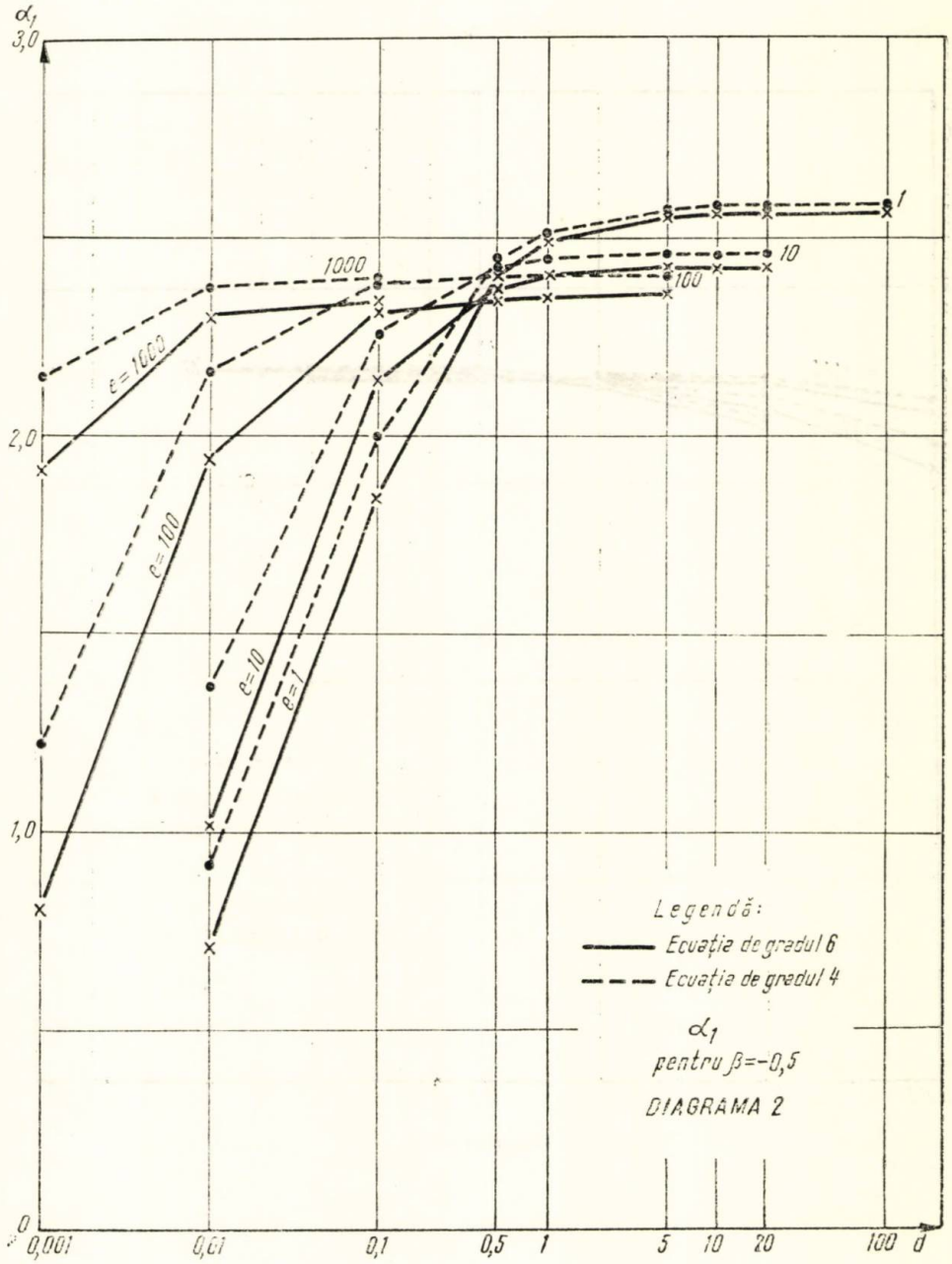

α1
3,0
2,0
1,0
0
0,001
0,01
0,1
0,5
1
5
10
20
100
δ
1000
100
10
1
ε=1000
ε=100
ε=10
ε=1
Legendă:
Ecuația de gradul 6
Ecuația de gradul 4
α1
pentru β=-0,5
DIAGRAMA 2

Diagrama 2

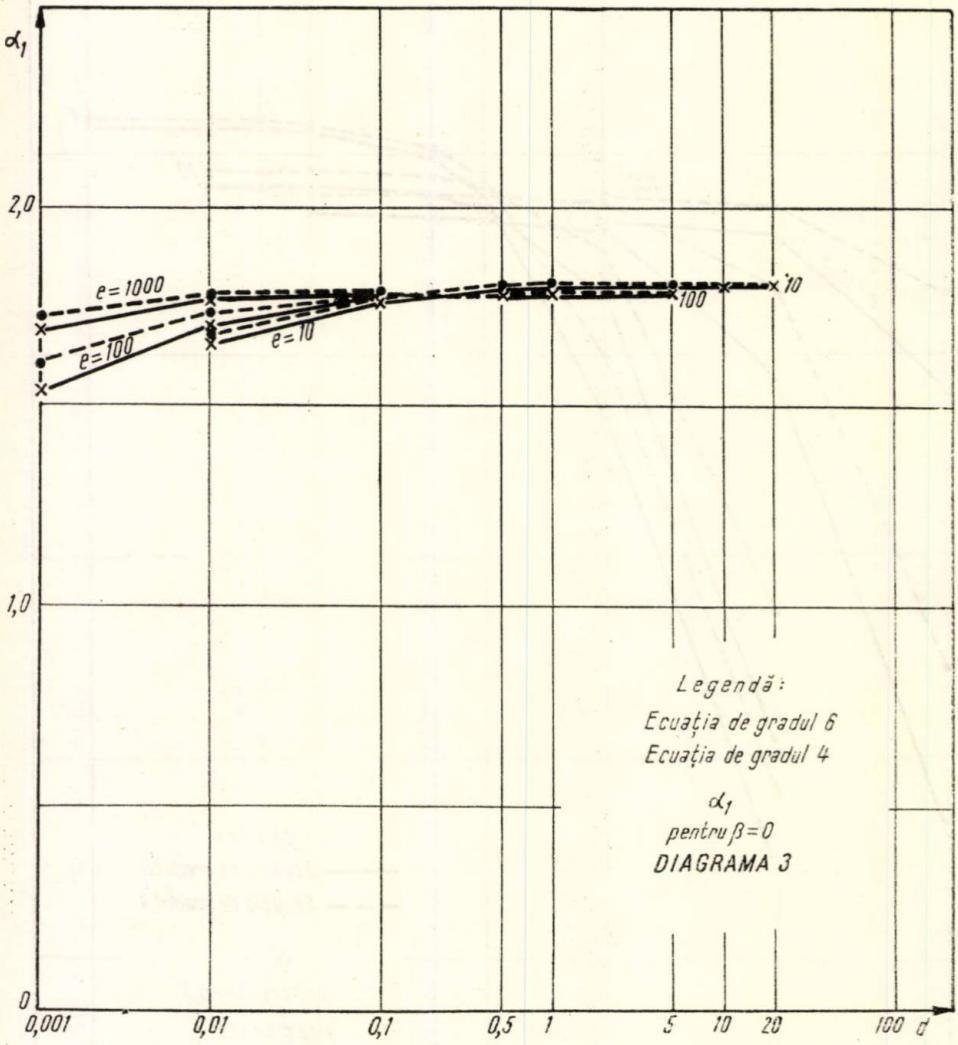

α_1
2,0
1,0
0
e=1000
e=100
e=10
10
100
0,001
0,01
0,1
0,5
1
5
10
20
100
d
Legendă:
Ecuația de gradul 6
Ecuația de gradul 4
α_1
pentru $\beta=0$
DIAGRAMA 3

Diagrama 3

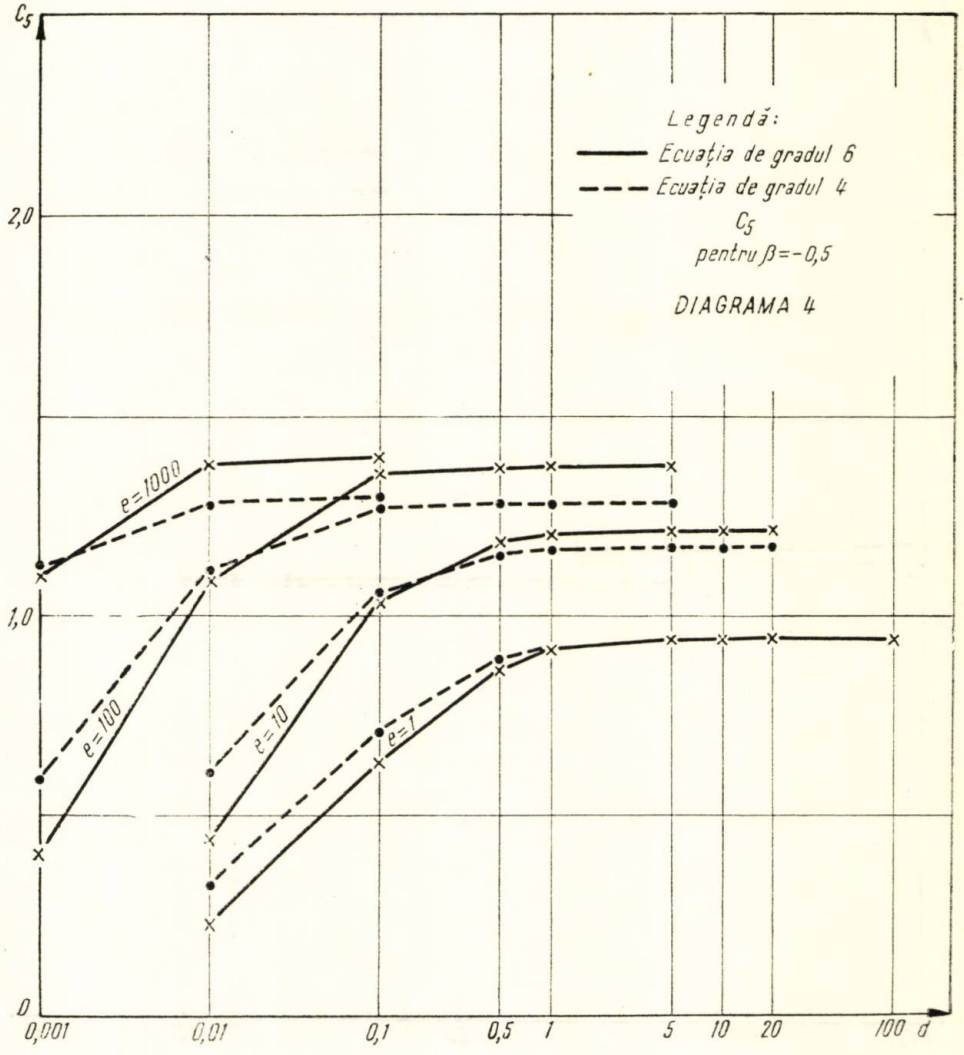

C_5
2,0
1,0
0
Legendă:
Ecuația de gradul 6
Ecuația de gradul 4
C_5
pentru $\beta = -0,5$
DIAGRAMA 4
e=1000
e=100
e=10
e=1
0,001
0,01
0,1
0,5
1
5
10
20
100
d

Diagrama 4

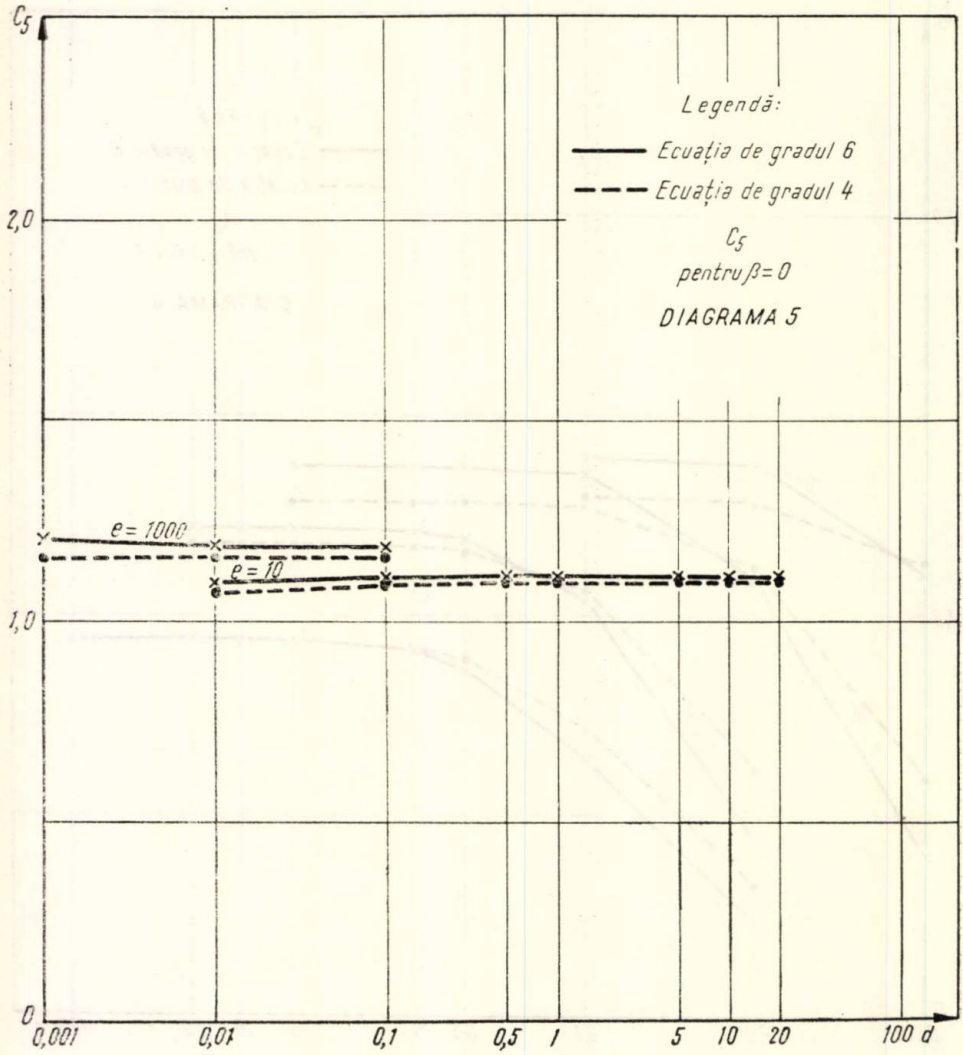

C_5
2,0
1,0
0
Legendă:
Ecuația de gradul 6
Ecuația de gradul 4
C_5
pentru $\beta = 0$
DIAGRAMA 5
e = 1000
e = 10
0,001
0,01
0,1
0,5
1
5
10
20
100 d

Diagrama 5

Tabela 1

Coeficienții α_1 pentru $\beta = -1{,}0$

e \ d	0,001	0,01	0,1	0,5	1	5	10	20	100
5000	2,00								
1000	1,32	2,21	2,51						
100	0,52	1,36	2,24	2,49	2,53	2,57			
10		0,65	1,60	2,24	2,41	2,59	2,62	2,63	
5		0,55	1,45	2,16	2,36	2,60	2,64	2,66	2,67
1		0,45	1,26	2,04	2,30	2,62	2,67	2,70	2,72
0,5			1,23	2,02	2,29	2,62	2,67	2,70	2,72
0,1			1,20	2,00	2,28	2,62	2,68	2,71	2,72
0,05							2,68	2,71	2,73

Tabela 2

Coeficienții α_1 pentru $\beta = -0{,}5$

e \ d	0,001	0,01	0,1	0,5	1	5	10	20	100
5000	2,26								
1000	1,91	2,30	2,33						
100	0,81	1,94	2,31	2,34	2,35	2,35			
10		1,01	2,14	2,37	2,40	2,42	2,42	2,42	
5		0,87	2,03	2,39	2,43	2,46	2,47	2,47	2,47
1		0,72	1,84	2,41	2,49	2,55	2,56	2,56	2,58
0,5			1,81	2,41	2,50	2,57	2,58	2,59	2,59
0,1			1,78	2,41	2,51	2,60	2,61	2,61	2,61
0,05							2,61	2,61	2,62

Tabela 3

Coeficienții α_1 pentru $\beta = 0{,}0$

e \ d	0,001	0,01	0,1	0,5	1	5	10	20	100
5000	1,75								
1000	1,68	1,76	1,77						
100	1,54	1,69	1,76	1,77	1,77	1,78			
10		1,64	1,75	1,79	1,79	1,80	1,80	1,80	
5		1,68	1,76	1,80	1,80	1,81	1,81	1,81	1,81
1		1,75	1,80	1,83	1,83	1,84	1,84	1,84	1,84
0,5			1,81	1,83	1,84	1,85	1,85	1,85	1,85
0,1			1,82	1,84	1,85	1,85	1,85	1,85	1,85
0,05							1,85	1,85	1,86

Tabela 4

Coeficienții c_5 pentru $\beta = -0{,}5$

e \ d	0,001	0,01	0,1	0,5	1	5	10	20	100
5000	1,36								
1000	1,10	1,38	1,39						
100	0,40	1,09	1,35	1,37	1,37	1,37			
10		0,43	1,04	1,18	1,20	1,21	1,21	1,21	
5		0,34	0,88	1,08	1,10	1,12	1,12	1,12	1,15
1		0,23	0,63	0,87	0,91	0,93	0,94	0,94	0,94
0,5			0,59	0,82	0,86	0.89	0,89	0,89	0,90
0,1			0,55	0,78	0,81	0,84	0,85	0,85	0,85
0,05							0,84	0,84	0,85

Tabela 5

Coeficienții c_5 pentru $\beta = 0{,}0$

e \ d	0,001	0,01	0,1	0,5	1	5	10	20	100
5000	1,18								
1000	1,19	1,18	1,17						
100	1,17	1,18	1,17	1,16	1,16	1,17			
10		1,08	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	
5		1,04	1,06	1,06	1,07	1,07	1,07	1,07	1,07
1		0,98	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,5			0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
0,1			0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
0,05							0,98	0,98	0,98

BIBLIOGRAFIE

1. I. Appeltauer, T. Barta, *Stabilitatea cadrelor. Calculul de stabilitate al cadrelor de oțel*, Partea I: *Bara izolată*, Buletinul de studii și cercetări INCERC-ISCAS, *1*, 31 (1962). Partea II-a: *Cadre*, Idem *2*, p. 2, (1962). Partea III-a: *Verificarea secțiunilor cu considerarea flambajului prin încovoiere-răsucire al barelor cu pereți subțiri*, Idem *4*, p. 41 (1962).
2. I. Appeltauer, E. Cuteanu, V. Gioncu, *Metodă pentru calculul la stabilitate al cadrelor de oțel* st. cerc. INCERC, mec. constr., *1* (1966).
3. * * * *Normativ condițional pentru calculul construcțiilor la stări limită*. Partea a IV-a; *Proiectarea construcțiilor metalice, civile și industriale* P. 11—62, C.S.C.A.S., București, Edit. tehnică, 1963.
4. M.G. Salvadori, *Lateral Buckling of Eccentrically Loaded I-Columns*, Transactions ASCE **121** p. 1163, (1956).
5. Г. М. Чувикин, *Об устойчивости за пределом упругости сжатых тонкостенных стержней открытого профиля*. „Исследования по сталъным конструкциям", Госстроиздат, Moscova, p. 70, 1962.
6. N. Nylander, *Torsion, Bending and Lateral Buckling of I-Beams*, Kungl. Tehniska Högskolans Handlingar 102, Stockholm 1956.
7. O. Pettersson, *Combined Bending and Torsion of I Beams of Monosymmetrical Cross-Section*, Stockholm, 1952.
8. L. Kraus, *Integralgleichungen gerader Kippträger mit dünnwandigen, offenen und quasi-wölbfreien Profilen*. Ing. Archiv **29**, *3*, p. 11 (1960).
9. H. Rutishauser, *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Mitteilungen des mathematischen Instituts der ETH Zürich, 1957.

O METODĂ SIMPLIFICATĂ DE DETERMINARE A CARACTERISTICILOR DINAMICE ALE STRUCTURILOR ETAJATE CU AJUTORUL CALCULATORULUI ELECTRONIC CIFRIC[1])

M. IFRIM, S. LARIONESCU, AL. DOBRESCU şi I. BĂRBULESCU,
Institutul de construcţii, Bucureşti.

Lucrarea prezintă o metodă de analiză a oscilaţiilor libere ale structurilor etajate, fără scrierea ecuaţiilor de condiţie. Acest mod de formulare a problemei se pretează programării la calculatorul electronic cifric. Se obţin astfel modurile normale şi perioadele proprii de vibraţie, care caracterizează răspunsul dinamic al structurilor solicitate în regim seismic.
Avantajele metodei expuse sînt ilustrate prin mai multe exemple numerice.

1. INTRODUCERE

Intensitatea forţelor seismice care solicită o construcţie în timpul unui cutremur de pămînt depinde în principiu de următorii factori :

— caracteristicile dinamice ale structurii de rezistenţă analizate (perioadele proprii, modurile normale de oscilaţie şi factorii de amortizare) ;

— intensitatea undelor seismice şi proprietăţile fizico-mecanice ale mediului prin care acestea se propagă ;

— interacţiunea dintre terenul de fundaţie şi structură.

În lucrarea de faţă se prezintă o metodă simplă prin intermediul căreia pot fi determinate direct perioadele proprii şi modurile normale de vibraţie ale structurilor etajate, elemente care precizează răspunsul dinamic în calculul antiseismic. Perioada proprie de vibraţie precizează valoarea coeficientului seismic spectral, iar ordonatele modurilor de vibraţie precizează coeficienţii de echivalenţă, precum şi distribuţia forţei tăietoare de bază pe înălţimea structurii.

Pentru rezolvarea acestei probleme se pot folosi atît metodele exacte de calcul, care din punct de vedere matematic sînt extrem de laborioase, cît şi cele aproximative care introduc o serie întreagă de ipoteze simplificatoare ce limitează valabilitatea practică a rezultatelor.

[1]) Publicată şi în Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. appl., (în limba engleză) **12**, 5 (1967)

Metoda de calcul care face obiectul acestei lucrări are la bază metoda generală a deplasărilor, utilizîndu-se în acest scop rigidităţile relative dintre două niveluri consecutive. Se ajunge în final la o formulă de recurenţă între ordonatele modurilor de vibraţie prin folosirea căreia, ţinînd seama de condiţiile iniţiale specifice fiecărui mod de vibraţie în parte, se determină prin încercări succesive caracteristica de frecvenţă şi ordonatele corespunzătoare. Efectuarea încercărilor, care de fapt constituie o operaţie de triere a soluţiilor posibile corespunzătoare unei anumite forme de oscilaţie, se poate face într-un timp record utilizînd un calculator electronic cifric.

Programul este unic, indiferent de numărul gradelor de libertate dinamice ale structurii, precum şi de ordinul frecvenţei ce urmează a fi calculată.

2. BAZA TEORETICĂ A METODEI

Considerînd structura etajată din figura 1 se poate scrie următoarea relaţie între ordonatele succesive ale unui anumit mod de vibraţie:

$$Y_i = Y_{i+1} - \Delta Y_{i,i+1}. \tag{1}$$

Dacă în această expresie s-ar explicita termenul $\Delta Y_{i,i+1}$ problema ar fi practic rezolvată întrucît prin aproximări succesive este posibilă determinarea modurilor de vibraţie, precum şi a frecvenţelor naturale, întrucît acest termen depinde, după cum se va vedea în continuare, de rigidităţile relative dintre două niveluri consecutive şi de caracteristica de frecvenţă.

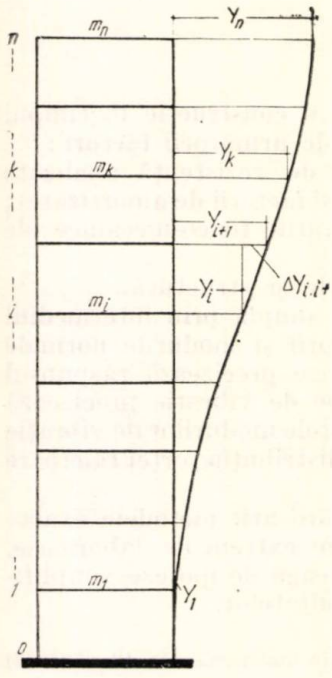


Fig. 1

Înainte de a dezvolta consideraţiile teoretice propriu-zise, trebuie menţionat că pentru calculul rigidităţilor relative dintre două niveluri consecutive s-a introdus ipoteza simplificatoare că influenţa deplasării unui şir de stîlpi corespunzători unui anumit etaj se manifestă numai asupra elementelor elastice ale etajelor adiacente. Astfel rigiditatea dintre nivelurile i şi $i+1$ (fig. 2) notată cu $R_{i,i+1}$ se defineşte ca fiind forţa necesară care produce o deplasare relativă unitară între cele două niveluri. Pentru calculul acestei rigidităţi, în baza ipotezei mai sus enunţate, se consideră că efectul se localizează numai între etajele vecine celui considerat ceea ce revine la a admite schema statică de calcul în care se consideră că riglele de la nivelurile $i-1$ şi $i+2$ au rigiditate infinită. Erorile care le introduce această ipoteză sînt sub 5%, ceea ce este admisibil din punct de vedere practic, ţinînd seama în special de sim-

plitatea rezolvării acestei probleme prin metoda de calcul elaborată. În lucrarea [1] s-au stabilit formule directe pentru calculul rigidităţilor relative în funcţie de caracteristicile elastice ale structurii.

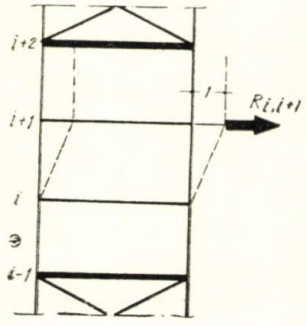


Fig. 2

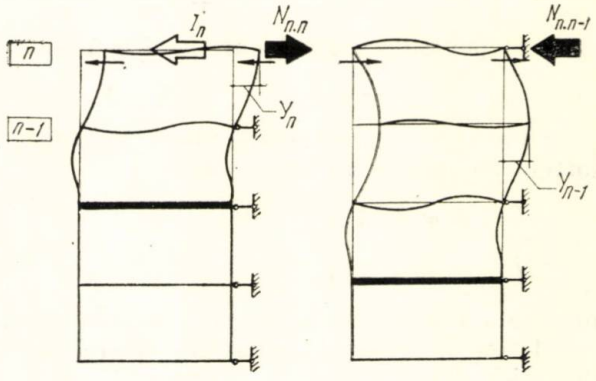


Fig. 3

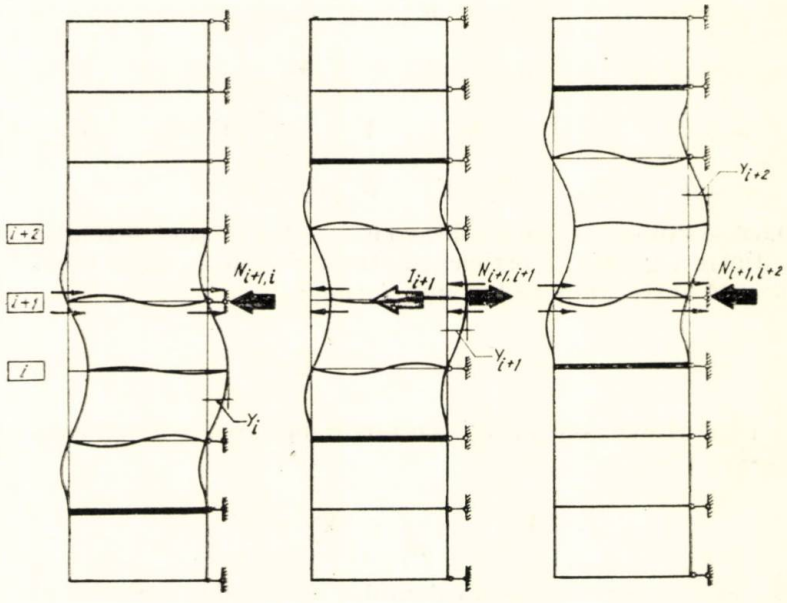


Fig. 4

S-a admis de asemenea ipoteza concentrării maselor la nivelul fiecărui etaj, ipoteză general admisă în seismologia inginerească.

În vederea rezolvării problemei propuse prin metoda generală a deplasărilor se consideră sistemul de bază în care toate deplasările corespunzătoare gradelor de libertate sînt blocate, iar nodurile sînt libere să se rotească (fig. 3 şi 4).

Ecuațiile de condiție care exprimă echilibrul dinamic pe direcția fiecărui grad de libertate se scriu în modul următor :

— pentru nivelul superior (n) :

$$-I_n + N_{n,n} - N_{n,n-1} = 0\,; \tag{2}$$

— pentru un nivel curent $(i+1)$:

$$-I_{i+1} + N_{i+1,i+1} - N_{i+1,i} - N_{i+1,i+2} = 0. \tag{3}$$

Considerînd oscilațiile libere armonice la valorile de amplitudine, forțele de inerție au expresiile :

$$\begin{aligned} I_n &= m_n \omega^2 Y_n\,, \\ &\vdots \\ I_{i+1} &= m_{i+1}\,\omega^2 Y_{i+1}, \end{aligned}$$

în care s-a notat cu m_n și m_{i+1} masele aferente nivelurilor n respectiv $i+1$, cu ω pulsația oscilațiilor libere, iar cu Y ordonatele modului de vibrație.

Exprimînd forțele elastice N în funcție de rigiditățile relative dintre două niveluri consecutive, ecuațiile de condiție pot fi scrise astfel :

$$\left.\begin{aligned} &(n) \quad -m_n\,\omega^2 Y_n + R_{n-1,n} Y_n - R_{n-1,n} Y_{n-1} = 0, \\ &\vdots \\ &(k) \quad -m_k\,\omega^2 Y_k + (R_{k-1,k} + R_{k,k+1}) Y_k - R_{k-1,k} Y_{k,k-1} - R_{k+1} Y_{k+1} = 0, \\ &\vdots \\ &(i+1) \quad -m_{i+1}\omega^2 Y_{i+1} + (R_{i,i+1} + R_{i+1,i+2}) Y_{i+1} - R_{i,i+1} Y_i - R_{i+1,i+2} Y_{i+2} = 0, \\ &\vdots \\ &(1) \quad -m_1\omega^2 Y_1 + (R_{0,1} + R_{1,2}) Y_1 - R_{1,2} Y_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dacă se sumează ecuațiile de la n la $i+1$ și se ține seama de reciprocitatea dintre rigidități (coeficienții sistemului de ecuații) rezultă relația de recurență între amplitudini sub forma :

$$Y_i = Y_{i+1} - \frac{\omega^2}{R_{i,i+1}} \sum_{k=i+1}^{n} m_k Y_k\,. \tag{5}$$

În felul acesta, s-a putut exprima deplasarea relativă care intervine în expresia (1) :

$$\Delta Y_{i,i+1} = \frac{\omega^2}{R_{i,i+1}} \sum_{k=i+1}^{n} m_k Y_k\,. \tag{6}$$

În vederea sistematizării calculului se introduc următoarele notații :

$$R_{i,i+1} = \eta_{i,i+1} R_0$$

și

$$m_k = \alpha_k m_0,$$

în care R_0 și m_0 reprezintă valori arbitrare ale rigidității relative și masei față de care se raportează celelalte mărimi. Coeficienții η și α vor fi numiți coeficienți de rigiditate, respectiv de masă și variază de la nivel la nivel.

Expresia termenului $\Delta Y_{i,i+1}$ din formula (6) mai poate fi transformată dacă se operează asupra perioadei și frecvenței de vibrație. Perioada naturală de oscilație poate fi exprimată astfel :

$$T = \psi \sqrt{\frac{m_0}{R_0}}, \tag{7}$$

unde ψ este un coeficient numeric și care se va numi *caracteristica de perioadă* care depinde de elementele elastice ale structurii, numărul gradelor de libertate dinamice și ordinul modului de vibrație.

Pulsația proprie ω, va rezulta :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\psi}\sqrt{\frac{R_0}{m_0}}$$

sau

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{\psi}\right)^2 \frac{R_0}{m_0} = \varphi \frac{R_0}{m_0}. \tag{8}$$

În formula (8), φ este de asemenea un coeficient numeric și care va fi numit *caracteristica de frecvență.*

Legătura dintre coeficienții ψ și φ este următoarea :

$$\psi = \frac{2\pi}{\sqrt{\varphi}}. \tag{9}$$

Revenind la formula (6), introducînd notațiile expuse mai sus, se obține

$$\Delta Y_{i,i+1} = \frac{\varphi \dfrac{m_0}{R_0}}{\eta_{ii,i+1} R_0} \sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k m_0 Y_k,$$

iar în final

$$\Delta Y_{i,i+1} = \frac{\varphi}{\eta_{ii,i+1}} \sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k Y_k. \tag{10}$$

Așa dar, formula de recurență (5) care va fi folosită în calculul practic al perioadelor (sau al frecvențelor) și a ordonatelor modurilor normale de vibrație, devine :

$$Y_i = Y_{i+1} - \frac{\varphi}{\eta_{ii,i+1}} \sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k Y_k. \tag{11}$$

Utilizarea acestei relații se face prin încercări, pornindu-se cu o amplitudine arbitrară pentru Y_n, de obicei egală cu unitatea, iar apoi introducînd diverse valori pentru caracteristica de frecvență φ, prin tatonări se obține acea valoare corespunzătoare modului de vibrație propus, ținînd seama de condițiile inițiale care caracterizează configurația geometrică a acestuia.

Cunoscînd valoarea numerică a caracteristicei de frecvență φ, cu ajutorul relației (9) se poate determina caracteristica de perioadă ψ și în consecință pulsația proprie, respectiv perioada proprie prin intermediul formulelor (8) și (7).

În privința calculului rigidităților relative dintre două niveluri consecutive, în anexa de la sfîrșitul lucrării se prezintă formule directe de calcul în funcție de caracteristicile elastice ale structurilor.

3. CRITERII DE CALCUL

Relația de recurență (11) stabilită anterior se aplică în mod general pentru determinarea frecvenței (sau perioadei) și a modului de vibrație corespunzător, indiferent de ordinul de oscilație a structurii. Fiecare ordin de oscilație este condiționat de configurația geometrică a modului în care se produce vibrația liberă a structurii.

Astfel, pentru modul fundamental căruia îi corespunde caracteristica de frecvență φ_I, toate amplitudinile vor trebui să fie de același semn iar $Y_0 = 0$. În cazul în care, una sau mai multe amplitudini schimbă de semn, rezultă că φ' ales este mai mare decît φ_I ($\varphi' > \varphi_I$). În consecință, încercarea următoare va fi efectuată cu o valoare φ'' mai mică decît cea inițială ($\varphi'' < \varphi'$). Dacă în urma efectuării calculului cu noua caracteristică de frecvență φ'' se obțin toate amplitudinile de același semn, iar $Y_0 \neq 0$, dar de semn identic cu celelalte amplitudini, reiese că φ'' propus este mai mic decît φ_I ($\varphi'' < \varphi_I$). Este deci necesar ca încercarea următoare să se facă cu o caracteristică de frecvență φ''' cuprinsă între φ' și φ''. În vederea accelerării convergenței procesului de iterație se recomandă ca pentru φ''' să se ia media aritmetică dintre φ' și φ''. Încercările se continuă pînă cînd sînt îndeplinite condițiile specifice configurației geometrice a modului fundamental.

În vederea stabilirii celui de-al doilea mod de vibrație al structurii și a caracteristicii de frecvență corespunzătoare φ_{II} se impun condițiile ca amplitudinile să schimbe o singură dată de semn, iar $Y_0 = 0$. Dacă se pornește cu o valoare inițială φ' (presupunînd că Y_n este pozitiv) se obține în final $Y_0 < 0$; rezultă că φ' este mai mic decît φ_{II}, adică $\varphi_I < \varphi' < \varphi_{II}$. În cazul în care una sau mai multe amplitudini sînt negative, în ipoteza că se menține $Y_n > 0$, iar Y_0 devine pozitiv, reiese că noua caracteristică de frecvență aleasă $\varphi'' > \varphi'$ este mai mare decît φ_{II}, adică $\varphi'' > \varphi_{II}$. Următoarea caracteristică de frecvență φ''' cu care se continuă calculul va fi mai mică decît φ'' dar mai mare decît φ', adică $\varphi' < \varphi''' < \varphi''$. Se recomandă, din considerentul menționat anterior, să se facă încercarea cu o valoare φ''' care reprezintă media aritmetică între φ' și φ''.

Pentru celelalte moduri superioare de oscilație se aplică același procedeu de triere a soluțiilor (fig. 5). Cu scopul simplificării calculului, amplitudinea Y_n se ia egală cu unitatea.

Cînd pentru determinarea unui anumit mod de oscilație rezultă din două încercări succesive valori Y_0 de semne contrarii dar foarte mici, respectînd legea de variație a amplitudinilor, valoarea finală a caracteris-

ticei de frecvență φ se poate calcula cu suficientă precizie prin interpolarea valorilor φ corespunzătoare celor două încercări efectuate.

În privința valorilor inițiale ale caracteristicii de frecvență φ, acestea fie că se aleg arbitrar, trierea făcîndu-se prin tatonări, fie bazați pe anumite formule aproximative pentru frecvență în vederea reducerii numărului de încercări.

Organizarea calculului numeric se poate face în tabel, iar operațiile privind aplicarea expresiei (11) se efectuează direct. Un asemenea calcul se prezintă în tabela 4.

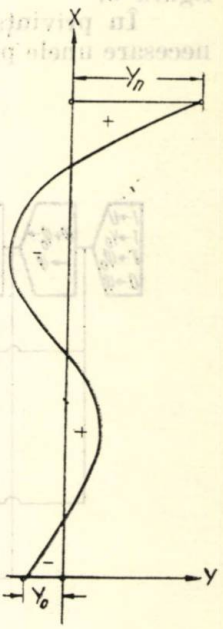


Fig. 5

4. REZOLVAREA PROBLEMEI CU AJUTORUL CALCULATORULUI ELECTRONIC CIFA 3

Pentru determinarea modurilor normale de vibrație și frecvențelor corespunzătoare, la structurile cu un număr mare de grade de libertate calculul numeric devine destul de laborios întrucît necesită numeroase încercări. De aceea s-a rezolvat această problemă cu ajutorul calculatorului electronic cifric CIFA 3, aparținînd Centrului de Calcul al Universității din București. Prin utilizarea programului de calcul la mașina electronică toată operația de triere a soluțiilor se face într-un timp extrem de scurt, obținîndu-se direct frecvența și ordonatele modului de vibrație propus a fi stabilit.

4. 1. PRINCIPALELE CARACTERISTICI ALE CALCULATORULUI ELECTRONIC CIFA 3

Calculatorul electronic cifric CIFA 3, de construcție românească, este de tip paralel cu virgulă fixă și operează cu numere binare de 31 cifre care corespund aproximativ numerelor zecimale cu 9 cifre după virgulă. Viteza de lucru a calculatorului, incluzînd accesul la memorie, este de 50 de instrucțiuni pe secundă.

În construcția calculatorului intră aproximativ 800 de tuburi electronice și 2 500 diode semiconductoare. Timpul necesar efectuării operațiilor aritmetice este de 300 μs. pentru adunare și scădere și 10 ms. pentru înmulțire și împărțire.

Memoria interioară are 512 adrese, iar timpul de acces mediu este de 10 ms. Introducerea în calculatorul CIFA 3 a programului și a datelor se face folosind bandă de hîrtie perforată. Citirea benzii se face cu ajutorul unui cititor de bandă electromecanic cu o viteză de aproximativ 15 caractere pe secundă. În cazul cînd se introduc numere, conversiunea lor din sistemul zecimal în cel binar se face de către mașină în momentul introducerii, folosind un program intern calibrat.

Introducerea numerelor sau instrucțiunilor se poate efectua și manual de la pupitru de comandă. Rezultatele se scriu pe hîrtie cu ajutorul unei mașini electrice de scris care imprimă 10 caractere pe secundă.

4. 2. PROGRAMUL DE CALCUL

Schema bloc a programului de calcul adoptat se prezintă în figura 6.

În privința modului practic de operare, la calculatorul cifric sînt necesare unele precizări care vor fi succint expuse în continuare. Valoarea

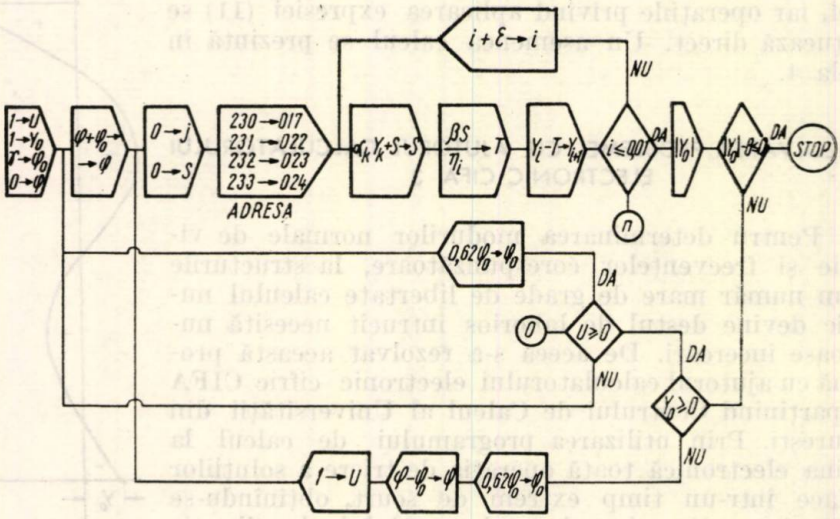


Fig. 6

caracteristicii de frecvență φ care caracterizează pulsația proprie corespunzătoare unui anumit mod de vibrație, trebuie să fie totdeauna mai mică decît unitatea pentru ca programul de calcul să fie aplicabil. Această cerință este necesară întrucît calculatorul CIFA 3 este cu virgulă fixă. În consecință va trebui ca prin anumite artificii de calcul să se asigure în prealabil că φ îndeplinește această condiție. Din considerente fizice rezultă $\varphi > 0$ și deci intervalul în care se găsește caracteristica de frecvență este cuprins între 0 și 1, adică $0 < \varphi < 1$.

În vederea accelerării procesului de căutare a soluției s-a efectuat o operație suplimentară prin intermediul căreia s-a putut stabili o margine superioară a intervalului de existență a valorilor φ.

5. EXEMPLE DE CALCUL

Metoda de calcul propusă a fost exemplificată prin rezolvarea unui număr de 11 structuri etajate cu 10 niveluri, avînd diverse rapoarte ale rigidităților și ale maselor. Se demonstrează astfel că programul nu suferă modificări chiar în cazul în care anumite structuri prezintă variații foarte pronunțate în distribuția rigidităților și maselor. Structurile analizate s-au numerotat de la 1 la 11.

În tabela 1 sînt dați pentru cele 11 structuri, coeficienții de rigiditate η și coeficienții de masă α, care constituie valorile inițiale de intrare

Tabela 1

Structura	coefic. \ nivel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	α	1,000	0,500	0,487	0,475	0,463	0,450	0,437	0,425	0,413	0,400
	η	1,000	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
2	α	1,000	0,500	0,487	0,475	0,463	0,450	0,437	0,425	0,413	0,400
	η	1,000	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
3	α	1,000	0,500	0,487	0,475	0,463	0,450	0,437	0,425	0,413	0,400
	η	1,000	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
4	α	1,000	0,500	0,475	0,450	0,425	0,400	0,375	0,350	0,325	0,300
	η	1,000	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
5	α	1,000	0,500	0,475	0,450	0,425	0,400	0,375	0,350	0,325	0,300
	η	1,000	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
6	α	1,000	0,500	0,475	0,450	0,425	0,400	0,375	0,350	0,325	0,300
	η	1,000	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
7	α	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,800
	η	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,800
8	α	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,600
	η	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,600
9	α	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,400
	η	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,400
10	α	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,400
	η	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,200
11	α	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,400
	η	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,200

în program. Pentru toate structurile s-au determinat ordonatele modului fundamental Yi (presupunînd ordonata maximă unitară, adică $Y_{10} = 1$) precum și caracteristicile de frecvență φ corespunzătoare. Rezultatele

Tabe

Nr. structurii	$\varphi_{\pm}$	Y_{10}	Y_9	Y_8	Y_7	Y_6	Y_5
	1	2	3	4	5	6	7
1	0,028.506	1,000.000	0,977.953	0.931.382	0,863.001	0,773.119	0,663.402
2	0,012.165	1,000.000	0,975.671	0,926.832	0,854.036	0,758.539	0,642.280
3	0,006.216	1,000.000	0,975.137	0,925.240	0,850.901	0,753.449	0,634.922
4	0,033.859	1,000.000	0,979.685	0,937.808	0,873.704	0,787.414	0,679.794
5	0,014.507	1,000.000	0,978.240	0,933.419	0,864.902	0,772.860	0,658.394
6	0,007.422	1,000.000	0,977.734	0,931.884	0,861.826	0,767.781	0,650.942
7	0,023.194	1,000.000	0,976.806	0,935.594	0,872.682	0,789.529	0,688.064
8	0,024.110	1,000.000	0,975.889	0,937.894	0,877.286	0,795.526	0,694.586
9	0,025.092	1,000.000	0,974.908	0,940.408	0,882.312	0,802.076	0,701.715
10	0,025.039	1,000.000	0,949.922	0,916.122	0,859.383	0,781.126	0,683.411
11	0,024.924	1,000.000	0,900.303	0,867.893	0,813.853	0,739.527	0,646.769

Tabela 3

Ordonata	α_i	Modul I	Modul II	Modul III	$\alpha_i\ Y_i^{I}\ Y_i^{II}$	$\alpha_i\ Y_i^{I}\ Y_i^{III}$	$\alpha_i\ Y_j^{II}\ Y_i^{III}$
1	2	3	4	5	6	7	8
Y_{10}	0,40	1,000.000	1,000.000	1,000.000	+0,400.000	+0,400.000	+0,400.000
Y_9	1,00	0,900.303	0,242.480	−0,288.932	+0,218.305	−0,260.126	−0,070.060
Y_8	1,00	0,867.893	0,120.807	−0,324.722	+0,104.847	−0,281.824	−0,039.229
Y_7	1,00	0,813.853	−0,023.744	−0,255.876	−0,019.324	−0,208.245	+0,006.075
Y_6	1,00	0,739.527	−0,163.799	−0,104.578	−0,121.134	−0,077.338	+0,017.130
Y_5	1,00	0,646.769	−0,272.833	+0,080.418	−0,176.460	+0,052.012	−0,021.941
Y_4	1,00	0,537.891	−0,330.198	+0,239.501	−0,177.610	+0,128.825	−0,079.083
Y_3	1,00	0,415.606	−0,325.030	+0,321.409	−0,135.084	+0,133.579	−0,104.467
Y_2	1,00	0,282.963	−0,258.308	+0,299.749	−0,073.092	+0,084.818	−0,077.427
Y_1	1,00	0,143.267	−0,142.667	+0,181.500	−0,020.439	+0,026.003	−0,025.894
Σ	—	—	—	—	0,000.009	−0,002.296	+0,005.104

obținute sînt prezentate în tabela 2. În coloana 13 s-au calculat caracteristicile de perioadă ψ utilizînd relația de legătură (9). Valorile care au fost astfel determinate s-au confruntat cu cele obținute în lucrarea [2] rezultînd unele diferențe sub $5^0/_{00}$. Precizia impusă calculatorului a fost de 10^{-6}.

Pentru structura nr. 11 s-au determinat și primele două moduri superioare, precum și caracteristicile de frecvență φ_{II} și φ_{III}, rezultînd :

$$\varphi_{II} = 0{,}189380 \quad \text{și} \quad \varphi_{III} = 0{,}322233.$$

la 2

Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0	ψ_I	$\sqrt{\varphi}$
8	9	10	11	12	13	14
0,536.174	0,394.426	0,241.727	0,082.137	0,000.001	37,222	0,1688
0,507.935	0,358.914	0,199.262	0,033.550	−0,000.000.4	56,969	0,11.029
0,498.112	0,346.616	0,184.616	0,016.879	0,000.000.5	79,690	0,078.845
0,552.611	0,408.587	0,251.421	0,085.742	−0,000.000.2	34,150	0,183.99
0,523.632	0,371.779	0,207.116	0,034.942	0,000.001	52,164	0,120.45
0,513.570	0,359.046	0,191.863	0,017.561	0,000.000.4	72,933	0,086.15
0,570.639	0,439.979	0,299.114	0,151.312	−0,000.000.1	41,258	0,152.29
0,576.899	0,445.303	0,302.971	0,153.333	−0,000.000.1	40,466	0,155.27
0,583.745	0,451.129	0,307.193	0,155.548	0,000.000.4	39,651	0,158.46
0,568.387	0,439.230	0,299.076	0,151.434	−0,000.000.1	39,707	0,158.24
0,537.891	0,415.606	0,282.963	0,143.267	0,000.000.1	39,802	0,157.86

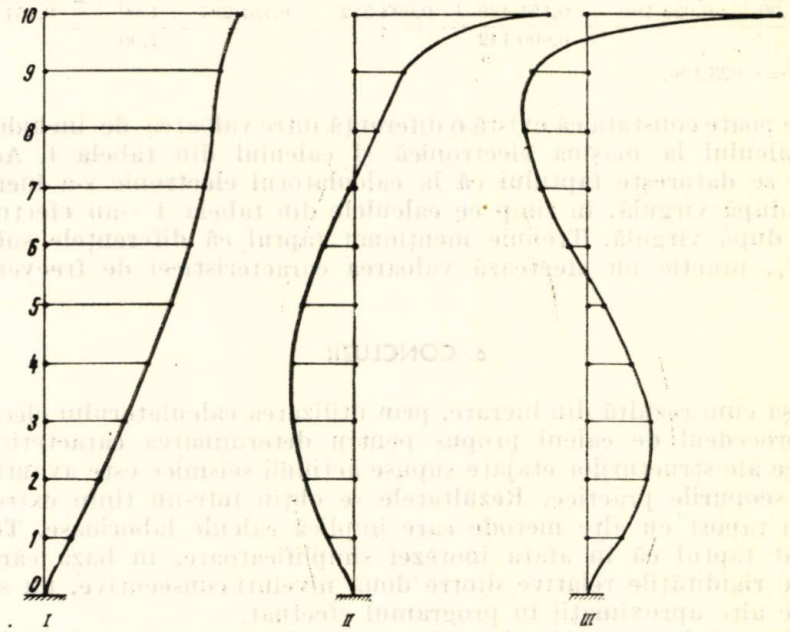


Fig. 7

În tabela 3 sînt date rezultatele obținute, verificîndu-se de asemenea condițiile de ortogonalitate ale modurilor proprii de vibrație. În figura 7

s-au reprezentat grafic variaţia primelor trei moduri de vibraţie corespunzătoare structurii nr. 11.

În cazul în care nu se dispune de un calculator electronic cifric, calculul numeric se poate conduce direct în tabel, în care se sistematizează toate operaţiile privind aplicarea formulei (11). Modul în care se efectuează calculul practic se exemplifică în tabela 4 pentru structura nr. 7, la care $\varphi_I = 0{,}023.190$.

Tabela 4

i	α_k	$\alpha_k \varphi_{\pm}$	Y_i	$\alpha_k \varphi Y_k$	$\sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k \varphi_i Y_k$	$\eta_{i,i}+1$	$\frac{1}{\eta_{ii,i}+1} \Sigma \alpha_k \varphi_I Y_k$
0	1	2	3	4	5	6	7
10	0,80	0,018.552	1,000 000	0,018 552	0,018 552	0,80	0,023 190
9	1,00	0,023 190	0,976 810	0,022 652	0,041 204	1,00	0,041 204
8	1,00	0,023 190	0,935 606	0,021 697	0,062 901	1,00	0,062 901
7	1,00	0,023 190	0,872 705	0,020 238	0,083 139	1,00	0,083 139
6	1,00	0,023 190	0,789 566	0,018 310	0,101 449	1,00	0,101 449
5	1,00	0,023 190	0,688 117	0,015 957	0,117 406	1,00	0,117 406
4	1,00	0,023 190	0,570 711	0,013 235	0,130 641	1,00	0,130 641
3	1,00	0,023 190	0,440 070	0,010 205	0,140 846	1,00	0,140 846
2	1,00	0,023 190	0,299 224	0,006 939	0,147 785	1,00	0,147 785
1	1,00	0,023 190	0,151 439	0,003 512	0,151 297	1,00	0,151 297
0			0,000 142			1,00	

$\varphi_I = 0{,}023.190$.

Se poate constata că există o diferenţă între valoarea de închidere Y_0 între calculul la maşina electronică şi calculul din tabela 4. Această abatere se datoreşte faptului că la calculatorul electronic s-a lucrat cu 9 cifre după virgulă, în timp ce calculele din tabela 4 s-au efectuat cu 6 cifre după virgulă. Trebuie menţionat faptul că diferenţele sub 10^{-3} între Y_0, practic nu afectează valoarea caracteristicei de frecvenţă φ.

6. CONCLUZII

Aşa cum rezultă din lucrare, prin utilizarea calculatorului electronic cifric procedeul de calcul propus pentru determinarea caracteristicilor dinamice ale structurilor etajate supuse acţiunii seismice este avantajoasă pentru scopurile practice. Rezultatele se obţin într-un timp extrem de scurt în raport cu alte metode care implică calcule laborioase. Trebuie remarcat faptul că în afara ipotezei simplificatoare, în baza căreia se stabilesc rigidităţile relative dintre două niveluri consecutive, nu se mai introduc alte aproximaţii în programul efectuat.

Ideea stabilirii unei relaţii de recurenţă între ordonatele succesive ale unei anumite forme de oscilaţie face obiectul unui studiu aparţinînd lui H. Holzer datînd din anul 1921 şi care se referă la vibraţiile de torsiune a arborilor. O reluare mai recentă a acestei probleme a fost făcută de către L.S. Jacobsen şi R.S. Ayre în lucrarea [3].

Programul de calcul stabilit în vederea determinării directe a caracteristicilor de frecvență precum și a ordonatelor modurilor normale de vibrație este ușor de aplicat, iar introducerea datelor inițiale nu ridică probleme deosebite pentru un specialist în tehnica utilizării calculatoarelor electronice [4], [5].

Studiul de față face parte dintr-un vast program de cercetări de seismologie inginerească ce se desfășoară la Catedra de mecanica construcțiilor (I) dn Institutul de construcții din București, în cadrul unui colectiv condus de acad. Stefan Bălan.

Autorii lucrării aduc mulțumirile lor, și pe această cale, colectivului Centrului de calcul al Universității București și în mod deosebit acad. Gr. C. Moisil, pentru sprijinul acordat.

ANEXĂ

Expresiile analitice necesare calculării rigidităților relative dintre două niveluri consecutive au fost stabilite în lucrarea [1]. În cele ce urmează se vor prezenta numai formulele de calcul, corespunzătoare cadrelor etajate.

Rigiditatea relativă dintre nivelurile j și k se poate exprima astfel:

$$R_{jk} = \eta_{jk} R_0,$$

în care R_0 reprezintă rigiditatea relativă de bază și are expresia:

$$R_0 = \frac{EI_0}{l_0^3},$$

iar η_{jk} este coeficientul de rigiditate care se calculează cu formula

$$\eta_{jk} = \frac{12}{\lambda_{jk}^2} \sum_{s=1}^{m} \rho_{jk}^s [1 - 0.75 (d_{jk}^s + d_{kj}^s - d_{jk}^s \cdot d_{kj}^s)].$$

Pentru primul nivel (0,1), coeficientul de rigiditate devine

$$\eta_{1,0} = \frac{12}{\lambda_{1,0}^2} \sum_{s=1}^{m} \rho_{1,0}^s [1 - 0.75 d_{1,0}^s].$$

Termenii și notațiile care intervin în aceste formule au următoarea semnificație:

$\lambda_{jk} = \frac{l_{jk}}{l_0}$ — raportul dintre lungimea efectivă, față de o lungime arbitrară;

$K_{jk} = \frac{I_{jk}}{I_0}$ — raportul dintre momentul de inerție efectiv, față de un moment de inerție arbitrar I_0;

$\rho_{jk} = \frac{K_{jk}}{\lambda_{jk}}$ — rigiditate convențională a barei j, k;

s — indicele afectat unui stîlp curent;
m — numărul total de stîlpi la nivelul j, k;

$d^s_{jk} = \frac{\rho^s_{jk}}{\Sigma \rho^s_j}$, $\qquad d^s_{kj} = \frac{\rho^s_{jk}}{\Sigma \rho^s_k}$ — coeficienţi de distribuţie;

$\Sigma \rho^s_j = \rho^s_{jk} + \rho^s_{j,j-1} + \rho^j_{s,s-1} + \rho^j_{s,s+1}$ — rigiditatea convenţională a nodului j;

$\Sigma \rho^s_k = \rho^s_{jk} + \rho^s_{k,k+1} + \rho^k_{s,s-1} + \rho^k_{s,s+1}$ — rigiditatea convenţinală a nodului k;

În vederea precizării acestor notaţii se poate urmări figura 8, care reprezintă o reţea de stîlpi şi grinzi a unei structuri etajate.

În formulele de calcul ale rigidităţilor poate fi introdusă şi influenţa zidăriei, fie în cazul cînd aceasta are rol de rezistenţă, fie în cazul în care nu este portantă. Metoda poate fi extinsă şi în cazul cînd structura de rezistenţă este alcătuită din diafragme din beton armat.

Spre a se evita numărul de încercări pentru găsirea caracteristicii de frecvenţă sau de perioadă, pot fi utilizate unele formule directe. În acest sens există numeroase formulări dintre care pentru modul fundamental se recomandă cele stabilite în lucrarea [1], care are la bază un calcul analitic (rezultatele diferind cu maximum 5% faţă de valorile obţinute printr-un calcul exact) sau formulele orientative recomandate în lucrarea [6].

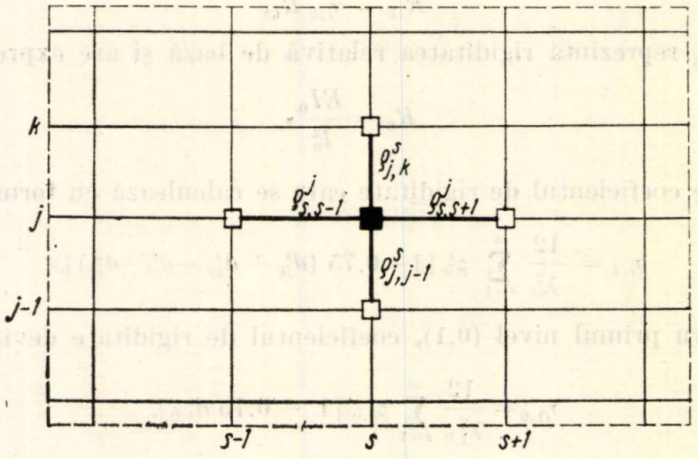


Fig. 8

Pentru aprecierea frecvenţelor de ordin superior se poate folosi formula [7]:

$$\omega_r = 1{,}3r\ \omega_I \qquad (r \geqslant 2),$$

unde cu r s-a notat ordinul frecvenţei de vibraţie.

Calculele efectuate au arătat că aplicarea acestei formule dă rezultate satisfăcătoare.

Primită la redacţie la 9 februarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Mihail Ifrim, *Contributions to the Seismic Analysis of Frame Structures. Proceedings of Third World Conference on Earthquake Engineering*, Auckland-Wellington, New-Zealand, January-February 1965.
2. Raul Husid, *Cálculo del periodo fundamental de vibración de edificios con rigidez de corte*, Revista del IDIEM, Chile, vol. 2, agosto 1963.
3. L.S. Jacobsen, R.S. Ayre, *Engineering Vibrations Mc. Graw Hill*, New York, 1958.
4. A.I. Kitov, M.A. Krinitki, *Maşini electronice cifrice în programare*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1963.
5. R.E. Belman, S.E. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.
6. G.W. Housner, A.G. Brady, *Natural Periods of Vibrations of Buildings*. Journal of the Engineering Mechanics Division. Proc. ASCE, EM 4., August 1965.
7. Mihail Ifrim, *Dynamic Analysis of Tall Structures Subjected to Earthquake Motion*, Proceedings of Second World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo-Kyoto, June 1960.

CONTRIBUȚII LA SISTEMATIZAREA CALCULULUI LA FORȚE ORIZONTALE AL DIAFRAGMELOR CU GOLURI LA CONSTRUCȚII MULTIETAJATE

EINAR KEINTZEL
I.S.P.A.C. Brașov

539.4

Se tratează calculul deplasărilor sub acțiunea forțelor orizontale ale diafragmelor cu goluri care rigidizează construcțiile multietajate.
Se dau tabele care ușurează integrarea numerică a ecuației diferențiale a lunecărilor, rezolvarea acestei ecuații fiind necesară pentru calculul deplasărilor diafragmelor cu goluri. Procedeele de calcul date în lucrare se aplică, de exemplu, la repartizarea sarcinilor orizontale asupra elementelor verticale care rigidizează o construcție sau la determinarea vibrațiilor proprii ale construcțiilor.

Calculul construcțiilor multietajate la forțe orizontale (vînt, cutremur) necesită de multe ori determinarea deplasărilor orizontale ale elementelor verticale care rigidizează o construcție (cadre, diafragme cu și fără goluri), în diferite puncte pe înălțimea construcției, sub acțiunea unor sarcini orizontale avînd o distribuție oarecare. Necesitatea unui calcul de acest fel apare, de exemplu, la considerarea conlucrării elementelor verticale de rigidizare sau la determinarea vibrațiilor proprii ale construcțiilor. Deoarece calculul deplasărilor și al forțelor orizontale care acționează un element de rigidizare se face în cazul general prin aproximații succesive [7], [10], [18], deci se repetă de mai multe ori, sistematizarea judicioasă a acestui calcul are o importanță apreciabilă pentru proiectarea practică. În cazul cadrelor etajate, deplasările orizontale se determină în mod avantajos fie cu ajutorul relațiilor din [10], fie, în cazul cadrelor multietajate, înlocuind cadrul printr-o bară cu deformații de lunecare preponderente [11]. În cazul diafragmelor pline se poate folosi una dintre metodele de integrare numerică a ecuației diferențiale a liniei elastice a unei bare cu deformații de încovoiere preponderente. În cazul diafragmelor cu goluri,

calculul devine mai complicat, deoarece trebuie luate în considerație atît deformațiile de încovoiere, cît și cele de lunecare.

În lucrarea de față se dau relații și tabele cu ajutorul cărora se sistematizează și se simplifică calculul deplasărilor orizontale ale diafragmelor cu goluri.

1. RELAȚII DE BAZĂ

Deformațiile diafragmelor cu un șir de goluri depinzînd atît de lunecarea $L(x)$, preluată de un buiandrug situat la nivelul x, cît și de forța axială $N(x)$ în elementele verticale ale diafragmei, înclinarea $y'(x)$ a tangentei la linia elastică a diafragmei este

$$y'(x) = y'_L + y'_N, \tag{1}$$

unde $y'(L)$ este înclinarea corespunzînd lunecărilor L (adică efectului de cadru al diafragmei [2]) și $y'(N)$ este înclinarea corespunzînd forțelor axiale N (adică încovoierii generale a diafragmei).

Considerînd diafragma din figura 1, se introduc următoarele notații:

A_1, A_2 — ariile secțiunilor celor două elemente verticale ale diafragmei;

I_1, I_2 — momentele de inerție ale acestor elemente;

A_b, I_b — aria secțiunii și momentul de inerție al buiandrugilor între goluri;

$S = \dfrac{2c}{\dfrac{1}{A_1} + \dfrac{1}{A_2}}$ — momentul static al ariei A_1 sau A_2 față de centrul de greutate al diafragmei;

$I = I_1 + I_2 + 2\,cS$ — momentul de inerție al diafragmei;

$AG_{red} = \dfrac{1}{\dfrac{a^2}{3EI_b} + \dfrac{1{,}2}{A_bG}}$ — rigiditatea la lunecare a fîșiei prin care se înlocuiește după [4], [5] zona șirului cu goluri, stabilită pentru materiale elastice și omogene. În [4], [6] se recomandă, pe baza unor cercetări experimentale, ca în cazul diafragmelor de beton armat să se reducă valoarea AG_{red} cu coeficientul 0,25, ținînd cont astfel de fisurarea buiandrugilor;

E, G — modulul de elasticitate longitudinal și cel transversal.

Folosind aceste notații, din expresia pentru $y'(x)$ din [3], [9], relația (VIII. 1″) rezultă

$$y'_L = \frac{a}{c}\frac{L}{AG_{red}}, \tag{2}$$

$$y'_N = \frac{1}{SE}\int_0^x N\,du, \tag{3}$$

unde

$$N(x) = \frac{1}{h}\int_x^H L\,du. \tag{4}$$

Funcția $L(x)$ se determină după [3], [4], [5], [9] în funcție de forța tăietoare $Q(x)$, acționînd diafragma în ansamblu, din ecuația diferențială

$$L'' - \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 L = -\left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 \frac{Sh}{I} Q, \tag{5}$$

punînd condițiile la limită $L(0) = 0$, $L'(H) = 0$.

Parametrul α, numit și „indice de monolitism al diafragmei", se determină din expresia

$$\alpha = H \sqrt{\frac{AG_{red}}{2ahE}\left[\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{2c(2c-2a)}{I_1 + I_2}\right]}, \tag{6}$$

dată în [4] și [5]. Menționăm că parametrul α se folosește și în lucrările [3], [9] și [15], în aceste lucrări indicîndu-se însă o expresie mai puțin exactă decît expresia (6). În [3], [9] se generalizează coeficientul α și pentru diafragme cu mai multe șiruri de goluri.

În [3], [4], [5], [9] și [15] se dau soluții ale ecuației diferențiale (5) pentru diferite cazuri particulare de încărcare. Pentru cazul general de încărcare orizontală a diafragmei, caz ce intervine, de exemplu, la considerarea conlucrării a mai multor diafragme cu valori α diferite, valorile L se vor determina prin integrarea numerică, cu ajutorul diferențelor finite, a ecuației diferențiale (5), adică prin rezolvarea sistemului de ecuații

$$\begin{aligned}
L_1 - t\,L_2 &= F_1,\\
-t\,L_1 + L_2 - t\,L_3 &= F_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-t\,L_{n-2} + L_{n-1} - t\,L_n &= F_{n-1},\\
-t\,L_{n-1} + L_n &= F_n,
\end{aligned} \tag{7}$$

unde s-a notat

$$t = \frac{1}{2 + \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 (\Delta x)^2},$$

$$F_m = \frac{\left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 (\Delta x)^2}{2 + \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 (\Delta x)^2} \frac{Sh}{I} Q_m.$$

Valorile L_m fiind calculate, se determină valorile N_m prin calculul numeric, de exemplu după formula dreptunghiului, a integralei din expresia (4):

$$N_m \approx \frac{\Delta x}{h} \sum_{p=m}^{n} L_p. \tag{8}$$

De asemenea se va calcula numeric integrala din expresia (3)

$$\int_0^x N\mathrm{d}u \approx \Delta x \sum_{p=0}^{m} N_p. \tag{9}$$

La calculul solicitărilor corespunzînd conlucrării diafragmelor cu goluri cu diafragme pline, este comod ca înclinarea $y'(x)$ a tangentei la linia elastică a diafragmelor pline să se exprime tot prin forţele tăietoare Q. În acest scop de integrează relaţia

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

pe intervalul (0, x), introducînd

$$M(x) = \int_x^H Q(v)\ \mathrm{d}v.$$

şi se obţine

$$y'(x) = \frac{1}{EI}\int_0^x \left(\int_u^H Q\ \mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u. \tag{10}$$

Trecînd la diferenţe finite, expresia (10) devine

$$y'_m \approx \frac{(\Delta x)^2}{EI}\sum_{q=0}^{m}\sum_{p=m}^{n} Q_p. \tag{11}$$

Dacă se ţine cont şi de rotirea fundaţiilor, efect foarte important la diafragme [12], [16], la înclinările $y'(x)$, calculate după expresia (1) sau (10), se adaugă unghiul de rotire a fundaţiei :

$$\theta = \frac{M}{K_0 J},$$

unde

M este momentul la nivelul fundaţiei,
K_0 — coeficientul de tasare la rotirea fundaţiei,
J — momentul de inerţie la baza fundaţiei.

Expresia rigidităţii $K_0\ J$ se poate înlocui şi prin alte expresii mai exacte [16].

2. REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAŢII (7)

Examinînd valoarea coeficienţilor t din sistemul de ecuaţii (7), se constată că, pentru valori α din apropierea limitei inferioare a domeniului ($1 < \alpha < 10$) pentru care se recomandă în [9], utilizarea ecuaţiei diferenţiale (5) coeficientul t se poate apropia foarte mult de 0,5. Aplicînd criteriul lui Wittmeyer, rezultă că pentru aceste cazuri convergenţa iteraţiei la rezolvarea sistemului de ecuaţii (7) prin aproximaţii succesive ar deveni extrem de lentă. Acest lucru se poate observa şi direct, ţinînd cont

de faptul că sistemul de ecuații (7) corespunde, după [2], sistemului de ecuații pentru calculul de cadru al diafragmei prin metoda distorsiunilor [1]. Stîlpii cadrului (elementele verticale ale diafragmei) fiind pentru valori α mici mult mai rigizi decît riglele (buiandrugii), convergența calculului iterativ al cadrului prin metoda distorsiunilor va fi pentru valori α mici foarte lentă. Rezultă că calculul iterativ este impropriu pentru rezolvarea sistemului de ecuații (7). Se menționează de altfel că și calculul diafragmelor cu goluri prin metoda forțelor [8] duce la un sistem de ecuații de forma sistemului (7), cu coeficientul t apropiat de 0,5, prezentînd o convergență foarte slabă la rezolvarea iterativă (exemplul de calcul din [8], anexa, tabloul *C*).

O metodă avantajoasă pentru rezolvarea sistemului de ecuații (7) este cea dată în [17], [14] pentru sisteme de ecuații cu matrice Jacobi. Aplicînd această metodă la sistemul de ecuații (7), acest sistem de ecuații se rezolvă în modul următor. Se calculează „coeficienții de transmitere la stînga" :

$$\tau_{2,1} = t,$$

$$\tau_{3,2} = \frac{t}{1 - t\,\tau_{2,1}},$$

$$\tau_{4,3} = \frac{t}{1 - t\,\tau_{3,2}},$$

. . . . . .

și „coeficienții de transmitere la dreapta" :

$$\tau'_{n-1,\,n} = t,$$

$$\tau'_{n-2,\,n-1} = \frac{t}{1 - \tau'_{n-1,\,n}},$$

$$\tau'_{n-3,\,n-2} = \frac{t}{1 - t\,\tau'_{n-2,\,n-1}},$$

. . . . . .

Se observă că datorită simetriei matricei sistemului de ecuații (7) față de ambele diagonale și tabloul coeficienților τ este simetric cu tabloul coeficienților τ'.

Se calculează „valorile inițiale" ale necunoscutelor :

$$L_m^0 = \frac{F_m}{1 - t(\tau_{m,\,m-1} + \tau'_{m,\,m+1})} = \sigma_m F_m.$$

Se calculează valorile finale L_m, adunînd la valorile inițiale L_m^0 toate celelalte valori inițiale L_p^0, înmulțite succesiv cu toți coeficienții de transmitere dintre p și m în sensul de la p la m. Aceste operații se pot sistematiza, așa cum se arată în figura 3, prin două șiruri de transmiteri : un șir de transmiteri de la stînga la dreapta, începînd de la L_1

pînă la L_n, cu ajutorul coeficienţilor τ' care conduc la valorile L'_m şi un al doilea şir de transmiteri de la dreapta la stînga, cu ajutorul coeficienţilor de transmitere τ care conduc la valorile L''_m. Soluţia finală L_m se obţine din însumarea

$$L_m = L^0_m + L'_m + L''_m.$$

Pentru a simplifica rezolvarea sistemului de ecuaţii (7) prin metoda indicată, se dau în anexă valorile τ, τ' şi σ, tabulate în funcţie de t pentru cazul împărţirii intervalului $(0, H)$ în 10 părţi egale ($n = 10$, $\Delta x = 0{,}1\ H$). Tabularea s-a făcut pentru valori $0{,}33 < t < 0{,}50$, corespunzînd valorilor $10 > \alpha > 0$.

3. EXEMPLE DE CALCUL

3.1. Se determină repartizarea unei forţe concentrate $Q = 11\ t$, aplicată la vîrful unei construcţii cu 16 niveluri la diafragmele de beton armat care rigidizează construcţia. Construcţia este rigidizată prin două diafragme pline (tip A, fig. 2) şi 9 diafragme cu un şir de goluri (tip B, fig. 2). Înălţimea unui nivel este $h = 3{,}00$ m, înălţimea buiandrugilor peste goluri fiind 0,50 m.

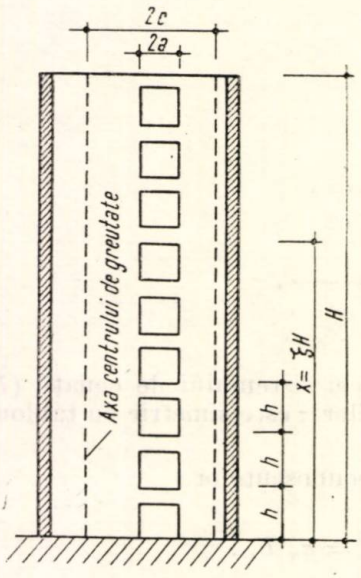


Fig. 1

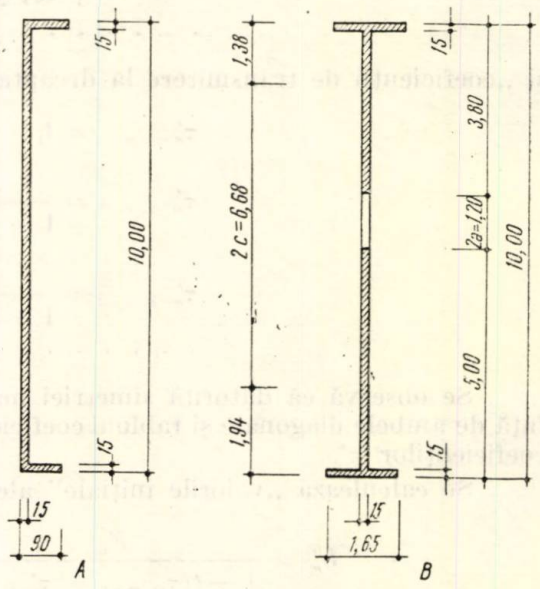


Fig. 2

Pentru diafragma tip A se obţine

$A = 1{,}725\ \text{m}^2$,

$I = 17{,}95\ \text{m}^4$.

Pentru diafragma tip B se obține

$A_1 = 0{,}975\ \text{m}^2$,

$A_2 = 0{,}795\ \text{m}^2$,

$I_1 = 2{,}580\ \text{m}^4$,

$I_2 = 1{,}222\ \text{m}^4$;

$$S = \frac{6{,}68}{\frac{1}{0{,}975} + \frac{1}{0{,}795}} = 2{,}92\ \text{m}^3,$$

$$I = 2{,}580 + 1{,}222 + 6{,}68 \times 2{,}92 = 23{,}3\ \text{m}^4,$$

$A_b = 0{,}075\ \text{m}^2$

$I_b = 0{,}00156\ \text{m}^4$

$$AG_{\text{red}} = \frac{E}{\frac{0{,}6^2}{3 \times 0{,}00156} + \frac{1{,}2}{0{,}075 \times 0{,}4}} = \frac{E}{117}.$$

Diafragma fiind din beton armat, se consideră în calcul următoarele valori:

$$AG_{\text{red}} = \frac{0{,}25\,E}{117} = \frac{E}{468},$$

$$\alpha = 16 \times 3{,}0 \sqrt{\frac{E}{468 \times 1{,}20 \times 3{,}0\,E}\left[\frac{1}{0{,}975} + \frac{1}{0{,}795} + \frac{6{,}68(6{,}68 - 1{,}20)}{2{,}580 + 1{,}222}\right]} = 4{,}03,$$

(relația (6))

$$t = \frac{1}{2 \times 4{,}03^2 \left(\frac{0{,}1\,H}{H}\right)^2} = 0{,}460,$$

$$F_m = \frac{4{,}03^2 \times 0{,}01}{2 + 4{,}03^2 \times 0{,}01} \frac{2{,}92 \times 3}{23{,}3}\, Q_m = 0{,}0278\, Q_m.$$

Se calculează pentru diafragmele tip A și tip B înclinările $E\,y'_m$ și rigiditățile relative ale tronsoanelor p, q:

$$R_{p,q} = \frac{Q_{p,q}}{E\,y'_{p,q}},$$

unde înclinarea $E\,y'_{p,q}$ reprezintă media aritmetică a înclinărilor Ey'_p și Ey'_q.

Pentru diafragme tip A, relația (11) devine

$$Ey'_m = \frac{4{,}8^2}{17{,}95} \sum_{q=0}^{m} \sum_{p=m}^{10} Q_p = 1{,}28 \sum_{q=0}^{m} \sum_{p=m}^{10} Q_p.$$

În tabela 1 se calculează pentru diafragma tip A, încărcată în prima aproximație cu o sarcină unitară aplicată la vîrf, valorile Ey'_m și $R_{p,q}$.

Tabela 1

m	Q_m	$\sum_{p=m}^{10} Q_p$	$\sum_{q=0}^{m}\sum_{p=m}^{10} Q_p$	$E\,y'_m$	$E\,y'_{p,q}$	$R^A_{p,q}$
0	1,00	10,00	0,00	0,0	6,4	0,1560
1	1,00	9,00	10,00	12,8	18,6	0,0538
2	1,00	8,00	19,00	24,3	29,4	0,0340
3	1,00	7,00	27,00	34,5	39,0	0,0256
4	1,00	6,00	34,00	43,5	47,5	0,0211
5	1,00	5,00	40,00	51,1	54,3	0,0184
6	1,00	4,00	45,00	57,5	60,0	0,0167
7	1,00	3,00	49,00	62,6	64,6	0,0155
8	1,00	2,00	52,00	66,5	68,0	0,0147
9	1,00	1,00	54,00	69,0	69,6	0,0144
10	1,00	0,00	55,00	70,2		

Pentru diafragma tip B încărcată în prima aproximație cu o sarcină unitară aplicată la vîrf, se calculează valorile inițiale ale necunoscutelor L_m cu ajutorul valorilor σ_m din anexa 3 :

$$L_1^0 = 1{,}437 \times 0{,}0278 \times 1 = 0{,}0400,$$
$$L_2^0 = 2{,}062 \times 0{,}0278 \times 1 = 0{,}0574,$$
$$L_3^0 = 2{,}331 \times 0{,}0278 \times 1 = 0{,}0647,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

În figura 3 s-au trecut valorile τ, τ' și L_m^0 pe o schemă de transmiteri și s-au calculat în prima aproximație (notată cu I) valorile L_m. Cu ajutorul acestor valori se calculează în tabelele 2 și 3 valorile Ey'_m și $R_{p,q}$ pentru diafragma tip B, folosind expresiile

$$Ey'_L = \frac{1{,}20}{6{,}68} \times 468\ L = 84,\ L, \qquad \text{(vezi relația (2))}$$

$$N_m = \frac{4{,}8}{3{,}0} \sum_{p=m}^{10} L_p = 1{,}6 \sum_{p=m}^{10} L_p, \qquad \text{(vezi relația (8))}$$

$$Ey'_N = \frac{4{,}8}{2{,}92} \sum_{p=0}^{m} N_p = 1{,}64 \sum_{p=0}^{m} N_p. \qquad \text{(vezi relațiile (3) și (9))}$$

Repartizarea forței tăietoare totale $Q = 11t$ la cele două tipuri de diafragmă se face cu relațiile

$$Q^A_{p,q} = \frac{R^A_{p,q}}{R\,2^A_{p,q} + 9\,R^B_{p,q}}\,Q,$$

$$Q^B_{p,q} = \frac{R^B_{p,q}}{2\,R^A_{p,q} + 9\,R^B_{p,q}}\,Q,$$

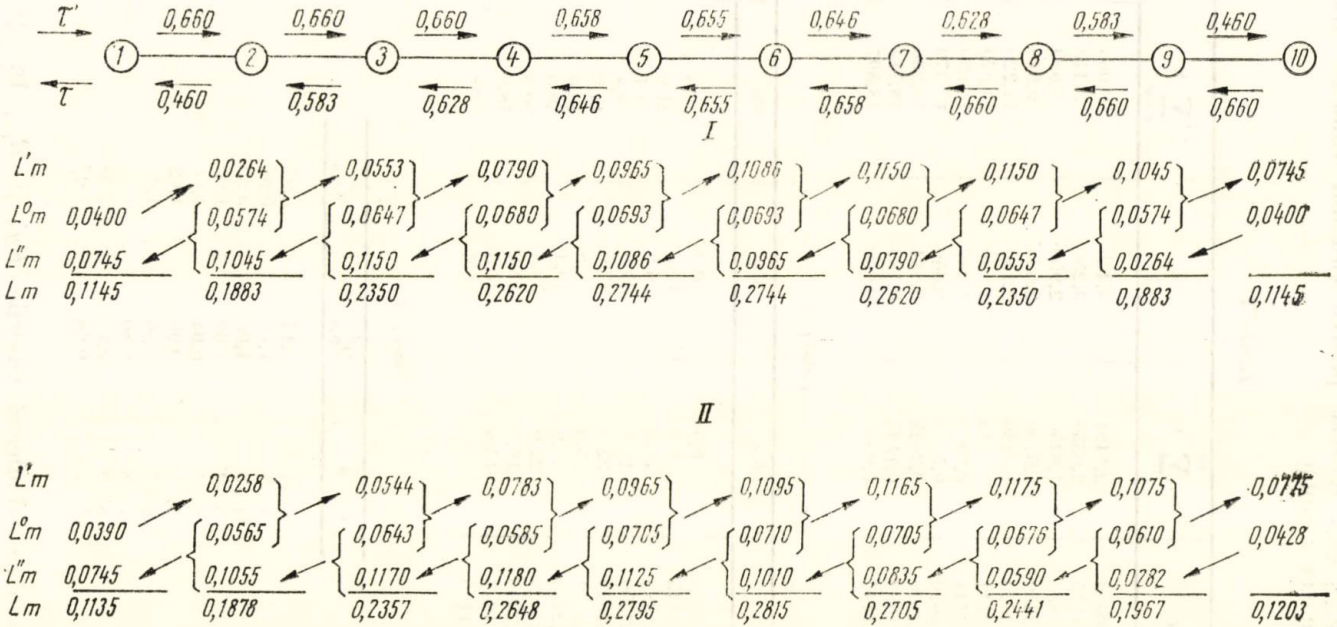

τ'
τ
0,660
0,660
0,660
0,658
0,655
0,646
0,628
0,583
0,460
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0,460
0,583
0,628
0,646
0,655
0,658
0,660
0,660
0,660
I
L'm
L°m
L''m
Lm
0,0400
0,0745
0,1145
0,0264
0,0574
0,1045
0,1883
0,0553
0,0647
0,1150
0,2350
0,0790
0,0680
0,1150
0,2620
0,0965
0,0693
0,1086
0,2744
0,1086
0,0693
0,0965
0,2744
0,1150
0,0680
0,0790
0,2620
0,1150
0,0647
0,0553
0,2350
0,1045
0,0574
0,0264
0,1883
0,0745
0,0400
0,1145
II
L'm
L°m
L''m
Lm
0,0390
0,0745
0,1135
0,0258
0,0565
0,1055
0,1878
0,0544
0,0643
0,1170
0,2357
0,0783
0,0585
0,1180
0,2648
0,0965
0,0705
0,1125
0,2795
0,1095
0,0710
0,1010
0,2815
0,1165
0,0705
0,0835
0,2705
0,1175
0,0676
0,0590
0,2441
0,1075
0,0610
0,0282
0,1967
0,0775
0,0428
0,1203

Fig. 3

Rezultatele acestei repartizări s-au trecut în tabela 4.

Valorile $Q^A_{p,q}$, $Q^B_{p,q}$ servesc pentru calculul valorilor Ey'_m, $R_{p,q}$ și $Q_{p,q}$ în aproximația a doua.

Tabela 2

m	L_m	$\sum_{p=m}^{10} L_p$	N_m	$\sum_{p=0}^{m} N_p$	$E y'_{mN}$
0	0,0000	2,1484	3,440	0,000	0,0
1	0,1145	2,0339	3,250	3,440	5,7
2	0,1883	1,8456	2,950	6,690	11,0
3	0,2350	1,6106	2,580	9,640	15,8
4	0,2620	1,3486	2,150	12,220	20,0
5	0,2744	1,0742	1,720	14,370	23,5
6	0,2744	0,7998	1,280	16,090	26,4
7	0,2620	0,5378	0,860	17,370	28,5
8	0,2350	0,3028	0,484	18,230	29,9
9	0,1883	0,1145	0,183	18,714	30,7
10	0,1145	0,0000	0,000	18,897	31,0

Tabela 3

m	L_m	Ey'_{mL}	Ey'_m	$Ey'_{p,q}$	$R^B_{p,q}$
0	0,0000	0,0	0,0		
				7,6	0,1320
1	0,1145	9,6	15,3		
				21,0	0,0476
2	0,1883	15,8	26,8		
				31,1	0,0322
3	0,2350	19,7	35,5		
				38,8	0,0258
4	0,2620	22,0	42,0		
				44,2	0,0227
5	0,2744	23,0	46,5		
				48,0	0,0209
6	0,2744	23,0	49,4		
				50,0	0,0200
7	0,2620	22,0	50,5		
				50,0	0,0200
8	0,2350	19,7	49,6		
				48,0	0,0208
9	0,1883	15,8	46,5		
				43,2	0,0232
10	0,1145	9,6	40,6		

Tabela 4

$p-q$	$Q^A_{p,q}$	$Q^B_{p,q}$
0—1	1,14	0,97
1—2	1,10	0,98
2—3	1,05	0,99
3—4	1,00	1,00
4—5	0,94	1,01
5—6	0,90	1,02
6—7	0,86	1,03
7—8	0,80	1,04
8—9	0,75	1,06
9—10	0,66	1,07

În tabela 5 se calculează valorile Ey'_m și $R_{p,q}$ în aproximația a doua pentru diafragma tip A încărcată cu forțele tăietoare $Q^A_{p,q}$ din tabela 4.

Pentru diafragma B se calculează valorile inițiale L_m^0 în aproximația a doua, folosind forțele tăietoare $Q_{p.q}^B$ din tabela 4 :

$$L_1^0 = 1{,}437 \times 0{,}0278 \times 0{,}975 = 0{,}0390,$$
$$L_2^0 = 2{,}062 \times 0{,}0278 \times 0{,}985 = 0{,}0565,$$
$$L_3^0 = 2{,}331 \times 0{,}0278 \times 0{,}995 = 0{,}0643,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tabela 5

m	Q_m	$\sum_{p=m}^{10} Q_p$	$\sum_{q=0}^{m}\sum_{p=m}^{10} Q_p$	Ey'_m	$Ey'_{p.q}$	$R_{p.q}^A$
0	1,14	8,94	0,00	0,0		
1	1,12	7,82	8,94	11,4	5,7	0,2000
2	1,07	6,75	16,76	21,4	16,4	0,0670
3	1,02	5,73	23,51	30,0	25,7	0,0408
4	0,97	4,76	29,24	37,4	33,7	0,0296
5	0,92	3,84	34,00	43,5	40,4	0,0233
6	0,88	2,96	37,84	48,5	46,0	0,0196
7	0,83	2,13	40,80	52,1	50,3	0,0171
8	0,77	1,36	42,93	54,8	51,7	0,0155
9	0,70	0,66	44,29	56,6	55,7	0,0135
10	0,66	0,00	44,95	47,4	52,0	0,0127

Tabela 6

m	L_m	$\sum_{p=m}^{10} L_p$	N_m	$\sum_{p=0}^{m} N_p$	Ey'_{mN}
0	0,0000	2,1944	3,500	0,000	0,0
1	0,1135	2,0809	3,330	3,500	5,8
2	0,1878	1,8931	3,030	6,830	11,2
3	0,2357	1,6574	2,650	9,860	16,2
4	0,2648	1,3926	2,230	12,510	20,5
5	0,2795	1,1131	1,780	14,740	24,2
6	0,2815	0,8316	1,330	16,520	27,0
7	0,2705	0,5611	0,886	17,850	29,2
8	0,2441	0,3170	0,506	18,736	30,7
9	0,1967	0,1203	0,192	19,292	31,6
10	0,1203	0,0000	0,000	19,484	32,0

Tabela 7

m	L_m	$E\,y'_{mL}$	$E\,y'_m$	$E\,y'_{p.q}$	$R_{p.q}^B$
0	0,0000	0,0	0,0		
1	0,1135	9,6	15,4	7,7	0,1260
2	0,1878	15,8	27,0	21,2	0,0463
3	0,2357	19,8	36,0	31,5	0,0308
4	0,2648	22,2	42,7	39,3	0,0255
5	0,2795	23,4	47,6	45,1	0,0225
6	0,2815	23,6	50,6	49,1	0,0208
7	0,2705	22,7	51,9	51,2	0,0201
8	0,2441	20,5	51,2	51,6	0,0201
9	0,1967	16,5	48,1	49,6	0,0214
10	0,1203	10,1	42,1	45,1	0,0237

În figura 3 se calculează valorile lui L_m în aproximația a doua (notată cu II), iar în tabelele 6 și 7 se calculează valorile Ey'_m și $R_{p.q}$ pentru diafragma tip B în aproximația a doua.

În tabela 8 s-au trecut forțele tăietoare $Q^A_{p,q}$, $Q^B_{p,q}$, calculate în aproximația a doua, folosind valorile rigidităților relative din tabela 5 și tabela 7.

Tabela 8

$p-q$	$Q^A_{p,q}$	$Q^B_{p,q}$
0—1	1,43	0,90
1—2	1,34	0,92
2—3	1,25	0,94
3—4	1,12	0,97
4—5	1,03	0,99
5—6	0,95	1,01
6—7	0,87	1,03
7—8	0,80	1,04
8—9	0,67	1,07
9—70	0,59	1,09

În figura 4 *a*, *b* s-au reprezentat diagramele forțelor tăietoare $Q_{p,q}$ pentru diafragmele *A* și *B*, iar în figura 4 *c* s-a reprezentat diagrama de moment pentru diafragma *A*. S-au mai reprezentat cu linie întreruptă valorile corespunzînd unei repartizări aproximative după [12], bazată numai pe calculul săgeții la vîrf.

3.2. Se recalculează exemplul de calcul 3.1, ținînd cont și de rotirea fundațiilor. Construcția este fundată pe un strat de pietriș uscat, avînd $p_a = 3{,}0$ kg/cm² și $K_\theta = 10^4$ t/m² (conform [13], p. 153). Diafragmele se realizează din beton armat B 200 cu $E = 2{,}65 \times 10^6$ t/m² și cu fundații identice ($J = 200$ m⁴).

În prima aproximație, aplicînd o forță unitară la vîrful fiecărei diafragme, rezultă

$$M = 48 \text{ tm},$$

$$E\theta = \frac{48 \times 2{,}65 \times 10^6}{10^4 \times 200} = 63{,}5.$$

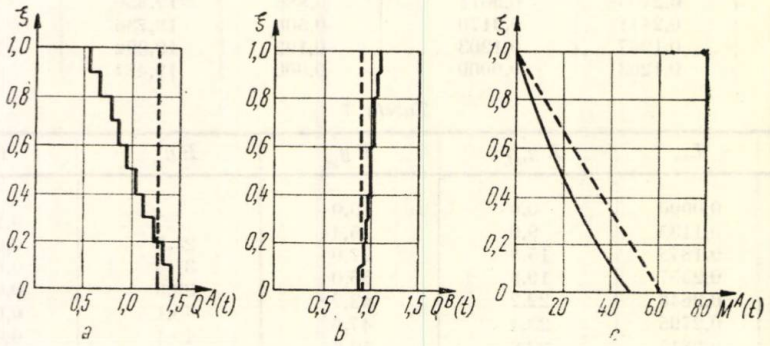


Fig. 4

Adăugînd această valoare la valorile $Ey'_{p,q}$ din tabelele 1 și 3, se obțin valorile $Ey_{p,q}$, $R_{p,q}$ și $Q_{p,q}$ din tabela 9.

Valorile $Q^A_{p,q}$, $Q^B_{p,q}$ din tabela 9 fiind foarte apropiate de valoarea inițială $Q = 1$, considerată în tabelele 1 și 3, calculul se oprește la aproximația întîia.

Tabela 9

$p-q$	$Ey'^{A}_{p,q}$	$Ey'^{B}_{p,q}$	$R^{A}_{p,q}$	$R^{B}_{p,q}$	$Q^{A}_{p,q}$	$Q^{B}_{p,q}$
0−1	69,9	71,1	0,0143	0,0141	1,00	1,00
1−2	82,1	84,5	0,0122	0,0119	1,00	1,00
2−3	92,9	94,6	0,0108	0,0106	1,00	1,00
3−4	102,5	102,3	0,0098	0,0098	1,00	1,00
4−5	111,0	107,7	0,0090	0,0093	1,00	1,00
5−6	117,8	111,5	0,0085	0,0090	0,96	1,01
6−7	123,5	113,5	0,0081	0,0088	0,94	1,02
7−8	128,1	113,5	0,0078	0,0088	0,92	1,02
8−9	131,5	111,5	0,0076	0,0090	0,87	1,03
9−10	133,1	106,7	0,0075	0,0094	0,83	1,04

Anexa 1

Valorile $\tau_{2,1}$; $\tau_{3,2}$; $\tau_{4,3}$; $\tau_{5,4}$; $\tau_{6,5}$;
$\tau'_{9,10}$; $\tau'_{8,9}$; $\tau'_{7,8}$; $\tau'_{6,7}$; $\tau'_{5,6}$

t	$\tau_{2,1}$ $\tau'_{9,10}$	$\tau_{3,2}$ $\tau'_{8,9}$	$\tau_{4,3}$ $\tau'_{7,8}$	$\tau_{5,4}$ $\tau'_{6,7}$	$\tau_{6,5}$ $\tau'_{5,6}$
0,330	0,330	0,370	0,376	0,377	0,377
0,335	0,335	0,378	0,384	0,385	0,385
0,340	0,340	0,385	0,391	0,392	0,392
0,345	0,345	0,391	0,399	0,400	0,400
0,350	0,350	0,399	0,407	0,408	0,408
0,355	0,355	0,407	0,415	0,417	0,417
0,360	0,360	0,413	0,423	0,424	0,424
0,365	0,265	0,420	0,431	0,433	0,433
0,370	0,370	0,429	0,440	0,441	0,441
0,375	0,375	0,437	0,448	0,451	0,451
0,380	0,380	0,444	0,457	0,460	0,460
0,385	0,385	0,452	0,466	0,469	0,469
0,390	0,390	0,460	0,475	0,479	0,479
0,395	0,395	0,468	0,485	0,489	0,490
0,400	0,400	0,476	0,494	0,498	0,499
0,405	0,405	0,484	0,504	0,508	0,510
0,410	0,410	0,493	0,514	0,519	0,520
0,415	0,415	0,501	0,524	0,530	0,532
0,420	0,420	0,510	0,534	0,541	0,543
0,425	0,425	0,519	0,545	0,553	0,556
0,430	0,430	0,528	0,557	0,566	0,568
0,435	0,435	0,536	0,568	0,578	0,581
0,440	0,440	0,546	0,579	0,590	0,595
0,445	0,445	0,555	0,591	0,605	0,609
0,450	0,450	0,565	0,603	0,617	0,623
0,455	0,455	0,574	0,616	0,632	0,640
0,460	0,460	0,583	0,628	0,646	0,655
0,465	0,465	0,594	0,643	0,664	0,672
0,470	0,470	0,604	0,656	0,680	0,691
0,475	0,475	0,614	0,670	0,696	0,709
0,480	0,480	0,624	0,685	0,715	0,730
0,485	0,485	0,634	0,701	0,735	0,753
0,490	0,490	0,645	0,717	0,755	0,778
0,495	0,495	0,656	0,735	0,778	0,805
0,500	0,500	0,666	0,750	0,800	0,833

Anexa 2

Valorile $\tau_{7.6}$; $\tau_{8.7}$; $\tau_{9.8}$; $\tau_{10.9}$;
$\tau'_{4.5}$; $\tau'_{3.4}$; $\tau'_{2.3}$; $\tau'_{1.2}$

t	$\tau_{7.6}$ $\tau'_{4.5}$	$\tau_{8.7}$ $\tau'_{3.4}$	$\tau_{9.8}$ $\tau'_{2.3}$	$\tau_{10.9}$ $\tau'_{1.2}$
0,330	0,377	0,377	0,377	0,377
0,335	0,385	0,385	0,385	0,385
0,340	0,392	0,392	0,392	0,392
0,345	0,400	0,400	0,400	0,400
0,350	0,408	0,408	0,408	0,408
0,355	0,417	0,417	0,417	0,417
0,360	0,424	0,424	0,424	0,424
0,365	0,433	0,433	0,433	0,433
0,370	0,441	0,441	0,441	0,441
0,375	0,451	0,451	0,451	0,451
0,380	0,460	0,460	0,460	0,460
0,385	0,469	0,469	0,469	0,469
0,390	0,479	0,479	0,479	0,479
0,395	0,490	0,490	0,490	0,490
0,400	0,499	0,499	0,499	0,499
0,405	0,510	0,510	0,510	0,510
0,410	0,520	0,520	0,520	0,520
0,415	0,532	0,532	0,532	0,532
0,420	0,543	0,543	0,543	0,543
0,425	0,556	0,556	0,556	0,556
0,430	0,568	0,568	0,568	0,568
0,435	0,582	0,582	0,582	0,582
0,440	0,595	0,595	0,595	0,595
0,445	0,610	0,610	0,610	0,610
0,450	0,625	0,625	0,625	0,625
0,455	0,642	0,643	0,643	0,643
0,460	0,658	0,660	0,660	0,660
0,465	0,675	0,677	0,677	0,677
0,470	0,696	0,698	0,700	0,700
0,475	0,715	0,720	0,722	0,722
0,480	0,738	0,743	0,745	0,748
0,485	0,763	0,770	0,774	0,776
0,490	0,791	0,800	0,805	0,810
0,495	0,822	0,835	0,843	0,850
0,500	0,855	0,875	0,888	0,900

Anexa 3

Valorile σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5, σ_6, σ_7, σ_8, σ_9, σ_{10}

t	σ_1 σ_{10}	σ_2 σ_9	σ_3 σ_8	σ_4 σ_7	σ_5 σ_6
0,330	1,142	1,304	1,326	1,330	1,330
0,335	1,148	1,318	1,344	1,348	1,348
0,340	1,153	1,332	1,359	1,362	1,362
0,345	1,160	1,346	1,376	1,381	1,381
0,350	1,167	1,361	1,393	1,397	1,397
0,355	1,174	1,374	1,408	1,414	1,412
0,360	1,181	1,395	1,433	1,439	1,441
0,365	1,188	1,410	1,451	1,460	1,462
0,370	1,195	1,429	1,475	1,484	1,484
0,375	1,203	1,449	1,499	1,508	1,511

Anexa 3 (continuare)

t	σ_1 σ_{10}	σ_2 σ_9	σ_3 σ_8	σ_4 σ_7	σ_5 σ_6
0,380	1,212	1,466	1,522	1,534	1,534
0,385	1,220	1,490	1,550	1,565	1,567
0,390	1,230	1,511	1,575	1,592	1,592
0,395	1,239	1,536	1,608	1,623	1,629
0,400	1,250	1,563	1,639	1,658	1,664
0,405	1,259	1,587	1,672	1,695	1,701
0,410	1,271	1,616	1,709	1,733	1,739
0,415	1,285	1,647	1,751	1,779	1,789
0,420	1,295	1,678	1,792	1,825	1,835
0,425	1,309	1,715	1,838	1,880	1,890
0,430	1,323	1,751	1,890	1,938	1,950
0,435	1,339	1,792	1,946	2,000	2,016
0,440	1,355	1,838	2,008	2,066	2,088
0,445	1,372	1,883	2,075	2,146	2,170
0,450	1,391	1,938	2,151	2,232	2,262
0,455	1,412	1,996	2,237	2,336	2,375
0,460	1,437	2,062	2,331	2,451	2,494
0,465	1,460	2,128	2,439	2,584	2,632
0,470	1,490	2,217	2,577	2,740	2,817
0,475	1,522	2,315	2,732	2,924	2,994
0,480	1,585	2,427	2,899	3,145	3,247
0,485	1,600	2,564	3,135	3,448	3,584
0,490	1,658	2,740	3,425	3,831	4,016
0,495	1,727	2,959	3,817	4,367	4,608
0,500	1,818	3,268	4,348	5,076	5,435

Primită la redacție la 10 februarie 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. R. AGENT, *Bazele teoretice și aplicațiile distorsiunilor în calculul cadrelor etajate*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *10* (1963).
2. — *Calculul diafragmelor cu goluri după metoda Albigès-Goulet este un calcul de diafragmă sau un calcul de cadru etajat?* Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *6* (1965).
3. M. ALBIGÈS, J. GOULET, *Contreventement des bâtiments*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, *5* (1960).
4. M. ARCAN, *O metodă de calcul al diafragmelor cu un șir de goluri*, St. cerc. mec. apl., *2* (1962).
5. — *Probleme de calcul al diafragmelor verticale de rigidizare*, Bull. științ. Inst. Construcții, București *10* (1963).
6. I. BRÎNZAN, *Unele cercetări experimentale privind realizarea îmbinărilor la diafragmele antiseismice ale clădirilor* din panouri mari, Revista construcțiior și a materialelor de construcții, *11* (1962).
7. A. CIȘMIGIU, D. BADEA, T. POPP, *Structura antiseismică celulară pentru blocurile de locuințe multietajate*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *2*, (1961).
8. V. FLORIAN, *Contribuții privind calculul diafragmelor cu goluri, al diafragmelor cuplate și al cadrelor diafragme I.* St. cerc. mec. apl., *6*, (1965).
9. M. HANGAN, *Construcții de beton armat*, București, 1963.
10. E. KEINTZEL, *Contribuții la sistematizarea calculului seismic al cadrelor etajate.* Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *4* (1964).
11. — *Determinarea aproximativă a forțelor seismice și altor acțiuni dinamice la cadre multietajate.* St. cerc. mec. apl. *3*, (1965).

12. — *Determinarea aproximativă a forțelor seismice la construcții înalte cu diafragme*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *6*. (1965).
13. I.L. Korcinski, S.V. Poliakov, V.A. Bîhovski, S.I. Duzinkevici, V.S. Pavlîk, *Bazele proiectării clădirilor în regiuni seismice*, București, 1964.
14. P. Mazilu, *Statica construcțiilor*, Vol. **II**, București, 1959.
15. O. Mîrșu, I.. Vuc, *Metode de calcul a diafragmelor la acțiuni seismice*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *6* (1963).
16. R. Rosman, *Systeme aus durchbrochenen Wänden und Stockwerkrahmen*, Die Bautechnik *2* (1964).
17. П. М. Кокук, *Расчет рам*, Киев, 1956.
18. E. Țițaru, A. Cișmigiu, *Calculul dinamic și spațial al construcțiilor la cutremur și la alte acțiuni laterale*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *12* (1959).

SINTEZA STRUCTURALĂ ŞI CINEMATICĂ A MECANISMELOR-MOTOR PLANE CU ARTICULAŢII MULTIPLE ŞI DOUĂ GRADE DE MOBILITATE $M_3 = 2$ „TOTAL" ŞI $M_3^p = 2$ „PARŢIAL"[1]

(II)

N. I. MANOLESCU ŞI I. TEMPEA
Institutul politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej"

621.01 (531.1)

Din cele 98 de lanţuri cinematice plane cu articulaţii multiple cu $e = 9$, $L_3 = 5$ „total" şi $L_3^p = 5$ „parţial" formate într-o lucrare anterioară [2]), autorii (folosind cinci teoreme) alcătuiesc toate mecanismele (351 cu $M_3 = 2$ „total"; 292 cu $M_3^{pt} = 2$ „parţial-total"; 130 cu $M_3^p = 2$ „parţial") şi mecanismele-motor plane cu articulaţii multiple (3757 cu $M_3 = 2$ „total" şi „parţial"). Cinematica şi dinamica acestor mecanisme se studiază în funcţie de clasificaţia lui I.I. Artobolevski.

INTRODUCERE

În prima parte a lucrării s-au alcătuit 10 lanţuri cu articulaţii multiple (c_5^k) cu $L_3 = 5$ „total" şi 88 lanţuri cu $L_3^p = 5$ „parţial" provenite din cele 6 lanţuri cu $e = 9$ şi $c_5 = 11$ şi $L_3 = 5$ „total". Din acestea cu ajutorul celor cinci teoreme din lucrarea de faţă se alcătuiesc mecanismele şi mecanismele-motor corespunzătoare.

§ 4. [3]) *Alcătuirea mecanismelor şi mecanismelor-motor plane cu articulaţii multiple* (c_5^k) *şi grad de mobilitate* $M_3 = 2$ *„total"*, $M_3^{pt} = 2$, *„parţial total" şi* $M_3^p = 2$ *„parţial"*.

4.1. *Teoreme care determină felul gradului de mobilitate a mecanismelor cu articulaţii multiple*: α) *Teorema 23. Definiţia mecanismului plan*

---

[1]) Prezentată la Conferinţa de mecanică, sept. 1965, Bucureşti.
[2]) Partea I-a a fost publicată în St. cerc. mec. apl. **25**, 3 (1967).
[3]) Numerotarea paragrafelor, figurilor şi tabelelor sînt în continuarea lucrării precedente.

cu articulații multiple și grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$ provenit din lanț cinematic cu grad de libertate „total" $L_3 = 5$:

„Dintr-un lanț plan cu articulații multiple și grad de libertate „total" $L_3 = 5$ definit conform teoremei 21 *a*, rezultă numai mecanisme și mecanisme-motor cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$".

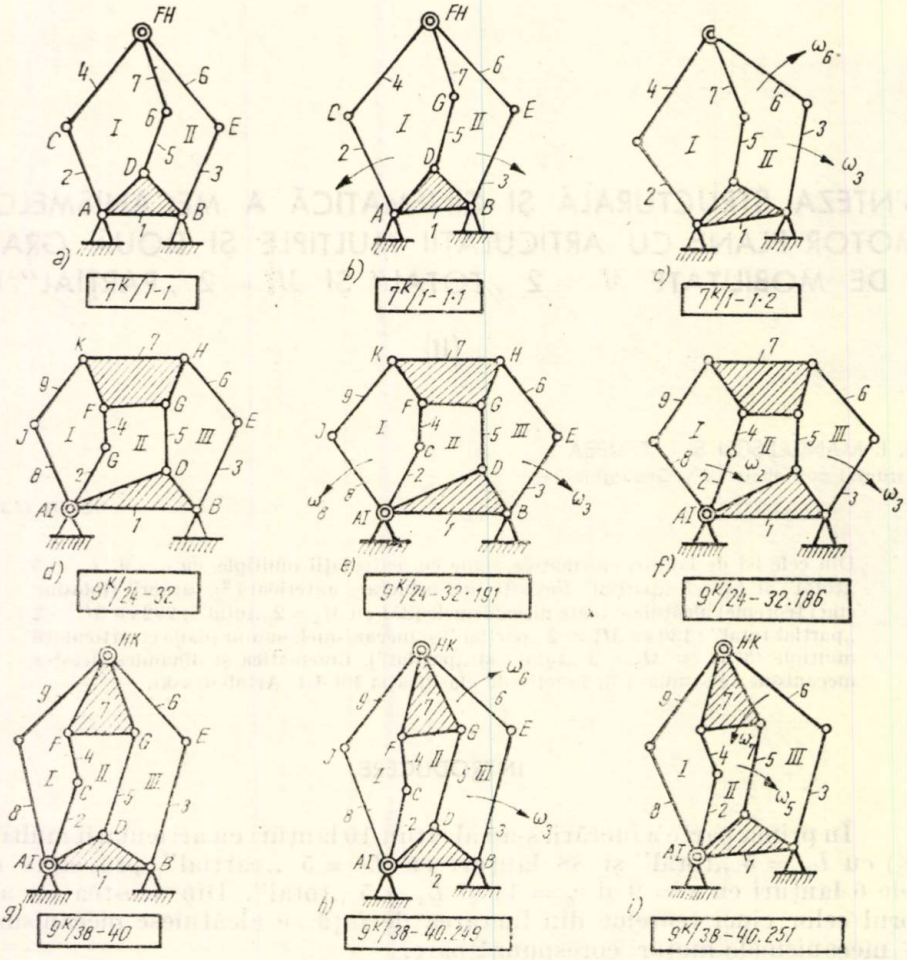


Fig. 7. — Mecanisme și mecanisme-motor plane cu articulații multiple și grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$, conform teoremei 23.

Acest lucru este evident, deoarece în structura lui numărul n_z al elementelor contururilor satisface relația

$$n_z = M_3 + 3. \tag{32}$$

Astfel, mecanismele și mecanismele-motor din figura 7 au $M_3 = 2$ „total", deoarece toate contururile (I și II din figura. 7 *a*, *b*, *c*) și (I, II și III din figura 7 *d*,..., *l*) au

$$n_z = M_3 + 3 = 2 + 3 = 5 \text{ elemente.}$$

Oricare ar fi perechile de elemente conducătoare, mișcările tuturor elementelor conduse depind de ale ambelor mișcări conducătoare.

β) TEOREMA 24. *Definiția mecanismului plan cu articulații multiple și grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$ provenit din lanț cinematic cu articulații multiple și grad de libertate „parțial" $L_3^p = 5$:*

„Dacă lanțului cinematic cu articulații multiple cu grad de libertate „parțial", definit conform teoremei 21 *b*, i se fixează unul din elementele simple (de „rang" $j=2$), care aparțin contururilor închise al căror număr n_z de elemente care-l limitează este dat de relația (32):

$$n_z = M_3 + 3,$$

sau dacă i se fixează un element de „rang" $j > 2$, care face parte din două sau mai multe contururi al căror n_z satisface relația (32) însă nici unul nu trebuie să conțină trei elemente simple legate succesiv, atunci mecanismul rezultat are grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$, deoarece toate mecanismele-motor care se obțin prin precizarea elementelor conducătoare au grad de mobilitate $M_3 = 2$ „total"".

Această teoremă este de fapt o consecință a teoremei 12 din lucrarea [5], în care clasa Φ_z a conturului mecanismului cu articulații simple este înlocuită cu n_z, numărul elementelor care limitează același contur transformat prin operația de alcătuire.

În figura 8 sînt date cîteva exemple. Astfel în figurile 8*a* și *b*, mecanismele cu articulații multiple (provenite din mecanismul 7/3 *p* —9*t*, din [5], tabela 3, cu articulații simple și grad de libertate „total" $L_3 = 5$) au de asemenea $M_3 = 2$ total deoarece atît $7^k/2p-7t$ (fig. 8 *a*) cît și $7^k/3p-13^t$ au ca bază element 3 de „rang" $j = 2$, care face parte din conturul I limitat de un număr de elemente egal cu

$$n_z = L_3 = 5.$$

Același lucru are loc și pentru mecanismele din figurile 8 *c* și *d* la care elementul fix (8, respectiv 3) face parte din conturul I, respectiv III, cu $n_z = 5$.

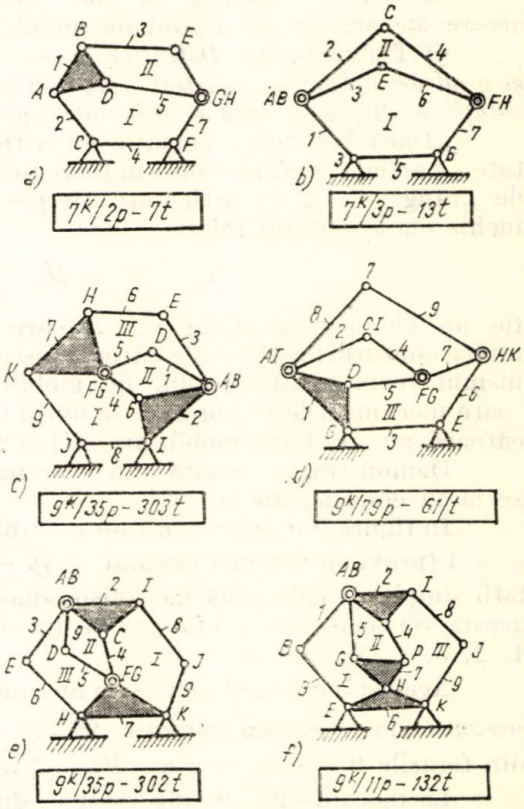


Fig. 8. — Mecanisme cu articulații multiple cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$, provenite din lanțuri cinematice cu articulații multiple cu grad de libertate „parțial" $L_3^p = 5$, conform teoremei 24.

În figura 8 *e* mecanismul $\overline{|9^k/35p-302t|}$ are baza 7 de rang $j = 3 > 2$ și face parte din contururile I și III cu $n_z = 5$ (conturul II cu $n_z = 4$ nu are comun cu baza 7 decît articulația dublă *FG*, deci nu se încadrează în condițiile teoremei).

În sfîrșit baza 6 de „rang" $j = 3 > 2$ a mecanismului $\overline{|9^k/11p-132t|}$ din figura 8 *f* face parte din două contururi închise, unul cu $n_z = 5$ (conturul I) și al doilea cu $n_z = 6$ (conturul III).

Se vede cu ușurință că toate mecanismele-motor care rezultă din aceste mecanisme au gradul de mobilitate $M_3 = 2$ „total".

γ) TEOREMA 25. *Definiția mecanismului plan cu articulații multiple și grad de mobilitate „parțial" $M_3^p = 2$ provenit din lanț cinematic cu articulații multiple și grad de libertate „parțial" $L_3^p = 5$:*

„Dacă lanțului cinematic cu articulații multiple și grad de libertate „parțial", definit conform teoremei 21 *b*, i se fixează fie un element de „rang" $j = 2$ cu articulații simple care face parte dintr-un contur închis cu n_z dat de relația

$$n_z = M_3 + 2, \tag{33}$$

fie un element de rang $j > 2$, care face parte dintr-unul sau mai multe contururi închise ale căror n_z este dat de relația (33), atunci mecanismul rezultat are gradul de mobilitate „parțial" $M_3^p = 2$, deoarece toate mecanismele-motor care se obțin prin precizarea elementelor conducătoare au grad de mobilitate $M_3^p = 2$ „parțial"".

Demonstrația rezultă din teorema 13 [5], în care în loc de Φ_z se ia în considerație n_z.

În figura 9 *a* se prezintă un mecanism cu $M_3^p = 2$ cu $e = 7$; $c_5^1 = 6$; $c_5^2 = 1$ (provenit din mecanismul $\overline{|7/3p-11p|}$, din [5], tabela 3, cu articulații simple) și cele două mecanisme-motor (fig. 9 *b* și *c*) care rezultă din acesta. Se vede că baza 4 face parte din conturul II cu $n_z = 4$ (elementele 1, 2, 3, 4, 5).

Același lucru se observă și la mecanismul $\overline{|9^k/58p-464p|}$ din figura 9 *g* precum și la mecanismele-motor $\overline{|9^k/58p-464{,}2300p|}$ și $\overline{|9^k/58p-464{,}2299p|}$ din figurile 9 *h* și *i*, care au $M_3^p = 2$ „parțial".

La mecanismul $\overline{|9^k/56p-449p|}$, din figura 9 *d*, baza 7 este de „rang" $j = 3$ și face parte din două contururi închise (II și III), ambele cu $n_z = M_3 + 2 = 4$.

Mecanismele-motor rezultate $\overline{|9^k/56p-449.2227p|}$ și $\overline{|9^k/56p-2226p|}$ din figurile 9*e* și *f* au după cum se vede $M_3^p = 2$, mișcările elementelor 3, 5, 1 și 4 (fig. 9, *e*) depinzînd numai de ω_6 ; în figura 9 *f* mișcările elementelor 1, 5, 3 și 6 depind numai de ω_1.

δ) TEOREMA 26. *Definiția mecanismului plan cu articulații multiple cu grad de mobilitate „parțial-total" $M_3^{pt} = 2$ provenit din lanț cinematic cu articulații multiple și grad de libertate „parțial" $L_3^p = 5$:*

„Dacă lanțului cinematic cu articulații multiple și grad de libertate „parțial", definit conform teoremei 21 *b*, i se fixează :

— fie un element de rang $j = 2$ care are una sau ambele articulații multiple și face parte dintr-un contur închis cu $n_z = M_3 + 2$;

— fie un element de rang $j > 2$, care face parte dintr-unul sau mai multe contururi închise, din care unul conține trei elemente de rang $j = 2$ egate succesiv, atunci, mecanismul rezultat are gradul de mobilitate „parțial-total", deoarece prin precizarea elementelor conducătoare se obțin mecanisme-motor cu grad de mobilitate fie „total", fie „parțial".

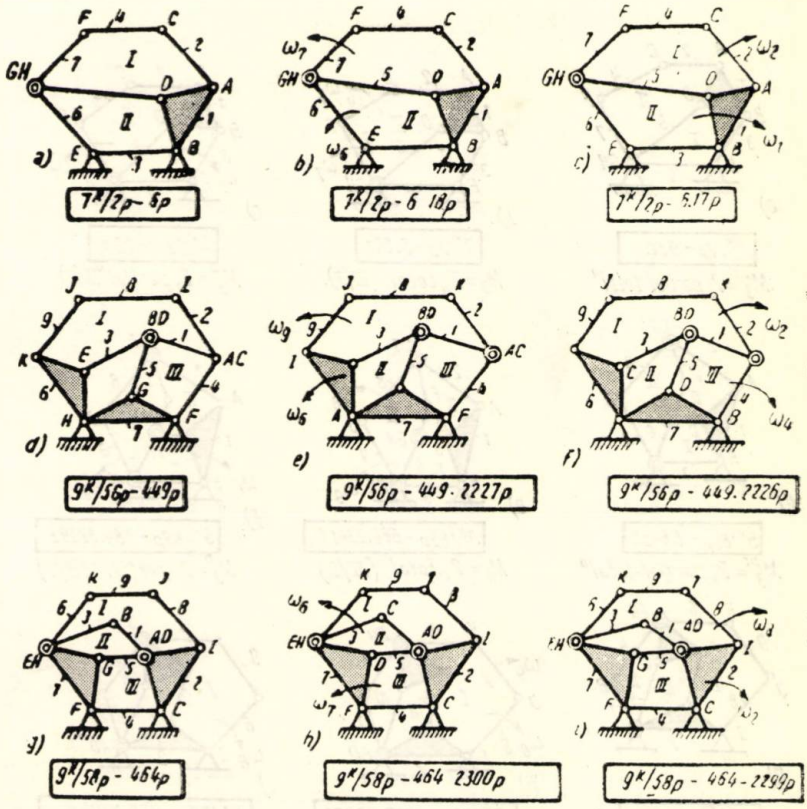


Fig 9. — Mecanisme plane cu articulații multiple și grad de mobilitate „parțial" $M_3^p = 2$ provenite din lanțuri cinematice cu articulații multiple și grad de libertate „parțial" $L_3^p = 5$, conform teoremei 25.

În figura 10 sînt redate cîteva exemple caracteristice ale aplicației acestei teoreme.

Astfel :

— mecanismul cu $e = 7$ cu o articulație dublă $\boxed{7^k/2p-9pt}$ (fig. 10) a provenit din mecanismul $\boxed{7/3p-10pt}$ din [5] (tabela 3) și are de asemenea grad de mobilitate „parțial-total" $M_3^{pt} = 2$, deoarece baza 6 este de rang $j = 2$ cu o articulație dublă GH și face parte din conturul I cu $n_z = 4$;

— mecanismul-motor din figura 10 *b* cu elementele conducătoare 7 și 4 are $M_3 = 2$ „total" și este de cl. III/3 (triada 3, 5, 2, 1), pe cînd cel din figura 10 *c* are $M_3^p = 2$ (parțial) de cl. II/2 (diadele 1, 5 ; 2,4), mișcările elementelor 1 și 5 depinzînd numai de ω_3.

Aceeași condiție îndeplinește și baza 3 a mecanismului $|9^k/89p-684pt|$ din figura 10 *d*, cu $M_3^{pt}=2$. Mecanismele-motor $|9^k/89\,p\,-684.3341t|$ și $|9^k/89p-684.3339p|$ din figurile 10 *e* și *f* au $M_3=2$ „total", respectiv $M_3^p=2$ „parțial" (în paranteză s-a trecut clasa și ordinul).

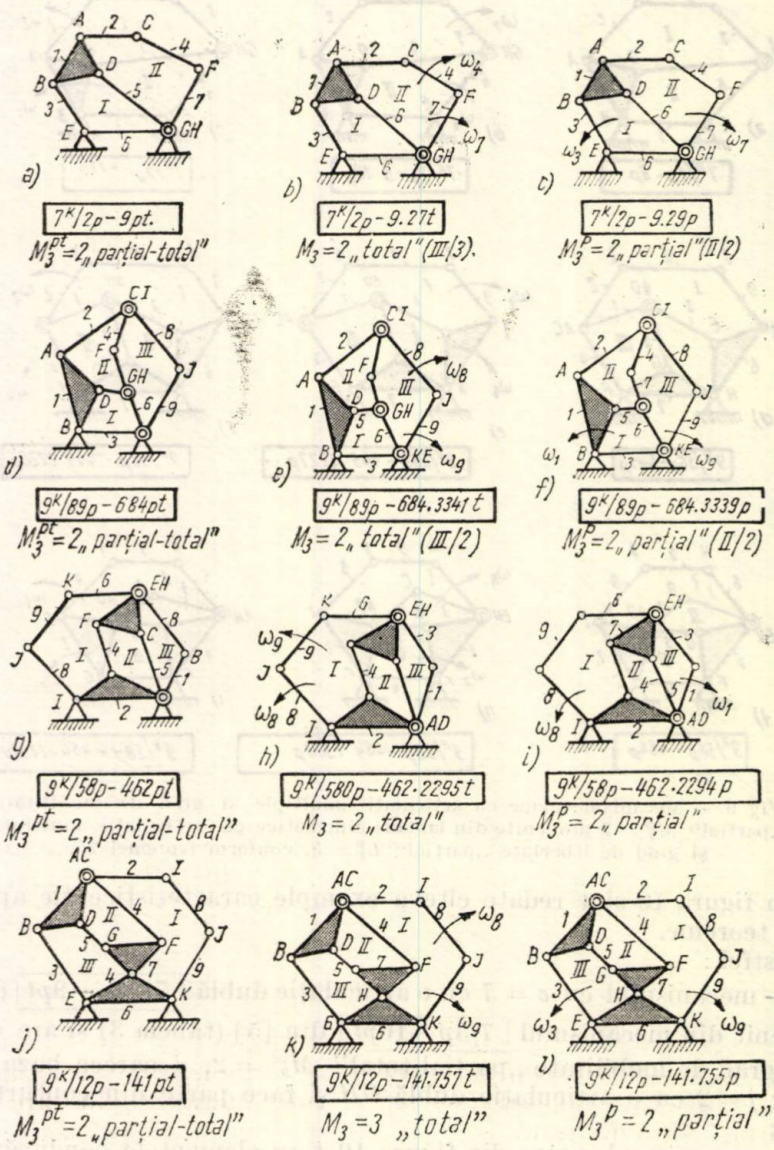


Fig. 10. — Mecanisme plane cu articulații multiple și grad de mobilitate „parțial-total" $M_3^{pt}=2$, provenite din lanțuri cinematice cu articulații multiple și grad de libertate „parțial" $L_3^p=5$, conform teoremei 26.

Mecanismele cu $M_3^{gt} = 2$ din figurile 10 *g* și *j* au ca bază elementele 2 respectiv 6, de rang $j = 3 > 2$; primul care are articulație dublă (AD) face parte din contururile I ($n_z = 6$), care conține trei elemente simple (8, 9, 6) legate succesiv și II cu $n_z = 4$; la al doilea mecanism cu baza 6, contururile I și III din care face parte au $n_z = 6$ (conturul I) și $n_z = 5$ (conturul III), însă, în acest caz, se vede că baza 6 are numai articulații simple.

Toate mecanismele-motor din figurile 10 *h*, *i*, *k* și *l* au fie ambele elemente motoare (8 și 9), ce fac parte din conturul I care conține cele trei elemente simple (8, 9, 6) legate succesiv (fig. 10 *h* și *k*), fie cel puțin unul (elementul 8 din fig. 10 *i* și elementul 9 din fig. 10 *l*).

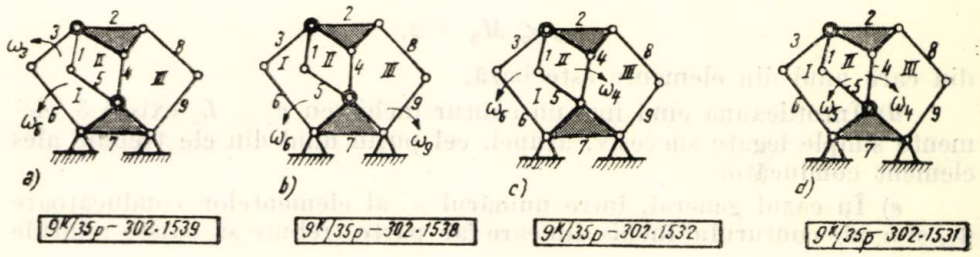


Fig. 11. — Reguli de precizare a elementelor conducătoare la mecanismele plane cu articulații multiple pentru obținerea de mecanisme-motor cu $M_3 = 2$ „total", conform teoremei 27 *a*).

Aceeași observație este valabilă și în cazul mecanismelor-motor din figurile 10 *b* și *c*.

ε) TEOREMA 27. *Regulile de precizare a elementelor conducătoare ale mecanismelor plane cu articulații multiple pentru obținerea de mecanisme-motor* :

a) În cazul $M_3 = 2$ „total", elementele conducătoare trebuie alese în așa fel încît :

1. ambele să facă parte dintr-un singur contur închis al cărui

$$n_z \geqslant M_3 + 3 = L_3; \tag{35}$$

(fig. 11 *a* și 7 *c*, *h*, *i*);

2. fiecare element conducător să facă parte din cîte un contur închis al căror n_z este dat de (35) (fig. 11 *b* și fig. 7 *b*, *e*, *f*);

3. în cazul cînd unul din contururi are

$$n_z = M_3 + 2 = L_3 - 1, \tag{32}$$

elementul conducător corespunzător să fie legat la bază printr-o articulație multiplă (fig. 11 *c*);

4. cînd ambele contururi fac parte dintr-un singur contur închis al cărui n_z este dat de (32), acestea trebuie să fie legate împreună la bază printr-o articulație multiplă; conturul corespunzător, din care nu face parte baza, va avea clasa

$$\Phi_{zk} = \sum_{k=1}^{k} kc_5^k > M_3 + 3, \tag{36}$$

iar contururile vecine va avea n_z dat de (35) (fig. 11 *d*).

b) *În cazul* $M_3^g = 2$ *„parțial"*, elementele conducătoare fac întotdeauna parte după cum urmează:

1. fiecare din cîte un contur închis cu n_z dat de (35), din care unul să conțină trei elemente simple legate succesiv (fig. 10 *c*);
2. unul dintr-un contur închis cu n_z dat de (35) și al doilea cu n_z dat de (32) (fig. 9 *b*, *c*, *e*, *f*, *h*, *i*);
3. ambele din același contur închis cu n_z dat de (35), dacă sînt legate împreună la bază printr-o articulație multiplă (fig.10 *a*, cu elemente conducătoare 1 și 5 articulate împreună la baza 2 prin articulația dublă *CF*);

c) În nici un caz elementele conducătoare nu pot face parte dintr-un contur închis al cărui

$$n_z \leqslant M_3 + 2,$$

din care unul din elemente este bază.

d) Întotdeauna cînd într-un contur închis cu $n_z \geqslant L_3$ există 3 elemente simple legate succesiv, atunci, cel puțin unul din ele trebuie ales element conducător.

e) În cazul general, între numărul n_c al elementelor conducătoare Φ_{zk} și n_z ale conturului închis din care fac parte trebuie să existe relațiile

$$\Phi_{zk} = \sum_{k=1}^{k} k c_5^k > n_c + 3, \tag{37}$$

$$\Phi_{zk} > n_z.$$

f) Deoarece la un lanț cu articulații multiple și elemente simple există cel puțin un contur închis cu $n_z = L_3 - 1$, iar unul din celelalte două contururi închise are 3 elemente simple legate între ele prin articulații simple, rezultă că astfel de lanțuri nu pot avea grad de libertate „total".

g) În cazul cînd grupa de trei elemente simple legate între ele prin articulații simple se află în interiorul conturului general al lanțului, fără posibilitate de schimbare a poziției lui printr-o operație de rotație cu 180° în jurul unei axe din plan (conform fig. 6), există imposibilitatea acționării mecanismelor conform criteriilor fixate [4] în cazul cînd baza nu face parte din această grupă și este separată de aceasta prin cel puțin două elemente intermediare (lanțul 9/44 din tabela 2 [4]).

Justificările acestor reguli din teorema 27 se dau prin elementele care urmează.

Astfel la mecanismele motor din figurile 7 *c*, *h* și *i* elementele conducătoare 3 și 6 fac parte din contururile II (fig. 7 *c*), respectiv III (fig. 7 *h* și *i*), ale căror $n_z = M_3 + 3 = 5$; același lucru se observă și la mecanismele-motor din figurile 10 *b*, *e*, *h*, *k*. Ele se încadrează în teorema 27 *a*) pt. 1, în timp ce mecanismele-motor redate în figurile 7 *b*, *e*, *f* se încadrează în a) pt. 2.

În figura 11 s-au dat exemple de mecanisme-motor care satisfac condițiile a) pt 1, ..., 4 din teorema 27.

---

[4]) Tabelele 1—3 au fost publicate în partea I (St. cerc. mec. apl. **25**, 3 (1967)).

Se vede de exemplu că la figura 11 *d*, elementele conducătoare 4 și 5 fac parte din conturul închis II cu $n_z = 4 < n_c + 3 = 5 < \Phi_{zk} = 1.2 + 2.2 = 6$, deci relația (37) este satisfăcută.

Pentru teorema 27 *b*) s-au indicat exemplele care o ilustrează. Astfel în figura 10 *c* elementul conducător 1 face parte din conturul II cu $n_z = 5$; $\Phi_{zk} = 6$ legat succesiv cu încă două elemente simple; același lucru pentru elementul conducător 9 din conturul I (fig. 10 *i* și *l*).

Teorema 27 *c*) este evidentă. Astfel, în figura 10 *a* nu se pot alege ca elemente conducătoare nici una din perechile de elemente 4,5; 4,7 sau 5,7 deoarece conturul I se rigidizează prin elementul 7, respectiv 5 și 4. Apare imediat ca o consecință că unul din elementele conducătoare trebuie ales din conturul II care are $n_z = 5$ și 3 elemente simple legate succesiv (fig. 10 *c*).

Verificarea formulei (37) se poate face pe oricare din mecanismele-motor din figurile 8, 9, 10 și 11.

Astfel, din figura 10 *h*, elementele conducătoare 8, 9 ($n_c = 2$) fac parte din conturul III cu $n_z = 6$, de unde rezultă

$$\Phi_{zk} = 5.1 + 2.1 = 7 > 2 + 3 = 5,$$

și

$$\Phi_{zk} = 7 > n_z = 6.$$

În cazul cînd într-un contur închis $n_c = 1$ (fig. 10 *i*, conturul I sau III) atunci:

— pentru conturul I

$$\Phi_{zk} = 7 > n_c + 3 = 4, \quad \Phi_{zk} = 7 > n_z = 6,$$

— pentru conturul III

$$\Phi_{zk} = 6 > 4, \quad \Phi_{zk} = 6 > n_z = 4.$$

Enunțul din teorema 27 *f*) este evident dacă se analizează structura celor 6 lanțuri cu articulații multiple și elemente simple ($9^k/92$, 93, 94, 108, 109, 110).

Nici unul din ele nu poate îndeplini condițiile din teorema 27 *a*).

În ceea ce privește enunțul teoremei 27 *g*) se constată că în cazul cînd lanțului $9^k/44$ *p* din figura 12 i se fixează elementul 6, atunci al doilea element conducător (2 sau 9) nu se poate preciza decît după alcătuirea mecanismului-motor prin adăugarea la elementul conducător 3 sau 7 după caz a diadelor 5,7 și 1,4 (iar în cazul cînd se alege 7 primul element conducător se adaugă diadele 3,5; 1,4).

Mecanismul capătă în acest caz caracterul unor mecanisme suprapuse care în total au două grade de mobilitate. Unui astfel de mecanism spațial cu caracter de mecanisme suprapuse i s-a făcut analiza structurală în lucrarea [7], (fig. 4).

În figura 12 sînt reprezentate singurele patru cazuri de astfel de mecanisme-motor din cele 3757 alcătuite de autori.

4.2. *Determinarea numărului de variante distincte de mecanisme și mecanisme-motor cu articulații multiple și grade de mobilitate* $M_3 = 2$ *„total”,* $M_3^{pt} = 2$ *„parțial-total” și* $M_3^p = 2$ *„parțial”, provenite din cele 98 lanțuri cinematice plane cu articulații multiple cu* $e = 9$, $c_5 = 11$ *și* $L_3 = 5$ *și grad de libertate* $L_3 = 5$ *„total” și „parțial”.*

Principiul de notare a mecanismelor şi mecanismelor-motor plane cu articulaţii multiple este acelaşi ca şi la cele cu articulaţii simple din lucrarea [5].

Astfel :

$\boxed{9^k/3-1}$ indică mecanismul cu $e=9$ elemente şi $M_3=2$ „total" din tabela 4[5]), provenit din lanţul $9^k/3$ cu $L_3=5$ „total" din tabela 2;

$\boxed{9^k/1-69pt}$ indică mecanismul din tabela 7 cu $M_3^{pt}=2$ „parţial-total" provenit din lanţul $9^k/1$ din tabela 2;

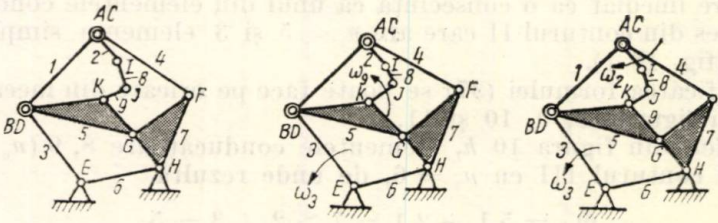


Fig. 12. — Mecanisme-motor plane cu articulaţii multiple cu grad de mobilitate „parţial" $M_3^p=2$ cu elementele conducătoare suprapuse.

$\boxed{9^k/1-71.453p}$ indică mecanismul-motor cu $M_3^p=2$, parţial provenit din mecanismul $\boxed{9^k/1-71p}$ cu $M_3^p=2$ şi parţial din tabela 7.

Această numerotare nu ţine deci seama decît de numărul $e(=7, 9, \ldots,)$ al elementelor lanţului sau mecanismului plan cu articulaţii multiple. Ştiind că formula mobilităţii unui mecanism este unanim cunoscută, atunci indicarea numărului elementelor şi a gradului de mobilitate precizează complet lanţul sau mecanismul plan articulat.

Considerăm deci că exponentul k la numărul e al lanţului sau mecanismului, împreună cu indicele pt; p; sau fr („parţial-total", „parţial" sau „fracţionat") sînt suficienţi pentru a identifica lanţul, mecanismul sau mecanismul-motor, folosind tabelele 4—14 în care s-au încadrat toate mecanismele şi mecanismele-motor provenite din lanţurile cinematice plane cu articulaţii multiple din tabela 2. Principiul de numerotare de mai sus a fost de altfel utilizat în notarea fig. 3—13. Pe baza celor anterioare şi folosind regulile practice de alcătuire a mecanismelor cu articulaţii multiple şi a determinării felului gradului de mobilitate, pe baza regulilor şi teoremelor de la § 4 s-au alcătuit mecanismele şi mecanismele-motor încadrate în tabelele 4—14 în funcţie de ordinul de multiplicitate k al articulaţiilor multiple de rangul j al elementelor şi de felul gradului de mobilitate $M_3=2$.

4.2.1 *Determinarea mecanismelor şi mecanismelor-motor corespunzătoare celor 10 lanţuri cu $L_3=5$ „total" (col. 11 tabela 1).*

Mecanismele şi mecanismele-motor au fost încadrate în trei tabele în funcţie de numărul şi ordinul de multiplicitate al articulaţiilor multiple, după cum urmează :

[5]) Pentru tabelele 4—14 a se vedea tabela 15 (coloana ultimă).

TABELA 4. *Mecanisme și mecanisme-motor cu* $c_5^1 = 9$ *și cu* $c_5^2 = 1$, *rezultate din cele 6 lanțuri cinematice corespunzătoare*:

— mecanisme cu $M_3 = 2$ „total"

$n_2 = 6,\ n_3 = 3$ $\boxed{9^k/3-1}$ . . . $\boxed{9^k/24-31}$ . . . 31,

$n_2 = 7,\ n_3 = 1,\ n_4 = 1$ (32...39) 8;

— mecanisme-motor cu $M_3 = 2$ „total"

$n_2 = 6;\ n_3 = 3$ (1.1 — 31.185) 185,

$n_2 = 7;\ n_3 = 1;\ n_4 = 1$ (32,186 — 39.242) . . . . 57.

Tabela 5. *Mecanisme și mecanisme-motor cu* $c_5^1 = 7$ *și cu* $c_5^2 = 2$, *rezultate din cele 3 lanțuri corespunzătoare*:

— mecanisme cu $M_3 = 2$ „total"

$n_2 = 7,\ n_3 = 2$ (40 ... 63) 24;

— mecanisme-motor cu $M_3 = 2$ „total"

$n_2 = 7;\ n_3 = 2$ (40.243 ... 63.409) . . . . . 157.

Tabela 6. *Mecanisme și mecanisme-motor cu* $c_5^1 = 8$ *și cu* $c_5^3 = 1$, *rezultate din lanțul corespunzător*:

— mecanisme cu $M_3 = 2$ „total"

$n_2 = 8,\ n_3 = 1$ $\boxed{9^k/100-64}$ . . . $\boxed{9^k/100-68}$ . . . 5;

— mecanisme-motor cu $M_3 = 2$ „total"

$n_2 = 8,\ n_3 = 1$ $\boxed{9^k/100-64.410}$ . . . $\boxed{9^k/100-68.441}$ . . . 32.

În total deci, din cele 10 lanțuri cu $L_3 = 5$ „total" au rezultat:

— mecanisme plane cu articulații multiple

cu $M_3 = 2$ „total" 68;

— mecanisme-motor cu articulații multiple

cu $M_3 = 2$ „total" . . . . . 441.

Ele sînt înscrise în *tabela recapitulativă 15* în rîndurile 1 —10.

În această tabelă, în coloanele 2 —5 sînt date caracteristicile lanțurilor (și deci și ale mecanismelor și mecanismelor-motor ce rezultă din ele) în funcție de e_{ak}, c_5^k și n_j, simbolul din coloana 2 indicînd în același timp și felul gradului de libertate.

În coloanele 6 —10 sînt trecute mecanismele care rezultă din lanțurile (prin imobilizarea succesivă a diferitelor elemente) grupate după felul gradului de mobilitate.

În coloanele 11 —16 sînt trecute mecanismele-motor care se obțin prin alegerea elementelor conducătoare, grupate și aici după felul gradului de mobilitate.

În coloana ultimă, 17, s-a indicat tabela în care se află mecanismul respectiv.

4.2.2 *Determinarea mecanismelor și mecanismelor-motor corespunzătoare celor 88 lanțuri cu* $L_3^p = 5$ *„parțial"* (*col. 12, tabela 1*).

În continuare în tabela recapitulativă s-au înscris celelalte mecanisme după criteriile de mai sus rezultate din cele *88 lanțuri* cu grad de libertate „parțial" $L_3^p = 5$. (tabela 1, coloana 12).

Astfel, în rezumat, din tabelele 7 –14 au rezultat :

– *tabela 7* ($c_5^1 = 9$; $c_5^2 = 1$) *care conține*
20 lanțuri cu articulații multiple,
172 mecanisme plane cu articulații multiple,
785 mecanisme-motor cu articulații multiple ;

– *tabela 8* ($c_5^1 = 7$; $c_5^2 = 2$) *care conține*
42 lanțuri cu articulații multiple,
352 mecanisme cu articulații multiple ;
1650 mecanisme-motor cu articulații multiple ;

– *tabela 9* ($c_5^1 = 5$; $c_5^2 = 3$) *care conține*
13 lanțuri cu articulații multiple,
98 mecanisme cu articulații multiple,
483 mecanisme-motor cu articulații multiple ;

– *tabela 10* ($c_5^1 = 3$; $c_5^2 = 4$) *care* conține
3 lanțuri cu articulații multiple,
16 mecanisme cu articulații multiple,
87 mecanisme-motor cu articulații multiple ;

– *tabela 11* ($c_5^1 = 8$; $c_5^3 = 1$) care conține
4 lanțuri cu articulații multiple
32 mecanisme cu articulații multiple
155 mecanisme-motor cu articulații multiple

– *tabela 12* ($c_5^1 = 6$, $c_5^2 = 1$; $c_5^3 = 1$) care conține
4 lanțuri cu articulații multiple
29 mecanisme cu articulații multiple
134 mecanisme-motor cu articulații multiple

– *tabela 13* ($c_5^1 = 5$; $c_5^3 = 2$)care conține
1 lanț cinematic cu articulații multiple,
3 mecanisme cu articulații multiple,
9 mecanisme-motor cu articulații multiple ;

– *tabela 14* ($c_5^1 = 4$; $c_5^2 = 2$ $c_5^3 = 1$) care conține
1 lanț cinematic cu articulații multiple,
3 mecanisme plane cu articulații multiple,
12 mecanisme-motor cu articulații multiple.

În total deci, din cele 88 lanțuri cu $L_3^p = 5$ au rezultat :

– 705 mecanisme plane cu articulații multiple (numerotate de la 69 la 773, având simbolurile $\boxed{9^k/1p-69\,pt}$ . . . $\boxed{9^k/110p-773\,pt}$;

– 3318 mecanisme-motor plane cu articulații multiple (numerotate de la 442 la 3757 având simbolurile

$$\boxed{9^k/1p-69.442\,p} \quad . \; . \; . \quad \boxed{9^k/110\,p-773.3757\,t}.$$

4.2.3 În concluzie, numărul total al variantelor distincte structural și cinematic al mecanismelor și mecanismelor-motor plane cu articulații multiple cu $e = 9$ și $M_3 = 2$ „total" și „parțial", rezultate din cele 98 lanțuri cu $L_3 = 5$ „total" și „parțial" este de :

— 773 mecanisme cu grad de mobilitate „total", „parțial-total" și „parțial" ;

— 3757 mecanisme-motor cu grad de mobilitate „total" și „parțial".

Se precizează că acest număr a rezultat numai din cele 6 lanțuri inițiale cu articulații simple și $L_3 = 5$, „total" din figura 1 și din care s-au alcătuit cele 98 lanțuri cu articulații multiple, cu grade de libertate : total (10) și parțial (88).

Operația de alcătuire a variantelor independente de lanțuri cinematice plane cu articulații multiple ce vor rezulta din restul de 29 lanțuri cu $L_3^p = 5$ „parțial" (vezi [3]), notate cu $9/1p \ldots 9/11\ p$; $9/17 \ldots 9/26p$; $9/28\ p \ldots 9/35\ p$, va antrena un volum impresionant de muncă fără eficiența practică corespunzătoare.

Munca se complică și prin operația de eliminare a variantelor nedistincte structural.

§ 5. CONCLUZII

5.1. Problema alcătuirii și sistematizării lanțurilor, mecanismelor și mecanismelor-motor plane cu articulații multiple cu $e = 9$ și $L_3 = 5$ a necesitat în primul rînd adoptarea metodei care să ducă la rezultat pe o cale cît mai puțin laborioasă din punct de vedere al volumului de lucru.

În cazul lanțurilor cu $e = 9$, $c_5 = 11$ am considerat că alcătuirea lor, folosind noțiunea de grupă assurică este cea mai eficientă.

De la aceste lanțuri, am ales pe cele cu $L_3 = 5$ „total" (redate în fig. 1) din care, folosind teoremele propuse, am reușit să alcătuim mecanismele și mecanismele-motor cu articulații multiple corespunzătoare.

Și în acest caz volumul de lucru a fost considerabil și numai pentru o parte din cele 35 lanțuri cu articulații simple [4] au rezultat, după cum s-a văzut, 773 mecanisme și 3757 mecanisme-motor.

5.2. Pentru alcătuirea atît a lanțurilor cu articulații multiple, cît și a mecanismelor și mecanismelor-motor corespunzătoare se pot folosi pentru $e < 9$ (adică $e = 7$) și alte metode și anume :

— amplificarea lanțului sau a elementelor inițiale cu grupe assurice cu articulații multiple (în tabela 16 se vede clar modul de alcătuire a celor 5 lanțuri cu $e = 7$ și articulații multiple prin această metodă) ;

— amplificarea lanțurilor cu articulații multiple și $L_3 = 4$ cu grupe neassurice cu $M_3' = 1$ (în speță un element $-7-$ și o articulație exterioară $-H$).

În tabela 17 se arată modul de alcătuire a lanțurilor cu $e = 7$ prin această metodă. Cele două lanțuri cu $e = 6$ și articulații multiple, din care se deduc mai departe celelalte lanțuri, rezultă imediat din unul din cele două lanțuri cu articulații simple (tip Watt și Stephenson) din figurile 13 *a*, respectiv 13 *b*.

5.3. Cînd se trece însă la alcătuirea lanțurilor, mecanismelor și mecanismelor-motor cu un număr total de elemente $e > 7$, în acest caz, considerăm că metoda lanțurilor este cea mai eficientă.

În cazul mecanismelor cu gradul de mobilitate $M_3 = 1$ în cercetările care s-au întreprins pentru alcătuirea lor s-a luat ca bază grupele assurice [6] pentru mecanismele cu $e = 8$, $c_5 = 10$.

Folosirea grupelor neassurice pentru obținerea de mecanisme cu $M_3 \neq 1$ o considerăm utilă atît în analiza, cît și în sinteza mecanismelor.

În lucrarea [7] s-a folosit acest fel de grupă neassurică pentru analizarea structurii mecanismelor de diferite familii.

5.4. În ceea ce privește problema alcătuirii celorlalte mecanisme și mecanisme-motor cu articulații multiple, care ar proveni din cele 29 lanțuri

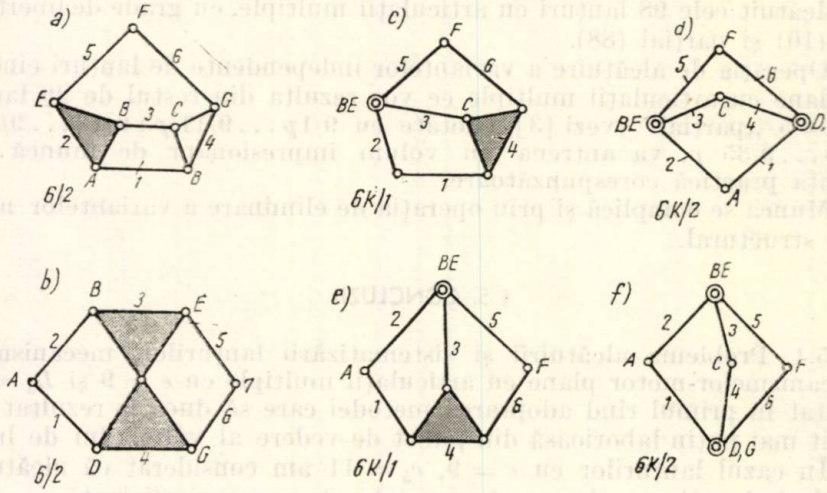


Fig. 13. — Din fiecare din cele două lanțuri cu $e = 6$ (fig. 12 *a*, *b*) rezultă două lanțuri cu articulații multiple $6k/1$, $6k/2$ (fig. 12 *c*, *d*).

cu $e = 9$ cu articulații simple (vezi [4]) cu grad de libertate „parțial" $L_3^p = 5$, considerăm că din punct de vedere tehnic nu mai prezintă importanță.

Aceasta o susținem cu atît mai mult cu cît din cele 29 variante vor rezulta extrem de multe variante nedistincte, așa cum s-a văzut în cazul lanțurilor cu $e = 7$, din care toate variantele distincte structural cu articulații multiple au rezultat numai din primele două lanțuri (7/2 și $7/1p$, din tabela 18), la fel cum din fiecare din cele două lanțuri cu articulații simple și $e = 6$ (fig. 13) au rezultat cele două lanțuri cu articulații multiple.

5.5. Alegerea din aceste tabele a mecanismelor și mecanismelor-motor pentru realizarea de procese tehnologice comportă în continuare studiul cinematic și dinamic în care problema unghiului de presiune este de o deosebită însemnătate. În această direcție, literatura de specialitate este deosebit de bogată (vezi [8]—[12]).

5.6. În final, considerăm că metoda folosirii grupelor assurice și neassurice prin analiză și sinteză structurală a mecanismelor este aceea care permite cele mai variate și bogate combinații de sistematizare a celor mai complexe mecanisme care există astăzi în tehnică.

Studiul cinematic și dinamic al acestora se face folosind metodele generale propuse de cercetătorii români și străini [24]—[34].

Tabela 15

Tabelă recapitulativă a tabelelor 4–14, privind mecanismele și mecanismele-motor plane cu articulații multiple cu $c=9$ și grad de mobilitate $M_3=2$ „total", „parțial-total" și „parțial", rezultate din cele 110 lanțuri cu articulații multiple și grad de libertate $L_3=5$ „total" și „parțial"

	Lanțul cinematic cu articulații multiple				Mecanismele rezultate cu $M_3=2$					Mecanismele-motor rezultate din mecanisme cu $M_3=2$						Tabela în care sînt încadrate
	Simbol	Caracteristici			Total	„Parțial total"	Parțial	Număr		Total	Parțial total	Total parțial	Parțial	Nr. total	Nr. cumulat	
		e_{ak}	C_5^k	n_j				Total	Cumulat							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	$9^{\ k}/_{3}$	21	$C_5^1=9$ $c_5^2=1$	$n_2=6$ $n_3=3$	4	—	—	4	4	24	—	—	—	24	24	4
2	$9^{\ k}/_{6}$				9	—	—	9	13	57	—	—	—	57	81	
3	$9^{\ k}/_{8}$				6	—	—	6	19	36	—	—	—	36	117	
4	$9^{\ k}/_{13}$				9	—	—	9	28	57	—	—	—	57	174	
5	$9^{\ k}/_{20}$				3	—	—	3	31	11	—	—	—	11	185	
6	$9^{\ k}/_{24}$			$n_2=1$ $n_3=1$ $n_4=1$	8	—	—	8	39	57	—	—	—	57	242	
7	$9^{\ k}/_{38}$	20	$c_5^1=7$ $c_5^2=2$	$n_2=7$ $n_3=2$	9	—	—	9	48	69	—	—	—	69	311	5
8	$9^{\ k}/_{49}$				9	—	—	9	57	66	—	—	—	66	377	
9	$9^{\ k}/_{62}$				6	—	—	6	63	32	—	—	—	32	409	
10	$9^{\ k}/_{100}$	20	$C_5^1=8$ $C_5^3=1$	$n_2=8$ $n_4=1$	5	—	—	5	68	32	—	—	—	32	441	6
11	$9^{\ k}/_{1}$	21	$C_5^1=9$ $C_5^2=1$	$n_2=6$ $n_3=3$	5	3	1	9	77	27	7	7	2	43	484	7
12	$9^{\ k}/_{2}$				3	2	—	5	82	11	4	6	—	21	505	
13	$9^{\ k}/_{4}$				5	3	1	9	91	24	5	9	2	40	545	
14	$9^{\ k}/_{5}$				4	2	3	9	100	18	2	5	4	29	574	
15	$9^{\ k}/_{7}$				7	1	1	9	109	32	2	3	2	39	613	
16	$9^{\ k}/_{9}$				3	3	2	8	117	15	3	9	3	30	643	
17	$9^{\ k}/_{10}$				5	4	—	9	126	27	4	14	—	45	688	

Tabela 15 (continuare)

	Lanțul cinematic cu articulații multiple				Mecanismele rezultate cu $M_3 = 2$					Mecanisme-motor rezultate din mecanisme cu $M_3 = 2$						Tabela în care sînt încadrate
	Simbol	Caracteristici			Total	„Parțial total"	Parțial	Număr		Total	Parțial total	Total parțial	Parțial	Nr. total	Nr. cumulat	
		e_{ak}	C_5^k	n_j				Total	Cumulat							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	9 $^k/_{11}$				5	3	1	9	135	28	5	11	4	49	737	
19	9 $^k/_{12}$				3	4	2	9	144	15	3	12	4	30	767	
20	9 $^k/_{14}$				4	1	1	6	150	17	3	4	2	26	793	
21	9 $^k/_{15}$				5	3	1	9	159	29	4	12	3	48	841	
22	9 $^k/_{16}$				5	4	—	9	168	23	5	14	—	42	883	
23	9 $^k/_{17}$				3	3	3	9	177	15	2	5	7	29	912	
24	9 $^k/_{18}$			$n_2=6$	5	3	1	9	186	27	5	12	2	46	958	
25	9 $^k/_{19}$			$n_3=3$	2	4	3	9	195	11	7	15	15	48	1006	
26	9 $^k/_{21}$		$C_5^1=9$		5	4	—	9	204	27	4	14	—	45	1051	7
27	9 $^k/_{22}$	21	$C_5^2=1$		5	3	1	9	213	28	5	9	3	45	1096	
28	9 $^k/_{23}$			$n_2=7$	3	3	3	9	222	12	3	8	4	27	1123	
29	9 $^k/_{25}$			$n_3=1$	7	2	—	9	231	42	6	4	—	52	1175	
30	9 $^k/_{26}$			$n_4=1$	5	3	1	9	240	30	7	11	3	51	1226	
31	9 $^k/_{27}$				1	4	—	5	245	6	7	9	—	22	1248	
32	9 $^k/_{28}$				1	6	2	9	254	6	10	20	5	41	1289	
33	9 $^k/_{29}$				3	2	4	9	263	14	2	7	6	29	1318	
34	9 $^k/_{30}$				5	3	1	9	272	34	7	11	3	55	1373	
35	9 $^k/_{32}$				5	4	—	9	281	34	8	11	—	53	1426	
36	9 $^k/_{33}$				3	2	—	5	286	18	3	7	—	28	1454	
37	9 $^k/_{34}$				2	5	2	9	295	9	8	18	8	43	1497	
38	9 $^k/_{36}$		$C_5^1=7$	$n_2=7$	6	3	—	9	304	33	7	13	—	53	1550	
39	9 $^k/_{36}$		$C_5^2=2$	$n_3=2$	5	4	—	9	313	31	7	15	—	53	1603	8
40	9 $^k/_{37}$	20			3	4	2	9	322	19	4	11	4	38	1641	

Tabela 15 (continuare)

	Lanțul cinematic cu articulații multiple				Mecanismele rezultate cu $M_3 = 2$					Mecanismele-motor rezultate din mecanisme cu $M_3 = 2$						Tabela în care sînt încadrate
	Simbol	Caracteristici			Total	Parțial total	Parțial	Număr		Total	Parțial total	Total parțial	Parțial	Nr. total	Nr. cumulat	
		e_{ak}	C_5^k	n_j				Total	Cumulat							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
41	$9\ ^{k}/_{39}$		$C_5^2=2$	$n_3=2$	5	3	1	9	331	34	6	11	3	54	1695	
42	$9\ ^{k}/_{41}$				2	4	3	9	340	12	7	15	11	45	1740	
43	$9\ ^{k}/_{42}$				5	3	1	9	349	34	6	12	2	54	1794	
44	$9\ ^{k}/_{43}$				5	4	—	9	358	30	6	16	—	52	1846	
45	$9\ ^{k}/_{44}$				3	3	2	8	366	16	3	9	4	32	1878	
46	$9\ ^{k}/_{45}$				3	3	3	9	375	12	4	8	5	29	1907	
47	$9\ ^{k}/_{46}$				3	3	3	9	384	15	3	10	4	32	1939	
48	$9\ ^{k}/_{48}$				3	3	3	9	393	17	3	11	6	37	1976	
49	$9\ ^{k}/_{50}$				3	3	3	9	402	17	3	11	4	35	2011	
50	$9\ ^{k}/_{51}$				3	3	3	9	411	19	3	9	6	37	2048	8
51	$9\ ^{k}/_{52}$				3	3	3	9	420	16	3	10	4	33	2081	
52	$9\ ^{k}/_{53}$				4	4	1	9	429	24	6	16	8	54	2135	
53	$9\ ^{k}/_{54}$				1	3	1	5	434	4	3	9	3	19	2154	
54	$9\ ^{k}/_{55}$				5	4	—	9	443	32	5	14	—	51	2205	
55	$9\ ^{k}/_{56}$				3	3	3	9	452	15	4	6	5	30	2235	
56	$9\ ^{k}/_{57}$				5	3	1	9	461	34	5	12	3	54	2289	
57	$9\ ^{k}/_{58}$				3	3	3	9	470	16	3	8	6	33	2322	
58	$9\ ^{k}/_{59}$				2	4	3	9	479	10	10	16	12	48	2370	
59	$9\ ^{k}/_{60}$		$C_5^1=7$	$n_2=7$	3	3	—	6	485	15	4	8	—	27	2397	
60	$9\ ^{k}/_{61}$				3	4	2	9	494	18	4	11	3	36	2433	

Tabela 15 (continuare)

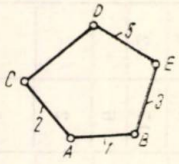
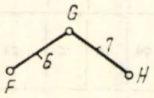
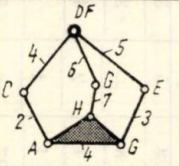
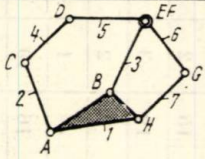
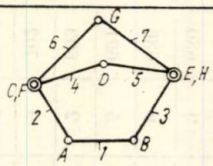
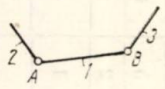
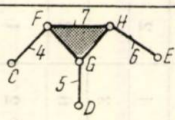
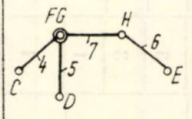
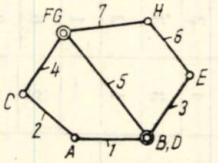
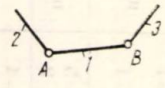
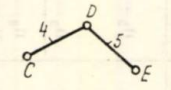
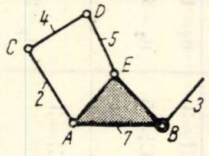
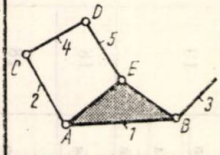
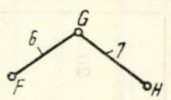
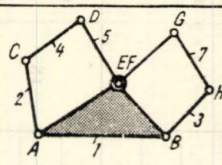
	Lanţul cinematic cu articulaţii multiple				Mecanismele rezultate cu $M_3 = 2$					Mecanismele-motor rezultate din mecanisme cu $M_3 = 2$						Tabela în care sînt încadrate
	Simbol	Caracteristici			Total	Parţial total	Parţial	Număr		Total	Parţial total	Total parţial	Parţial	Nr. total	Nr. cumulator	
		e_{ak}	C_5^k	n_j				Total	Cumulat							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
61	$9\ ^k/_{63}$	20	$C_5^1=7$	$n_2=7$	2	4	3	9	503	12	8	15	10	45	2478	
62	$9\ ^k/_{64}$		$C_5^2=2$	$n_3=2$	2	4	3	9	512	12	7	15	11	45	2523	
63	$9\ ^k/_{65}$				3	3	3	9	521	16	3	10	4	33	2556	
64	$9\ ^k/_{66}$				2	5	2	9	530	11	5	18	8	42	2598	
65	$9\ ^k/_{67}$				3	3	3	9	539	15	3	6	3	27	2625	
66	$9\ ^k/_{68}$				3	4	2	9	548	18	4	10	3	35	2660	8
67	$9\ ^k/_{69}$				2	5	2	9	557	11	5	18	8	42	2702	
68	$9\ ^k/_{71}$				5	3	1	9	566	33	5	12	3	53	2755	
69	$9\ ^k/_{72}$				2	2	1	5	571	7	2	4	1	14	2769	
70	$9\ ^k/_{73}$			$n_2=8$	4	2	3	9	580	16	2	6	4	28	2797	
71	$9\ ^k/_{74}$				1	2	2	5	585	7	2	6	7	22	2819	
72	$9\ ^k/_{75}$			$n_4=1$	5	3	1	9	594	36	7	11	3	57	2876	
73	$9\ ^k/_{77}$				1	5	1	7	601	6	10	15	2	33	2909	
74	$9\ ^k/_{78}$	19	$C_5^1=5$	$n_2=8$	2	6	1	9	610	12	8	25	5	50	2959	
75	$9\ ^k/_{79}$		$C_5^2=3$	$n_3=1$	5	4	—	9	619	39	8	16	—	63	3022	
76	$9\ ^k/_{80}$				—	2	3	5	624	—	2	7	13	22	3044	9
77	$9\ ^k/_{81}$				2	5	2	9	633	13	11	21	9	54	3098	
78	$9\ ^k/_{82}$				3	4	2	9	642	19	4	12	4	39	3137	
79	$9\ ^k/_{83}$				1	3	1	5	647	7	3	10	4	24	3161	
80	$9\ ^k/_{84}$				4	2	—	6	653	23	4	9	—	36	3197	
81	$9\ ^k/_{85}$				2	5	2	9	662	14	8	19	9	50	3247	
82	$9\ ^k/_{86}$				3	4	2	9	671	16	4	14	3	37	3284	

Tabela 15 (continuare)

	Lanţul cinematic cu articulaţii multiple				Mecanismele rezultate cu $M_3 = 2$					Mecanismele-motor rezultate din mecanisme cu $M_3 = 2$						Tabela în care sînt încadrate
	Simbol	Caracteristici			Total	Parţial total	Parţial	Număr		Total	Parţial total	Total parţial	Parţial	Nr. total	Nr. cumulat	
		e_{ak}	C_5^k	n_j				Total	Cumulat							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
83	9 $^k/_{88}$		$C_5^2=3$	$n_3=1$	4	2	3	9	680	15	2	8	5	30	3314	
84	9 $^k/_{89}$		$C_5^1=5$	$n_2=8$	3	3	—	6	686	19	3	8	—	30	3344	9
85	9 $^k/_{90}$				1	2	2	5	691	7	2	4	2	15	3359	
86	9 $^k/_{92}$		$C_5^1=3$		—	1	1	2	693	—	1	4	4	9	3368	
87	9 $^k/_{93}$	18		$n_2=9$	2	6	1	9	702	16	10	27	6	59	3427	10
88	9 $^k/_{94}$		$C_5^2=4$		2	2	1	5	707	8	2	7	2	19	3446	
89	9 $^k/_{95}$		$C_5^1=8$	$n_2=7$	3	4	2	9	716	19	4	13	2	38	3484	
90	9 $^k/_{96}$	20			3	3	1	7	723	21	5	11	3	40	3524	11
91	9 $^k/_{97}$		$C_5^3=1$	$n_3=2$	1	6	2	9	732	5	14	26	6	51	3575	
92	9 $^k/_{99}$			$n_2=8$ $n_4=1$	4	2	1	7	739	19	2	4	2	27	3602	
93	9 $^k/_{101}$		$C_5^1=6$		3	5	1	9	748	23	5	18	2	48	3650	
94	9 $^k/_{103}$	19	$C_5^2=1$	$n_2=8$	3	3	1	7	755	15	3	8	2	28	3678	12
95	9 $^k/_{104}$		$C_5^3=1$	$n_3=1$	1	5	1	7	762	5	8	17	2	32	3710	
96	9 $^k/_{106}$				3	2	—	5	767	17	3	6	—	26	3736	
97	9 $^k/_{108}$	18	$C_5^1=5$ $C_5^3=2$	$n_2=9$	2	1	—	3	770	6	1	2	—	9	3745	13
98	9 $^k/_{109}$	18	$C_5^1=4$ $C_5^2=2$ $C_5^3=1$	$n_2=9$	1	2	—	3	773	3	4	5	—	12	3757	14

TABELA 16

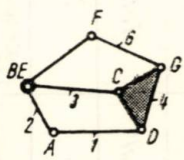
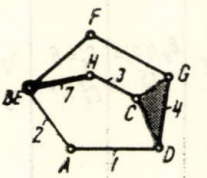
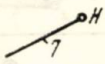
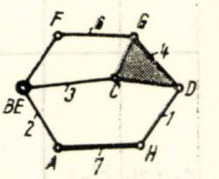
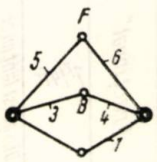
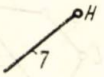
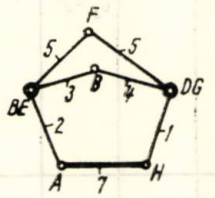
Modul de alcătuire a lanțurilor plane cu articulații multiple cu e = 7 și L_3 = 5 cu ajutorul grupelor assurice

Lanțul sau elementele inițiale	+	Grupa assurică cu articulații multiple	=	Lanțul cinematic cu articulații multiple rezultat	Modul de legare a cuplelor exterioare L_3	Felul gradului de libertate	Nr. de ord. al lanțului rezultat
1	2	3	4	5	6	7	8
	+				Cu F la D și H la 1	„Total"	$7^K/1$
					Cu F la E și H la 1	„Parțial"	$7^K/2$
					Cu F la C și H la E	„Parțial"	$7^K/3p$
	+	 			Cu C la 2 D la B și E la 3	„Fracționat"	$7^K/4$ fr.
	+				Cu C la 2 și E la 1	„Fracționat"	$7^K/5$ fr.
					Cu F la E și H la 3		

Prin aplicarea regulilor de amplificare a lanțurilor sau elementelor inițiale prin grupe assurice rezultă cele 5 lanțuri cu articulații multiple cu e = 7 și L_3 = 5 „total", „parțial" și „fracționat"

TABELA 17

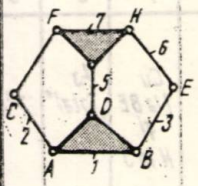
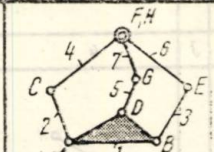
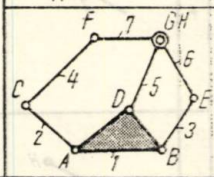
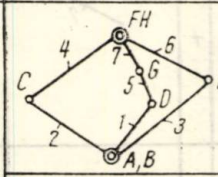
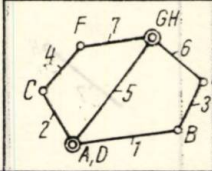
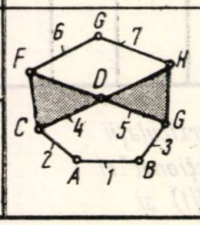
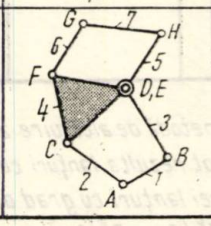
Modul de alcătuire a lanțurilor plane cu articulații multiple, cu $e=7$ și $L_3=5$ prin adăugarea la lanțurile plane cu articulații multiple cu $e=6$ și $L_3=4$ a grupei neassurice cu $n'=1$; $c'_5=1$ și $M'_3=1$

Nr. de ord.	Lanțul inițial cu articulații multiple	+	Grupa neassurică plană ($M_3=1$)	=	Lanțul plan cu articulații multiple rezultat	Modul de leg. a grupei neassurice	Felul grad. de libertate L_3	Nr. de ord. al lanțului rezultat
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$6^K/1$		+				Cu 7 la BE și H la J	L_3 „Total"	$7^K/1$
		+				Cu 7 la A și H la 1	L_3^p „Parțial"	$7^K/2p$
$6^K/2$						Cu 7 la A și H la 1	L_3^p Parțial	$7^K/3p$

Prin această metodă de alcătuire a lanțurilor plane cu articulații multiple nu pot rezulta lanțuri cu grad de libertate „fracționat" ci numai cele trei lanțuri cu grad de libertate „total" ($7^K/1$) și „parțial" ($7^K/2p$; $7^K/3p$)

TABELA 18

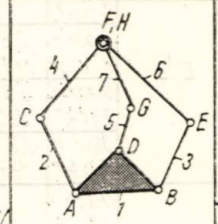
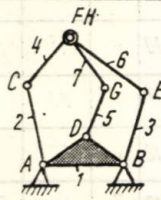
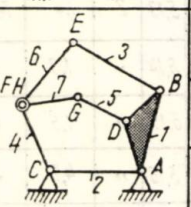
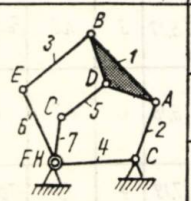
Modul de alcătuire a lanțurilor plane cu articulații multiple cu e = 7 și $L_3 = 5$ folosind teoremele stabilite pentru lanțurile cu e = 9

Lanțul inițial cu articulații simple	Lanțul cu articulații multiple rezultat				Felul gradului de libertate L_3	Numărul de ordine al lanțului rezultat	Obs.
	Caracteristici			Schema structurală			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
7/2		$e_a(1,2)=15$	$C_5^1=6$ $C_5^2=1$	$n_2=5$ $n_3=2$		„Total"	$7^K/1$	Se obține același lanț ca în tabelele 16, 17
						„Parțial"	$7^K/2p$	Idem
		$e_a(1,2)=14$	$C_5^1=4$ $C_5^2=2$	$n_2=7$		„Parțial"	$7^K/3p$	Idem
						„Fracționat"	$7^K/4fr.$	Din acest lanț nu se obțin mecanisme variante independente
7/1p		$e_a(1,2)=15$	$C_5^1=6$ $C_5^2=1$	$n_2=6$ $n_3=1$		„Fracționat"	$7^K/5fr.$	Idem

Din lanțul 7/30 al tabelei 3 din lucrarea [5] rezultă aceleași lanțuri cu articulații multiple ca mai sus (deci variante nedistincte)

TABELA 19

Mecanismele și mecanismele-motor cu e=7 și M_3=2„total" și articulații multiple, provenite din lanțul $7^K/1$ cu grad de libertate„total" L_3=5

Lantul cu articulații multiple inițial		Mecanismul cu articulații multiple rezultat		Mecanismele-motor obținute prin alegerea elementelor conducătoare				
	Schemă structurală		Schemă structurală	Nr. de ord.	Baza	Elem. conduc.	Clasa și ordinul	Grupele assurice componente
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$7^K/1$		1		1,1	1	2,3(2,5, 3,5)	II/2	Diadele 4,6 ; 5,7
				1,2	1	2,4(3,5, 5,7)		Diadele 3,6 ; 5,7
		2		2,3	2(3,5)	1,4	II/2	Diadele 3,6 ; 5,7
				2,4	„	1,3(1,5)		Diadele 4,6 ; 5,7
				2,5	„	4,6(4,7)		Diadele 1,3 ; 5,7
				3,6	4(6,7)	2,6(2,7)	II/2	Diadele 1,3 ; 5,7
				3,7	„	2,1		Diadele 3,6 ; 5,7
				3,8	„	7,5(6,3)		Diadele 1,2 ; 3,6

Din lanțul $7^K/1$ cu l_3=5 „total" au rezultat:

- *Mecanisme cu articulații multiple și M_3=2„total"---- 3*
- *Mecanisme-motor cu articulații multiple și M_3=2„total"--- 8*

TABELA 20

Mecanismele și mecanisme-motor cu articulații multiple cu e = 7 și M_3 = 2 „total" și „parțial" provenite din lanțurile $7^k/2p$ și $7^k/3p$ (tab. 18) cu articulații multiple și grad de libertate parțial

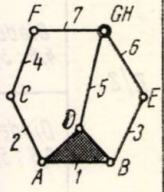
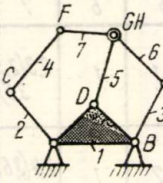
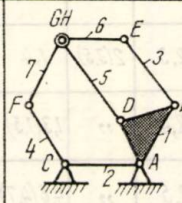
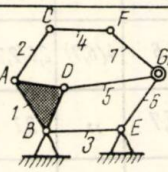
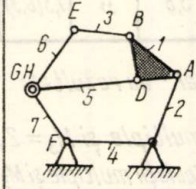
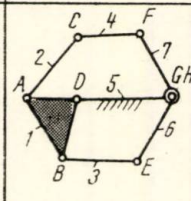
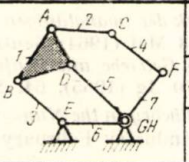
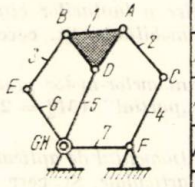
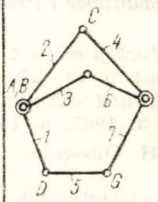
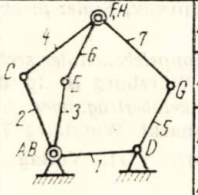
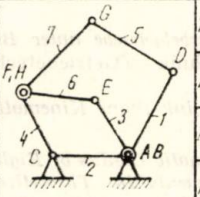
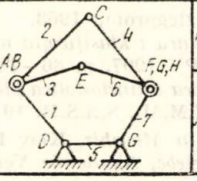
Lanțul cu articulații multiple inițial		Mecanismul „parțial" cu articulații multiple rezultat		Mecanismele-motor obținute prin alegerea elementelor conducătoare						
	Schemă structurală		Schemă structurală	Nr. ord.	Baza	Element cond.	Felul gr. de mobil.	Clasa și ordinul	Grupele eliminate și componența	Elementul eliminat și gr. de libertate
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$7^k/2p$		4 pt.		4,9	1	2,4	Total	II/2	Diadele 5,7; 3,6	—
				4,10	„	2,5	Parțial		Diadele 4,7; 3,6	3,6 (de 5)
				4,11	„	2,3	„		Diadele 5,6; 4,7	5,6 (de 3)
				4,12	„	5,7	„		Diadele 5,7; 4,7	3,6 (de 5)
		5t		5,13	2	1,4	Total	II/2	Diadele 5,7; 3,6	—
				5,14	„	1,3	„		Diadele 5,6; 4,7	—
				5,15	„	1,5	„		Diadele 4,7; 3,6	—
				5,16	„	4,7	„		Diadele 1,5; 3,6	—
		6p		6,17	3	1,2	Parțial	II/2	Diadele 5,6; 4,7	5,6 (de 1)
				6,18	„	6,7	„		Diadele 5,6; 2,4	1,5 (de 6)
		7t		7,19	4	2,1	Total	II/2	Diadele 5,7; 3,6	—
				7,20	„	2,7	„		Diadele 1,5; 3,6	—
				7,21	„	7,5	„		Diadele 1,2; 3,6	—
				7,22	„	7,6	„	III/3	Triada 3,5; 2,1	—
		8 pt		8,23	5	7,4	Total	II/2	Diadele 2,1; 3,6	—
				8,24	„	7,6	Parțial		Diadele 1,3; 2,4	1,3 (de 6)
				8,25	„	7,1	„		Diadele 3,6; 2,4	3,6 (de 1)
				8,26	„	1,2	„		Diadele 4,7; 3,6	3,6 (de 1) 4,7 (de 2)

TABELA 20 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$7^K/2p$		9t		9,27	6	7,4	„Total"	III/3	Triada 2,5; 3,1	—
				9,28	„	7,5	„Partial"	II/2	Diadele 1,5; 2,4	1,3 (de 5)
				9,29	„	7,3	„		Diadele 1,5; 2,4	1,5 (de 3)
		10t		10,30	7	4,2	„Total"	IV/2	Gr. 1,3,5,6	—
				10,31	„	4,5	„	II/2	Diadele 1,2; 3,6	—
				10,32	„	4,6	„	III/3	Triada 3,5,2,1	—
				10,33	„	5,1	„	II/2	Diadele 3,6; 2,4	—
				10,34	„	5,6	„		Diadele 1,3; 2,4	—
				10,35	„	6,3	„		Diadele 1,5; 2,4	—
$7^K/3p$		11t		11,36	1(7)	2,3	„Total"	II/2	Diadele 4,6; 5,7	—
				11,37	„	2,4(3,6)	„		Diadele 3,6; 5,7	—
				11,38	„	2,5	„		Diadele 4,7; 3,6	—
				11,39	„	5,7	„		Diadele 2,4; 3,6	—
		12 pt		12,40	2(3,4,6)	1,5	„Total"	II/2	Diadele 4,7; 3,6	—
				12,41	„	1,3	„Partial"		Diadele 4,5; 5,7	4,6 (de 3)
				12,42	„	1,4	„		Diadele 3,6; 5,7	3,6 (de 4)
				12,43	„	4,7	„		Diadele 3,6; 5,1	3,6 (de 4)
		13 t		13,44	5	1,7	„Total"	II/2	Diadele 4,7; 3,6	—
				13,45	„	1,2(1,3; 1,4; 1,6)	„		Diadele 4,7; 3,6	—

Din lanțurile $7^K/2p$ și $7^K/3p$ cu $L_3 = 5$ „parțial" au rezultat:

- mecanisme cu $M_3 = 2$ „total" 5
- „ „ $M^{pt} = 2$ „parțial – total 4
- „ „ $M_3^{3p} = 2$ „partial" 1
- motor cu $M_3 = 2$ „total" 24
- „ „ „ $M_3^p = 2$ „parțial 13

În total deci din tab. 19 și 20 rezultă:

- mecanisme cu $e = 7$ și articulații multiple 13
- „ motor $e = 7$ „ „ 45

BIBLIOGRAFIE

1. HAIN KURT und, A.W. ZTELSETORFF, *Systematik der zwangläuigen achtgliedrigen Getriebe*, Maschinenmarkt 8 700 Würzburg, **37**, 8 Mai (1964) Seuten 14—20.
2. — *Die zwangläufigen achtgliedrigen Getriebe mit Einfach — und Mehrfachgelenken*, Maschienenmarkt, Würzburg 70 Jg (1965), 64, Seiten 12—18.
3. R.E.F., CROSSLEY, *A Contribution to Grübler's Theory in the Number Synthesis of Plane Mechanisms*, Journal of Engineering for Industry February 1964. Transactions of the ASME series B, p. 1—8.
4. N.I. MANOLESCU, *O metodă unitară de alcătuire a lanțurilor cinematice și a mecanismelor plane de diferite grade de libertate și mobilitate*, St. cerc. mec. apl., **17** *6*, (1964). p. 1465—1512.
5. — *Sistematizarea și clasificarea mecanismelor-motor plane articulate cu două grade de mobilitate „totul"* ($M_3 = 2$) *și „parțial"* ($M_3^p = 2$), St. cerc. mec. apl., **19**, *4* (1965) p. 933—976.
6. N.I. MANOLESCU, I. ERCEANU, P. ANTONESCU, *Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate*, St. cerc. mec. apl., XIII, *6* (1962) p. 1483—1539.
7. N.I. MANOLESCU, V. MANAFU, *Sur la détermination du degré de mobilité des mécanismes*, Bulet. Inst. polit. Buc. **XXV**, *5*., sept.-oct. (1963), p. 45—66.
8. I.I. ARTOBOLEVSKI, N.I. LEVITSKI, S.A. CERKUDINOV, *Sintez ploskih mehanizmov Fizmalghiz*, Moskva 1959, p. 800.
9. HAIN KURT, W.A. ZIELSTORFF, *Die höheren Koppelebenen der sechs-und achtgliedrigen, zwangläufigen Getrieben*, Maschienmarkt Würzburg 70 Jg. **81**, 1964, p. 19—27.
10. HAIN KURT, A.W. ZIELSTORFF, *Höhere Winkelübertragungen in sechs-und achtgliedrigen, zwangläufigen Getrieben*, Maschinenmarkt Würzburg 71 Jg **3**, 1965, p. 18—23.
11. HAIN KURT, *Angewandte Getriebelehre* 2 *Aufl*, VDI, Verlag GmbH Düsseldorf 1961, p. 205—212.
12. M. KIRCHHOF, *Das Gelenkfünfeck und sein Bewegungsbereich*, Maschinenbautechnik **12**, *2*, (1963), p. 99—106.
13. M. KIRCHHOF, *Entwurf fünfgliedriger Zweikurbelgetriebe unter Berrücksichtigung des Übertragungewinkels*, Maschinenbautechnik (Getriebetechnik), **12**, *6*, (1963), p. 328—332.
14. F.R.E. CROSSLEY, *The Permutations of Ten-Link-Plane Kinematic Chains*, Antriebstechnik **3**, *5* (1964), p. 181—185.
15. F.R.E. CROSSLEY, *The Permutations of Kinematic Chains of Eight Members or less from the Graph-Teoretic Viewpoint „Developments in Theoretical and Applied Mechanics Vol.* 2, Pergamon Press, Oxford 1965, p. 467—486.
16. P.A. MALISEV, *Kinematica Mehanizmov* Gizlegprom, 1963.
17. V.V. DOBROVOLSKI, I.I. ARTOBOLEVSKI, *Structura i klasificația mehanizmov*, S.S.S.R. 1939.
18. P.L. CEBÎSEV, *O parallelogramah*, II, Soci SPV 1907, p. 86—106, 1907.
19. G.G. BARANOV, *Klassificația stroenie, kinematica i kinetostatica ploskih mehanizmov c parami pervovo roda*, Trudî seminarea po T.M.M., S.S.S.R. 1948.
20. S.N. KOJEVNIKOV, *Teoria mehanizmov i mașin Mașghiz*, Kiev 1954, p. 39—43.
21. W. LICHTENHELD, *Konstruktionslehre der Getriebe*, Akademie Verlag Berlin 1961.
22. M. GRÜBLER, Getriebelehre, Berlin, 1917.
23. ROBERT KRAUSS, *Getriebelehre*, Bd. 1, 2, 3, Verlag Technik, Berlin 1951—1956.
24. R.C. BOGDAN, CR. PELECUDI, *Contribuții la cinematica diadei Cebișev*, St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959).
25. R.C. BOGDAN, *Utilizarea analizei armonice în studiul grupelor assurice plane de aspectul II și III*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *2* (1963).
26. — *Considerații analitice asupra grupelor cinematice cu două elemente*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *1* (1964).
27. — *Studiu general, prin serii armonice complexe, asupra mecanismelor cu cinci elemente articulate*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *2* (1964).
28. — *Cercetarea grupelor assurice în construcția mecanismelor prin serii armonice complexe și metoda mecano-electronică*, Lucrare de dizertație, 21 noiembrie 1964, Institutul politehnic București.

29. R. Voinea, M. Atanasiu, *Contribuții la determinarea stării cinematice a unui mecanism prin metoda sistemelor conjugate*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *1*, (1963).
30. — *Contribuții la determinarea pe cale analitică a vitezelor și accelerațiilor la un mecanism plan*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *2*, (1963).
31. — *Determinarea vitezelor și accelerațiilor la un mecanism prin metoda ciclurilor independente*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *1* (1964).
32. D. Mangeron, C. Drăgan, O. Munteanu, *Studiul mecanismelor plane cu cuple cinematice inferioare, bazat pe metoda accelerațiilor reduse*, Bul. Inst. polit. Iași, **2** (*6*), *3—4* (1956), p. 263—281.
33. D. Mangeron, C. Drăgan, *Studiul mecanismelor spațiale prin metoda accelerațiilor reduse*, St. și cerc. mec. apl. **12**, *5* (1961), p. 1025—1046.
34. A.I. Zilbermann, *Aplicarea metodei accelerațiilor reduse la analiza cinematică a mecanismelor plane de cl. a III-a*, St. cerc. șt. fiz. și teh. Acad. R.P.R. Filiala Iași *1*, (1958—9) p. 39—56.

ASUPRA VIBRAȚIILOR RACHETEI [1]

AL. MARINESCU
Institutul de mecanica fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

522

În lucrare se studiază problema vibrațiilor libere și forțate ale rachetei considerată ca o bară de masă și rigiditate variabilă liberă la capete.
Pornind de la teoria încovoierii se stabilește mai întîi ecuația vibrațiilor libere ținîndu-se seama de efectul inerție de rotației, al forfecării și al amortizării interne, precum și de efectul amortizării aerodinamice, al forțelor axiale și al forțelor de reducere. Se face un studiu asupra acestei ecuații în vederea aplicării modurilor normale. Se studiază apoi problema vibrațiilor forțate sub acțiunea a trei genuri de forțe perturbatoare și anume forțe perturbatoare armonice, aleatorii și discontinui. Se fac aplicații numerice și se discută rezultatele obținute.

1. INTRODUCERE

Privită atît din punctul de vedere al siguranței structurii cît și al eficacității controlului și stabilității, problema vibrațiilor rachetei prezintă un deosebit interes, pe care-l confirmă numeroasele preocupări în acest sens.

Racheta, în general, poate fi privită ca o bară cu o distribuție foarte variată a masei și a rigidității în lungul său și tratarea problemei vibrațiilor ei în mod riguros apelează neapărat la mașinile de calcul (vezi [1]).

În unele cazuri însă, variația masei și rigidității poate fi prinsă aproximativ în expresii analitice, iar în alte cazuri racheta se poate considera ca apropiată de o bară uniformă.

Pornind de la această premiză, în lucrarea de față de studiază problema vibrațiilor libere și forțate ale rachetei, considerată ca o bară groasă de masă și rigiditate variabilă liberă la capete, cu următoarele ipoteze simplificatoare :

[1]) Publicată și în Rev. Roum. Sci. Tech.,—Mec. Appl., **12**, *5* (1967), (în limba germană).

a) Motorul este astfel prins încît nu transmite vibrații mecanice rachetei.

b) Calculele se fac pentru cîteva etape remarcabile ale zborului spre a elimina inconvenientul variației cu timpul a masei. Se admite variația

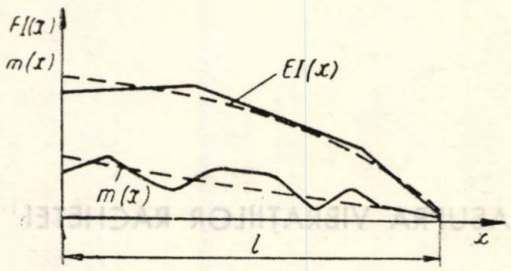


Fig. 1

continuă aproximativă (linia punctată fig. 1) a masei și rigidității în locul celei reale (linia plină (fig. 1)).

c) Efectul oscilației combustibilului lichid în rezervoare (pentru rachete cu combustibil lichid) nu se consideră. Acest lucru este complet ndreptățit la începutul și finele combustiei.

2. NOTAȚII

Oxz este sistemul de axe legat de racheta nedeformată (fig. 2),

l — lungimea structurii rachetei,

z — deflecțiunea structurii rachetei într-un punct la distanța x de origina O,

x_c — distanța centrului de greutate al rachetei față de originea sistemului *Oxz*,

γ — greutatea specifică a materialului structurii,

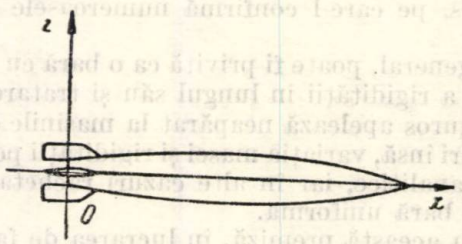


Fig. 2

g — accelerația gravitației,

a^* — accelerația rachetei pe traiectorie,

T — forța de tracțiune,

$F_a(x) = C_x(x)T$ — forța axială într-un punct la distanța x,

$g_a(x)$ — coeficientul forțelor de amortizare internă într-o secțiune la distanța x,
$R_a(x)$ — coeficientul forțelor de readucere,
$A_e(x)$ — coeficientul forțelor de amortizare aerodinamică,
t_k — coeficientul forțelor perturbatoare armonice,
$m(x)$ — masa pe unitatea de lungime într-o secțiune la distanța x,
$I(x)$ — momentul de inerție al secțiunii transversale a rachetei la distanța x,
$A(x)$ — aria secțiunii transversale a rachetei la distanța x,
E — modulul de elasticitate,
G — modulul de forfecare,
$C_x(x)$ — coeficient care leagă forța axială situată la distanța x de forța de tracțiune a rachetei,
θ — unghi de înclinare a axei rachetei față de axa Ox,
k' — coeficientul de forfecare,
k — ordinul armonicei forței perturbatoare,
ρ — densitatea aerului,
V — viteza de zbor a rachetei,
$\Phi_n(x)$ — funcția formei modale,
t — timpul,
ν_n — frecvența proprie,
ω — frecvența forțelor perturbatoare,
ω_c — frecvența critică,
ψ — panta curbei de flexiune cînd se neglijează forfecarea,
ε — panta curbei de flexiune datorită forfecării.

3. VIBRAȚIILE LIBERE ALE RACHETEI

În această parte a lucrării se va stabili mai întîi ecuația vibrațiilor libere ale rachetei în absența forțelor : axiale, de amortizare și de readucere.

Considerînd pentru generalitate racheta ca o bară de masă și rigiditate variabilă liberă la extremități, deoarece secțiunea transversală nu este mică, va trebui să se țină seama de efectul inerției de rotație și al forțelor de forfecare.

Din teoria încovoierii se știe că forța de forfecare și momentul încovoietor se pot scrie

$$F_f = k' \varepsilon AG, \tag{1}$$

respectiv

$$M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2}$$

Ținînd seama că unghiurile ε și ψ stau în relația

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \psi + \varepsilon, \tag{3}$$

atunci ecuația diferențială a rotației unui element de bară

$$-\frac{\partial M}{\partial x} dx + F_f dx = \frac{I\gamma}{g} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dx \tag{4}$$

ne conduce, înlocuind F_f, M și ε din (1), (2) și (3), la ecuația

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+k'AG\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\psi\right)-\frac{I\gamma}{g}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0. \tag{5}$$

Pe de altă parte, ecuația diferențială a mișcării de translație a aceluiași element de bară

$$\frac{\partial F_f}{\partial x}\,\mathrm{d}x=\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

conduce, ținînd seama de (1) și (3), la ecuația

$$\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-k'G\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\psi\right)A\right]=0. \tag{7}$$

Derivînd ecuația (5) față de (x) și adunînd-o cu (7) se obține

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{I\gamma}{g}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0, \tag{8}$$

sau, după efectuarea calculelor,

$$E\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+EI\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-\frac{\gamma}{g}\frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{I\gamma}{g}\frac{\partial^3\psi}{\partial x\,\partial t^2}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0. \tag{9}$$

În ecuația (9) vor trebuie înlocuite derivatele parțiale ale lui ψ în funcție de derivatele parțiale ale lui z.

Din ecuațiile (5) și (7) rezultă

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\psi-\frac{\gamma}{k'Gg}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\left[\frac{1}{A}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-\frac{2}{A^2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial z}{\partial x}+\left[\frac{2}{A^2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{A}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right]\psi+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\gamma}{k'Gg}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\gamma}{k'Gg}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}=\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\right)\psi-$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\left\{\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\left[\frac{1}{A}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{2}{A^2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial z}{\partial x}+\right.$$

$$+\left[\frac{2}{A^2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{A}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right]\psi+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\gamma}{k'Gg}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-$$

$$\left.-\frac{\gamma}{k'Gg}\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial t^2}\right\}-\frac{\gamma}{h'Gg}\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{gE}{I\gamma}\cdot\frac{\partial I}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\psi - \frac{\gamma}{k'Gg}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right] +$$

$$+ \frac{gE}{\gamma}\left\{\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \left[\frac{1}{A}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{2}{A^2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial z}{\partial x} + \left[\frac{2}{A^2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{A}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right]\psi + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\gamma}{k'Gg}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{k'Gg}\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial t^2}\right\} +$$

$$+ \frac{gk'AG}{I\gamma}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{gk'AG}{I\gamma}\psi,$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial t^2} = \frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial t^2} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\left\{\frac{gE}{I\gamma}\frac{\partial I}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} +\right.\right.$$

$$+ \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\psi - \frac{\gamma}{k'Gg}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\Big] + \frac{gE}{\gamma}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} +$$

$$+ \frac{gE}{\gamma}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{2}{A^2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial z}{\partial x} +$$

$$+ \frac{gE}{\gamma}\left[\frac{2}{A^2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{A}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right]\psi + \frac{gE}{\gamma}\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\gamma}{k'Gg}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} -$$

$$\left. - \frac{gE}{\gamma}\frac{\gamma}{k'Gg}\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial t^2} + \frac{gk'AG}{I\gamma}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{gk'AG}{I\gamma}\psi\right\} - \frac{\gamma}{k'Gg}\frac{\partial^4 z}{\partial t^4}.$$

După înlocuirea derivatelor de mai sus în ecuația (9), cu aproximațiile arătate în lucrarea [2], deoarece A și I sînt funcții numai de x, se obține ecuația vibrațiilor libere

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + C_0\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial t^2} + C_1\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + \tag{10}$$

$$+ C_2\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + C_3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial t^2} + C_4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + C_5\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,$$

unde

$$C_0 = -\frac{I\gamma}{g}\left(1 + \frac{E}{k'G}\right),$$

$$C_1 = \frac{I\gamma^2}{g^2k'G},$$

$$C_2 = EI\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} - E\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x},$$

$$C_3 = E\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}\frac{\gamma}{k'Gg} - \frac{I\gamma}{g}\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x},$$

$$C_4 = E\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} - \frac{E}{I}\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}\right)^2,$$

$$C_5 = \frac{E}{I}\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}\right)^2\frac{\gamma}{k'Gg} - E\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}x^2}\frac{\gamma}{k'Gg} -$$

$$-2E\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\frac{\gamma}{k'Gg} + \frac{\gamma A}{g},$$

mărimile I și A nefiind nule în nici un punct de-alungul structurii.

Se poate ușor verifica faptul că atunci cînd $I = \text{const.}$ și $A = \text{const.}$, deci pentru bara uniformă, coeficienții de mai sus devin

$$C_0 = -\frac{I\gamma}{g}\left(1 + \frac{E}{k'G}\right),$$

$$C_1 = -\frac{I\gamma^2}{g^2k'G},$$

$$C_2 = C_3 = C_4 = 0,$$

$$C_5 = \frac{\gamma A}{g}$$

și ecuația (10) devine

$$EI\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \frac{I\gamma}{g}\left(1 + \frac{E}{k'G}\right)\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial t^2} +$$

$$+\frac{\gamma^2 I}{g^2k'G}\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + \frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \tag{11}$$

care este bine cunoscută.

Ecuația vibrațiilor libere (10) se completează și cu alți termeni atunci cînd se ține seama de efectul amortizării interne și aerodinamice, de efectul forțelor axiale sau de readucere.

Fără a mai intra în detalii, care pot fi văzute în lucrările [2] și [3], ținînd seama de efectul amortizării interne a structurii prin termenul [2])

$$g_a(x)\left|\frac{z}{\frac{\partial z}{\partial t}}\right|\frac{\partial z}{\partial t},$$

de efectul forțelor de readucere

$$R_a(x)\frac{\partial z}{\partial x},$$

---

[2]) Pentru amortizarea internă s-a folosit un alt model decît modelul Voight, dar nu există nici un inconvenient pentru folosirea lui.

de efectul amortizării aerodinamice

$$A_e(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t}$$

și de efectul forței axiale $F_a = C_x(x)\,T$, ecuația generală a vibrațiilor libere ale rachetei se scrie

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + C_0\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial t^2} + C_1\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + C_2\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} +$$
$$+ C_3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} + C_4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + C_5\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + A_e(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} + \tag{12}$$
$$+ \left[\frac{\mathrm{d}F_a}{\mathrm{d}x} + R_a(x)\right]\frac{\partial z}{\partial x} + g_a(x)\left|\frac{z}{\frac{\partial z}{\partial t}}\right|\frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

unde la coeficientul C_4, dat anterior se va adăuga F_a. În ceea ce privește mărimile $g_a(x)$, $R_a(x)$, $A_e(x)$, $C_x(x)$ acestea sînt funcții date de x.

În vederea folosirii modurilor normale atît pentru calculul frecvențelor proprii, cît și în problemele de vibrații forțate, este estrem de utilă o cercetare a ecuației (12) în acest sens.

Este știut faptul că soluțiile nebanale ale ecuației (12), care pot avea semnificația fizică a modurilor de deformare, pot fi folosite ca funcțiuni Φ_n a acestora, dacă este posibilă aplicarea metodei separării variabilelor. Acest lucru însă, în cazul ecuației (12), este extrem de dificil. De aceea, vom încerca să arătăm în ce condiții este posibilă aplicarea metodei separării variabilelor pentru obținerea unor funcții Φ_n.

În lucrarea [1] s-a arătat că numai pentru moduri superioare influența inerției de rotație și a forfecării încep să aibă o contribuție simțitoare la modificarea formei modale.

Pe de altă parte, amortizările nu au o contribuție substanțială în domeniile din afara rezonanței.

Rezultă deci că, pentru moduri inferioare și în afara rezonanței se pot folosi (aproape riguros) drept funcții ale formei modale soluțiile ecuației (12) în care neglijăm o parte din efectul inerției de rotație și al forfecării precum și al amortizărilor.

În acest caz, după cum s-a arătat în lucrarea [4], se poate aplica metoda separării variabilelor ecuației

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + C_2\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + C_4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} +$$
$$+ \left[R_a + \frac{\mathrm{d}F_a}{\mathrm{d}x}\right]\frac{\partial z}{\partial x} + C_5\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \tag{13}$$

și funcțiile Φ_n formează un sistem de funcții proprii ortogonale, cu ponderea C_5.

Se pot de asemenea deduce funcții aproximative ale formei modale și cu ajutorul metodelor variaționale.

Cu aceste precizări, fără a mai da dezvoltările de calcul, expresia frecvenței proprii (la pătrat) în cel de al n-lea mod de vibrație este

$$\nu_n^2 = \frac{\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial x^2}\right)\Phi_n \mathrm{d}x + \int_0^l C_2\frac{\partial^3\Phi_n}{\partial x^3}\Phi_n \mathrm{d}x}{\int_0^l C_5\Phi_n^2 \mathrm{d}x} + \frac{\int_0^l C_4\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial x^2}\Phi_n \mathrm{d}x + \int_0^l\left[\frac{\mathrm{d}F_a}{\mathrm{d}x} + R_a(x)\right]\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}\Phi_n \mathrm{d}x}{\int_0^l C_5\Phi_n^2 \mathrm{d}x}. \tag{14}$$

Ca o verificare pentru bara uniformă, unde $F_n = R_a(x) = 0$, expresia (14) devine

$$\nu_n^2 = \frac{EI\int_0^l \frac{\mathrm{d}^4\Phi_n}{\mathrm{d}x^4}\Phi_n \mathrm{d}x}{m\int_0^l \Phi_n^2 \mathrm{d}x} = \frac{EI\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_n}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x}{m\int_0^l \Phi_n^2 \mathrm{d}x}, \tag{15}$$

care este bine cunoscută.

Rezultatele stabilite sînt de mare utilitate în studiul vibrațiilor forțate care urmează.

4. VIBRAȚIILE FORȚATE ALE RACHETEI

Tratarea problemei vibrațiilor forțate ale rachetei, în general, sub aspectul tuturor felurilor de forțe perturbatoare care apar, prezintă serioase dificultăți.

Calea urmată în prezenta lucrare pentru cazul cînd variația masei și rigidității pot fi puse aproximativ în expresii analitice pare să prezinte unele avantaje în acest sens.

Se va examina în cele ce urmează problema vibrațiilor forțate ale rachetei pentru trei genuri de forțe perturbatoare și anume: armonice aleatorii și discontinue.

4.1. FORȚE PERTURBATOARE ARMONICE

Acest gen de forțe apar ca urmare a oscilațiilor rachetei în timpul zborului. În acest caz, ecuația vibrațiilor forțate se scrie

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + C_0\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial t^2} + C_1\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + C_2\frac{\partial^3 z}{\partial t^3} + C_3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial t^2} + C_4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + C_5\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + A_c(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t} + \left[\frac{\mathrm{d}F_a}{\mathrm{d}x} + R_a(x)\right]\frac{\partial z}{\partial x} + g_a(x)\left|\frac{z}{\frac{\partial z}{\partial t}}\right|\frac{\partial z}{\partial t} = t_k \mathrm{e}^{ik\omega t}, \tag{16}$$

unde coeficienții C_0, C_1, C_2, C_3 și C_5 sînt identici cu cei ai ecuației (10), iar coeficientul C_4 are expresia

$$C_4 = E\frac{dI}{dx}\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} - \frac{E}{I}\left(\frac{dI}{dx}\right)^2 + F_a .$$

În studiul ecuației (16), folosirea funcțiilor Φ_n, deduse după indicațiile de mai sus, este, se înțelege, aproximativă, mai ales în vecinătatea rezonanței. Punem soluția ecuației (16) sub forma

$$z = \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s(t)\Phi_s(x) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s e^{i(k\omega t+\Theta)}\Phi_s(x), \tag{17}$$

din care rezultă

$$\frac{\partial z}{\partial t} = ik\omega z \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = ik\omega \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -k^2\omega^2 z \quad , \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} = -k^2\omega^2 \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} = k^4\omega^4 z \quad , \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial t^2} = -k^2\omega^2 \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s \frac{\partial^3 \Phi_s}{\partial x^3} \quad , \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s \frac{\partial^4 \Phi_s}{\partial x^4}.$$

Dacă se înlocuiesc derivatele de mai sus în ecuația (16) se obține

$$\sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2}\right) - k^2\omega^2 C_0 \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2} + k^4\omega^4 C_1 \Phi_s + \right.$$

$$+ C_2 \frac{\partial^3 \Phi_s}{\partial x^3} - k^2\omega^2 C_3 \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + C_4 \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2} - k^2\omega^2 C_5 \Phi_s +$$

$$+ ik\omega A_e(x)\frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \left[\frac{dF_a}{dx} + R_a(x)\right]\frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \tag{18}$$

$$\left. + ig_a(x)\Phi_s \right\} = t_k e^{ik\omega t}$$

sau, după ce se înmulțește cu $\Phi_n(x)$ ecuația (18) și se integrează de la 0 la l :

$$\sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2}\right)\Phi_n - k^2\omega^2 C_0 \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2}\Phi_n + \right.$$

$$+ k^4\omega^4 C_1 \Phi_s \Phi_n + C_2 \frac{\partial^3 \Phi_s}{\partial x^3}\Phi_n - k^2\omega^2 C_3 \frac{\partial \Phi_s}{\partial x}\Phi_n +$$

$$+ C_4 \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2} \Phi_n - k^2 \omega^2 C_5 \Phi_s \Phi_n + ik\omega A_e(x) \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \Phi_n +$$

$$+ \left[\frac{dF_a}{dx} + R_a(x) \right] \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \Phi_n + ig_a(x) \Phi_s \Phi_n \Big\} dx = \int_0^l t_k \Phi_n e^{ik\omega t} dx. \quad (19)$$

Deoarece funcțiile Φ_n, Φ_s sînt ortogonale cu ponderea C_5, notîndu-se cu

$$\nu_n^2 = \frac{\Lambda_n}{\int_0^l C_5 \Phi_n^2 dx},$$

unde

$$\Lambda_n = \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} \right) \Phi_n dx + \int_0^l C_2 \frac{\partial^3 \Phi_n}{\partial x^3} \Phi_n dx +$$

$$+ \int_0^l C_4 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} \Phi_n dx + \int_0^l \left[\frac{dF_a}{dx} + R_a(x) \right] \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \Phi_n dx,$$

ecuația (19) devine

$$\zeta_n \left[1 - \frac{k^2 \omega^2}{\nu_n^2} - \frac{k^2 \omega^2}{\nu_n^2} \left(\frac{\int_0^l C_0 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} \Phi_n dx}{\int_0^l C_5 \Phi_n^2 dx} + \frac{\int_0^l C_3 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \Phi_n dx}{\int_0^l C_5 \Phi_n^2 dx} \right) + \right.$$

$$+ \frac{k^4 \omega^4}{\nu_n^2} \frac{\int_0^l C_1 \Phi_n^2 dx}{\int_0^l C_5 \Phi_n^2 dx} + \frac{ik\omega}{\nu_n^2} \frac{\int_0^l A_e(x) \frac{\partial \Phi_n}{dx} \Phi_n dx}{\int_0^l C_5 \Phi_n^2 dx} +$$

$$\left. + \frac{i}{\nu_n^2} \frac{\int_0^l g_a(x) \Phi_n^2 dx}{\int_0^l C_5 \Phi_n^2 dx} \right] = \frac{\int_0^l t_k \Phi_n e^{ik\omega t} dx}{\Lambda_n}. \quad (20)$$

Cu notațiile:

$$\alpha_1 = \frac{k^2}{\nu_n^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{k^2}{\nu_n^2} \left(\frac{\int_0^l C_0 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} \Phi_n dx}{\int_0^l C_5 \Phi_n^2 dx} + \frac{\int_0^l C_3 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \Phi_n dx}{\int_0^l C_5 \Phi_n^2 dx} \right),$$

$$\alpha_3 = \frac{k^4}{\nu_n^2} \frac{\int_0^l C_1 \Phi_n^2 dx}{\int_0^l C_5 \Phi_n^2 dx},$$

$$\alpha_4 = \frac{k}{\nu_n^2} \frac{\int_0^l A_e(x) \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \Phi_n \mathrm{d}x}{\int_0^l C_5 \Phi_n^2 \mathrm{d}x},$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\nu_n^2} \frac{\int_0^l g_a(x) \Phi_n^2 \mathrm{d}x}{\int_0^l C_5 \Phi_n^2 \mathrm{d}x},$$

$$\alpha_6 = \frac{\int_0^l t_k \Phi_n \mathrm{e}^{ik\omega t} \mathrm{d}x}{\Lambda_n},$$

ecuația (20) se va scrie sub forma

$$\zeta_n[1 - \omega^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3\omega^4 + i(\alpha_4\omega + \alpha_5)] = \alpha_6, \tag{21}$$

de unde

$$\zeta_n = \frac{\alpha_6}{1 - \omega^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3\omega^4 + i(\alpha_4\omega + \alpha_5)} = \frac{\alpha_5 \mathrm{e}^{-i\delta}}{\sqrt{\{1 - \omega^2[(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_3\omega^2]\}^2 + (\alpha_4\omega + \alpha_5)^2}}. \tag{22}$$

Cu aceasta, studiul deflecțiunii rachetei poate fi ușor efectuat și este interesant de văzut în ce condiții apare rezonanța și cum poate fi evitată. Trebuie căutată deci frecvența $\omega = \omega_c$ care face maximă amplitudinea mărimii ζ_n. Această condiție conduce la ecuația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\{1 - 2\omega^2[(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_3\omega^2] + \omega^4[\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3\omega^2]^2 + (\alpha_4\omega + \alpha_5)^2\} = 0, \tag{23}$$

care se scrie, făcînd în termenul $2\alpha_4\alpha_5\omega$ aproximația [3]) $2\alpha_4\alpha_5\omega \approx 2\alpha_4\alpha_5\nu_n$ lăsînd de o parte soluția banală $\omega_c = 0$ și punînd $\omega_c^2 = \lambda$:

$$A_0\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0, \tag{24}$$

unde

$$A_0 = 8\alpha_3, \quad A_1 = -12\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2), \quad A_2 = 4[2\alpha_3 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2],$$

$$A_3 = 2[\alpha_4^2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)].$$

Frecvențele critice sînt date de rădăcinile reale și pozitive ale ecuației (24); în lucrarea [4] s-a demonstrat cu ajutorul criteriilor lui Hurwitz că în toate cazurile cel puțin una din acest fel de rădăcini există.

[3]) În lucrarea [2] se arată că această aproximație este bună pentru valori mici ale amortizărilor și efectului forfecării.

A p l i c a ţ i e. Se consideră o rachetă de secţiune constantă şi cu o distribuţie aproape uniformă a masei în lungul său (bară uniformă) în regim de zbor supersonic, cu următoarele date $G_r = 1\,500$ kg, $l = 8$ m, $D = 0{,}6$ m, $V = 800$ m/sec, $k' = 1{,}5$, $\rho = 0{,}00188$, $G = 2{,}6 10^5$ kg/cm^2,

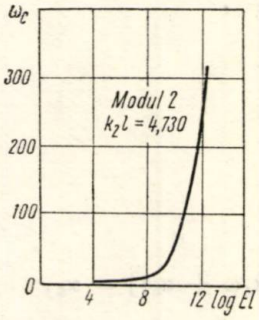


Fig. 3

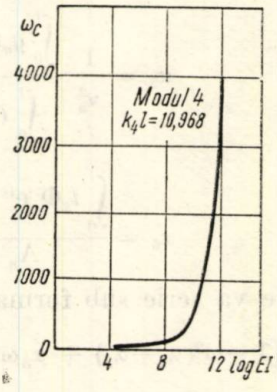


Fig. 4

unde G_r este greutatea rachetei, D diametrul exterior, V viteza de zbor.

Pentru acest caz, ecuaţia (16), în care s-a neglijat efectul forţelor axiale, se scrie

$$EI\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \frac{I\gamma}{g}\left(1 + \frac{E}{k'G}\right)\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial t^2} + \frac{I\gamma^2}{g^2 k' G}\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} +$$
$$+ A_e(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} + g_a(x)\left|\frac{z}{\frac{\partial z}{\partial t}}\right|\frac{\partial z}{\partial t} + R_a(x)\frac{\partial z}{\partial x} = t_k e^{ik\omega t}.$$

În conformitate cu condiţiile aproximative la extremităţi

$$\left|\frac{d^2\Phi_n}{dx^2}\right|_{x=0} = \left|\frac{d^3\Phi_n}{dx^3}\right|_{x=0} = 0,$$
$$\left|\frac{d^2\Phi_n}{dx^2}\right|_{x=l} = \left|\frac{d^3\Phi_n}{dx^3}\right|_{x=l} = 0,$$

s-a considerat drept funcţie a formei modale următoarea funcţie

$$\Phi_n(x) = C_1(\cos k_n x + \operatorname{ch} k_n x) + C_2(\sin k_n x + \operatorname{sh} k_n x),$$

unde

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\sin k_n l - \operatorname{sh} k_n l}{\operatorname{ch} k_n l - \cos k_n l}.$$

Calculele efectuate în lucrarea [4], ţinîndu-se seama de consideraţiile făcute asupra funcţiilor Φ_n, au condus la valorile frecvenţei critice în funcţie de rigiditate pentru două moduri înscrise în graficele din figurile 3 şi 4.

4. 2. FORȚE PERTURBATOARE ALEATORII

Forțele perturbatoare aleatorii pot apare fie datorită zgomotului, fie turbulenței atmosferice.

După cele văzute în paragraful precedent se poate nota

$$t_k = t_{k0}\, e^{i\nu} \tag{25}$$

și

$$\mu_0 = \int_0^l t_{k0}\, dx, \tag{26}$$

$$\mu_n = \frac{\int_0^l t_{k0}\, \Phi_n\, dx}{\Lambda_n\, \mu_0}; \tag{27}$$

coeficientul α_6 din notațiile anterioare se va scrie

$$\alpha_6 = \mu_0\, e^{ik\omega t}\, \mu_n\, e^{i\nu} \tag{28}$$

și în concluzie deflecțiunea rachetei poate fi pusă, notînd cu $\Theta = \nu - \delta$, sub forma

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n\, \Phi_n = \mu_0\, e^{ik\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n\, \Phi_n\, e^{i\Theta}}{\sqrt{\{1-\omega^2\,[(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_3\omega^2]\}^2+(\alpha_4\omega+\alpha_5)^2}}. \tag{29}$$

Definid deflecțiune medie patratică prin relația

$$\overline{z}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T z^2\, dt, \tag{30}$$

se arată pe o cale cunoscută că în apropierea rezonanței se poate reține media patratică sub forma

$$\overline{z}^2 = \overline{Z}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2\, \Phi_n^2}{\{1-\omega^2\,[(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_3\,\omega^2]\}^2+(\alpha^4\,\omega+\alpha_5)^2}; \tag{31}$$

$\overline{Z}^2$ fiind valoarea medie patratică a forței perturbatoare.

Frecvența forței perturbatoare, care este o mărime întîmplătoare, are sens totuși numai cînd este pozitivă, deci poate fi admis că ea există în intervalul $0 - \infty$.

Trebuie precizat însă că se consideră fenomenul de vibrație în apropierea rezonanței, deci în jurul valorii $\omega = \omega_c$.

Fie deci $\omega_c + \Delta\omega$ și $\omega_c - \Delta\omega$ intervalul considerat. În acest caz, pentru un spectru de frecvențe cunoscut al forței perturbatoare relația între densitatea spectrală $\varphi(\omega)$ și valoarea medie patratică a forței perturbatoare se scrie

$$\overline{Z}^2 = \int_{\omega_c-\Delta\omega}^{\omega_c+\Delta\omega} \varphi(\omega)\, d\omega. \tag{32}$$

Admiţînd că densitatea spectrală $\varphi(\omega)$ se schimbă puţin în apropierea rezonanţei, se va putea scrie deci că media pătratică a deflecţiunii are expresia [4]:

$$\overline{z}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\omega_c)\, \mu_n^2\, \Phi_n^2 \int_{\omega_c-\Delta\omega}^{\omega_c+\Delta\omega} \frac{d\omega}{\{1-\omega^2[(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_3\omega^2]\}^2+(\alpha_4\omega+\alpha_5)^2}. \quad (33)$$

Deoarece

$$\omega = \omega_c + \varepsilon\, \omega_c = \omega_c\,(1+\varepsilon),$$

unde $\varepsilon \ll 1$, reţinînd din dezvoltările în serie ale lui $1+\varepsilon$ numai puterile pînă la a doua inclusiv, expresia (33), devine

$$\overline{z}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\omega_c)\, \mu_n^2\, \Phi_n^2 \int_{-\omega_c\varepsilon}^{\omega_c\varepsilon} \frac{\omega_c\, d\varepsilon}{a\,\varepsilon^2 + b\,\varepsilon + c} \quad (34)$$

sau, notînd cu

$$p = \frac{b}{a} \text{ şi } q = \frac{c}{a},$$

$$\overline{z}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\omega_c)\, \mu_n^2\, \Phi_n^2 \int_{-\omega_c\varepsilon}^{\omega_c\varepsilon} \frac{\omega_c\, d\varepsilon}{a\,(\varepsilon^2 + p\,\varepsilon + q)}. \quad (35)$$

În expresiile de mai sus s-a notat cu

$$\begin{aligned} a &= 28\,\alpha_3^2\,\omega_c^8 - 30\,\alpha_3\,(\alpha_1+\alpha_2)\,\omega_c^6 + \\ &\quad + 6\,[(\alpha_1+\alpha_2)^2 + 2\alpha_3]\,\omega_c^4 + [\alpha_4^2 - 2\,(\alpha_1+\alpha_2)]\,\omega_c^2, \\ b &= 8\,\alpha_3^2\,\omega_c^8 - 12\,\alpha_3\,(\alpha_1+\alpha_2)\,\omega_c^6 + 4\,[(\alpha_1+ \\ &\quad + \alpha_2)^2 + 2\alpha_3]\,\omega_c^4 + 2\,[\alpha_4^2 - 2\,(\alpha_1+\alpha_2)]\,\omega_c^2 + 2\alpha_4\,\alpha_5\,\omega_c, \\ c &= \alpha_3^2\omega_c^8 - 2\alpha_3\,(\alpha_1+\alpha_2)\,\omega_c^6 + ([\alpha_1+\alpha_2)^2 + 2\alpha_3]\,\omega_c^4 + \\ &\quad + [\alpha_4^2 - 2\,(\alpha_1+\alpha_2)]\,\omega_c^2 + 2\alpha_4\,\alpha_5\,\omega_c + 1. \end{aligned}$$

Deoarece p şi q sînt mărimi foarte mici, iar $\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ de asemenea o mărime foarte mică, expresia (35) se poate scrie sub forma

$$\overline{z}^2 \approx \pi \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\omega_c)\, \mu_n^2\, \Phi_n^2 \frac{\omega_c}{a\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}. \quad (36)$$

Această mărime joacă un rol deosebit de important în stabilirea posibilităţii depăşirii unor limite impuse deflecţinii sau stărilor de solicitare ale structurii. Astfel folosind legea distribuţiei normale, probabilitatea ca deflecţiune $|z|$ să fie mai mare ca $n\sqrt{\overline{z}^2}$ se scrie

$$P(|z| > n\sqrt{\overline{z}^2}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{n\sqrt{\overline{z}^2}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2\overline{z}^2}}}{\sqrt{2\overline{z}^2}}\, dz = \text{er. fc.}\, \frac{n\sqrt{\overline{z}^2}}{\sqrt{2\overline{z}^2}} = \text{er. fc.}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, n\right). \quad (37)$$

Același lucru se poate arăta pentru o stare de solicitare, cum ar fi de exemplu tensiunea. Definind tensiunea σ într-un punct oarecare al structurii prin relația

$$\sigma = E \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \frac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}x}, \tag{38}$$

atunci media patratică a tensiunii se exprimă prin

$$\overline{\sigma^2} = \pi E^2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\omega_c)\, \mu_n^2 \frac{\omega_c}{a\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}x}\right)^2. \tag{39}$$

Analog deci ca și în cazul precedent, probabilitatea ca tensiunea într-un punct să fie mai mare ca $n\sqrt{\overline{\sigma^2}}$ se scrie

$$P(|\sigma| > n\sqrt{\overline{\sigma^2}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{n\sqrt{\overline{\sigma^2}}}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2\overline{\sigma^2}}}}{\sqrt{2\overline{\sigma^2}}} \mathrm{d}\sigma. \tag{40}$$

În acest fel se pot defini și alte mărimi legate de deformația barei, se pot stabili valorile lor medii patratice și cu aceasta probabilitatea depășirii anumitor limite date.

4. 3. FORȚE PERTURBATOARE DISCONTINUI

Acest gen de forțe poate apare fie datorită unei comenzi, fie datorită unei izbiri cu particule, fie altor cauze.

Se admite că forțele discontinui care apar se pot exprima prin funcții care admit o transformată Laplace.

În acest caz, este cu totul indicat să se caute soluția ecuației vibrațiilor cu ajutorul transformatei Laplace. Se cere prin urmare ca ecuația vibrațiilor forțate să fie pusă sub o formă convenabilă.

Scriind că

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = E \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2E \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$$

și presupunînd că toți coeficienții pot fi puși sub forma unor polinoame $Q_m(x)$, atunci ecuația vibrațiilor forțate va fi, făcînd $g_a \approx 0$,

$$Q_0 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + Q_1 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2\, \partial t^2} + Q_2 \frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + Q_3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + Q_4 \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial t^2} +$$

$$+ Q_5 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Q_6 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + Q_7 \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial t} + Q_8 \frac{\partial z}{\partial x} = F(x, t), \tag{41}$$

unde

$F(x, t)$ este forța perturbatoare discontinuă, iar

$$Q_0 = EI, \quad Q_1 = C_0, \quad Q_2 = C_1, \quad Q_3 = C_2 + 2E \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x},$$

$$Q_4 = C_3,\ Q_5 = C_4 + E\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}x^2},\ Q_6 = C_5,$$

$$Q_7 = A_e,\ Q_8 = R_a + \frac{\mathrm{d}F_a}{\mathrm{d}x}.$$

Definind transformata Laplace a deflecţiunii $z\,(x,\ t)$ prin expresia

$$L\,z\ (x,\ t) = Z\,(x,\ p) = p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,z\,(x,\ t)\,\mathrm{d}t$$

se poate scrie

$$L\,\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial^n Z}{\partial x^n} = p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\,\mathrm{d}t \tag{42}$$

sau, dacă $Q_m\,(x)$ este un polinom de x,

$$Q_m\,(x)\,\frac{\partial^n Z}{\partial x^n} = p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,Q_m\,(x)\,\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\,\mathrm{d}t. \tag{43}$$

Pentru termenii în care intervine şi derivate faţă de timp se pune

$$\mathrm{L}\,\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(\frac{\partial^i z}{\partial x^i}\right) = p^j\ \mathrm{L}\,\frac{\partial^i z}{\partial x^i} - \sum_{k=0}^{k=i-1}\left(\frac{\partial^k z}{\partial x^k}\right)_{t=0} p^{i-k}.$$

Deoarece

$$\mathrm{L}\,\frac{\partial^i z}{\partial x^i} = \frac{\partial^i Z}{\partial x^i},$$

se poate scrie mai general că

$$\mathrm{L}\,Q_m\,(x)\,\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(\frac{\partial^i z}{\partial x^i}\right) = \mathrm{L}\,\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left[Q_m\,(x)\,\frac{\partial^i z}{\partial x^i}\right] =$$

$$= p^j\,Q_m\,(x)\,\frac{\partial^i Z}{\partial x^i} - \sum_{k=0}^{k=i-1} Q_m\,(x)\left(\frac{\partial^k z}{\partial x^k}\right)_{t=0} p^{i-k}. \tag{44}$$

Pe baza consideraţiilor de mai sus şi cu condiţiile la limită

$$z\,(0,\ x) = 0,\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{t=0} = 0,\ \ldots,\ \left(\frac{\partial^k z}{\partial x^k}\right)_{t=0} = 0,$$

deoarece $\dfrac{\partial^i Z}{\partial x^i} = \dfrac{\mathrm{d}^i Z}{\mathrm{d}x^i}$, ecuaţia (41) devine

$$Q_0\frac{\mathrm{d}^4 Z}{\mathrm{d}x^4} + p^2 Q_1\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}x^2} + Q_2 p^4 Z + Q_3\frac{\mathrm{d}^3 Z}{\mathrm{d}x^3} +$$

$$+ Q_4 p^2\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} + Q_5\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}x^2} + Q_6 p^2 Z +$$

$$+ Q_7 p\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} + Q_8\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} = \overline{F}(x,\ p), \tag{45}$$

unde

$$\overline{F}(x, p) = \mathrm{L}\, F(x, t).$$

Ultimei ecuații (45) i se poate din nou aplica transformata Laplace introducînd parametrul s.

În acest caz, pentru operațiile asupra noii transformate parametrul p este considerat ca o constantă. Punînd deci

$$\mathrm{L}\, Z(x, p) = H(s, p)$$

și observînd că

$$Q_m = q_0 + \sum_{m=1}^{n} q_m\, x^m \tag{46}$$

se obține următoarea expresie

$$\mathrm{L}\, Q_m(x) \frac{\mathrm{d}^i Z}{\mathrm{d}x^i} = q_0 \left[Hs^i - s^{i-1} Z(0, p) - \ldots - \left(\frac{\mathrm{d}^{i-1} Z}{\mathrm{d}x^{i-1}} \right)_{x=0} \right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} (-1)^m q_m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}s^m} \left[Hs^i - s^{i-1} Z(0, p) - \ldots - \left(\frac{\mathrm{d}^{i-1} Z}{\mathrm{d}x^{i-1}} \right)_{x=0} \right].$$

Cu aceasta ecuația (45) devine

$$S_n \frac{\mathrm{d}^n H}{\mathrm{d}s^n} + S_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} H}{\mathrm{d}s^{n-1}} + \ldots + S_0 H = \Phi, \tag{47}$$

de unde

$$H = \frac{\Phi}{S_0} - \ldots - \frac{S_{n-1}}{S_0} \frac{\mathrm{d}^{n-1} H}{\mathrm{d}s^{n-1}} - \frac{S_n}{S_0} \frac{\mathrm{d}^n H}{\mathrm{d}s^n}. \tag{48}$$

În acest caz, după cum se arată în lucrarea [4], determinarea funcției $Z(x, p)$ revine la soluționarea unor ecuații integrale de tip Volterra.

O simplificare considerabilă a problemei se obține în cazul cînd racheta este considerată ca o bară uniformă.

În această situație, ecuația vibrațiilor forțate fără efectul forțelor axiale este

$$EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \frac{I\gamma}{g} \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{I\gamma^2}{g^2 k'G} \frac{\partial^4 z}{\partial t^4} +$$

$$+ m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + A_e(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} + R_a(x) \frac{\partial z}{\partial x} = F(x, t). \tag{49}$$

Deoarece $A_e(x)$ și $R_a(x)$ se presupune a depinde puțin de x și se consideră aproximativ constante, iar pentru amortizarea aerodinamică și pentru forțele de readucere se poate lua (vezi fig. 5)

$$z \approx (x - x_c)\theta; \tag{50}$$

rezultă

$$A_e(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} \approx A_e \ddot{\theta},$$
$$R_a(x)\frac{\partial z}{\partial x} \approx R_a \theta. \tag{51}$$

Notînd pentru uşurinţă

$$K_0 = EI,\ K_1 = -C_0 = \frac{I\gamma}{g}\left(1 + \frac{E}{k'G}\right),\ K_2 = C_1 = \frac{I\gamma^2}{g^2 k'G},$$

$$\alpha_1 = \frac{K_1}{K_0},\ \alpha_2 = \frac{K_2}{K_0},\ \alpha_3 = \frac{m}{K_0}.$$

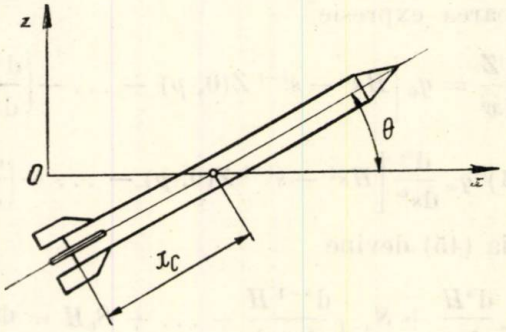


Fig. 5

şi aplicînd ecuaţiei astfel reduse transformata Laplace cu condiţia $z(x, 0) = 0$ rezultă

$$\frac{d^4Z}{dx^4} - \alpha_1 p^2 \frac{d^2Z}{dx^2} + p^2(\alpha_2 p^2 + \alpha_3) Z = \overline{F} - \overline{F}_1 - \overline{F}_2, \tag{52}$$

unde

$$\overline{F} = \frac{1}{K_0} L F(x, t),\ \overline{F}_1 = \frac{R_a}{K_0} L\theta,\ \overline{F}_2 = \frac{A_e}{K_0} L\dot{\theta}.$$

A p l i c a ţ i e. Cu o forţă perturbatoare distribuită cu variaţie în timp ca în figura 6, avînd $F_0 = 50$ kg/m², s-a căutat în lucrarea [4], unde se pot vedea toate detaliile, soluţia ecuaţiei (52) pentru racheta cu datele din 4.1, avînd în plus $EI = 10^9$ kg/cm².

Printr-un procedeu indirect s-a găsit pentru deflecţiunea rachetei soluţia

$$z = z_1 + z_2,$$

unde

$$z_1 = z_0\ 1\ (t - Kx),$$

$$z_2 = \left(\frac{m_1}{a^2} - \frac{m_2}{a^2}\right)(at - \sin at)\frac{Kx}{a}$$

și în care s-a notat cu z_0 defelecțiunea rachetei la $x = 0$, iar

$$a = \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}, \quad m_2 = \frac{\overline{\overline{m}}}{\alpha_2}, \quad \overline{\overline{m}} = \frac{R_a}{K_0},$$

$$m_1 = \frac{\overline{m_1}}{\alpha_2}, \quad \overline{m_1} = \frac{F_0}{K_0}, \quad K = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}\right)}.$$

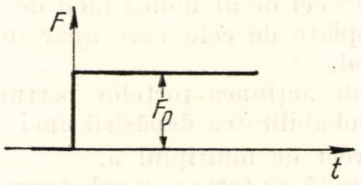


Fig. 6

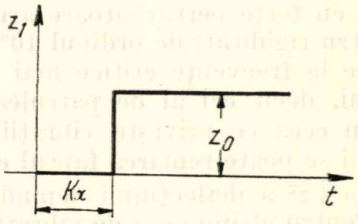


Fig. 7

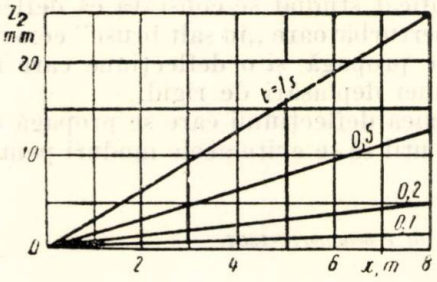


Fig. 8

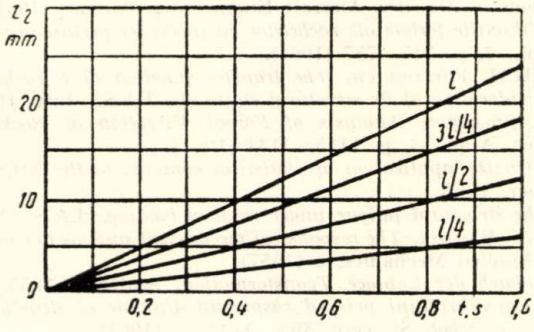


Fig. 9

În graficele din figurile 7 —9 sînt reprezentate mărimile z_1 și z_2, unde z_2 este dată aproximativ liniar.

5. CONCLUZII

Tratarea problemei vibrațiilor libere și forțate ale rachetei descrisă în lucrarea de față, deși aproximativă în ceea ce privește evaluarea variației masei și rigidității pe de o parte, iar pe de alta a funcțiilor formei modale, nu apelează la un volum mare de calcul, punînd în evidență într-un mod ușor de controlat influența diverșilor factori asupra unor mărimi caracteristice pentru fenomenele de vibrație.

Din formula (14) se poate observa mai întîi că coeficienții C_2 și C_4 și forțele R_a și F_a cresc frecvența proprie. În ceea ce privește vibrațiile forțate cu forțe perturbatoare armonice se poate vedea în cazul studiat că pentru rigidități de ordinul $10^8 - 10^{10}$ cel de al doilea mod de vibrație conduce la frecvențe critice mai apropiate de cele care apar în timpul zborului, decît cel al de patrulea mod.

În ceea ce privește vibrațiile sub acțiunea forțelor perturbatoare aleatorii se poate remarca faptul că probabilitatea depășirii unei anumite valori $n \sqrt{\overline{z^2}}$ a deflecțiunii depinde direct de multiplul n.

Pentru ultimul caz de vibrație forțată cu forțe perturbatoare discontinui, în cazul general, problema revine la soluționarea unor ecuații integrale de tip Volterra.

În cazul simplificat studiat se constată că deflecțiunea rachetei sub acțiunea unei forțe perturbatoare „în salt brusc" constă dintr-o deflecțiune în salt brusc care se propagă și o deflecțiune care în mod aproximativ poate fi asimilată unei deplasări de rigid.

Deoarece mărimea deflecțiunii care se propagă este egală cu deflecțiunea la $x = 0$ este util să se evite acele moduri pentru care deflecțiunile sînt mari la $x = 0$.

Primită la redacție la 7 octombrie 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. N.L. Cox, *Vibrations of Missiles*, Aircraft Engineering, January 1961.
2. Al. Marinescu, *Vibrațiile forțate ale rachetelor cu încărcări perturbatoare armonice*, St. cerc. mec. apl., *3*, p. 745–757 (1964).
3. L.J. Beharrell, R.H. Friederich, *The transfer function of a rachet-type guided Missile with consideration of its structural elasticity*, J.A.S., July, 1954.
4. Al. Marinescu, *Aproximate Analysis of Forced Vibration of Rockets*, Rev. Roum. Sci. Teh. Méc. Appl., *5*, p. 1115–1134 (1964).
5. H.W. Liepmann, *On the application of statistical concepts to the buffeting problem*, J.A.S., December, 1952.
6. J.W. Miles, *On the structural fatigue under random loading*, J.A.S., November, 1954.
7. T.W. Thomson, M.V. Barton, *The response of mechanical systems to random excitation*, Journal of Applied Mechanics, *2* (1957).
8. G. Doetsch, *Handbuch der Laplace Transformation*, Stuttgart 1955.
9. Al. Marinescu, *Considerațiuni privind răspunsul dinamic al structurii rachetei în timpul zborului perturbat*, St. cerc. Mec. Appl., *3* (1963).

A 5-A CONFERINŢĂ INTERNAŢIONALĂ DE METALIZARE PRIN PULVERIZARE

Între 18 şi 25 septembrie 1966 a avut loc a 5-a Conferinţă internaţională de metalizare prin pulverizare [1]), organizată la Varşovia de Institutul de mecanică de precizie din R.P. Polonă cu concursul cîtorva specialişti străini delegaţi de ţările respective pentru a participa la acea conferinţă.

Vom începe expunerea cu o extrem de succintă reamintire a celor mai importante aplicaţii ale metalizării, recomandînd cititorilor care doresc detalii, consultarea monografiei editate în 1963 de Academia Republicii Socialiste România [2]).

1. GENERALITĂŢI

1.1. *Evoluţia şi aplicaţiile metalizării.* Inginerul M.U. Schoop din Elveţia este considerat ca precursor în domeniul metalizării, realizînd în 1908 primul aparat pentru aplicarea acestei metode care utiliza metal topit antrenat de un curent de acid carbonic pentru depunerea de strate metalizate. Ulterior s-a înlocuit metalul topit prin sîrmă sau pulbere metalică, iar pentru pulverizarea metalului s-a recurs la aer comprimat. Energia termică pentru topirea sîrmei sau a pulberii metalice era dată de un dispozitiv oxiacetilenic. În 1918 apare aparatul de metalizare cu arc electric, după care începe o eră de progrese din ce în ce mai remarcabile în utilajul, tehnologia şi aplicaţiile metalizării. Această metodă se dovedeşte superioară celorlalte pentru realizarea de strate metalice, ca, de exemplu, cufundarea în baie de metal topit, galvanostegia, placarea metalelor, difuzia, amalgamarea şi metalizarea în vid. Menţionăm în special, în cadrul progreselor realizate, apariţia instalaţiilor cu jet de plasmă, care măresc sensibil posibilităţile şi perspectivele metalizării.

[1]) Pentru a nu îngreuna repetarea a două denumiri frecvente, vom admite că termenul „metalizare" trebuie înţeles ca „metalizare prin pulverizare", iar „a 5-a Conferinţă" ca „a 5-a Conferinţă de metalizare prin pulverizare".

[2]) V. Marcu, Metalizarea prin pulverizare, Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1963.

Avantajele metalizării au fost atît de mult apreciate, încît în ţările cu industrie dezvoltată s-au creat încă de acum 50 de ani întreprinderi pentru valorificarea aplicaţiilor metalizării, dintre care citãm mai jos pe cele mai importante :

a) protecţia contra coroziunii atmosferice, chimice sau a oxidării la temperaturi înalte ;

b) recondiţionarea organelor de maşini uzate ;

c) protecţia suprafeţelor metalice contra uzurii ;

d) remedierea defectelor la piesele turnate sau provenite din erori de prelucrare ;

e) realizarea de pseudoaliaje cu bune calităţi antifricţiune ;

f) obţinerea de suprafeţe refractare prin jet de plasmă ;

g) realizarea de pulberi metalice pentru diverse scopuri industriale ;

h) confecţionarea de clişee în industria poligrafică ;

i) aplicaţii în tehnica dentară, în industria textilă, a lemnului, hîrtiei şi industria alimentară ;

j) metalizarea în scopuri artistice şi decorative.

1.2. *Manifestări tehnice-ştiinţifice cu caracter internaţional.* Interesul deosebit acordat metalizării prin pulverizare s-a manifestat, începînd din 1956, şi prin 5 conferinţe internaţionale şi un simpozion, indicate în tabela alăturată.

1.3. *Detalii asupra celei de-a 5-a Conferinţe.* Cei 187 de delegaţi care au participat oficial la ultima conferinţă de metalizare de la Varşovia aparţineau următoarelor ţări, în ordinea descrescîndă a numărului respectiv : R.P. Polonă, 60 ; R.D. Germană, 42 ; Franţa, 26 ; Anglia, 15 ; R.S. Cehoslovacă, 8 ; Japonia, 7 ; R.F. a Germaniei, 6 ; U.R.S.S., 5 ; Elveţia, 5 ; Republica Socialistă România, 3 ; Belgia, 3 ; Italia, 2 ; Norvegia, 2 ; R.P. Ungară, 1 ; Olanda, 1 ; Spania, 1.

Cele 31 de comunicări au fost redactate în următoarele limbi : 11 în limba germană, 7 în limba poloneză, 7 în limba franceză, 4 în limba engleză, 2 în limba rusă. S-a întocmit însă şi s-a pus la dispoziţie participanţilor o broşură în limba franceză, cuprinzînd rezumatele comunicărilor. De asemenea în aceeaşi limbă au fost redactate o broşură cu informaţiile de ordin general şi organizatoric ale conferinţei, precum şi programul de activitate.

S-au format şase grupe după specificul comunicărilor, şi anume :

grupa I, Metalizarea prin flacără de gaze şi arc electric ;
„ a II-a, Aplicaţiile jetului de plasmă ;
„ „ III-a, Strate contra coroziunii din metale pulverizate şi strate mixte acoperite cu vopsele ;
„ „ IV-a, Strate dure şi strate refractare ;
„ „ V-a, Probleme generale. Metode mecanizate de metalizare ;
„ „ VI-a, Strate din materiale plastice.

În program au figurat, în afară de şedinţele pentru expunerea şi discuţia comunicărilor, vizitarea Institutului de mecanică de precizie, precum şi vizite la diferite obiective turistice din Varşovia şi Cracovia. În timpul conferinţei a fost organizată o expoziţie cu publicaţii din domeniul metalizării, apărute în diverse limbi în perioada 1960 —1966 şi prezentarea de proiecţii de filme tehnice din acelaşi domeniu.

Nr. de ordine al manifestărilor	1	2	3	4	5	Simpozion
Anul	1956	1958	1962	1963	1966	1960
Localitatea	Halle R.D.G	Birmingham	Madrid	Halle R.D.G.	Varșovia	Liège-Belgia
Organizatori	Instit. sudură R.D.G.	Asoc. întrep. metaliz.	Instit. sudură spaniol	Instit. sudură R.D.G.	Instit. mecan. preciz.	Instit. internaț. de sudură
Nr. de participanți	330	133	101	496	187	105
Nr. de comunicări	20	34	23	23	31	13
Numărul temelor la diverse categorii						
Studii și cercetări	9	10	7	6	10	3
Recondiționări	—	3	—	1	—	—
Protecția anticorosivă cu strat metalic	3	6	6	4	5	4
Protecție anticorosivă prin strat mat. plastice	—	2	—	3	4	—
Strate dure și refractare	—	—	—	—	3	—
Aplicații jet plasmă	—	—	4	4	5	—
Prot. muncii, instructaj	—	1	—	—	1	3
Aspecte economice	—	—	—	—	1	1
Utilaj	2	3	4	2	1	—
Standarde, diverse	6	6	2	3	1	1

În ședința de încheiere a conferinței s-a decis ca viitoarea conferință de metalizare să aibă loc la Paris în 1969.

În capitolele care urmează vom expune, în ordinea grupelor mai sus indicate, rezumate ale comunicărilor, încheind cu aprecieri asupra unora dintre acestea și asupra rezultatelor conferinței.

2. METALIZAREA PRIN FLACĂRĂ DE GAZE ȘI ARC ELECTRIC

În această grupă au intrat comunicări care expun rezultatele unor cercetări asupra metodelor clasice de metalizare aplicate în mod curent pe scară industrială.

2.1. *Cercetări asupra controlului și încercărilor, precum și asupra unor aliaje noi pentru metalizare.* Într-o amplă comunicare, cercetătorii francezi C. Gabrillac și M. Paris expun rezultatele unor încercări tehno-

logice şi electrochimice efectuate atît în laborator, cît şi la conducte forţate de la uzine hidroelectrice [ζ]. Încercările s-au făcut pe eprubete din tablă de oţel metalizate cu zinc, cu aluminiu şi cu un strat mixt de 60% Zn şi 40% Al.

În urma cercetărilor efectuate, autorii comunicării au ajuns la următoarele concluzii :

a) încercările de disoluţie şi degradare a stratelor protectoare contra coroziunii nu pot da întotdeauna indicaţii concludente, deoarece ele trebuie să asigure în unele cazuri, în afară de efectul de ecran, şi o protecţie catodică ;

b) încercările electrochimice pot fi considerate ca un mijloc de coroziune accelerată pentru zinc ;

c) stratele din aluminiu pulverizat trebuie să aibă o bună fineţe a particulelor depuse, deoarece s-a constatat că o grosime mare a stratului nu asigură întotdeauna o protecţie mai eficace.

2.2. *Pregătirea suprafeţelor şi stratele mixte de protecţie.* Această comunicare a fost prezentată de ing. J. Cauchetier, vechi specialist de la „Société nouvelle de métallisation" din Paris şi autor a numeroase publicaţii în domeniul metalizării [ζ].

Din prima parte a comunicării referitoare la pregătirea suprafeţelor în vederea metalizării merită să reţinem următoarele concluzii :

a) diferitele grade de intensitate a sablării în vederea obţinerii rugozităţii trebuie standardizate, urmîndu-se exemplul creat în Suedia ;

b) în majoritatea cazurilor trebuie să se sableze cu ajutajul furtunului de nisip înclinat la 30° faţă de normala la suprafaţa piesei ;

c) nu este prudent a se exagera rugozitatea suprafeţei, creîndu-se neregularităţi prea mari pe suprafaţa sablată, întrucît s-ar putea ca un strat mai subţire de metal depus să nu poată acoperi proeminenţele rugozităţii.

A doua parte a comunicării se referă la importanta problemă a colmatării stratelor metalizate pentru a se obţine etanşarea porilor.

Într-o primă grupă de procedee se citează „hidrocarbonatarea" şi „oxiclorurarea" stratelor de zinc, iar în a doua grupă procedeul *wash-primer* şi fosfatarea apoasă.

În ce priveşte aplicarea stratelor mixte de metal pulverizat acoperit cu vopsea, Cauchetier recomandă evitarea vopselelor cu pigmenţi metalici, care riscă să realizeze un cuplu galvanic cu stratul metalizat. Rezultate bune s-au obţinut cu vopsele pe bază de cromat de zinc şi oxid de zinc cu ulei de in, utilizate la clădiri terestre, poduri, porţi de ecluze şi vane de baraje. Se menţionează că podurile care trec peste linii ferate electrificate se metalizează cu un strat avînd grosime minimă de 0,2 mm, fără vopsea.

Pentru nave s-a constatat o bună comportare a stratelor mixte cu vopsele, avînd ca bază silicat de zinc, mai ales pe suprafeţele din imersiune, pe care împiedică aderenţa algelor şi microvietăţilor marine. O precauţie de care trebuie să se ţină seama la stratele mixte este grosimea ansamblului metal pulverizat plus vopsea, care nu trebuie să fie mai mică ca 0,12 mm.

2.3. *Controlul stratelor depuse prin metalizare.* Această comunicare, prezentată de trei ingineri de la Institutul de sudură din Paris, expune procedee perfecționate pentru controlul caracteristicilor esențiale ale stratelor metalizate, și anume aderența și continuitatea ei, duritatea și rezistența la uzură.

Pentru verificarea nedistructivă a continuității aderenței s-a făcut apel la metoda ultrasunetelor, dîndu-se o deosebită atenție etalonajului riguros al aparatelor și antrenamentului operatorilor la citirea și la interpretarea oscilogramelor obținute.

Controlul durității stratelor s-a efectuat cu o mașină tip Rockwell, echipată cu un con de diamant asupra căruia acționa o sarcină de 45 kg, luîndu-se media a 10 măsurători în diverse puncte.

Rezistența la uzură a stratelor s-a măsurat cu o mașină specială, construită la Institutul de sudură din Paris.

2.4. *Efectele tratamentelor termice asupra pieselor metalizate.* Comunicarea, redactată de doi cercetători polonezi, expune efectele tratamentelor termice obișnuite aplicate pieselor cu strate metalizate în ce privește aderența, coeziunea și gradul de oxidare al acestora, ajungîndu-se la următoarele concluzii :

a) tratamentul termic al stratelor depuse prin metalizare ameliorează sensibil coeziunea, omogenitatea și aderența acestor strate, rezultatele optime fiind obținute după o recoacere la temperatura de 950°C timp de 5 ore ;

b) limita de separație între piesa de bază și stratul metalizat dispare după această recoacere ;

c) în cursul tratamentului, se observă în prima fază dispariția structurii laminare a oxizilor, formîndu-se incluziuni de mare dispersiune ;

d) continuarea cercetărilor în domeniul tratamentelor termice a suprafețelor acoperite cu metal pulverizat este indicată pentru studierea rezistenței la abraziune și a comportării la deformări plastice a pieselor cu astfel de suprafețe.

2.5. *Studiul procedeului de metalizare cu arc electric.* Cercetătorul norvegian S.B. Giertsen arată în această comunicare avantajele electrometalizării față de metalizarea cu aparate oxigaz în ce privește randamentul, aderența, prelucrabilitatea pieselor metalizate, domeniile de aplicații și economicitatea.

Autorul a stabilit aceste avantaje în urma a numeroase lucrări de metalizare, executate atît în laborator, cît și pe scară industrială în întreprinderea pe care o conduce în Norvegia. În această țară s-a renunțat din 1960 la metalizarea cu aparate oxiacetilenice, constatîndu-se că prin electrometalizare se obține un spor apreciabil de producție în lucrările de metalizare, la recondiționări și la elaborări de aliaje antifricțiune, mai ales cu cupru pulverizat.

În capitolul final al acestui articol vom expune unele rezultate obținute la noi în țară în lucrări comparative cu cele două procedee de metalizare, care arată că electrometalizarea nu este superioară chiar în toate aplicațiile față de metalizarea oxiacetilenică.

2.6. *Consecințe metalurgice ale electrometalizării asupra proprietăților stratelor depuse.* Această comunicare este datorită cercetătorului H.D. Stef-

fens din R.F. a Germaniei, care a prezentat și la Simpozionul din 1960 de la Liège un studiu valoros asupra bazelor metalizării prin pulverizare.

Autorul arată că în cursul metalizării cu aparate electrice, utilizînd ca metal de aport oțelul carbon, se constată arderea unui anumit procent din următorii constituenți : carbonul, siliciul și manganul. Acest fenomen prejudiciază caracteristicile mecanice ale stratelor metalizate și poate fi evitat dacă, în loc de a se utiliza aerul comprimat pentru antrenarea particulelor metalizate, se recurge la metalizarea în atmosferă controlată. Se obțin strate metalizate omogene fără incluziuni de oxizi, cu bune proprietăți mecanice.

3. METALIZAREA PRIN JET DE PLASMĂ

În acest capitol vom expune rezumativ șase comunicări cu subiecte referitoare la principiul, tehnologia și aplicațiile în metalizare ale jetului de plasmă, grație căruia s-au înregistrat progrese excepționale în metalizare și în tehnicile conexe.

3.1. *Strate refractare obținute prin aparate cu plasmă.* Această comunicare, datorită unui colectiv polonez, arată că în R.P. Polonă cercetările asupra metalizării cu jet de plasmă au început în 1962 la Institutul de fizică nucleară. S-au făcut experiențe cu diferite aparate cu plasmă pentru a determina forma geometrică și dimensiunile optime ale ajutajului de la acele aparate, utilizîndu-se ca gaz plasmagen argonul și azotul, precum și amestecuri din aceste gaze. Puterea aparatelor varia între 10 și 22 kW, iar materialul de aport ales a fost corindonul, cu o granulație de 0,032 —0,072 mm. S-au făcut experiențe practice, depunîndu-se pe suprafețele interioare ale unor generatoare strate refractare compuse din Al_2O_3 și Al_2O_3 + Cr + Ni, cu procente variabile ale constituenților. S-au realizat de asemenea strate simple prin pulverizarea cu jet de plasmă a oxidului de zirconiu, stabilizat cu CaO, Al_2O_3, MgO și $ZrSiO_4$.

Grație acestor cercetări, s-au stabilit parametrii optimi pentru obținerea de strate refractare cu diverse aplicații. În cazul metalizării cu jet de plasmă în aer liber, constatîndu-se oxidarea unora dintre constituenții stratelor, s-a recurs la metalizarea într-o cameră cu atmosferă controlată.

3.2. *Experințe de metalizare prin jet de plasmă în R.F. a Germaniei.* La Institut für Werkstoffkunde din Hanovra au avut loc numeroase cercetări aplicative de metalizare cu jet de plasmă, ale căror rezultate sînt expuse în această comunicare. Autorul expune condițiile în care s-au efectuat cercetările, instalația utilizată, natura materialelor de aport și caracteristicile stratelor obținute.

În concluzie se arată că metalizarea prin jet de plasmă permite a se realiza strate cu înalte calități de rezistență la uzură și la temperaturi ridicate, variind parametrii jetului de plasmă după specificul aplicațiilor.

3.3. *Metalizarea cu jet de plasmă în R.D. Germană.* Comunicarea se referă la cercetările făcute la Institut für Leichtbau din Dresda pentru metalizări cu jet de plasmă, utilizînd în special metale de aport sub formă de sîrmă.

Se dau indicații asupra instalației adoptate, pregătirii suprafețelor și calităților stratelor, încheindu-se comunicarea cu considerații asupra avantajelor remarcabile ale jetului cu plasmă.

3.4. *Proprietățile stratelor de carbură de wolfram depuse prin jet de plasmă.* Această comunicare se referă la lucrările executate în R.F. a Germaniei, la Institut für Magnetohydrodynamik din Meiningen, avînd ca obiectiv cunoașterea schimbărilor produse în caracteristicile carburii de wolfram din strate depuse prin jet de plasmă față de carbura de wolfram, utilizată în metalurgia pulberilor. S-a constatat că pulverizarea prin jet de plasmă a carburii de wolfram nu se poate face decît în atmosferă obișnuită și că schimbările care se produc în structură depind de forma și de dimensiunile particulelor inițiale din carbura de wolfram aflată sub formă de pulbere și de temperatura realizată, sugerîndu-se a nu se ajunge la o fuziune totală a curburii.

3.5. *Aplicațiile industriale ale jetului de plasmă.* Această comunicare, datorită inginerului belgian H. Schoumaker, a reținut în mod deosebit atenția participanților la Conferința din Varșovia, trecînd complet în revistă evoluția, descrierea bazei materiale, tehnologia și aplicațiile mai importante, precum și rentabilitatea metalizării cu jet de plasmă.

Autorul pune la punct chestiunea avantajului termodinamic al jetului de plasmă în cazul utilizării unui gaz plasmagen diatomic, cum este azotul, arătînd că trebuie să se ia în considerare nu atît temperatura, cît entalpia gazului și coeficientul său de transfer al căldurii. Urmează descrierea unei instalații pentru jet de plasmă, fabricată de întreprinderea belgiană „Arcos", în cadrele căreia activează autorul comunicării. Ca materiale de aport se utilizează metale cu punct înalt de topire, oxizi, carburi, nitruri, boruri și siliciuri. În continuare autorul comunicării expune :

a) soluțiile problemelor de uzură, șoc termic și rezistență la temperaturi înalte cărora trebuie să le facă față instalația și aplicațiile jetului cu plasmă ;

b) piesele mai importante metalizate prin jet de plasmă la întreprinderea „Arcos", indicîndu-se materialele de aport și rezultatele obținute ;

c) rentabilitatea procedeului, arătîndu-se cheltuielile de investiții pentru instalația de jet cu plasmă, cheltuielile de funcționare și pentru procurarea materialelor de aport pe baza cărora se stabilește costul total unitar al metalizării sau depunerii de material ceramic pe kilogramul de material depus prin jet de plasmă.

Cîteva dintre aceste cifre merită a fi reproduse, pentru a fi comparate cu cele constatate la metalizarea prin procedeele clasice :

— costul total al unei instalații complete de elaborare a jetului de plasmă este de circa 7 200 de dolari, sumă care se prevede a se amortiza în 6 000 de ore de funcționare,

— cheltuielile de funcționare, adică costul energiei electrice și azotului utilizat ca gaz plasmagen și gaz pentru antrenarea materialului de aport topit, costul apei de răcire și a pieselor de schimb de mare uzură reprezintă circa 2,55 dolari pe kilogramul de material depus ;

— cheltuieli cu materialul de aport : 4,20 dolari pe kilogramul de oxid de aluminiu și 15 dolari pe kilogramul de nichel depus.

3.6. *Determinarea rezistenței mecanice a stratelor ceramice.* În această comunicare, prezentată de cercetătorul sovietic I. Gotlib, se indică o

metodă pentru măsurarea rezistenței mecanice a stratelor ceramice, cărora nu li se pot aplica metodele obișnuite din cauza grosimii mici a stratelor depuse și imposibilității de prelucrare a acestora [13].

Metoda propusă prevede depunerea simultană de strate ceramice pe 24 de eprubete rectangulare cu dimensiunile 80 × 8 mm, grosimea stratului fiind de 2 —3 mm. Se separă apoi stratele depuse de pe eprubete și li se măsoară cu un aparat special rezistența la îndoire și forfecare.

4. STRATE DE PROTECȚIE CONTRA COROZIUNII

În următoarele cinci comunicări, redate succint, se expun rezultatele unor cercetări întreprinse în R.D. Germană și în R.P. Polonă pentru constatarea eficacității stratelor anticorosive din zinc, aluminiu și zinc-aluminiu cu sau fără acoperiri de vopsele peste aceste strate metalice. Aceste comunicări au o deosebită valoare documentară practică, mai ales pentru cazurile specifice în care s-au efectuat cercetările.

4.1. *Constatări noi referitoare la protecția contra coroziunii prin strate metalizate în uzinele chimice.* În această comunicare, prezentată de doi ingineri din R.D. Germană, se arată că în literatura tehnică există controverse în ce privește alegerea materialului de aport, grosimea stratului optim care trebuie depus, calitatea vopselelor pentru stratele mixte și durabilitatea acestor vopsele. Autorii au întreprins numeroase serii de experiențe cu eprubete din tablă de oțel metalizate cu strate de zinc și aluminiu de diferite grosimi, cuprinse între 0,03 și 0,3 mm. Unele eprubete au fost vopsite după metalizare cu cauciuc clorat și policlorură de vinil, după care au fost expuse împreună cu cele nevopsite în atmosfera industrială din orașul Leuna, unde se află întreprinderea chimică „Leuna-Werke" la care lucrează cei doi ingineri. Comunicarea se încheie cu expunerea rezultatelor obținute, compoziția stratelor care s-au comportat mai bine și aspectul economic al acestora.

4.2. *Comportarea stratelor de zinc și de aluminiu pulverizat în atmosferă industrială.* La Institutul de chimie anorganică din R.P. Polonă s-au făcut, după cum se arată în această comunicare, cercetări experimentale asupra comportării stratelor din zinc și aluminiu pulverizat introduse în diferite medii corozive, și anume în atmosfera subterană din mine, în atmosfera industrială din apropierea unei uzine chimice și în incinta unei fabrici de acid sulfuric.

La eprubetele expuse în subteran, sub acțiunea apei sărate, s-a constatat o durabilitate a stratelor de aluminiu de 10 ori mai mare decît la stratele de zinc. Eprubetele expuse în vecinătatea unei uzine chimice au rezistat bine la coroziune după un an de expunere. O comportare satisfăcătoare s-a constatat și la eprubetele metalizate cu aluminiu și expuse într-o hală a fabricii de acid sulfuric timp de un an. Stratele protectoare formate numai din vopsele au avut o durabilitate mai redusă cu circa 30 —50% față de cele metalizate.

4.3. *Cercetări asupra protecției date de stratele metalizate și acoperite cu vopsele în medii corosive.* Cercetările care au condus la redactarea acestei comunicări s-au efectuat la Institutul de mecanică de precizie din Varșovia, expunîndu-se în text procedeul urmat și rezultatele obținute.

Autorul arată în concluzie limitele de eficacitate a diferitelor strate protectoare simple și vopsite peste suprafața metalizată, constatîndu-se o mai bună comportare a vopselelor din categoria „epoxi".

4.4. *Protecția contra coroziunii prin strate metalice acoperite cu vopsele.* Această comunicare a fost redactată pe baza rezultatelor obținute în R.D. Germană în cursul unor serii de experiențe cu eprubete din oțel metalizate cu zinc și aluminiu și apoi acoperite cu vopsele și lacuri în 20 de variante.

Eprubetele au fost expuse în atmosferă industrială, climat marin și cameră cu mediu tropical, umed și cald, timp de un an pentru primele două medii și 15 luni pentru ultimul. Se expun apoi rezultatele obținute, indicîndu-se stratele care au avut cea mai bună comportare ca protecție contra coroziunii.

4.5. *Protecția contra coroziunii la instalațiile dintr-o uzină de prefabricate din beton.* În ultimii 5 ani au luat în R.D. Germană o mare dezvoltare industriile prefabricatelor din beton pentru pereții și planșeele clădirilor. La instalațiile de elaborare a acestor elemente prefabricate, acestea sînt supuse unui curent de vapori care produce coroziune la capacele instalațiilor. Pentru evitarea acestui inconvenient s-au metalizat cu zinc și aluminiu capacele, acoperindu-se apoi cu vopsele stratele metalizate. În comunicarea de față se arată mersul operațiilor și rezultatele bune obținute atît sub raportul tehnologic, cît și cel economic.

5. STRATE DURE ȘI REFRACTARE

Capitolul acesta cuprinde cinci comunicări, în care se expun cercetările experimentale efectuate pentru a se realiza strate metalizate dure, rezistente la uzură și strate refractare rezistente la temperaturi înalte. Astfel de lucrări, inițiate în special de cercetători englezi, au făcut obiectul unor comunicări la a 2-a și a 3-a Conferință de metalizare, scoțîndu-se în evidență marile avantaje ale unor aliaje speciale, elaborate de întreprinderea „Colmonoy" și destinate, sub formă de pulbere, ca material de aport pentru depunerea de strate dure. Numele de Colmonoy s-a extins apoi la procedeul de protecție contra uzurii și de recondiționare, în condiții superioare, a pieselor uzate.

5.1. *Aliaje pentru durificarea suprafețelor.* Comunicarea aceasta, prezentată de ing. G.R. Bell de la firma „Colmonoy", expune caracteristicile și avantajele a două familii de aliaje tip Colmonoy, pe bază de nichel și crom, precum și de nichel-crom-wolfram, utilizate la aliajele dure.

Structura acestor aliaje se pretează la metalizarea lor, urmată de topirea stratelor depuse pe suprafața pieselor, realizîndu-se o perfectă aderență cu aceste suprafețe. Ca dovadă se citează cazul unui arbore de motor recondiționat cu un aliaj Colmonoy pulverizat, care a avut apoi o durată de serviciu mai mare ca un arbore similar nou. Un progres important s-a obținut printr-un dispozitiv de metalizare și de topire simultană a stratului pe piesa destinată recondiționării sau durificării.

În partea finală a comunicării se arată sumar tehnologia depunerilor prin pulverizare a unor aliaje Colmonoy cu ajutorul unui aparat funcțio-

nînd cu jet de plasmă, citîndu-se ca aplicații metalizarea camerelor de combustie de la reactoare, cărora le asigură o bună rezistență la uzură și la temperaturi înalte.

Această comunicare a fost apreciată ca avînd o deosebită utilitate practică în domeniul construcțiilor și reparațiilor de mașini. Procedeul Colmonoy permite a se realiza piese din oțel carbon cît mai ieftin, care, după metalizare cu aliaj Colmonoy urmată de topirea stratului, prezintă o suprafață foarte rezistentă la uzură și la temperaturi înalte, ca un oțel special sau refractar.

5.2. *Lipirea tare prin metalizare urmată de topirea stratului în vid.* O aplicație frecventă în Occident a straturilor dure este depunerea prin metalizare a unei pulberi pe o piesă metalică, urmată de o încălzire într-un cuptor cu vid. Se poate realiza fie o lipitură tare (brazare), fie o recondiționare sau finisare a suprafeței unei piese uzate. Comunicarea aceasta datorită unui cercetător englez, arată cum se soluționează practic o problemă care constă în a introduce într-un tub o piesă de oțel, sudînd-o pe suprafața interioară a tubului. Această piesă, prelucrată pînă la o cotă foarte apropiată de diametrul interior al tubului, a fost sablată prin jet de granule metalice spre a se obține curățirea suprafeței și rugozitatea impusă de metalizare. A urmat apoi depunerea prin pulverizare pe suprafața piesei a unui aliaj de aport constituit din nichel, crom, siliciu și bor, constituindu-se un strat cu o grosime de 0,25 mm. Piesa a fost apoi introdusă în tub cu un joc minim, după care ansamblul a fost supus la un tratament termic într-un cuptor cu vid. S-a efectuat o încălzire la 1 270°C timp de 15 min, urcîndu-se apoi temperatura și menținînd-o timp de 5 minute la 1 490°C.

S-a întrerupt apoi încălzirea și piesa a fost lăsată să se răcească în cuptor pînă la temperatura de 370—400°C, după care a fost scoasă din cuptor și supusă unui tratament de recoacere.

S-a realizat astfel o lipitură tare, care a fost controlată prin micrografii.

5.3. *Durificarea suprafețelor prin metalizare.* În această comunicare, prezentată de asemenea de un membru al delegației engleze, se descrie o instalație de durificare a suprafețelor cu care s-au efectuat o serie de cercetări experimentale și se indică caracteristicile pulberilor de aport, rezultatele obținute și aplicațiile mai frecvente, dintre care citățm următoarele exemple de durificări prin strate metalizate:

a) cilindri pentru laminare la cald;
b) forme de turnătorie și pentru fabrici de sticlă;
c) arbori pentru diverse mașini;
d) supape de evacuare de la motoare diesel și diferite piese de la pompe.

5.4. *Aspectul economic al metalizării prin pulverizare.* În această comunicare, redactată de un cercetător ceh, se analizează comparativ atît cheltuielile, cît și avantajele metalizării prin pulverizare față de protecția cu strate numai din vopsele, ajungîndu-se la concluzia că prima metodă trebuie preferată. Autorul arată că în R.S. Cehoslovacă unele întreprinderi adoptă soluția vopselelor fără o prealabilă metalizare a suprafețelor, dintr-un calcul greșit al economicității.

5.5. *Efectele metalizării cu aluminiu asupra tablelor de titan.* În R.P. Polonă s-au efectuat cercetări aplicative asupra rezistenței la temperaturi înalte și la sudabilitate a tablelor de titan acoperite cu aluminiu pulverizat și supuse unui tratament de difuzie, obținîndu-se următoarele rezultate indicate în comunicarea de față :

a) o bună rezistență a stratelor de aluminiu la temperatura de 900 —1 000°C și o durabilitate mare ;

b) o sudabilitate înaltă a tablelor metalizate ;

c) structura zonei de difuzie se compune dintr-un strat foarte subțire de $TiAl_3$ și altul mai gros dintr-o soluție solidă de titan în aluminiu, precum și din oxizi.

5.6. *Strate din metale pulverizate rezistente la temperaturi înalte.* Se știe că prin procedeul de alitare se asigură protecția la temperaturi înalte a oțelului printr-un strat de aluminiu pulverizat care difuzează în masa oțelului. Se formează un aliaj protector de forma $FeO \cdot Al_2O_3$, care împiedică oxidarea oțelului la încălziri intense, asigurîndu-i o durabilitate mai mare de 15 —20 de ori la 800°C și de 10 ori la 900°C.

În comunicarea de față, un cercetător din R.S. Cehoslovacă expune un procedeu mai expeditiv, bazat pe faptul că, la temperaturi cuprinse între 800 și 900°C, difuzia reprezintă un proces chimic mai rapid decît oxidarea stratului protector, cu condiția ca grosimea acestui strat să fie de minimum 0,3 mm. Ca urmare s-a ajuns la concluzia că nu mai este necesar tratamentul termic al stratului de aluminiu după pulverizare, astfel încît piesele alitate pot fi puse în serviciu chiar la temperaturi mai mari ca 600°C.

Acest procedeu de alitare rapidă prezintă însemnate avantaje economice. O eficacitate mai mare pentru protecția oțelului la cald se obține printr-un strat mixt de oțel inoxidabil și aliaj Fe —Cr —Al, care evită oxidarea pieselor protejate, pînă la temperaturi de circa 1 200°C. O altă soluție avantajoasă este metalizarea pieselor cu oțel inoxidabil sau cu un aliaj Ni —Cr, urmată de o metalizare cu aluminiu la o grosime a stratului de 0,2 mm. Zona de difuzie care se formează asigură în acest caz o protecție excepțională contra oxidării pieselor la temperaturi ridicate.

6. PROBLEME GENERALE. MECANIZAREA ÎN METALIZARE

6.1. *Activitatea Institutului internațional de sudură în domeniul metalizării.* Institutul internațional de sudură, al cărui sediu se află la Liège, are astăzi afiliate 66 de societăți din 31 de țări și a fost fundat în 1948, avînd ca misiune de a sprijini dezvoltarea sudării și a tehnicilor conexe, grație activității unor comisii.

Printre tehnicile conexe figurează și metalizarea prin pulverizare, de care se ocupă o subcomisiune, denumită IC, din sînul Comisiunii I, cu următoarele sarcini :

— evidența și compararea aplicațiilor metalizării în diferite țări ;

— stabilirea datelor referitoare la terminologia în metalizare, sarcină care ulterior a fost transmisă Comisiei VI, „Terminologie" ;

— studii asupra utilajului și mai ales asupra aparatelor de pulverizare cu arc electric ;

— problema măsurării și controlului aderenței stratelor metalizate;
— studii comparative asupra protecției realizate în diferite țări contra coroziunii, utilizîndu-se strate metalizate acoperite sau nu cu vopsele.

Pe de altă parte, se mai ocupă de chestiuni referitoare la metalizare și alte comisiuni din I.I.S., și anume Comisia a IV-a („Documentare"), a VI-a („Terminologie"), a VII-a („Normalizare"), a VIII-a („Protecția muncii"), a XII-a („Procedee speciale de sudare cu arc", inclusiv cele cu jet de plasmă) și a XVI-a („Sudarea materialelor plastice").

În consecință, se constată că activitatea I.I.S. în domeniul metalizării prin pulverizare este multiplă și susceptibilă să completeze lucrările conferințelor internaționale de metalizare.

Subcomisiunea IC este actualmente condusă de ing. A. Hedde din cadrele întreprinderii franceze „Société nouvelle de métallisation", căruia i se datorește comunicarea examinată mai sus.

6.2. *Standardizarea în domeniul metalizării prin pulverizare.* Această comunicare, redactată de ing. P. Morrison de la "Association française de normalisation", analizează dispersiunea constatată pînă acum în măsurătorile grosimii stratelor metalizate, provenite din următoarele două cauze:

a) geometria suprafeței metalului de bază și a stratului depus;
b) utilizarea aparatelor de măsurare a grosimii stratelor prin procedeul magnetic, aparate echipate cu dispozitive de palpare punctuală.

Din această cauză se obțin valori diferite, după punctul în care se efectuează măsura grosimii stratului metalizat, adoptîndu-se pentru remedierea acestui inconvenient, ca valoare medie a grosimii, media mai multor citiri făcute în diferite puncte.

Autorul citează în anexă prescripțiile din norma franceză NFA 91 —201 din 1966, referitoare la determinarea grosimii stratelor metalizate, propunînd studierea și pe plan internațional a unei prescripții de acest gen pentru a se elimina diferențele constatate în valoarea stratelor depuse prin metalizare în ce privește grosimea.

6.3. *Instructajul personalului utilizat la metalizare.* Ing. E. Kretzschmar din R.D. Germană, vechi autor de lucrări în domeniul metalizării, tratează în această comunicare o problemă foarte importantă, a cărei neglijare a adus în multe țări prejudicii aplicațiilor metalizării, frînînd dezvoltarea acestei metode. Importanța chestiunii a fost just sesizată la Simpozionul din 1960 de la Liège, unde s-au prezentat nu mai puțin de trei comunicări referitoare la organizarea cursurilor de pregătire profesională a metalizatorilor.

Autorii articolului de față țin să facă această mențiune pentru a atrage atenția cititorilor asupra comunicării ing. Kretzschmar și rolului indiscutabil al pregătirii serioase a personalului care efectuează lucrări de metalizare.

Ing. Kretzschmar a organizat, începînd din 1953, în R.D. Germană o instruire sistematică a tehnicienilor destinați instalațiilor de metalizare. În textul comunicării se expun toate informațiile necesare celor care doresc să se documenteze asupra cursurilor de calificare a metalizatorilor, și anume:

a) condițiile de înscriere și de participare, precum și durata cursurilor și aplicațiilor practice;

b) specialitățile de calificare a tehnicienilor;

c) numărul de ore și programele analitice ale diferitelor discipline teoretice și aplicative;

d) comparație cu formarea metalizatorilor în alte țări.

Durata minimă a unui ciclu de cursuri este de trei săptămîni. Autorul atrage atenția asupra necesității de a se introduce și în școlile tehnice superioare un curs asupra metalizării prin pulverizare, pentru ca și inginerii să aibă noțiuni de bază asupra tehnologiei și aplicațiilor acestei metode.

6.4. *O instalație pentru electrometalizarea profilelor laminate.* În această comunicare, datorită unui cercetător ceh, se arată că protecția oțelului cu un strat de aluminiu cu grosime de 0,2 —0,3 mm, depus prin electrometalizare, asigură o rezistență la coroziune mai mare decît în cazul metalizării cu aparate oxiacetilenice, mai ales în ce privește aderența.

Aparatele de metalizare cu arc electric favorizează aplicarea mecanizării la metalizare, iar în cazul asamblărilor de elemente metalizate porțiunile de metalizare manuală sînt reduse.

Autorul descrie o instalație de metalizare mecanizată, arătînd că aceasta realizează o însemnată economie, costul lucrărilor fiind de circa o treime sau chiar unori un sfert din acela care se constată la metalizarea manuală.

6.5. *50 de ani de metalizare în Austria.* Autorul comunicării trece în revistă diferite etape ale introducerii și evoluției metalizării prin pulverizare în Austria de la înființarea, în 1910, a primei întreprinderi, în care primele aplicații au fost depunerea de strate pentru protecția contra coroziunii și metalizările decorative. Se citează apoi alte aplicații și sectoarele beneficiare din industriile metalurgică și chimică, precum și lucrările de metalizare efectuate la uzine hidroelectrice, dîndu-se și date asupra economicității metalizării cu zinc.

7. STRATE PROTECTOARE DIN MATERIALE PLASTICE

Aplicațiile pulverizării de mase plastice pentru depunerea de strate protectoare contra coroziunii nu pot fi considerate, riguros vorbind, ca făcînd parte din domeniul metalizării prin pulverizare, deoarece aceste strate nu sînt constituite din particule metalice. Totuși, în tematica conferințelor internaționale de metalizare s-au acceptat și comunicări referitoare la aplicațiile industriale ale pulverizării de mase plastice, denumite în Franța plastificare. S-a considerat că acest sector intră în tehnicile conexe ale metalizării, mai ales că pentru plastificare se utilizează în majoritatea cazurilor aceleași aparate de pulverizare, schimbînd numai diuzele și parametrii de pulverizare.

La a 5-a Conferință de metalizare de la Varșovia au fost prezentate trei comunicări cu subiecte din plastificare, pe care nu le putem examina din lipsă de spațiu, fiind obligați de a le cita doar titlurile în bibliografie [30]—[32].

8. CONSIDERAȚII FINALE

În acest ultim capitol vom face în primul paragraf cîteva aprecieri asupra desfășurării celei de-a 5-a Conferințe de metalizare de la Varșovia, cu observații asupra unora dintre comunicări, în al doilea paragraf vom arăta cîteva din lucrările de metalizare efectuate în țara noastră și vom încheia cu concluzii și propuneri.

8.1. *Aprecieri asupra Conferinței de la Varșovia.* Prima conferință internațională de metalizare a avut loc în 1956, iar în intervalul de 10 ani pînă în 1966 s-au ținut cinci asemenea conferințe și un simpozion. Acest fapt dovedește interesul susținut care se acordă în străinătate metalizării, apreciindu-se just multiplele ei aplicații în sectoarele de activitate industrială, tehnică și artistică a unei țări, așa cum s-a arătat mai sus în paragraful 1.1.

Din examinarea succintă a comunicărilor se desprind următoarele constatări :

a) Au participat delegați din 15 țări, număr care constituie un maximum atins numai în 1958, la Conferința de metalizare de la Birmingham. Pentru prima dată a fost reprezentată și România la o astfel de conferință, printr-o delegație compusă din trei membri.

b) Ponderea tematicii a trecut la cercetările și aplicațiile de protecție contra coroziunii, la aplicațiile metalizării cu jet de plasmă și la stratele dure și refractare în ultima conferință de la Varșovia. Nu s-a prezentat nici o comunicare asupra recondiționării și remanierii de piese uzate, însă trebuie să precizăm că acest fapt nu se datorește unei scăderi a interesului pentru această aplicație, ci adoptării acesteia în utilizarea curentă pe scară largă industrială.

c) Multe dintre comunicările examinate mai sus se remarcă prin originalitatea soluțiilor propuse la diverse probleme care nu fuseseră încă abordate sau a căror rezolvare nu dădea încă satisfacție, ca de exemplu :

— standardizarea categoriilor de sablare la pregătirea suprafețelor în vederea metalizării ;

— colmatarea porilor din stratele metalice ;

— sudarea și lipirea tare prin metalizare ;

— alitarea rapidă fără tratament termic a stratului de aluminiu ;

— stabilirea unei metode mai precise pentru măsurarea grosimii stratelor depuse prin metalizare.

d) Un interes apreciabil a suscitat comunicarea delegatului norvegian S.B. Giertsen, examinată în paragraful 2.5, prin care arată că avantajele electrometalizării au fost atît de mult apreciate în Norvegia, încît industria din această țară a renunțat la metalizarea oxiacetilenică.

Considerăm util să semnalăm că în multiplele aplicații efectuate în țara noastră cu metalizatoarele cu arc electric nu am ajuns la concluzia din Norvegia, pentru următoarele motive :

— electrometalizarea este preferabilă numai în cazul metalizării cu oțel, căci în cazul neferoaselor am constatat o ardere mai pronunțată a zincului ;

— granulația stratului depus este neuniformă și mai mare în cazul electrometalizării, deoarece nu se poate varia decît în limite strînse viteza de avans a sîrmei;

— la noi în țară metalizarea oxiacetilenică ne-a dat satisfacție, putînd efectua cu aceleași aparate atît recondiționări cît și depuneri de strate anticorozive pe suprafețe metalice mari.

e) În legătură cu importanta chestiune a protecției contra coroziunii prin straturi mixte, avînd o primă depunere din metal pulverizat acoperit apoi cu vopsele, trebuie să semnalăm că indicațiile din comunicări pentru țările în care nu se efectuează cercetări de metalizare, cum este cazul țării noastre, au o valoare utilitară redusă. Într-adevăr, pentru a putea aplica pe scară industrială astfel de strate mixte ar trebui să cunoaștem natura metalului de aport care convine unei anumite categorii de oțel al pieselor sau suprafețelor de bază, precum și compoziția vopselei care dă cea mai bună protecție contra coroziunii. Astfel de date nu le putem avea în Republica Socialistă România după desființarea unicului colectiv de metalizare care mai executa cercetări în acest domeniu.

f) Organizarea conferinței a fost bine apreciată de participanți, fapt care se explică prin deosebita atențiune care se acordă în R.P. Polonă metalizării. Această țară este a doua, după U.R.S.S., dintre țările socialiste în ce privește nivelul și volumul cercetărilor și aplicațiilor în domeniul pulverizării metalelor, a materialelor ceramice și a celor plastice. Încă din 1956, se arăta într-o comunicare prezentată la prima Conferință internațională de metalizare, că la Institutul de mecanică de precizie din Varșovia există o secție care se ocupă numai de metalizare, avînd 15 ingineri și 45 de tehnicieni de înaltă calificare. La noi în țară a existat doar un singur colectiv, format dintr-un inginer și un tehnician, colectiv care a fost desființat în 1964.

8.2. *Aplicații industriale ale metalizării în Republica Socialistă România.* Cu toate mijloacele modeste în ce privește utilajul și personalul tehnic calificat, s-au executat și la noi în țară aplicații industriale ale metalizării, grație în primul rînd colaborării strînse dintre colectivul de la I.M.A. și colectivul de la Uzina „1 Mai" - Ploiești, singurul din țară care a avut o activitate foarte susținută, fiind des solicitat să execute numeroase lucrări la diverse alte întreprinderi.

Dintre aplicațiile executate citățm mai jos cîteva mai importante:

a) Recondiționări și remedieri de defecte la organe de mașini:

— arbori cotiți și alte piese de la motoarele de tractoare în colaborare cu I.C.M.E.A. și unele ateliere de reparat utilaj agricol;

— arbori cotiți și axe cu came de la motoare de autovehicule;

— arbori de turbine și pistoane de motoare diesel,

— butoane cap de osie de la vagoane de tramvai, axe de la mașini de imprimerie și pompe de ulei de la turbine;

— recondiționări și remedieri la utilajul din sectorul petrolier, efectuate frecvent la Uzina „1 Mai" - Ploiești.

b) Protecția contra coroziunii:

—metalizări cu zinc și aluminiu, efectuate la construcțiile metalice și utilajele de la Fabrica de băi și radiatoare din București, la elemente de tîmplărie metalică, la vagoneți de mină, la numeroase rezervoare și

cisterne, malaxoare centrifuge din industria zahărului, care au fost efectuate de colectivul „1 Mai";

— protecția utilajului petrolier destinat exportului în țări cu climat tropical;

— protecția prin alitare a dornurilor pentru perforarea țaglelor destinate fabricării tuburilor fără sudură;

— protecția la temperaturi înalte a utilajului de turnătorie pentru turnarea de precizie și a unor instalații de tratamente termice.

c) Cercetări și aplicații diverse:

— metalizări experimentale pentru diverse teme din planul colectivului de la I.M.A., în special în domeniul lagărelor din metale pulverizate și protecția contra coroziunii prin strate mixte de metal pulverizat cu vopsele;

— metalizări cu caracter artistic și decorativ, cum a fost o mare statuie din piatră artificială, denumită *Oțelarul*, și *Coloana infinită* de la Tg.-Jiu, opera sculptorului C. Brîncuși.

d) Protecția interioară prin metalizare a conductelor forțate de la uzinele hidroelectrice Bicaz și Argeș, lucrare executată prin grija organelor Ministerului Energiei Electrice.

8.3. *Concluzii și propuneri.* a) A 5-a Conferință internațională de metalizare de la Varșovia a dovedit că toate țările cu industrie dezvoltată trebuie să acorde un deosebit interes aplicațiilor metalizării pentru a se menține la nivelul tehnicii înaintate.

Astfel este indicat ca și țara noastră să trimită de acum înainte delegați la viitoarele conferințe de metalizare, așa cum a făcut la ultima din 1966.

b) Expunerea extrem de sumară din paragraful precedent asupra realizărilor din Republica Socialistă România în domeniul metalizării ne conduce la concluzia că s-ar putea înfăptui lucrări mai numeroase și la nivel mai înalt dacă s-ar înființa pe lîngă institutele departamentale catedre sau laboratoare uzinale un colectiv de metalizare. Această măsură constituie un imperativ nu numai în cadrul activității industriale pentru probleme interne, ci și din cauza obligațiilor pe care ni le asumăm în afara granițelor prin numeroasele mașini și agregate pe care le exportăm.

e) După cum s-a arătat mai sus în paragraful 8.2 alin. d, s-a efectuat și la noi în țară protecția contra coroziunii a suprafeței interioare la conductele forțate de la uzinele hidroelectrice Bicaz și Argeș. O astfel de măsură fiind insistent recomandată de literatura tehnică pentru instalațiile hidrotehnice, sperăm că șantierul Porțile de Fier va lua măsuri pentru metalizarea ecluzelor, vanelor, blindajelor și altor suprafețe care necesită protecția contra coroziunii prin metalizare. Trebuie să se știe că o protecție numai prin simplă vopsire nu este eficace, mai ales pentru o lucrare de importanță internațională cum este Complexul hidrotehnic de la Porțile de Fier.

V. Marcu și Traian Ciobanu

RECENZII

A. CEMAL ERINGEN, *Nonlinear theory of continuous media* (Teoria neliniară a mediilor continue), McGraw-Hill Book Co., New York - San Francisco - Toronto - London, 1962, XII + 478 p.

Problemele teoriei neliniare a mediilor continue au început să fie din ce în ce mai mult considerate în ultimul timp. Sînt de amintit astfel lucrările deosebit de valoroase ale lui C. Truesdell, R.A. Toupin, W. Noll. V.V. Novojilov, J.E. Adkins, A.E. Green, A. Signorini, G. Grioli, P.M. Naghdi etc. În felul acesta au apărut vaste monografii, cum sînt cele ale lui A.E. Green şi J.E. Adkins şi vol. III din „Handbuch der Physik", partea I-a şi a III-a (C. Truesdell, R.A. Toupin, W. Noll). Încercarea Prof. A.C. Eringen de a cuprinde cele mai importante probleme într-un curs destinat unor studii superioare la Purdue University (Lafayette, Indiana, S.U.A.) este meritorie; acesta izbuteşte să pună în evidenţă cele mai importante probleme, inclusiv cercetările personale în această direcţie.

Lucrarea cuprinde o introducere, 11 capitole, un apendice, o bibliografie foarte dezvoltată (cca 500 titluri) şi un indice.

În introducere se observă că un studiu al comportării globale a corpurilor reale din punct de vedere mecanic trebuie făcut ţinînd seama de agenţii externi care pot interveni, constituţia mediului şi modul în care acesta răspunde acţiunii acestor agenţi. Se propune un număr de 8 axiome (conservarea masei, teorema impulsului, teorema momentului cinetic, conservarea energiei, principiul entropiei, conservarea sarcinii, legea de inducţie a lui Faraday şi legea lui Ampère), care pot fi eventual înlocuite cu altele în cadrul mecanicii relativiste sau mecanicii cuantice. La acestea se adaugă teoria constitutivă a mediului respectiv.

Capitolul I este destinat geometriei deformaţiilor. Se introduc bazele de vectori, tensorul metric, gradientul deformaţiei, tensorii de deformaţie, vectorii deplasare etc. În particular se trece la deformaţiile şi rotirile infinitezimale, făcîndu-se o discuţie detaliată cu privire la aceste posibilităţi. Menţionăm, de asemenea, variaţiile de arie şi de volum. O atenţie specială este acordată condiţiilor de compatibilitate în cazul marilor deformaţii. Cîteva cazuri speciale de deformare sînt, de asemenea, luate în considerare. Problemele de mişcare şi de cinematică a deformaţiei sînt considerate în capitolul al II-lea. Se pun astfel în evidenţă derivatele materiale ale tensorilor, viteza şi acceleraţia. De asemenea, se calculează derivatele materiale ale elementelor de arc, de arie şi de volum şi se studiază cinematica integralelor de linie, suprafaţă şi volum. Se introduc viteza de deformaţie, spinul, vorticitatea şi se stabilesc teoremele de vorticitate. Cu ajutorul noţiunii de masă ce se introduce se definesc impulsul, momentul cinetic şi energia cinetică. O atenţie specială este acordată axiomei obiectivităţii (mărimile în formu-

larea legilor fizice independente de observator şi sistemul de referinţă). Problema tensiunilor este considerată în capitolul al III-lea. Se prezintă sarcinile exterioare şi interioare şi se introduce tensorul tensiune; se stabilesc apoi ecuaţiile de mişcarea şi se introduce fluxul tensiunilor.

În capitolul al IV-lea se prezintă probleme de energie şi entropie. Menţionăm principiul conservării energiei şi un studiu al energiei potenţiale şi al energiei de deformaţie. O atenţie specială este acordată producţiei de entropie şi problemelor termodinamice legate de echilibrul mecanic. Ecuaţiile constitutive sînt studiate în capitolul al V-lea. După diferite consideraţii cu caracter general, se prezintă, în special, ecuaţiile constitutive ale corpurilor hiperelastice (metoda lui Green), ecuaţiile constitutive ale corpurilor elastice (metoda lui Cauchy) şi ecuaţiile constitutive ale solidelor ideal elastice; de asemenea, se consideră fluidele de tip Stokes şi se dau aproximaţii polinomiale pentru legile constitutive.

Capitolul al VI-lea este destinat studiului unor probleme de teoria elasticităţii. Se stabilesc ecuaţiile fundamentale şi se consideră torsiunea cilindrilor circulari şi încovoierea unui bloc şi a unui cuboid curbat iniţial. Menţionăm, de asemenea, starea de deformaţie plană finită, ca şi propagarea undelor elastice finite. Se dau şi unele rezultate cu caracter experimental.

Problemele dinamicii fluidelor sînt formulate în capitolul al VII-lea. Se prezintă astfel ecuaţiile fundamentale şi se consideră, în special, curgerea de tip Poiseuille şi de tip Couette ca şi curgerea staţionară într-un tub. Menţionăm, de asemenea, aproximaţia lui Navier-Stokes.

Capitolul al VIII-lea este destinat unor probleme de hipoelasticitate. Cu ajutorul vitezei tensiunilor se discută ecuaţiile constitutive şi se subliniază legătura dintre hipoelasticitate şi elasticitate. Apoi, sînt considerate cîteva probleme interesante: mişcarea fără acceleraţie, tensiunea fără flux, tensiunea statică omogenă, forfecarea hipoelastică etc. Corpurile elasto-perfect plastice sînt considerate în capitolul al IX-lea. Pornind de la date cu caracter experimental, se prezintă cîteva teorii mai importante de plasticitate şi anume: teoria Lévy-von Mises şi teoria Prandtl-Reuss. Rezultatele generale se aplică în cazul penei elasto-plastice. Menţionăm, de asemenea, legătura dintre hipoelasticitate şi plasticitate. În capitolul al X-lea se prezintă corpurile viscoelastice. După cîteva date cu caracter introductiv (de exemplu, viteze tensoriale obiective) se trece la ecuaţiile funcţionale constitutive şi la sistemul fundamental de ecuaţii al problemei. Se consideră apoi curgerea staţionară de forfecare a corpurilor simplu viscoelastice, ca şi a fluidelor de tip Rivlin-Ericksen. Menţionăm, de asemenea, torsiunea viscoelastică şi curgerea torsională. O atenţie specială este acordată corpurilor higrosterice.

Ultimul capitol cuprinde probleme de electroelasticitate. Se dau cele mai importante rezultate privitoare la cîmpul electric (teoria Maxwell-Faraday) şi se stabilesc ecuaţiile constitutive pentru dielectricii elastici şi hiperelastici. Ca exemplu, menţionăm considerarea forfecării simple a dielectricilor polarizaţi ca şi a cazului dielectricilor anizotropi.

În apendice se dau cîteva date cu privire la analiza tensorială, trecîndu-se, în special, în revistă rezultatele mai importante folosite în lucrare. Se consideră astfel coordonatele curbilinii, calculul tensorial obişnuit, tensorul de curbură Riemann-Christoffel, ca şi cîmpurile tensoriale duble.

Lucrarea prof. Eringen este redactată foarte sistematic şi clar. Fiecare capitol are cîte un paragraf introductiv în care se discută problema tratată în capitolul respectiv. Materialul prezentat este deosebit de bogat şi privit dintr-un punct de vedere original. Lucrarea poate fi consultată cu deosebit interes de toţi cercetătorii din domeniul mecanicii solidelor deformabile.

P. P. Teodorescu

Flexural Mechanics of Reinforced Concrete. Proceedings of the International Symposium Miami, Fla./ Nov. 10—12, 1964 (Mecanica betonului armat solicitat la încovoiere. Lucrările simpozionului internațional de la Miami, Florida, 10—12 noiembrie, 1964), American Society of Civil Engineers, 1965, 601 pag.

În cadrul simpozionului au fost prezentate 24 lucrări tratînd aspectele cele mai importante ale calculului inelastic al structurilor de beton armat.

Teoriei generale a calculului inelastic al grinzilor și cadrelor de beton armat i-au fost consacrate lucrările : *„Stadiul actual și perspectivele calculului inelastic al cadrelor de beton armat"* și *„Dimensionarea cadrelor de beton armat la două stări limită"*, ambele de H.A. Sawyer, Jr., *„Calculul la starea limită de rezistență a structurilor liniare de beton armat"* de E.F.P. Burnett și C.W. Yu, *„Conservatism în teoria cadrelor de beton armat"* de D.H. Clyde, *„Siguranța structurilor în cadre de beton armat"* de M. Tichy și M. Vorlicek, și *„Grinzi static determinate sau static nedeterminate de beton armat sau de beton precomprimat"* de A. A. Gvozdev.

În primele două lucrări se prezintă bazele dimensionării cadrelor ținînd seama de toate stările limită, respectiv de anumite stări limită, care pot surveni în decursul existenței acestor structuri. În lucrările elaborate de Burnett, Yu și Clyde se arată necesitatea utilizării diagramei moment-rotire specifică în locul diagramei moment-curbură în calculul inelastic al betonului armat și se face o trecere în revistă a actualelor metode de calcul al cadrelor de beton armat. În ambele lucrări se discută problemele puse de calculul plastic efectuat pe baza principiului redistribuției optime, elaborat de autorul acestei recenzii, subliniindu-se avantajele metodei de calcul generate de acest principiu. Lucrarea lui Tichy și Vorlicek tratează problema determinării capacității de rezistență a cadrelor de beton armat pe baze statistice, iar cea a lui Gvozdev prezintă realizările din U.R.S.S. în domeniul calculului inelastic al grinzilor.

Problemele privind stabilitatea cadrelor de beton armat în domeniul inelastic sînt tratate în lucrările : *„Considerații privind instabilitatea în calculul plastic al cadrelor de beton armat"* de E. Rozenblueth și R. Diaz de Cossio, *„Lungimea critică a stîlpilor de beton armat articulați sau încastrați"* de W.F. Chang și *„Folosirea mașinilor electronice la studiul cadrelor cu stîlpi lungi"* de J.E. Breen.

Capacitatea de deformare plastică a elementelor încovoiate, sau comprimate excentric, este studiată experimental în lucrările : *„Calculul inelastic al cadrelor de beton armat"* de A.L.L. Baker și A.M.N. Amarakone, *„Capacitatea de rotire a zonelor plastificate ale grinzilor de beton armat"* de A.H. Mattock și *„Diagrama moment-curbură a elementalor de beton armat comprimate excentric, cu moment alternant"* de H. Aoyama. Aspecte teoretice ale acestei probleme sînt prezentate de M.Z. Cohn în lucrarea *„Compatibilitatea rotirilor în calculul plastic al grinzilor continue de beton armat"*.

Definirea stării limită de rezistență este discutată de P.R. Barnard în lucrarea *„Ruperea grinzilor de beton armat"*.

Capacitatea betonului de a dezvolta mari deformații plastice la compresiune, precum și sursa acestor deformații, sînt prezentate în lucrările : *„Deformabilitatea plastică a betonului"* de H.E.H. Roy și M.A. Sozen și *„Microfisurarea și comportarea inelastică a betonului"* de G.M. Sturman, S.P. Shah și G. Winter.

Redistribuția de eforturi în grinzi static nedeterminate, datorită exclusiv fisurării betonului întins, face obiectul studiului *„Distribuția elastică a momentelor în grinzi continue"* de G. Macchi.

În lucrarea *„Comportarea grinzilor continue de beton precomprimat"* N.M. Hawkins, M.A. Sozen și C.P. Siess prezintă rezultate privind influența forței tăietoare asupra capacității portante a 22 grinzi studiate experimental.

J.R. Benjamin şi C. Allen Cornell sînt autorii lucrării „*Un model stochastic pentru săgeţile din curgere lentă a grinzilor de beton armat*".

Rezultate ale studiilor efectuate recent în domeniul calculului plastic al plăcilor armate pe două direcţii sînt prezentate în lucrările: „*Progrese actuale realizate în Anglia privind metoda echilibrului, din cadrul teoriei liniilor de rupere*" de L.L. Jones, „*Calculul plastic al plăcilor folosind metoda echilibrului*", de R.H. Wood şi „*Efectul de membrană în procesul de încovoiere a plăcilor dreptunghiulare cu reazeme fixe*" de A. Sawczuk.

Problemele privind dezvoltarea în viitor a calculului plastic al structurilor de beton armat sînt discutate în referatele: „*Se depreciază calculul inelastic?*" de G. Winter şi „*De ce să nu se utilizeze calculul plastic?*" de M.Z. Cohn.

Majoritatea lucrărilor prezentate la simpozion sînt însoţite de discuţii.

În totalitate, volumul cuprinde progresele recente privind folosirea deformaţiilor inelastice ale betonului şi armăturii în calculul static şi de rezistenţă al elementelor şi structurilor de beton armat. El prezintă utilitate şi interes pentru inginerii proiectanţi şi pentru cercetătorii din acest domeniu.

Valeriu Petcu

W. ALBRING, *Angewandte Strömungslehre* (Mecanica aplicată a fluidelor) 3., erweiterte Auflage. (Ediţia a 3-a completată). Verlag Theodor Steinkopff, Dresden, 1966, XV + 470 pag., 471 figuri.

Conţinutul primei ediţii a cărţii de faţă apărută în 1961 (recenzată în St. cerc. mec. apl., XII, 6, 1961), a fost bazat în esenţă pe un curs de trei semestre, tratînd despre aplicaţiile mecanicii fluidelor în construcţia de maşini, pe care autorul l-a ţinut la Institutul Politehnic din Dresda, pentru studenţii de la catedra de construcţii de maşini. În capitolele 1—12 este vorba de fluidele incompresibile, în capitolele dedicate dinamicii gazelor (13—20) se ţine seama de compresibilitate, iar în ultima parte a cărţii sînt descrise procesele scurgerii cu frecare. În cadrul acestei împărţiri, autorul începe de fiecare dată cu prezentarea scurgerii unidimensionale, trecînd apoi la scurgerile cu mai multe dimensiuni. Ţinînd seama de faptul că inginerul constructor de maşini ocupă o poziţie intermediară între practicianul care lucrează mai mult empiric şi matematicianul sau fizicianul care adesea foloseşte procedee deductive, autorul pleacă de la ideea că un constructor de maşini trebuie să cunoască metodele ambelor activităţi, folosindu-le combinat. Scopul lucrării este tocmai de a crea o bază şi un îndrumător în acest sens.

Ediţia a III-a cuprinde unele completări utile. Astfel, s-a arătat la fiecare capitol, pe scurt şi în mod selectiv, evoluţia istorică din ramura tratată.

În cadrul expunerii teoremei impulsului şi al capitolului despre reprezentarea conformă s-a introdus cîte un paragraf cu privire la măsurătorile pe modele pentru stabilirea începutului cavitaţiei.

În capitolul privind gazodinamica s-au introdus unele date experimentale despre scurgerea transonică în reţele de profile etc. O atenţie deosebită a fost acordată scurgerilor turbulente.

În sfîrşit a fost adăogat un nou capitol în care sînt descrise probleme speciale de scurgeri în turbomaşini.

Datorită conţinutului ei bogat şi prezentării concise şi clare, cartea a fost de la început unanim apreciată. Iniţiativa acestei noi ediţii completată cu rezultate recente este foarte bine venită.

E. Mândroiu

BOHDAN LEWICKI, *Hochbauten aus grossformatigen Fertigteilen* (Construcţii înalte din prefabricate de dimensiuni mari). Franz Deuticke, Wien, 1967, 559 pag.

Cartea de faţă, semnată de ing. Bohdan Lewicki, profesor la Institutul de construcţii din Varşovia, tipărită în anul 1967 în Edit. Franz Deuticke din Viena, reprezintă traducerea în limba germană a lucrării originale din limba polonă a aceluiaşi autor, tipărită în anul 1966 de Edit. Arkady din Varşovia.

Personalitatea prof. dr. ing. Bohdan Lewicki este de ani de zile cunoscută prin numeroasele sale publicaţii şi comunicări, nu numai în ţara lui, ci şi pe tărîm internaţional. În lucrarea de faţă, prof. Lewicki aduce o bogată contribuţie la rezolvarea problemelor constructive şi statice în această ramură. Multe diagrame, schiţe şi fotografii ale construcţiilor de locuit poloneze şi sovietice ilustrează — alături de exemple din Franţa, Suedia şi multe alte ţări — această carte.

Pentru practician sînt foarte utile numeroasele detalii constructive, propunerile de tipizare, tehnologia de fabricaţie şi de montaj, precum şi datele asupra greutăţilor consumurilor de oţel etc.

De asemenea, staticianul găseşte în capitolul *„Date de calcul şi necesităţi constructive"* numeroase exemple aprofundate de calcul. Studentul, ca de altfel şi arhitectul, constructorul şi fabricantul elementelor uzinate găsesc aici o privire de ansamblu a realizărilor, a stadiului cercetărilor, a problemelor şi a posibilităţilor constructive din elemente prefabricate ale locuinţelor. Nu lipsesc nici diferenţele existente între normele din anumite ţări, pentru a uşura cititorului înţelegerea problemelor expuse din punctul de vedere al propriilor lor norme. Într-o anexă la sfîrşitul cărţii sînt date scurte explicaţii asupra normelor de proiectare a construcţiilor de beton şi oţel poloneze şi sovietice.

Lucrarea începe cu o listă de simboluri şi notaţii. Capitolul I, *„Sistemul constructiv cu prefabricate de dimensiuni mari"*, arată importanţa prefabricării în general pe scară industrială şi avantajele care derivă din prefabricatele de dimensiuni mari, enumerînd pe scurt elementele prefabricate ale construcţiei.

Capitolul II, *„Sisteme constructive"*, tratează în parte diversele sisteme constructive prefabricate şi anume : construcţii cu pereţi portanţi, structuri cu stîlpi şi grinzi, cadre şi elemente spaţiale.

Capitolul III conţine principiile de bază în proiectare.

Capitolul IV cuprinde date de calcul şi principii constructive.

Capitolul V tratează stabilitatea construcţiilor din prefabricate de dimensiuni mari.

Capitolul VI se ocupă de planşee, scări şi învelitori, iar capitolul VII cuprinde elemente despre pereţii prefabricaţi exteriori şi interiori, precum şi despre etanşeitatea acestor elemente.

În sfîrşit, capitolul VIII tratează problemele de fizica construcţiilor. Lucrarea se termină cu un capitol de completări şi explicaţii, precum şi anexele menţionate la începutul recenziei. Lucrarea este editată în condiţii grafice remarcabile.

Cartea, prin expunerea clară, ilustrată cu figuri, diagrame şi fotografii sugestive, dă prilej cititorului să cunoască elementele necesare din acest domeniu. Ea este destinată cercetătorilor, proiectanţilor, studenţilor, arhitecţilor, inginerilor de pe şantierele de construcţii civile şi industriale şi celor care se ocupă de fabricarea elementelor uzinate.

Lia Creţoiu

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expune stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române sau străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectorilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidromecanica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul „16 Februarie".

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 26, nr. 6 1967

SUMAR

STUDII

Pag.

T. OROVEANU, Utilizarea funcţiei de curent în studiul scurgerilor plane cu rotor constant prin mediile poroase cu permeabilitate variabilă 1173

VASILESCU ALEXANDRU, Distribuţia vitezelor în conductele circulare cu pereţi netezi şi cu pereţi rugoşi 1187

V. N. CONSTANTINESCU şi FL. DIMOFTE, Asupra influenţei unor cîmpuri magnetice şi electrice în lubrificaţia cu gaze 1193

GH. VASILCA, Asupra condiţiilor de aplicare şi persistenţă a bisulfurii de molibden pe suprafeţele de alunecare 1207

R. C. BOGDAN şi D. LARIONESCU, Studiul analitic al mecanismelor cu cinci elemente de categoriile III şi V prin metoda analizei armonice complexe 1221

C. I. MANEA, Relaţii generale pentru determinarea unor parametri geometrici şi cinematici ai motoarelor cu profil de lucru trocoidal 1235

M. D. GAFIŢEANU, Consideraţii asupra gradului de acoperire la roţile dinţate cilindrice cu dinţi drepţi 1249

IOAN GH. SANDU, Aspecte noi în teoria reţelelor structurale 1269

C. AVRAM, I. FILIMON şi R. MARINOV, Nota I. Încercări privind plasticizarea parţială a elementelor încovoiate de beton 1283

VALERIU PETCU, Momentele plastice ale secţiunilor elementelor de oţel I şi [laminate în România 1291

GELU ONU, Asupra calculului reţelelor de grinzi prin iteraţie 1303

C. TEODOSIU, Contribuţii la teoria macroscopică a dislocaţiilor şi tensiunilor iniţiale. II 1327

D. CRAIFALEANU, Aplicarea metodei parametrilor iniţiali la studiul stabilităţii barelor solicitate la răsucire 1345

NOTE

NICOLAE ORLOVSCHI, Determinarea prin metoda modelării electrice a liniilor de influenţă la sistemele static nedeterminate 1365

RECENZII 1377

Index alfabetic 1383

St. Cerc. Mec. Apl., Tom. 26, Nr. 6, P. 1171–1386, Bucureşti 1967

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 26, nr. 6, 1977

SUMAR

STUDII

Pag.

E. OROVEANU, Utilizarea integrării de curent în studiul fenomenelor plane cu inele cu-
plate prin medii poroase cu permeabilitate variabilă 1173

VASILESCU ALEXANDRU, Distribuția vitezelor în fenomenele circulare cu pereți
poroși și cu pereți rugoși 1187

V. N. CONSTANTINESCU și EL. DINCHEFF, Asupra influenței unor cuplaje magnetice
și electrice în lubrificația cu gaze 1195

GH. VASILCA, Asupra condițiilor de aplicare și preluării a bisumării de metodelor
de suprapoziție în aliniere 1207

Șt. C. BOGDAN și D. I. ABLONESCU, Studiu analitic al pompelor cu cilindri elemen-
de categoriile III și V prin metoda analizei elementelor complexe 1221

C. I. MANEA, Ideală generală pentru determinarea unor parametri geometrici ai ane-
mului al motoarelor cu profil de lucru trocoidal 1235

M. D. GAFIȚEANU, Considerații asupra gradului de acoperire în roțile dințate cilin-
drice cu dinți drepți 1249

IOAN GH. SAVIN, Aspecte cu privire la calculul structurale 1259

C. AVRAM, I. FĂLTINOS și D. MARINOV, Noi tipuri de lagăre cu pivot plastic
pată a elementelor deformate de beton 1265

VALERIU PETCU, Aliajele plastice de sculptor elemente de sfere și lamele
în frecare 1281

GHEORGHIU, Asupra calculului turbinelor de avion prin metoda 1295

C. TEODOSIU, Contribuții la teoria mașinilor a dilatărilor și tensiunilor in-
țiale. II 1327

D. CHIȘIRALEANU, Aplicarea metodei perturbațiilor la studiul stabilității fe-
nomenelor solicitate la răsucire 1345

NOTE

NICOLAE GHEORGHIU, Determinarea prin metoda modelării electrice a limitei de
curgere a sferelor elastic nedeformabile 1365

RECENZII 1377

Index alfabetic 1383

UTILIZAREA FUNCȚIEI DE CURENT ÎN STUDIUL SCURGERILOR PLANE CU ROTOR CONSTANT PRIN MEDIILE POROASE CU PERMEABILITATE VARIABILĂ *)

de T. OROVEANU
Institutul de mecanica fluidelor

Se reia problema tratată într-o lucrare anterioară [4], introducîndu-se de data aceasta funcția de curent. Se indică o metodă de studiu a scurgerilor plane prin medii poroase neomogene în cazul în care rotorul vitezei de filtrare este constant și se dau cîteva exemple simple. Se studiază aceeași problemă în cazul în care permeabilitatea este funcție de o singură variabilă spațială. La sfîrșit, se indică posibilitatea utilizării funcției de curent la studiul scurgerilor în care rotorul vitezei de filtrare este o funcție de una sau de amîndouă variabilele spațiale.

1. *Introducere.* Într-o lucrare anterioară [4], am extins și generalizat unele rezultate mai vechi [3], referitoare la scurgerile prin medii poroase cu permeabilitatea variabilă, în cazul în care rotorul vitezei de filtrare este dat. În prima etapă a acestor cercetări am considerat scurgerile cu rotor nul al vitezei de filtrare [3], iar ulterior le-am studiat și pe acelea în care rotorul vitezei de filtrare este constant [4]. În această ultimă situație, dacă scurgerea este plană, rezultatele pot fi obținute cu mai multă ușurință prin introducerea funcției de curent. Astfel, dacă scriem legea lui Darcy sub forma

$$v_i = k\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1,\ 2), \tag{1}$$

v_i fiind componentele vitezei de filtrare, k permeabilitatea, considerată ca funcție de punct și

$$\varphi = -\frac{1}{\mu}(p + U), \tag{2}$$

*) Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **12**, *6* (1967) (în limba franceză).

unde μ este viscozitatea fluidului, p presiunea și U o funcție de forțe, ecuația de continuitate ne dă

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)=0, \tag{3}$$

fluidul fiind presupus incompresibil.

Funcția de curent se introduce prin relațiile cunoscute

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}=\frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\ , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}=-\frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \tag{4}$$

și satisface ecuația

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)=0 \tag{5}$$

care se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial (\ln k)}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_1}-\frac{\partial (\ln k)}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}=0. \tag{6}$$

Pe de altă parte, scurgerea fiind plană, rotorul vitezei de filtrare are expresia

$$\Omega=-\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_1}-\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \tag{7}$$

sau

$$\Omega=-\frac{\partial (\ln k)}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_1}-\frac{\partial (\ln k)}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \tag{8}$$

astfel că ecuația (6) devine

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}=-\Omega, \tag{9}$$

ceea ce înseamnă că funcția de curent satisface ecuația lui Poisson. Acest rezultat este echivalent cu acela cunoscut din studiul mișcării laminare a fluidelor vîscoase [1].

Prin urmare, dacă $f(x_1, x_2)$ este o funcție armonică, o soluție a ecuației (9) are forma

$$\psi=f(x_1, x_2)-\frac{\Omega}{4}(x_1^2+x_2^2) \tag{10}$$

sau

$$\psi=f_1(x_1, x_2)-\frac{\Omega}{2}x_1^2 \tag{11}$$

respectiv

$$\psi = f_2(x_1, x_2) - \frac{\Omega}{2} x_2^2, \tag{12}$$

$f_1(x_1, x_2)$ și $f_2(x_1, x_2)$ fiind de asemenea funcții armonice.

Din (10) rezultă că o scurgere cu rotor constant al vitezei de filtrare se obține prin suprapunerea unei scurgeri în care acest rotor este nul și a unei scurgeri ale cărei linii de curent sînt cercuri concentrice. Tot astfel (11) și (12) arată că o scurgere cu rotor constant al vitezei de filtrare rezultă de asemenea prin suprapunerea unei scurgeri în care acest rotor este nul și a unei scurgeri ale cărei linii de curent sînt drepte paralele.

Putem așadar că construim funcția de curent a unei scurgeri cu rotor constant al vitezei de filtrare cu ajutorul uneia dintre relațiile (10), (11) sau (12). După aceea, din ecuația (7) sau (8) rezultă legea de variație corespunzătoare a permeabilității.

2. *Cîteva exemple de scurgeri plane cu rotor constant al vitezei de filtrare.* Pentru a da un exemplu simplu, vom lua

$$f(x_1, x_2) = A(x_1^2 - x_2^2), \tag{13}$$

constanta A fiind pozitivă; găsim astfel din (10)

$$\psi = \left(A - \frac{\Omega}{4}\right) x_1^2 - \left(A + \frac{\Omega}{4}\right) x_2^2. \tag{14}$$

Atunci cînd $A > \frac{\Omega}{4}$ (Ω fiind de asemenea pozitiv) liniile de curent sînt hiperbole, în timp ce dacă avem $A < \frac{\Omega}{4}$ liniile de curent sînt elipse. Ecuația (8) devine

$$2\left(A - \frac{\Omega}{4}\right) x_1 \frac{\partial (\ln k)}{\partial x_1} - 2\left(A + \frac{\Omega}{4}\right) x_2 \frac{\partial (\ln k)}{\partial x_2} + \Omega = 0 \tag{15}$$

și ne dă

$$k = a x_1 x_2, \tag{16}$$

a fiind o constantă.

La rîndul ei, viteza de filtrare are componentele

$$v_1 = -2\left(A + \frac{\Omega}{4}\right) x_2, \qquad v_2 = -2\left(A - \frac{\Omega}{4}\right) x_1, \tag{17}$$

iar funcția φ se poate obține cu ușurință.

Tot astfel, dacă luăm

$$f(x_1, x_2) = 2A x_1 x_2, \tag{18}$$

obținem din (10)

$$\psi = 2A x_1 x_2 - \frac{\Omega}{4}(x_1^2 + x_2^2). \tag{19}$$

În acest caz, atunci cînd avem $A < \frac{\Omega}{4}$, liniile de curent sînt elipse, iar dacă $A > \frac{\Omega}{4}$ liniile de curent sînt hiperbole. Legea de variație a permeabilității rezultă din ecuația (8) care devine

$$\left(2A x_2 - \frac{\Omega}{2} x_1\right)\frac{\partial (\ln k)}{\partial x_1} + \left(2A x_1 - \frac{\Omega}{2} x_2\right)\frac{\partial (\ln k)}{\partial x_2} + \Omega = 0 \tag{20}$$

și admite soluția

$$k = a (x_1 + x_2)^{\frac{2\Omega}{\Omega - 4A}}. \tag{21}$$

Componentele vitezei de filtrare au expresiile

$$v_1 = 2A x_1 - \frac{\Omega}{2} x_2 \ , \quad v_2 = \frac{\Omega}{2} x_1 - 2A x_2 , \tag{22}$$

iar funcția φ se poate găsi de asemenea fără dificultăți.

Concluzii similare rezultă dacă adoptăm pentru funcțiile $f_1(x_1, x_2)$ din (11) sau $f_2(x_1, x_2)$ din (12) una sau cealaltă din expresiile utilizate pentru funcția $f(x_1, x_2)$. Fără a mai insista asupra acestor exemple cu caracter particular, ne vom opri puțin asupra soluțiilor ecuației (9) obținute prin separarea variabilelor, care sînt de forma

$$\psi = A\, e^{\pm i\alpha x_1 \pm i\alpha x_2} - \frac{\Omega}{4}(x_1^2 + x_2^2), \tag{23}$$

constanta de separare α putînd avea orice valoare, reală, imaginară sau complexă. Soluția generală se exprimă sub forma unei combinații liniare a soluțiilor precedente pentru diferitele valori ale lui α. Legea corespunzătoare de variație a permeabilității se determină apoi prin integrarea ecuației (8), care poate prezenta însă dificultăți. În afară de aceasta, este mai interesant ca să se determine scurgerile cu rotor constant al vitezei de filtrare care corespund la o lege dată de variație a permeabilității. Nici problema astfel pusă nu este în general mai simplă dar în anumite cazuri se poate rezolva cu destulă ușurință.

Astfel, atunci cînd legea de variație a permeabilității este

$$k = k^{(0)}\ e^{m x_1 + n x_2}, \tag{24}$$

ecuația (8) devine

$$m\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + n\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \Omega = 0 \tag{25}$$

şi soluţia generală a acesteia se caută sub forma

$$F(x_1, x_2, \psi) = 0, \tag{26}$$

ceea ce ne dă

$$m\frac{\partial F}{\partial x_1} + n\frac{\partial F}{\partial x_2} - \Omega\frac{\partial F}{\partial \psi} = 0, \tag{27}$$

ecuaţie a cărei soluţie generală este

$$F = \Phi(\Omega x_1 + m\psi,\ \Omega x_2 + n\psi), \tag{28}$$

Φ fiind o funcţie arbitrară. Această funcţie trebuie însă astfel aleasă încît ψ să fie o soluţie a ecuaţiei (9).

În loc de a urma această cale, apare mai simplu să considerăm (25) ca o relaţie între derivatele parţiale de primul ordin ale funcţiei de curent, din care scoatem

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\frac{\Omega}{n} - \frac{m}{n}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \tag{29}$$

şi după înlocuirea în (9) găsim

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{m}{n}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right) = -\Omega \tag{30}$$

sau

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{m}{n}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = h(x_2) - \Omega x_1, \tag{31}$$

funcţia $h(x_2)$ urmînd a fi determinată. În acest scop, observăm că din (25) şi (31) rezultă

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\frac{n^2}{m(m^2+n^2)}[m\Omega x_1 - mh(x_2) - \Omega] - \frac{\Omega}{m} \tag{32}$$

şi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{n}{m^2+n^2}[m\Omega x_1 - mh(x_2) - \Omega], \tag{33}$$

iar condiţia de integrabilitate ne dă

$$h(x_2) = \frac{m}{n}\Omega x_2 + \alpha, \tag{34}$$

α fiind o constantă arbitrară. Avem aşadar

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{n\Omega}{m^2+n^2}(mx_2 - nx_1) + \frac{n^2\alpha - m\Omega}{m^2+n^2} \tag{35}$$

şi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{m\Omega}{m^2 + n^2}(nx_1 - mx_2) - \frac{mn\alpha + n\Omega}{m^2 + n^2}, \tag{36}$$

iar după integrare obţinem

$$\psi = \frac{\Omega}{m^2 + n^2}\left(mnx_1x_2 - \frac{n^2}{2}x_1^2 - \frac{m^2}{2}x_2^2\right) + \\ + \frac{n^2\alpha - m\Omega}{m^2 + n^2}x_1 - \frac{mn\alpha + n\Omega}{m^2 + n^2}x_2. \tag{37}$$

În acelaşi mod se poate examina şi cazul în care permeabilitatea variază după legea liniară

$$k = ax_1 + bx_2 + c. \tag{38}$$

Ecuaţia (7) ia astfel forma

$$a\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + b\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \Omega(ax_1 + bx_2 + c) = 0 \tag{39}$$

şi ne dă

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\frac{\Omega(ax_1 + bx_2 + c)}{b} - \frac{a}{b}\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \tag{40}$$

După înlocuirea în ecuaţia (9) obţinem

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{a}{b}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right) = 0 \tag{41}$$

sau

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{a}{b}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = C, \tag{42}$$

C fiind o constantă, eventual nulă. Dacă ne fixăm asupra acestui ultim caz, avem

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\frac{a\Omega}{a^2 + b^2}(ax_1 + bx_2 + c) \tag{43}$$

şi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\frac{b\Omega}{a^2 + b^2}(ax_1 + bx_2 + c), \tag{44}$$

iar după integrare rezultă

$$\psi = -\frac{\Omega}{a^2 + b^2}\left(\frac{a^2}{2}x_1^2 + \frac{b^2}{2}x_2^2 + abx_1x_2 + acx_1 + bcx_2\right) = \\ = -\frac{\Omega}{2(a^2 + b^2)}[(ax_1 + bx_2)(ax_1 + bx_2 + 2c)], \tag{45}$$

liniile de curent fiind deci drepte.

Luîndu-se ca punct de plecare una dintre formele (11) sau (12) ale soluției ecuației (9), se poate rezolva problema determinării legii de variație a permeabilității într-o scurgere cu rotor constant al vitezei de filtrare, astfel ca liniile de curent să fie drepte paralele. De exemplu, dacă liniile de curent sînt paralele cu axa Ox_1, considerăm soluția (12) în care punem $f_2(x_1, x_2) = 0$ și avem

$$\psi = -\frac{\Omega}{2} x_2^2, \tag{46}$$

iar ecuația (8) devine

$$x_2 \frac{\partial (\ln k)}{\partial x_2} - 1 = 0. \tag{47}$$

Prin urmare, legea de variație a permeabilității este de forma

$$k = a x_2 h(x_1), \tag{48}$$

$h(x_1)$ fiind o funcție arbitrară.

Funcția φ are la rîndul ei expresia

$$\varphi = -\frac{\Omega}{a} \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{\mathrm{d}x_1}{h(x_1)}. \tag{49}$$

Aceste rezultate ne permit să găsim soluția problemei de scurgere cu condițiile la limită

$$x_1 = x_1^{(s)},\ \varphi = \varphi_s;\ x_1 = x_1^{(c)},\ \varphi = \varphi_c \tag{50}$$

dacă alegem funcția $h(x_1)$.

Astfel, pentru

$$ah(x_1) = \alpha x_1 + \beta \tag{51}$$

și dacă punem în (49) $x_1^{(0)} = x_1^{(s)}$ obținem

$$\varphi = \varphi_s - \frac{\varphi_s - \varphi_c}{\ln \dfrac{x_1^{(c)} + \dfrac{\beta}{\alpha}}{x_1^{(s)} + \dfrac{\beta}{\alpha}}} \ln \frac{x_1 + \dfrac{\beta}{\alpha}}{x_1^{(s)} + \dfrac{\beta}{\alpha}}. \tag{52}$$

Se observă că în acest caz rotorul vitezei de filtrare are valoarea

$$\Omega = \alpha \frac{\varphi_s - \varphi_c}{\ln \dfrac{x_1^{(c)} + \dfrac{\beta}{\alpha}}{x_1^{(s)} + \dfrac{\beta}{\alpha}}}. \tag{53}$$

Soluţia astfel găsită este bineînţeles valabilă pentru $\alpha x_1 + \beta > 0$.

La rezultate asemănătoare, asupra cărora nu insistăm, conduce expresia (11) a funcţiei de curent în care punem $f_1(x_1, x_2) = 0$.

3. *Utilizarea coordonatelor polare în studiul scurgerilor plane cu rotor constant al vitezei de filtrare.* Dacă trecem în coordonate polare, este uşor de constatat că funcţia de curent satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\Omega \tag{54}$$

care admite soluţii de forma

$$\psi = f(r, \theta) - \frac{\Omega}{4} r^2, \tag{55}$$

$f(r, \theta)$ fiind o funcţie armonică.

De asemenea, rotorul vitezei de filtrare are expresia

$$\Omega = -\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2 k}\frac{\partial k}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{56}$$

şi într-o lucrare anterioară [2] am arătat că poate exista o scurgere plan-radială în care rotorul vitezei de filtrare nu este nul. Observăm însă că în acest caz rotorul vitezei de filtrare nu este constant, deoarece ecuaţia (54) nu admite soluţii care să depindă numai de variabila θ, aşa cum trebuie să fie funcţia de curent într-o scurgere plan-radială.

În schimb putem găsi imediat legea de variaţie a permeabilităţii astfel ca liniile de curent să fie cercuri. Avem în acest caz

$$\psi = -\frac{\Omega}{4} r^2 \tag{57}$$

şi ecuaţia (56) devine

$$\frac{r}{2}\frac{\partial (\ln k)}{\partial r} - 1 = 0, \tag{58}$$

soluţia ei fiind

$$k = a g(\theta) r^2, \tag{59}$$

cu a o constantă şi $g(\theta)$ o funcţie arbitrară.

Dacă ţinem seama de relaţiile

$$k\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{k}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{60}$$

echivalente cu (4), precum şi de rezultatele precedente, obţinem pentru funcţia φ expresia

$$\varphi = \frac{\Omega}{2a}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{g(\theta)}. \tag{61}$$

4. *Cazul în care permeabilitatea este funcție de o singură variabilă spațială.* Vom considera mai întîi scurgerea raportată la sistemul de coordonate rectangulare Ox_1x_2 și vom presupune că permeabilitatea este funcție numai de x_1. În felul acesta, dacă punem

$$\frac{\partial (\ln k)}{\partial x_1} = g(x_1), \tag{62}$$

ecuația (8) devine

$$\Omega = -g(x_1)\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \tag{63}$$

ceea ce ne dă

$$\psi = -\Omega \int \frac{dx_1}{g(x_1)} + \chi(x_2). \tag{64}$$

Examinarea ecuației (9) ne arată că aceasta este satisfăcută dacă avem

$$\frac{dg}{dx_1} + \left(1 - \frac{\alpha}{\Omega}\right) g^2 = 0, \quad \frac{d^2\chi}{dx_2^2} + \alpha = 0, \tag{65}$$

α fiind o constantă arbitrară. Obținem deci

$$g(x_1) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{\Omega}\right) x_1 + \beta}, \quad \chi(x_2) = -\frac{\alpha}{2} x_2^2 + \gamma x_2 + \delta, \tag{66}$$

expresii în care β, γ și δ sînt de asemenea constante arbitrare.

Dacă ținem seama de (62) legea de variație a permeabilității este

$$k = a\left(x_1 + \frac{\Omega\beta}{\Omega - \alpha}\right)^{\frac{\Omega}{\Omega - \alpha}}, \tag{67}$$

în care constanta a trebuie astfel aleasă încît să avem $k > 0$ în intervalul de variație ales pentru x_1.

Prin urmare, expresia (64) a funcției de curent se scrie

$$\psi = (\gamma - \Omega\beta) x_1 - (\Omega - \alpha)\frac{x_1^2}{2} - \alpha\frac{x_2^2}{2} + \delta, \tag{68}$$

fiind deci un caz particular al soluției generale. Liniile de curent sînt elipse sau hiperbole după cum expresia

$$\Delta = \frac{\alpha}{2}(\Omega - \alpha) \tag{69}$$

este pozitivă sau negativă. În particular, dacă avem $\alpha = \Omega$, liniile de curent sînt parabole [1]), iar în cazul în care $\alpha = 0$ aceste linii sînt drepte paralele cu axa Ox_2.

Aceeaşi problemă se poate pune şi în coordonate polare, admiţîndu-se, de exemplu, că permeabilitatea este funcţie numai de raza vectoare r. Scriind şi în acest caz

$$\frac{\partial (\ln k)}{\partial r} = h(r), \tag{70}$$

ecuaţia (56) ne dă

$$\Omega = -h(r)\frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{71}$$

respectiv

$$\psi = -\Omega \int \frac{dr}{h(r)} + \chi(\theta). \tag{72}$$

Introducerea acestei expresii a funcţiei de curent în ecuaţia (54) ne conduce la concluzia că trebuie să avem

$$\frac{dh}{dr} - \frac{h}{r} + \left(1 - \frac{\alpha}{\Omega r^2}\right)h^2 = 0\,; \quad \frac{d^2\chi}{d\theta^2} + \alpha = 0, \tag{73}$$

de unde rezultă

$$h = \frac{1}{\frac{\beta}{r} + \frac{r}{2} - \frac{\alpha}{\Omega r}\ln r}\,; \quad \chi = -\frac{\alpha}{2}\theta^2 + \gamma\theta + \delta, \tag{74}$$

α, β, γ şi δ fiind ca şi mai înainte constante arbitrare.

Avem aşadar

$$\psi = \left(\frac{\alpha}{2}\ln r - \Omega\beta\right)\ln r - \frac{\Omega}{4}r^2 - \frac{\alpha}{2}\theta^2 + \gamma\theta + \delta, \tag{75}$$

adică un caz particular al soluţiei generale (55). Atunci cînd $\alpha = 0$ legea de variaţie a permeabilităţii este de forma

$$k = a\,(r^2 + 2\beta), \tag{76}$$

constanta a trebuind să fie astfel aleasă încît să avem $k > 0$.

Tot astfel, atunci cînd permeabilitatea depinde numai de unghiul polar θ, cu notaţia

$$\frac{\partial (\ln k)}{\partial \theta} = g(\theta), \tag{77}$$

[1]) În acest caz, (67) trebuie înlocuită cu legea exponenţială $k = ae^{\frac{x_1}{\beta}}$.

obţinem din (56)

$$\Omega = -\frac{g(\theta)}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{78}$$

şi

$$\psi = -\Omega r^2 \int \frac{\mathrm{d}\theta}{g(\theta)} + \chi(r). \tag{79}$$

Dacă punem

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{g(\theta)} = F(\theta), \tag{80}$$

şi procedăm ca mai înainte, înlocuind expresia funcţiei de curent în ecuaţia (54), se constată că dacă avem

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\theta^2} + 4F - \left(1 + \frac{\alpha}{\Omega}\right) = 0\,; \quad \frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r} - \alpha = 0, \tag{81}$$

această ecuaţie este satisfăcută. Ecuaţiile diferenţiale precedente ne dau însă pentru funcţiile $F(\theta)$ şi $\chi(r)$ expresiile

$$F(\theta) = \beta\cos 2\theta + \gamma\sin 2\theta + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\alpha}{\Omega}\right), \quad \chi = \delta\ln r + \frac{\alpha}{4}r^2. \tag{82}$$

Funcţia de curent este deci

$$\psi = \delta\ln r - \Omega r^2(\beta\cos 2\theta + \gamma\sin 2\theta) - \frac{\Omega}{4}r^2 \tag{83}$$

şi reprezintă bineînţeles un caz particular al soluţiei generale (55).

În ceea ce priveşte legea de variaţie a permeabilităţii din (77), (80) şi prima expresie (82) rezultă imediat

$$k = k^{(0)}\left(\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2} + \beta + \gamma\,\mathrm{tg}\,\theta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2} - \beta - \gamma\,\mathrm{tg}\,\theta}\right)^{\frac{1}{4\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}}. \tag{84}$$

În cazul particular în care $\beta = 0$ obţinem

$$\psi = \delta\ln r - \Omega\gamma r^2\sin 2\theta - \frac{\Omega}{4}r^2 \tag{85}$$

şi

$$k = k^{(0)}\left(\frac{1+\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}\right)^{\frac{1}{8\gamma}}. \tag{86}$$

De asemenea, pentru $\gamma = 0$ găsim

$$\psi = \delta \ln r - \Omega \beta r^2 \cos 2\theta - \frac{\Omega}{4} r^2 \tag{87}$$

și

$$k = k^{(0)} (\operatorname{tg} \theta)^{-\frac{1}{4\beta}}. \tag{88}$$

Este evident că în expresiile (84), (86) și (88) intervalul de variație al unghiului θ trebuie astfel ales încît permeabilitatea să rămînă totdeauna pozitivă și finită.

5. *Observații finale și concluzii.* Ecuația diferențială (9) a funcției de curent poate fi utilizată și în studiul problemelor de scurgere plană în care rotorul vitezei de filtrare nu mai este constant ci variază după o lege dată.

Cazul cel mai simplu este acela în care rotorul vitezei de filtrare depinde de o singură variabilă spațială, de exemplu de x_1. Avem deci

$$\Omega = g(x_1) + A, \tag{89}$$

A fiind o constantă, iar soluția ecuației (9) este

$$\psi = f(x_1, x_2) - \int h(x_1)\, dx_1 - \alpha x_2^2, \tag{90}$$

expresie în care am notat ca de obicei cu $f(x_1, x_2)$ o funcție armonică, iar

$$h(x_1) = \int g(x_1)\, dx_1, \quad \alpha = \frac{A}{2}. \tag{91}$$

Ne vom opri în treacăt și asupra cazului general în care avem

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = -\Omega(x_1, x_2), \tag{92}$$

$\Omega(x_1, x_2)$ fiind o funcție dată. Se știe că soluția acestei ecuații are forma

$$\psi = f(x_1, x_2) + \frac{1}{2\pi} \int_D \Omega(\xi_1, \xi_2)\, G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{93}$$

$f(x_1, x_2)$ fiind o funcție armonică iar $G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ funcția lui Green a operatorului lui Laplace pentru domeniul plan în care este definită funcția $\Omega(x_1, x_2)$.

Generalizarea investigațiilor anterioare pe care am dat-o în [4] și în această lucrare, constituie în fond o metodă inversă pentru studiul scurgerii fluidelor incompresibile prin medii poroase neomogene. Ni se pare demn de semnalat faptul că rezultatele sînt obținute prin metode matematice foarte simple. Exemplele pe care le-am dat, ca și acelea din [4] sînt de un interes limitat, dar este posibilă studierea pe această cale a

unor probleme mai complicate. În acest sens, credem că utilizarea funcției de curent oferă posibilități mai mari decît procedeul pe care l-am dezvoltat în lucrarea precedentă [4].

Primită la redacție la 20 mai 1967.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Berker, *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik, Band VII/2, Strömungsmechanik II, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963, p. 39—40.
2. T. Oroveanu, *Asupra unei probleme de scurgere spre sondă în cazul unei variații oarecare a permeabilității.* St. cerc. mec. apl., **VI**, *3—4* (1955).
3. T. Oroveanu, *Asupra unei clase de scurgeri prin mediile poroase neomogene*, St. cerc. mec. apl., **IX**, *4*, (1958).
4. T. Oroveanu, *Asupra unei clase de scurgeri prin mediile poroase cu permeabilitate variabilă*, St. cerc. mec. apl., **22**, *3* (1966).

DISTRIBUȚIA VITEZELOR ÎN CONDUCTELE CIRCULARE CU PEREȚI NETEZI ȘI CU PEREȚI RUGOȘI[1])

de VASILESCU ALEXANDRU
Institutul politehnic, Galați

532 : 621.643

În lucrarea de față ne propunem să studiem mișcarea turbulentă în interiorul conductelor circulare netede și rugoase pornind de la relația efortului tangențial suplimentar publicată în lucrarea [4], care este exprimată în funcție de acțiune, în mod independent de noțiunea lungimii de amestec.
Problema este tratată aici pe o altă cale decît aceea folosită în lucrarea citată, obținîndu-se cîteva formule privind mișcarea turbulentă, care n-au putut fi cuprinse în întregime în publicarea făcută în Comptes Rendus. În încheierea lucrării este prezentată o comparație a rezultatelor obținute folosind formulele deduse și formulele universal cunoscute ale lui Nikuradse.

În tendința de a se cunoaște cît mai exact caracterul complex al mișcării turbulente, s-au făcut numeroase studii concretizate în trei teorii de bază : teoria lungimii de amestec sau teoria transportului de impuls, datorată lui L. Prandtl, teoria transportului de vîrtejuri, datorată lui G. I. Taylor și teoria turbulenței, datorată lui Kármán, bazată pe similitudine.

Atît pentru interesul loc didactic cît și istoric, aceste trei teorii sînt prezentate aproape în toate tratatele de specialitate. Pe baza lor se poate explica dintr-un anumit punct de vedere mecanismul mișcării turbulente, obținîndu-se grupuri de formule care reprezintă la fel de bine mișcarea turbulentă. Plecînd de la precizarea făcută de însuși Prandtl în „Précis de Mécanique des Fluides" că expresia efortului tangențial suplimentar în curentul plan puternic turbulent

$$\tau = \rho l'^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy}\right)^2,$$

[1]) Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **12**, *1* (1967) (în limba franceză).

nu reprezintă decît o expresie apropiată, care necesită precizarea semnificaţiei fizice a „lungimii de amestec", am putut stabili un punct de vedere nou asupra mecanismului mişcării turbulente, apărut în lucrarea [4], care permite obţinerea unui alt grup de formule ce pot reprezenta mişcarea turbulentă cu aceeaşi exactitate ca şi celelalte formule universal cunoscute.

În conformitate cu această lucrare, pentru efortul tangenţial suplimentar în curentul plan turbulent se obţine următoarea expresie:

$$\tau = c\rho y\bar{u}_x \frac{d\bar{u}_x}{dy}, \tag{1}$$

unde

c = 0,0219 este un factor de proporţionalitate, a cărui valoare s-a putut determina din condiţia respectării rezultatelor experimentale ale lui Nikuradse şi Prandtl;

ρ — densitatea fluidului;

y — distanţa de la peretele care limitează mişcarea fluidului;

$\bar{u}_x$ — componenta vitezei medii în timp într-un punct al curentului de fluid.

Expresia lui τ de mai sus s-a obţinut în lucrarea [4] considerîndu-se următoarele trei ipoteze:

1. efortul τ este proporţional cu produsul dintre acţiunea specifică $\rho u'_y s$ şi gradientul de viteză $\frac{d\bar{u}_x}{dy}$;

2. drumul parcurs s este proporţional cu distanţa y de la perete;

3. componenta u'_y a vitezei de pulsaţie este proporţională cu componenta $\bar{u}_x$ a vitezei medii în timp în punctul respectiv al curentului de fluid.

Merită subliniat faptul că noua expresie a efortului tangenţial suplimentar în curentul plan puternic turbulent este independentă de lungimea de amestec introdusă de L. Prandtl şi depinde de acţiune, care, prin constanta lui Planck: $h = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ erg·s, (reprezentînd cea mai mică acţiune care există în natură) domină întreaga mecanică a microparticulelor.

Se pare că utilizarea acţiunii specifice în mecanica fluidelor poate deschide noi posibilităţi de cercetare a mişcării fluidelor, acţiunea specifică intrînd în însăşi expresia numărului $\mathcal{R}e$.

În această lucrare, utilizînd o cale sugerată de tratatul de Hidraulică al tov. prof. Cristea Mateescu, vom stabili cîteva formule privind mişcarea turbulentă, unele din acestea nepuînd fi cuprinse în publicarea făcută în „Comptes Rendus" din anul 1961, iar altele fiind doar obţinute din nou pe calea specificată mai sus.

Scriind ecuaţia (1) sub forma:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d\bar{u}_x^2}{dy} = \frac{\tau}{\rho} \cdot \frac{1}{cy}, \tag{2}$$

şi integrînd-o într-un strat foarte subţire de lîngă perete, unde $\tau = \tau_0$, obţinem :

$$\bar{u}_x^2 = \frac{2\,v_*^2}{c} \ln y + C, \tag{3}$$

unde $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ reprezintă viteza de frecare la perete sau viteza tensiunii tangenţiale.

Ecuaţia (3) ca şi ecuaţia analogă ei, $\bar{u}_x = \frac{v_*}{0{,}4} \ln y + C$, din teoria lui Prandtl şi Nikuradse, poate fi însă extinsă pe întreaga secţiune a conductei, rezultatele obţinute astfel verificînd experienţele lui Nikuradse şi Prandtl.

Pentru conducte circulare viteza maximă avînd loc pe axa conductei, unde $y = r_0$ şi $\bar{u}_x = \bar{u}_{\max}$, ecuaţia (3) devine :

$$\bar{u}_{\max}^2 = \frac{2v_*^2}{c} \ln r_0 + C, \tag{4}$$

de unde

$$\frac{\bar{u}_{\max}^2 - \bar{u}_x^2}{v_*^2} = \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{y} \tag{5}$$

sau

$$\frac{\bar{u}_x^2}{v_*^2} = \frac{\bar{u}_{\max}^2}{v_*^2} - \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{y}, \tag{6}$$

$$\frac{\bar{u}_x}{v_*} = \sqrt{\frac{\bar{u}_{\max}^2}{v_*^2} - \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{y}}. \tag{7}$$

Pe o grosime δ, de lîngă peretele conductei, se poate considera că valoarea medie a gradientului de viteză, $\frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}y}$, este egală cu raportul $\frac{\bar{u}_w}{\delta}$, unde $\bar{u}_w$ este viteza fluidului la distanţa $y = \delta$ de perete, unde are loc trecerea de la scurgerea prin conductă în regim laminar la scurgerea în regim turbulent.

Se poate deci scrie :

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}y} = \frac{\bar{u}_w}{\delta} = \frac{\tau}{\eta} = \frac{v_*^2}{\nu} \tag{8}$$

sau

$$\frac{\bar{u}_w}{v_*} = \frac{v_* \delta}{\nu} = N = \text{const.}, \tag{9}$$

$$\delta = \frac{\nu N}{v_*}. \tag{10}$$

După cum se știe, în conformitate cu experiențele lui Nikuradse, valoarea numărului adimensional N este 11,6.

Ținînd seama de ecuațiile (8), (9) și (10), ecuația (7) se poate scrie astfel:

$$\frac{\bar{u}_w}{v_*} = N = \sqrt{\frac{\bar{u}_{max}^2}{v_*^2} - \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{\delta}} = \sqrt{\frac{\bar{u}_{max}^2}{v_*^2} - \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{\frac{\nu N}{v_*}}}, \quad (11)$$

$$N^2 = \frac{\bar{u}_{max}^2}{v_*^2} - \frac{2}{c} \ln \frac{r_0 v_*}{\nu N}, \quad (12)$$

$$\frac{\bar{u}_{max}^2}{v_*^2} = N^2 + \frac{2}{c} \ln \frac{r_0 v_*}{\nu N}. \quad (13)$$

Egalînd ecuația (13) cu ecuația (7), rezultă succesiv

$$\frac{\bar{u}_x}{v_*} = \sqrt{N^2 + \frac{2}{c} \ln \frac{r_0 v_*}{\nu N} - \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{y}} =$$

$$= \sqrt{N^2 - \frac{2}{c} \ln N + \frac{2}{c} \ln \frac{\frac{r_0 v_*}{\nu}}{\frac{r_0}{y}}}, \quad (14)$$

$$\frac{\bar{u}_x}{v_*} = \sqrt{N^2 - \frac{2}{c} \ln N + \frac{2}{c} \ln \frac{v_* y}{\nu}}, \quad (15)$$

$$\frac{\bar{u}_x}{v_*} = \sqrt{210 \log \frac{v_* y}{\nu} - 90}. \quad (16)$$

Ecuația (16) este formula finală pentru calculul distribuției vitezelor în conductele circulare netede și ea dă rezultate ce se pot compara ca exactitate cu cele date de cunoscuta formulă a lui Nikuradse

$$\frac{\bar{u}_x}{v_*} 5{,}5 + 5{,}75 \log \frac{v_* y}{\nu}. \quad (17)$$

În cazul cînd pereții conductelor nu sînt netezi ci rugoși, viteza la perete, notată cu $\bar{u}_w$, va avea loc la distanța $\delta = y_w$ de la perete. Notînd cu Δ rugozitatea absolută, în primă aproximație se poate admite că

$$y_w = m\Delta, \quad (18)$$

unde m este un coeficient de forma și de dispoziția asperităților. Substituind în ecuația (5) pe y cu $y_w = m\Delta$ și pe $\bar{u}_x$ cu $\bar{u}_w$, avem

$$\frac{\bar{u}_{max}^2 - \bar{u}_w^2}{v_*^2} = \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{m\Delta}, \quad (19)$$

de unde

$$\frac{\overline{u}_w^2}{v_*^2} = \frac{\overline{u}_{\max}^2}{v_*^2} - \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{m\Delta}. \tag{20}$$

Scăzînd ecuația (6) din ecuația (20), se obține

$$\frac{\overline{u}_w^2}{v_*^2} - \frac{\overline{u}_x^2}{v_*^2} = \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{y} - \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{m\Delta}, \tag{21}$$

de unde

$$\frac{\overline{u}_x^2}{v_*^2} = \frac{\overline{u}_w^2}{v_*^2} - \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{y} + \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{m\Delta} = \frac{\overline{u}_w^2}{v_*^2} - \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{y} + \frac{2}{c} \ln \frac{r_0}{\Delta} - \frac{2}{c} \ln m \tag{22}$$

sau

$$\frac{\overline{u}_x^2}{v_*^2} = \frac{\overline{u}_w^2}{v_*^2} + \frac{2}{c} \ln \frac{\frac{r_0}{\Delta}}{\frac{r_0}{y}} - \frac{2}{c} \ln m = \left(\frac{\overline{u}_w^2}{v_*^2} - \frac{2}{c} \ln m \right) + \frac{2}{c} \ln \frac{y}{\Delta}. \tag{23}$$

Valoarea expresiei din paranteză s-a putut determina pe baza respectării experiențelor lui Nikuradse și Prandtl, ea fiind aproape constantă și egală cu -10.

Formula finală pentru distribuția vitezelor în mișcarea turbulentă în conductele rugoase primește astfel următoarea formă:

$$\frac{\overline{u}_x}{v_*} = \sqrt{210 \log \frac{y}{\Delta} - 10} \tag{24}$$

și ea este comparabilă cu formula

$$\frac{\overline{u}_x}{v_*} = 14{,}5 \sqrt{\log \left(1 + 0{,}9 \frac{y}{\Delta} \right)} \tag{25}$$

publicată în lucrarea [4], dînd rezultate — cu neglijarea lui 1 din paranteză — la fel de satisfăcătoare ca și formula lui Nikuradse

$$\frac{\overline{u}_x}{v_*} = 8{,}48 + 5{,}75 \log \frac{y}{\Delta}. \tag{26}$$

Pentru comparația formulelor (16) și (24) cu formulele corespunzătoare ale lui Nikuradse, s-au calculat mai jos valorile lui $\frac{\overline{u}_x}{v_*}$ în funcție de para-

metrii variabili adimensionali $\frac{v_* y}{\nu}$, respectiv $\frac{y}{\Delta}$, cuprinşi între valorile extreme 10 şi 10 000.

Conducte circulare netede

	Formula (16)	Formula (17)	(17)−(16)
$\frac{v_* y}{\nu}$	$\frac{\overline{u}_x}{v_*}$	$\frac{\overline{u}_x}{v_*}$	%
10	11	11,25	2,2
1000	23,2	22,75	−2,0
10000	27,4	28,5	3,8

Conducte circulare rugoase

	Form. (24)	Form. (25)	Form. (26)	(26) − (24)	(26) − (25)
$\frac{y}{\Delta}$	$\frac{\overline{u}_x}{v_*}$	$\frac{\overline{u}_x}{v_*}$	$\frac{\overline{u}_x}{v_*}$	%	%
10	14,1	14,5	14,23	0,9	−1,9
1000	24,9	24,9	25,73	3,2	3,2
10000	28,8	28,8	31,48	8,5	8,5

Formulele (16) şi (24), care dublează formulele lui Nikuradse, subliniază cu prisosinţă — aşa cum afirmă prof. Cristea Mateescu — că atîta timp cît un fenomen nu este precis cunoscut în adîncime, el poate fi îmbrăcat într-o diversitate mare de expresii matematice. Mecanismul mişcării turbulente este încă departe de a fi cunoscut în mod precis şi asupra lui se fac tot mai multe cercetări, soluţionarea absolut precisă continuînd să rămînă încă pe seama viitorului.

Primită la redacţie la 18 ianuarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. L. Prandtl, *Ghidroaeromehanika*, 1951, Izdatelstvo Inostranoi Literaturî, Moscova.
2. Nikuradse J., *Forschungshefl 356* (Beilage zur „Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens"), 1932.
3. Mateescu C., *Hidraulică*, 1962, Bucureşti.
4. Vasilescu Alexandru, *Sur le calcul de l'effet tangentiel supplémentaire dans le courant plan turbulent*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 253 N. 7 (15 Août 1961).

ASUPRA ÎNFLUENȚEI UNOR CÎMPURI MAGNETICE ȘI ELECTRICE ÎN LUBRIFICAȚIA CU GAZE

de V. N. CONSTANTINESCU și FL. DIMOFTE
Institutul de mecanica fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

621.82 : 533

Lucrarea studiază problema lubrificației cu gaze în ipoteza că mediul lubrifiant posedă o conductibilitate electrică, iar mișcarea este influențată de cîmpurile electromagnetice exterioare. Examinînd diferite condiții electromagnetice exterioare se reliefează în final posibilitățile acestui nou tip de lubrificație, rezultatele fiind aplicate la cîteva tipuri de lagăre.

Într-o lucrare anterioară [1] s-a examinat problema generală a lubrificației cu gaze în ipoteza că mediul lubrifiant posedă o conductibilitate electrică. În asemenea condiții s-au dedus ecuațiile de mișcare din stratul de lubrifiant și s-a arătat că anumite condiții electromagnetice exterioare pot influența caracteristicile funcționale. Apare astfel posibilitatea ca prin acest nou sistem de lubrificație să se obțină performanțe superioare.

În cele ce urmează ne propunem să obținem o serie de indicații cantitative, respectiv soluții ale ecuațiilor problemei pentru cîteva tipuri de lagăre în condiții electromagnetice exterioare care să permită fie sporirea capacității portante, fie reducerea forțelor și momentelor de frecare, fie, în sfîrșit, în cazul lagărelor alimentate sub presiune exterioară, micșorarea debitelor de lubrifiant. Admițînd [1] că gazul lubrifiant poate fi considerat ca un mediu continuu macroscopic, posedînd o conductibilitate electrică σ constantă în timp și cu simplificările curente admise pentru lubrificația cu gaze [2], ecuațiile problemei sînt :

— ecuația de stare

$$\frac{p}{\rho} = RT, \tag{1}$$

Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mecanique Appliquée, **12**, 6 (1967) (în limba engleză).

care poate fi înlocuită cu o relaţie politropică aproximativă

$$\frac{p}{\rho^{\varkappa}} = \text{const.}, \tag{2}$$

unde $\varkappa$ are valori apropiate de unitate (evoluţie cvasi-izotermă);

— ecuaţia de continuitate

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0; \tag{3}$$

— ecuaţiile de mişcare

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_{ex}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = f_{ey}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_{ez}, \tag{4}$$

unde p este presiunea, ρ-densitatea, μ-vîscozitatea mediului lubrifiant, $\vec{v}$ (u, v, w) viteza într-un punct, iar axele de coordonate au axa y dirijată după normala la una dintre suprafeţe;

— un sistem de ecuaţii electromagnetice

$$\left.\begin{aligned} &\vec{f}_e = \vec{J} \times \vec{B}; \ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}; \ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ &\vec{J} = \sigma[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]; \ \Delta \vec{J} = 0; \ \nabla \vec{H} = 0; \ \nabla \vec{E} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

unde $\vec{f}_e$ este forţa pe unitatea de masă ce intervine în ecuaţiile de mişcare (4), $\vec{J}$ — densitatea de curent, $\vec{H}$ — cîmpul magnetic, $\vec{B} = \mu_e \vec{H}$ — inducţia magnetică, $\mu_e = 4\pi \times 10^{-7}$ kgm/coulomb^2 — permeabilitatea magnetică, iar $\vec{E}$ — cîmpul electric.

Dacă se consideră că într-o primă aproximaţie cîmpul electromagnetic indus este mai mic decît cîmpul exterior, atunci de pildă se poate scrie:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}', \tag{6}$$

unde $|b'| \ll |B_0|$, $\vec{B}_0$ fiind cîmpul exterior. În aceste condiţii, explicitînd componentele forţei $\vec{f}_e$ cu ajutorul ecuaţiilor [5], se deduc ecuaţiile de mişcare sub forma [1]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + J_y(B_{z_0} + b'_z) - \sigma(E_z + uB_{y_0}) B_{y_0}, \\ &\frac{\partial p}{\partial y} \cong \sigma(E_z + uB_{y_0}) B_{x_0} - \sigma(E_x - w B_{y_0}) B_{z_0}, \\ &\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - J_y(B_{x_0} + b'_x) + \sigma(E_x - w B_{y_0}) B_{y_0}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

de unde se constată că situațiile cele mai interesante sînt : (*i*) cîmp magnetic exterior transversal (B_{y_0}) și (*ii*) cîmp magnetic exterior tangențial (B_{z_0} sau eventual B_{x_0}) combinat cu un cîmp electric transversal (E_y, J_y).

În cazul (1), considerînd în plus suprafețele lubrifiante izolate, se pot deduce distribuțiile de viteze sub forma

$$\left.\begin{aligned} u &= \left(\frac{h^2}{2\mu M_y}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{V}{2}\right)\left(\operatorname{ch} M_y\frac{y}{h} - 1 - \right.\\ &\left. - \frac{\operatorname{ch} M_y - 1}{\operatorname{sh} M_y}\operatorname{sh} M_y\frac{y}{h}\right) + V\frac{\operatorname{sh} M_y\left(1-\frac{y}{h}\right)}{\operatorname{sh} M_y},\\ w &= \frac{h^2}{2\mu M_y}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2}\frac{\partial p}{\partial z}\left(\operatorname{ch} M_y\frac{y}{h} - 1 - \frac{\operatorname{ch} M_y - 1}{\operatorname{sh} M_y}\operatorname{sh} M_y\frac{y}{h}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

unde V este viteza suprafeței mobile ($u = V$ la $y = 0$) iar M_y este numărul Hartmann

$$M_y = h\,B_{y_0}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \tag{9}$$

în care h este grosimea locală a stratului de lubrifiant, iar B_{y_0} cîmpul transversal exterior considerat constant. În aceste condiții debitele masice de lubrifiant se scriu :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= -\frac{\rho h^3}{\mu}\frac{1}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2} - 1\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho V h}{2},\\ \mathcal{M}_z &= -\frac{\rho h^3}{\mu}\frac{1}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2} - 1\right)\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

În același timp din ecuația de continuitate (3), integrată termen cu termen în raport cu y, de la 0 la h, se deduce cu ajutorul relațiilor (10) ecuația diferențială a presiunilor :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2} - 1\right)\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2} - \right.\right.\\ &\left.\left. - 1\right)\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right] = \frac{V}{2}\frac{\partial(\rho h)}{\partial x}. \end{aligned} \tag{11}$$

Evident dacă în ecuațiile de mai sus se pune $M_y \to 0$, se regăsesc, după ridicarea nedeterminărilor, rezultatele curente privind lubrificația cu gaze [2].

În condițiile electromagnetice (*ii*), considerînd cazul mai interesant $B_{z_0} \neq 0$ iar $B_{x_0} = 0$, distribuțiile de viteze se scriu :

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - J_y B_{z_0}\right) y(y-h) + \left(1 - \frac{y}{h}\right)V,\\ w &= \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\,y(y-h). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

În locul densității de curent se poate introduce diferența de potențial ($\vec{E} = -\nabla\Phi$):

$$\Phi_y = \int_0^h E_y \, dy \cong E_y h \cong J_y \frac{h}{\sigma} - \frac{\mathcal{M}_x}{\rho} B_{z_0} \tag{13}$$

sau curentul total I_y

$$I_y = \int_s J_y \, ds = -\int_s \left(\frac{\sigma}{h} \Phi_y + \frac{\sigma}{h} \frac{\mathcal{M}_x}{\rho} B_{z_0} \right) dx \, dz. \tag{14}$$

Definind de pildă parametrii

$$M_z = h B_{z_0} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}; \quad N = \frac{\Phi_y}{V} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \tag{15}$$

debitele de lubrifiant se pot scrie sub forma

$$\left.\begin{aligned} (12 + M_z^2)\,\mathcal{M}_x &= -\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \rho N M_z V + \frac{\rho V h}{2}, \\ \mathcal{M}_z &= -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

iar ecuația diferențială a presiunilor

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu} \frac{1}{12 + M_z^2} \rho \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \left(\frac{h^3}{12\mu} \rho \frac{\partial p}{\partial z} \right) = V \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{6 - N M_z}{12 + M_z^2} \rho h \right). \tag{17}$$

Plecînd acuma de la ecuațiile diferențiale (11) respectiv (17) se pot obține soluții analitice sau numerice pentru diferite tipuri de lagăre. Totodată se poate pune în evidență influența parametrilor M_y sau M_z, N asupra caracteristicilor funcționale. Este însă de remarcat că din cauza neliniarității ecuațiilor diferențiale (11) și (17), este extrem de dificil să se deducă soluții analitice pentru situațiile reale de lagăre în care mișcarea este tridimensională. Asemenea soluții pot fi obținute numai prin metode numerice, cu ajutorul calculatoarelor digitale de exemplu. Totuși deoarece în lucrarea de față ne interesează să punem în evidență posibilitățile lubrificației magneto-gazodinamice, vom căuta să examinăm în primul rînd unele cazuri particulare simplificate pentru care soluția poate fi construită analitic sau prin metode aproximative de liniarizare a ecuației presiunilor.

Influența unor cîmpuri electromagnetice exterioare asupra distribuției presiunilor. Vom căuta mai întîi să examinăm situațiile în care se obține o creștere a presiunilor și a capacității portante, datorită influenței unor cîmpuri electromagnetice exterioare.

Să considerăm mai întîi cazul unui cîmp magnetic transversal (normal pe una din suprafețele lubrificate), cînd ecuația diferențială are forma (11) dacă suprafețele sînt izolate. Să considerăm totodată că B_y și numărul Hartmann corespunzător (9) sînt pozitive (dirijate în sensul pozitiv al axei y, respectiv de la suprafața mobilă către cea fixă). În aceste condiții se poate vedea că influența cîmpului magnetic conduce la o frî-

nare a mișcării (8), (10), respectiv, la aceeași valoare $\partial p/\partial x$ de exemplu, vitezele și debitul de lubrifiant rezultă mai reduse decît în cazul curent $M_y = 0$. Rezultă astfel concluzia că presiunile vor crește cu numărul Hartmann, efectul fiind oarecum analog cu acela al apariției turbulenței [3].

Pentru a căuta soluții ale ecuației (11) să scriem mai întîi această ecuație în variabile adimensionale

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left[\frac{\bar{h}}{M_y^{*2}}\left(\bar{h}\frac{M_y^*}{2}\operatorname{cth}\bar{h}\frac{M_y^*}{2}-1\right)\bar{p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\right]+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\frac{\bar{h}}{M_y^{*2}}\left(\bar{h}\frac{M_y^*}{2}\operatorname{cth}\bar{h}\frac{M_y^*}{2}-1\right)\bar{p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}\right]=6\Lambda\frac{\partial(\bar{p}\bar{h})}{\partial \bar{x}}, \tag{18}$$

în care

$$\bar{x}=x/l;\ \bar{z}=z/l;\ M_y^*=h_m B_{y_0}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}};\ \bar{h}=h/h_m;\ \Lambda=\frac{\mu V l}{p_0 h_m^2};\ \bar{p}=\frac{p}{p_0}, \tag{19}$$

unde l este o lungime caracteristică, iar h_m este grosimea medie a filmului de lubrifiant. În plus în ecuația (18) s-a considerat o evoluție izotermă a mediului lubrifiant (2).

Ecuația (18) are o structură asemănătoare ecuației presiunilor din cazul obișnuit. În particular membrul secund al ecuației (18) nu include numărul Hartmann, ceea ce sugerează aceeași comportare la valori mari ale parametrului Λ, respectiv [2]

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{p}\bar{h})\to 0;\quad \bar{p}=\frac{c}{\bar{h}}. \tag{20}$$

Este posibil să se deducă soluții analitice ale ecuației (18) pentru anumite cazuri particulare de exemplu mișcări bidimensionale ($\partial p/\partial z = 0$) cu suprafețe plane ($h$ = const. sau h variind liniar cu x). În același timp, ca și pentru studiul altor probleme (efectul turbulenței [3], efectul caracterului molecular al mișcării [4]) există posibilitatea să se deducă o soluție aproximativă dar generală și simplă. Astfel să considerăm mai întîi cazul lagărelor cu variații reduse ale grosimii h

$$\bar{h}=1+\varepsilon\bar{h}_{(1)}. \tag{21}$$

În această situație, soluția poate fi de asemenea considerată ca o dezvoltare în serie după puterile parametrului mic ε

$$\bar{p}=1+\varepsilon\bar{p}_{(1)}+\dots \tag{22}$$

Introducînd expresiile (21) (22) în ecuația (18) se deduce pentru prima aproximație $\bar{p}_{(1)}$ ecuația diferențială:

$$\frac{\partial^2\bar{p}_{(1)}}{\partial\bar{x}^2}-6\Lambda\frac{1}{12}\frac{M_y^{*2}}{\frac{M_y^*}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y^*}{2}-1}\frac{\partial\bar{p}_{(1)}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial^2\bar{p}_{(1)}}{\partial\bar{z}^2}=6\Lambda\frac{1}{12}\frac{M_y^{*2}}{\frac{M_y^*}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y^*}{2}-1}\frac{\partial\bar{h}_{(1)}}{\partial\bar{x}}, \tag{23}$$

în timp ce în aceleași condiții, în cazul obișnuit $M_y = 0$ ecuația corespunzătoare este [2]

$$\frac{\partial^2 \overline{p}_{(1)}}{\partial \overline{x}} - 6\Lambda \frac{\partial \overline{p}_{(1)}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial^2 \overline{p}_{(1)}}{\partial z^2} = 6\Lambda \frac{\partial \overline{h}_{(1)}}{\partial \overline{x}}. \tag{24}$$

Din compararea ecuațiilor (23) (24) se constată că acestea devin identice ca formă dacă se pune

$$\widetilde{\Lambda} = \frac{1}{12} \frac{M_y^{*2}}{\frac{M_y^*}{2} \operatorname{cth} \frac{M_y^*}{2} - 1} \Lambda. \tag{25}$$

În consecință soluția ecuației (23) se deduce dacă se cunoaște soluția ecuației (24). Mai precis influența numărului Hartmann constă aproximativ în amplificarea parametrului Λ în raportul (25).

Se poate arăta de asemenea că, cel puțin pentru valori Λ relativ mari, corecția (25) este valabilă și pentru perturbații mari, deoarece atunci influența primului membru al ecuației (18) devine redusă. O verificare a acestei concluzii poate fi obținută imediat pe cazul particular al lagărelor de alungire infinită în trepte cu suprafețe paralele, pentru care soluția este :

$$\left.\begin{aligned} &\overline{p} + K_1 \ln (\overline{p} - K_1) = 6\widetilde{\Lambda}\overline{x} + K_2 \quad (\partial \overline{p}/\partial \overline{x} > 0), \\ &\overline{p} + K_1 \ln (K_1 - \overline{p}) = 6\widetilde{\Lambda}\,\overline{x} + K_2 \quad (\partial \overline{p}/\partial \overline{x} < 0), \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

respectiv exact de aceeași formă ca soluția obișnuită [2], dar avînd parametrul Λ modificat în raportul (25). Din relația (25) se deduce însă că pentru a avea o creștere importantă a presiunilor și capacității portante este necesar ca numărul Hartmann să aibă valori relativ mari. Astfel din figura 1 în care s-a reprezentat raportul $\widetilde{\Lambda}/\Lambda$ în funcție de M_y^* se constată că pentru $M_y^* < 1$ influența acestuia este redusă. De exemplu pentru a avea $\widetilde{\Lambda}/\Lambda \cong 2$ este necesar ca $M_y^* \sim 10$.

În figura 2 s-a reprezentat coeficientul de încărcare $\zeta = P/2p_0 r_1 b$ pentru un lagăr circular de alungire $\lambda = 2$, pentru diferite valori Λ și diferite excentricități relative ε pentru $M_y^* = 10$, $M_y^* = 0$. Soluția obișnuită în cazul $M_y^* = 0$ este trasată după rezultatele obținute de A. Raimondi [5] prin integrarea numerică a ecuației presiunilor. Se constată că, chiar dacă numărul Hartmann are valori mari, se obține un efect important numai pentru valori Λ relativ reduse, la valori Λ mari, efectul numărului Hartmann devenind neglijabil în virtutea existenței soluției asimptotice (20). Rezultă deci că soluția introducerii unui cîmp magnetic exterior normal pe suprafețele lubrificate, soluție recomandată pentru cazul lubrificației cu lichide [6] este eficientă în cazul lubrificației magneto-gazodinamice numai atît timp cît efectul compresibilității lubrifiantului este redus.

Să considerăm în continuare cazul unui cîmp magnetic tangențial B_{z_0} și a unui cîmp electric normal (17), în cazul unui lagăr în trepte (fig. 3)

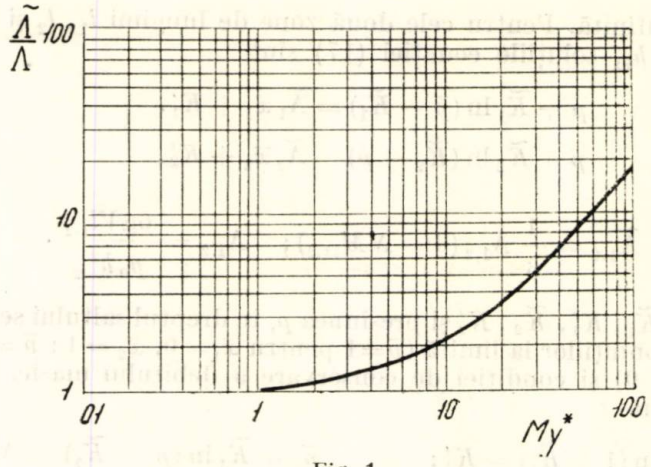


Fig. 1

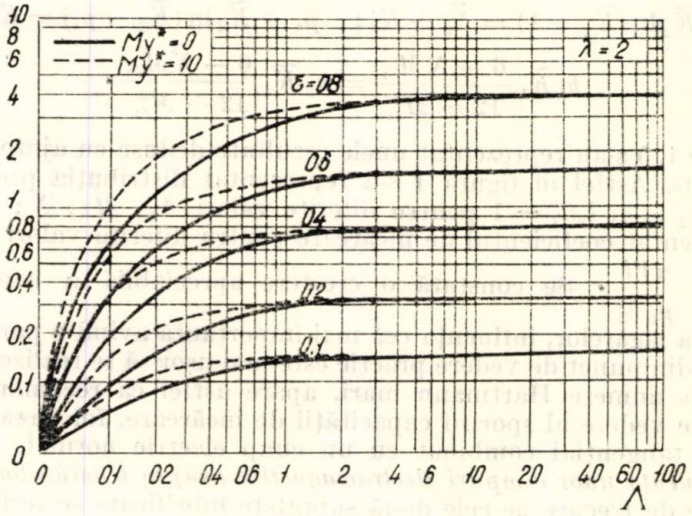


Fig. 2

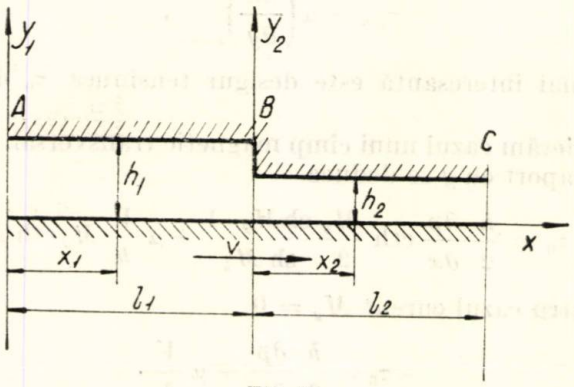


Fig. 3

de alungire infinită. Pentru cele două zone de lungimi l_1, l_2 și de grosimi h_1, respectiv h_2, soluțiile ecuației (17) sînt

$$\left.\begin{aligned} \bar{p} + \widetilde{K}_1 \ln(\bar{p} - \widetilde{K}_1) &= \widetilde{\Lambda}_1 \bar{x}_1 + K_1', \\ \bar{p} + \widetilde{K}_2 \ln(\widetilde{K}_2 - \bar{p}) &= \widetilde{\Lambda}_2 \bar{x}_2 + K_2', \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

unde

$$\widetilde{\Lambda}_{1,2} = \frac{1}{6} \Lambda_{1,2}(6 - N M_{z1,2}); \quad \Lambda_{1,2} = \frac{6\mu V l_{1,2}}{p_0 h_{1,2}^2}. \tag{28}$$

Constantele $\widetilde{K}_1$, K_1', $\widetilde{K}_2$, K_2' și presiunea p_s în dreptul saltului se determină cu ajutorul condițiilor la limită ($\bar{p}=1$ pentru $\bar{x}_1=0$, $\bar{x}_2=1$; $\bar{p}=\bar{p}_s$ pentru $\bar{x}_1=1$, $\bar{x}_2=0$) și condiției de conservare a debitului masic. Se deduce astfel sistemul

$$\begin{aligned} &1 + \widetilde{K}_1 \ln(1 - \widetilde{K}_1) = K_1'; \qquad \bar{p}_s + \widetilde{K}_1 \ln(\bar{p}_s - \widetilde{K}_1) = \widetilde{\Lambda}_1 + K_1', \\ &1 + \widetilde{K}_2 \ln(\widetilde{K}_2 - 1) = \widetilde{\Lambda}_2 + K_2'; \quad \bar{p}_s + \widetilde{K}_2 \ln(\widetilde{K}_2 - \bar{p}_s) = K_2', \\ &h_1 \widetilde{K}_1 \frac{6 - N M_{z_1}}{12 + M_{z_1}^2} = h_2 \widetilde{K}_2 \frac{6 - N M_{z_2}}{12 + M_{z_2}^2}. \end{aligned} \tag{29}$$

În figurile 4, 5 s-au reprezentat unele rezultate deduse cu ajutorul soluției de mai sus. Astfel în figura 4 s-a reprezentat distribuția presiunilor în cazul $h_1/h_2 = 4$, $l_2/l_1 = 1$ pentru diferite valori Λ_1, M_{z_1}, N; în figura 5 s-a reprezentat coeficientul de încărcare pentru diferite valori h_1/h_2, M_{z_1}, N și $\widetilde{\Lambda} = \dfrac{\mu V l}{p_0 h_2^2}$. Se constată o creștere apreciabilă a capacității de încărcare a lagărelor, influența cea mai importantă avînd-o parametrul N. Deoarece din punct de vedere practic este mai ușor să se realizeze valori N mari decît numere Hartmann mari, apare astfel ca recomandabilă din punctul de vedere al sporirii capacității de încărcare, folosirea unui cîmp magnetic tangențial combinat cu un cîmp electric normal.

Influența unor cîmpuri electromagnetice asupra tensiunilor de frecare. Tensiunile de frecare pe cele două suprafețe lubrificate se scriu :

$$\tau_{0,h} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0,h}, \tag{30}$$

iar valoarea mai interesantă este desigur tensiunea τ_0 de pe suprafața mobilă.

Să considerăm cazul unui cîmp magnetic transversal. Derivînd prima ecuație (8) în raport cu y se deduce

$$-\tau_0 = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \operatorname{cth} \frac{M_y}{2} \frac{\operatorname{ch} M_y - 1}{\operatorname{sh} M_y} + \mu \frac{V}{h} M_y \operatorname{cth} M_y, \tag{31}$$

în timp ce pentru cazul curent $M_y = 0$

$$-\tau_0 = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{V}{h}. \tag{32}$$

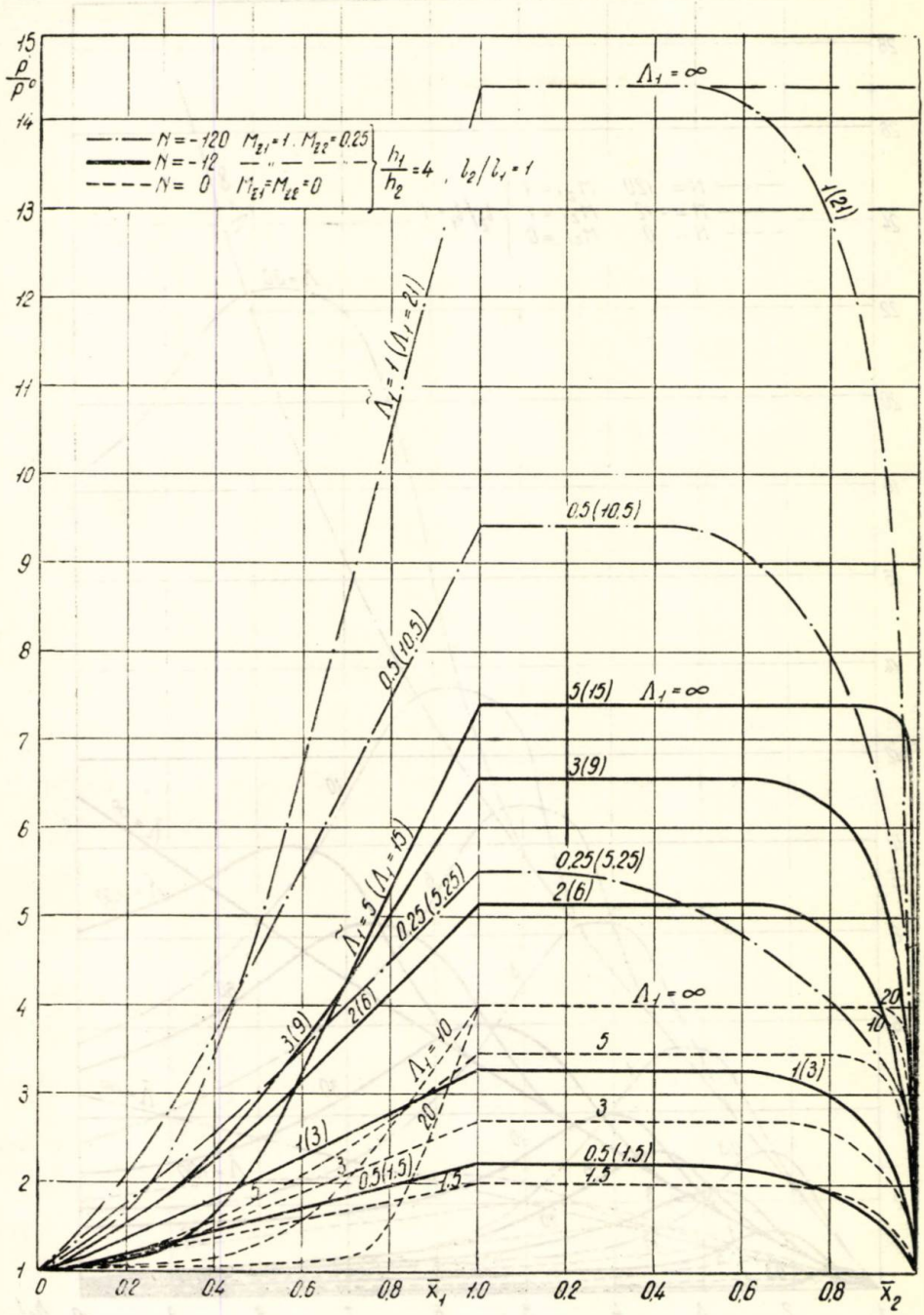

p/p°
N = -120 M_z1 = 1, M_z2 = 0.25
N = -12 " "
N = 0 M_z1 = M_z2 = 0
h1/h2 = 4, l2/l1 = 1
Λ1 = ∞
1(21)
Λ1 = 1 (Λ1 = 21)
0.5(10.5)
5(15) Λ1 = ∞
3(9)
0.25(5.25)
2(6)
Λ1 = 5 (Λ1 = 15)
Λ1 = ∞
20
10
5
1(3)
3
0.5(1.5)
1.5
Λ1 = 10
x̄1
x̄2

Fig. 4

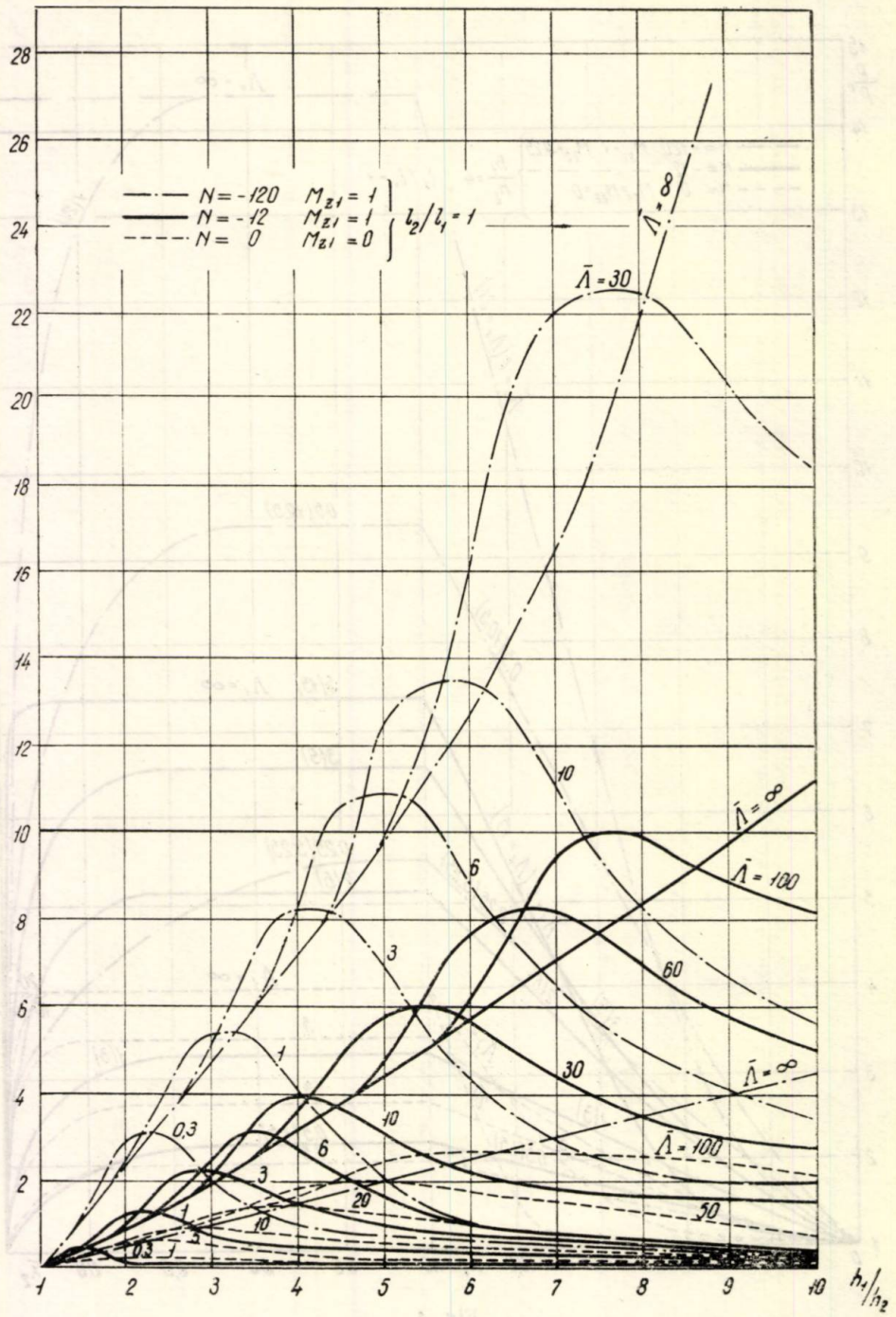

N = -120 M_z1 = 1
N = -12 M_z1 = 1
N = 0 M_z1 = 0
l_2/l_1 = 1
Λ̄ = 8
Λ̄ = 30
Λ̄ = 8
Λ̄ = 100
Λ̄ = ∞
Λ̄ = 100
10
6
3
1
0,3
60
30
20
50
h_1/h_2

Fig. 5

Se constată că indiferent de semnul lui M_y tensiunile de frecare cresc în general cu numărul Hartmann. Astfel pentru $M_y \to 0$ există relaţia (32) în timp ce la numere Hartmann mari

$$-\tau_0 \cong \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{V}{h}M_y, \tag{33}$$

de unde se constată că tensiunea de frecare Couette creşte aproximativ proporţional cu M_y. Pe de altă parte şi primul termen din relaţia (33) creşte deoarece presiunile şi derivata $\partial p/\partial x$ poate creşte.

În cazul unui cîmp magnetic tangenţial combinat cu un curent transversal se deduce din (30) şi (12)

$$-\tau_0 = \frac{h}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - J_y B_{z_0}\right) + \mu\frac{V}{h} \tag{34}$$

sau, ţinînd seama de relaţiile (13)—(16)

$$-\tau_0 = \frac{6h}{12 + M_z^2}\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{V}{h}\frac{12 + 6NM_z + 4M_z^2}{12 + M_z^2}. \tag{35}$$

Se constată că în această situaţie, dacă produsul NM_{z_0} este negativ, termenul proporţional cu $\frac{\mu V}{h}$ poate fi zero şi chiar negativ. Există deci posibilitatea de a reduce forţele şi momentele de frecare şi chiar de a le anula în anumite cazuri particulare. Este interesant de remarcat că din relaţiile (27)—(29) rezultă că presiunile cresc de asemenea cînd produsul $NM_{z_0} < 0$ ($N < 0$ dacă $M_{z_0} > 0$). Rezultă deci că se poate obţine o creştere a capacităţii de încărcare concomitent cu o reducere a frecărilor, evident consumînd energie electrică pentru creerea şi întreţinerea curentului I_y, respectiv diferenţei de potenţial Φ_y.

Influenţa unor cîmpuri electromagnetice asupra debitelor de lubrifiant. Această problemă interesează în primul rînd pentru lagărele alimentate cu presiune exterioară, la care de multe ori capacitatea de încărcare este limitată de creşterea prohibitivă a debitelor de lubrifiant.

Să considerăm tipul fundamental de lagăr constituit din două suprafeţe paralele la care scurgerea este longitudinală sau radială şi se datoreşte alimentării centrale la o presiune p_1 printr-un orificiu sau fantă.

Să considerăm din nou cazul unui cîmp magnetic transversal. Ecuaţia presiunilor are aceeaşi formă (11) cu observaţia că acum $V = 0$. În cazul unei mişcări pur longitudinale se deduce din (11) că distribuţia presiunilor nu este alterată de influenţa cîmpului magnetic, fiind de forma

$$p^2 = C_1 x + C_2. \tag{36}$$

În schimb debitul de lubrifiant este redus aproximativ într-un raport analog cu cel dat de relaţia (25). Astfel, din prima relaţie (10) cu $V \cong 0$ rezultă

$$\mathcal{M}_x = -\frac{\rho h^3}{\mu}\frac{1}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2} - 1\right)\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{12}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2} - 1\right)\left[\mathcal{M}_x\right]_{M_y=0}. \tag{37}$$

Pentru a examina scurgerea pur radială (discuri circulare alimentate printr-un orificiu central), să observăm că ecuația presiunilor poate fi scrisă vectorial sub forma :

$$\nabla\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2}-1\right)p\,\nabla p\right]=0. \tag{38}$$

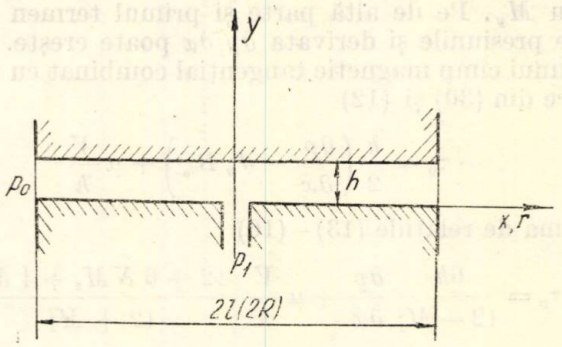


Fig. 6

Explicitînd această ecuație în coordonate cilindrice r, θ, y rezultă :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}r}\right)=0, \tag{39}$$

respectiv aceeași ecuație ca și pentru cazul curent $M_y = 0$ [2], în timp ce debitul de lubrifiant este redus în același raport (37).

În sfîrșit în cazul existenței unui cîmp magnetic tangențial combinat cu un curent transversal, ecuația presiunilor (17) se scrie, într-o mișcare pur longitudinală, sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{h^3}{\mu}p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)=-V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(NM_z ph)=-\frac{\sigma}{\mu}\Phi_y B_{z_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ph^2), \tag{40}$$

a cărei soluție, în variabile adimensionale, este :

$$\left.\begin{aligned}\overline{p}+K_1\ln(\overline{p}-K_1)&=\Lambda_M\,\overline{x}+K_2 \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}>0\right),\\ \overline{p}+K_1\ln(K_1-\overline{p})&=\Lambda_M\,\overline{x}+K_2 \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}<0\right),\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

unde

$$\Lambda_M=-\frac{\sigma B_{z_0}\Phi_y l}{p_0 h}. \tag{42}$$

În figura 7 s-au reprezentat distribuţiile de presiuni pentru $p_1/p_0 = 4$ şi diferite valori Λ_M. Se constată că apare o influenţă importantă asupra distribuţiei presiunilor, de aceeaşi natură ca şi în cazul lagărelor în trepte

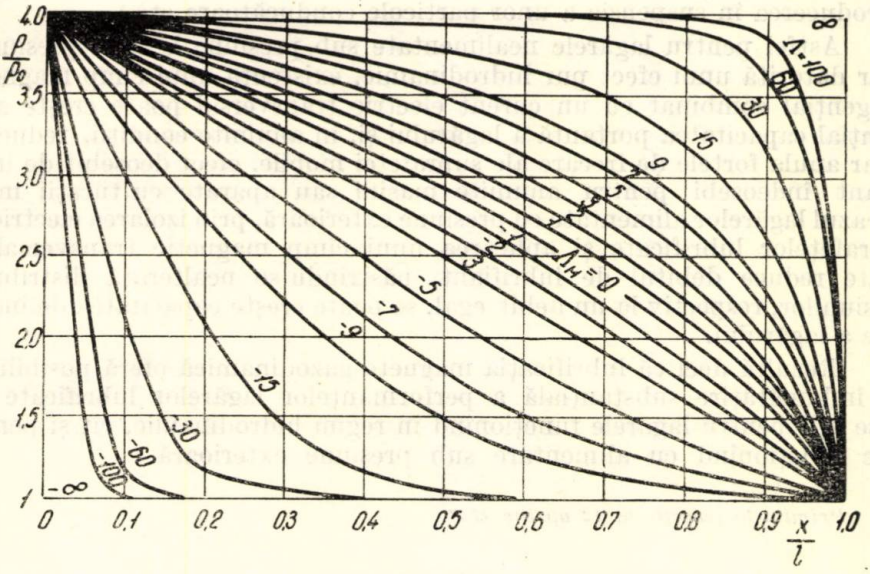


Fig. 7

(fig. 4, 5), respectiv capacitatea portantă creşte cînd $\Lambda_M > 0$, adică $\Phi_y B_{z_0} < 0$.

Debitul de lubrifiant se poate calcula din prima relaţie (16), cu observaţia că $V \cong 0$,

$$\mathcal{M}_x = \frac{\rho h^3 p_0}{\mu l (12 + M_z^2)} \left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} + \Lambda_M \right). \tag{43}$$

Se constată că valori Λ_M pozitive măresc debitul de lubrifiant. Există totuşi o oarecare descreştere a debitului, datorită influenţei cîmpului magnetic, respectiv factorului $(12 + M_z^2)$ de la numitorul expresiei (43); această influenţă devine importantă numai dacă numărul Hartmann are valori mari.

Scurgerea pur radială între două discuri circulare poate fi studiată în mod analog, cîmpul magnetic B_{z_0} fiind înlocuit cu unul radial B_r. Concluziile sînt de altfel asemănătoare respectiv se poate obţine o creştere a rezultantei presiunilor, dar în dauna unor debite de lubrifiant mai mari, sau se pot reduce debitele de lubrifiant însă pe seama unei scăderi relative a capacităţii de încărcare a lagărului.

★

Rezultatele prezentate mai sus permit deducerea unor concluzii interesante privind posibilităţile lubrificaţiei magneto-gazodinamice, în sensul

că, cu ajutorul unor cîmpuri electromagnetice exterioare alese în mod corespunzător, se pot îmbunătăţi substanţial performanţele lagărelor lubrificate cu gaze cu condiţia ca mediul lubrifiant să fie făcut bun conducător de electricitate (prin ionizare la rece datorită efectului unor radiaţii, prin introducerea în suspensie a unor particole conducătoare etc.).

Astfel pentru lagărele nealimentate sub presiune la care presiunile apar datorită unui efect pur hidrodinamic, existenţa unui cîmp magnetic tangenţial combinat cu un curent electric transversal poate creşte substanţial capacitatea portantă a lagărului şi, în anumite condiţii, reduce şi chiar anula forţele de frecare ale suprafeţei mobile, efect deosebit de interesant îndeosebi pentru anumite maşini sau aparate cu turaţii mari. În cazul lagărelor alimentate cu presiune exterioară, prin izolarea electrică a suprafeţelor lubrificate şi aplicarea unui cîmp magnetic transversal se poate reduce debitul de lubrifiant, păstrîndu-se nealterată distribuţia presiunilor, respectiv la un debit egal, se poate creşte capacitatea de încărcare a lagărului.

Rezultă deci că lubrificaţia magneto-gazodinamică oferă posibilităţi de îmbunătăţire substanţială a performanţelor lagărelor lubrificate cu gaze atît pentru lagărele funcţionînd în regim hidrodinamic, cît şi pentru cele funcţionînd cu alimentare sub presiune exterioară.

Primită la redacţie la 12 aprilie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Asupra lubrificaţiei magneto-gazodinamice*, St. cerc. mec. apl., 4 (1966). Rev. Roum. Sci-Tech. Mécanique Appliquée, *4* (1966).
2. — *Lubrificaţia cu gaze*, Edit. Academiei Republicii Socialiste România 1963.
3. — *Teoria lubrificaţiei în regim turbulent*, Edit. Academiei Republicii Socialiste România 1965.
4. — *On Some Secondary Effects in Self-Acting Gas Lubricated Bearings*, A.S.L.E. — Transactions **7**, 257—268, 1964.
5. A. A. Raimondi, *A Numerical Solution for the Gas Lubricated Journal Bearings of Finite Length*, A.S.L.E. — Transactions **4**, 131—155, 1961.
6. D. C. Cuzma, *The magnetohydrodynamic Journal Bearing*, A.S.M.E. — Transactions, Series D, Journal of Basic Engineering, **85**, *3*, 424—427 (1963).

ASUPRA CONDIȚIILOR DE APLICARE ȘI PERSISTENȚĂ A BISULFURII DE MOLIBDEN PE SUPRAFEȚELE DE ALUNECARE

de GH. VASILCA
Institutul de mecanica fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

531.1

Se examinează unele aspecte de aplicare și persistență a bisulfurii de molibden praf pe suprafețele metalice de alunecare în condiții de rugozitate diferită a acestora. Se arată că în suprafețele separate complet prin filmul de lubrifiant lichid, stratul de bisulfură de molibden persistă timp mai îndelungat, dacă aceste suprafețe sînt finisate în mod adecvat pentru realizarea aplicării prafului în condiții de aderență corespunzătoare prin simplă frecare. În regimurile de ungere semifluidă, caracterizate în unele locuri prin transfer de material de pe suprafețe, stratul de bisulfură de molibden depus prin simplă frecare nu persistă în aceste locuri. De asemenea bisulfura de molibden este expulzată din spațiile dintre rizuri în cazul rugozităților mai mari ale suprafețelor. Chiar în aceste condiții, forța de frecare se reduce însă prin folosirea bisulfurii de molibden.

La lubrificația în straturi subțiri și folosind medii fluide ca lubrifianți, grosimea peliculei de lubrifiant fiind foarte mică neregularitățile suprafețelor, atît în ceea ce privește geometria cît și microgeometria, încep să influențeze regimul hidrodinamic de ungere și ca atare caracteristicile exterioare ca portanța, forța de frecare etc. ale cuplurilor de frecare. Fenomenele care exercită această influență sînt complexe, deoarece în dreptul neregularităților de suprafață menționate apar din loc în loc străpungeri ale filmului de lubrifiant și în consecință se produc contacte directe între cele două suprafețe de alunecare. În cazurile obișnuite aceste contacte se realizează la nivelul vîrfurilor asperităților de suprafață atît prin numărul lor redus cît și prin aria restrînsă a contactelor individuale, nu au consecințe grave de natură să tulbure funcționarea ansamblului de frecare.

Practica arată însă că funcționarea cuplurilor de frecare în atari condiții se menține neafectată în mod grav, numai dacă perechea de ma-

Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée **12**, *4* (1967) (în limba germană).

teriale folosită, precum şi proprietăţile de onctuozitate ale mediului lubrifiant sînt alese în mod corespunzător. Dacă aceste materiale nu posedă proprietăţi antifricţiune şi lubrifiantul nu este cel adecvat, contactele dintre suprafeţe pot evolua către faza de gripaj, care provoacă întreruperea funcţionării cuplului. După cum se va vedea mai jos fenomenul lubrificaţiei în straturi subţiri, în cazul folosirii mediilor solide ca lubrifianţi, prezintă în general caractere asemănătoare. Aceasta deoarece, fie că lubrifianţii solizi se folosesc ca atare, fie în amestec cu lubrifianţi lichizi, fenomenul străpungerii peliculei separatoare a suprafeţelor de alunecare are loc în mod analog. Unele deosebiri pot apare la efectele acestor străpungeri, care pot diferi în cele două cazuri. În cazul de faţă au fost cercetate unele din aceste efecte în condiţiile depunerii prealabile pe suprafeţele de alunecare a prafului de bisulfură de molibden urmată de funcţionarea cuplului în ulei mineral.

Bisulfura de molibden posedă proprietăţi de mediu lubrifiant în mişcarea de alunecare [1], datorită construcţiei sale cristaline stratificate, diferitele nivele cvazi paralele suprapuse fiind legate între ele prin legături chimice diferite ca natură, sulf-sulf, alternate cu legături sulf-molibden. O legătură atomică dublă, orientată în sens suprapus, de tipul sulf-molibden-sulf formează un strat, frontiera dintre aceste straturi constînd din atomi de sulf. Legătura dintre straturi, deci la nivelul sulf-sulf, este mai slabă datorită forţelor van der Waals mai reduse şi din cauza forţelor de respingere provocate de încărcarea electrică de acelaşi semn al atomilor de sulf învecinaţi. Adsorbţia pe peretele solid al suprafeţei de alunecare se realizează prin intermediul atomilor marginali ai stratului, prin urmare a atomilor de sulf, care au faţă de metalele ce alcătuiesc cuplurile de frecare în general o afinitate corespunzătoare pentru a adera pe pereţii acestora. Legăturile interioare dintre straturi, la nivelul sulf-sulf, fiind mai slabe decît legăturile sulf-molibden şi decît legăturile exterioare sulf-metal (perete), în cazul deplasării tangenţiale a suprafeţelor de alunecare, între care există bisulfură de molibden, alunecarea se va produce datorită unui proces de forfecare la nivelul legăturilor chimice celor mai slabe, deci la nivelurile sulf-sulf din interiorul mediului lubrifiant. Bisulfura de molibden posedă deci proprietăţi polare accentuate şi frecare interioară mai redusă, în mod analog ca şi lubrifianţii fluizi. Rezistenţa la străpungerea filmului de lubrifiant solid de către vîrfurile asperităţilor suprafeţelor se datoreşte stratului celulei cristaline, format din legăturile atomice mai puternice sulf-molibden din interiorul stratului.

Pentru lucrarea de faţă s-au folosit modele experimentale, de tipul sabot-tambur, cu suprafeţele de alunecare cilindrice. Bisulfura de molibden naturală experimentată s-a folosit sub formă de pulbere prezentînd următoarea analiză granulometrică [2]: 0,100 mm... $\sim$ 95%, 0,071 mm ... ... $\sim$ 73%, 0,063 mm... $\sim$60%. Cuplurile de materiale din care au construit aceste ansambluri de frecare au fost următoarele:

Modelul 4—1: — Sabotul din bronzul de plumb de tipul BzXPb27, STAS 1512 — 50, microgeometria de prelucrare a suprafeţelor de lucru fiind obţinută prin şlefuire cu hîrtie abrazivă tip 320. Pe această suprafaţă s-a aplicat, după curăţire cu benzen, bisulfura de molibden sub formă de praf prin frecare cu ajutorul unei hîrtii. Praful neaderat a fost scuturat şi îndepărtat de pe suprafaţa piesei.

— Tamburul a fost construit din oțelul rapid tip RW90, suprafața de alunecare fiind rectificată la ⌓. Jumătate din suprafața de lucru pe circumferință a fost atacată cu Nital 10% prin ștergere cu ajutorul unui tampon de vată, timp de 10 min., apoi spălată și neutralizată cu alcool. Pe suprafața atacată s-a obținut astfel o microgeometrie cu o rugozitate uniformă rezultată din atacul chimic. Pe suprafața atacată în acest fel s-a aplicat bisulfură de molibden praf după același procedeu ca și pe suprafața sabotului. Pe restul suprafeței tamburului, neatacate cu acid, nu s-a aplicat bisulfură de molibden.

Modelul 4—2 : — Sabotul confecționat din același bronz de plumb BzXPb27, are microgeometria suprafeței active realizată la același grad de rugozitate ca și sabotul de la modelul 4—1. Nu s-a aplicat pe suprafața de lucru a sabotului bisulfură de molibden.

— Tamburul acestui model a fost construit din fontă cu grafit nodular, folosită la confecționarea arborilor cotiți de la motorul de autocamion tip SR211. Suprafața de lucru a fost rectificată la ⌓. Pe acest tambur nu s-a aplicat bisulfură de molibden și suprafața de lucru nu a fost atacată cu Nital.

Model 4—4 : — Sabotul din același bronz de plumb BzXPb27, are suprafața activă strunjită fin și anume cu avansul de 0,08 mm și adîncimea de 0,02 mm. Nu s-a aplicat bisulfură de molibden pe suprafața acestui sabot.

— Tamburul a fost confecționat și prelucrat din aceeași fontă cu grafit nodular ca și tamburul de la modelul 4—2. Nu a fost atacată cu acid și nu s-a aplicat bisulfură de molibden pe suprafața de lucru.

Modelul 4—5 : — Sabotul, confecționat din bronzul BzXPb27, are suprafața activă rugoasă, obținută prin strunjire fină cu avansul de 0,08 mm adîncimea 0,02 mm. După curățire cu benzen, s-a aplicat pe această suprafață praful de bisulfură de molibden prin frecare în direcție normală pe rizuri cu ajutorul unei hîrtii. În felul acesta golurile dintre rizuri au rămas umplute cu acest praf.

— Tamburul a fost construit din oțelul rapid RW90, iar jumătate din suprafața activă cu rugozitatea mărită prin atac chimic cu Nital 10% în același mod ca și în cazul tamburului de la modelul 4—1. La fel s-a aplicat bisulfură de molibden numai pe suprafața atacată chimic.

Modelele experimentale prezintă deci varietate în ceea ce privește natura materialelor, microgeometria suprafețelor de lucru, precum și felul în care a rămas atașată bisulfura de molibden pe suprafețe. Cuplurile de frecare astfel pregătite au fost încercate la alunecare în următoarele condiții :

— apăsarea sabotului pe tambur . . . . . $P = 160$ kgf (static) ($p_m = 74$ kgf/cm²) ;
— viteza periferică a tamburului . . . . . $V = \sim 1{,}15$ m/s ;
— lubrifiantul fluid . . . . . ulei 408 STAS ;
— felul ungerii lichide : imersie completă a modelului experimental în ulei ;
— durata încercării . . . . . 15 minute ;
— rodajul . . . . . fără rodaj prealabil ;
— aplicarea sarcinii : pornire în gol cu viteza V și aplicarea lentă a sarcinii totale după 30 sec de la pornire.

Parametrii măsurați în aceste încercări sînt arătați în tabela 1.

Tabela 1

Parametrii		Etapa	Modelul			
			4—1	4—2	4—4	4—5
Puterea *Na*,	kw	La început	0,205		0,22	0,205
		La sfîrșit	0,200	0,205		0,200
Viteza tamburului,	$\frac{rot}{min}$	La început	958		955	955
		La sfîrșit	974	960		965
Temperatura lubrifiantului lichid,	°C	La început	22	22	22	22
		La sfîrșit	31	31	31	31

Concomitent a fost înregistrată grafic variația puterii absorbite *Na* de către motorul electric de antrenare a tamburului, precum și variația vitezei periferice a tamburului sub forma turației acestuia. Pentru cele patru modele experimentale aceste diagrame sînt redate în figurile 1—8, în care figurile 1, 3, 5, și 7 redau variația puterii absorbite *Na*, iar figurile 2, 4, 6 și 8 redau variația turației tamburului. Din aceste figuri se poate constata că în general procesul de frecare a decurs fără oscilații mari de intensitate, variațiile momentane ale puterii absorbite *Na*, care reflectă acest proces, fiind reduse. Aceasta constituie în același timp un indiciu că regimul de frecare a fost în cea mai mare parte fluid, deoarece dacă ar fi preponderat frecarea de contact, oscilațiile forței de frecare ar fi rezultat mult mai mari.

În legătură cu evoluția cantitativă în timp a forței de frecare, în funcție de microgeometria suprafețelor și de prezența sau lipsa lubrifiantului solid MoS_2, diagramele *Na* prezintă unele deosebiri. Astfel se constată că suprafața sabotului cu o microgeometrie mai fină conduce la forțe de frecare mai reduse (fig. 3 și 5). Această deosebire se menține într-o oarecare măsură, în același sens, și în cazul folosirii stratului inițial de bisulfură de molibden cum se poate vedea în cazul modelelor 4—1 și 4—5 (fig. 1 și 7). Factorii care conduc la aceste deosebiri vor fi analizați mai jos prin studierea suprafețelor de alunecare.

Evoluția procesului de frecare, în perioada de început adică în primele momente de funcționare a cuplului, este redată de asemenea de graficile puterii absorbite *Na*. Se constată astfel (fig. 3 și 5) că momentul aplicării totale a sarcinii este redat printr-un vîrf al curbei puterii absorbite, valoare maximă care apoi scade treptat tinzînd către o valoare oarecum stabilizată. Acest aspect este în concordanță cu evoluția procesului de formare a microgeometriei specifice [3] a suprafețelor cu mișcare de alunecare, proces caracterizat, mai ales în cazul lubrificației în straturi subțiri, prin numeroase contacte metalice la început, a căror număr scade pe măsură ce vîrfurile cele mai proeminente ale asperităților au fost tasate sau uzate. La început numărul mai mare de contacte directe dintre suprafețe corespunde la o forță de frecare maximă, valoarea acesteia scăzînd pe măsură ce microgeometria de prelucrare a suprafețelor rezultată se

transformă în microgeometria specifică împerecherii respective de materiale, fază a procesului de alunecare în care forța de frecare se stabilizează.

Din aceleași figuri 3 și 5 se poate constata că această evoluție de început a forței de frecare este influențată de starea de rugozitate a suprafeței. Astfel, în cazul suprafeței 4—4 cu rugozitate mai mare la sabot, vîrful curbei forței de frecare a scăzut mai repede decît în cazul modelului 4—2. Microgeometria de prelucrare mai fină în acest din urmă caz, deci lipsită de vîrfuri mari de asperități, a provocat contacte directe mai puțin intense și ca urmare durata în timp a eliminării lor a fost mai lungă.

Analizînd aspectul de început al procesului de frecare în cazul folosirii bisulfurii de molibden (fig. 1 și 7), se poate constata existența acelorași vîrfuri ale curbei forței de frecare. În cazul microgeometriei mai fine (fig. 1) acest vîrf a scăzut însă după o durată de funcționare de aproximativ 50 secunde, ceea ce trebuie pus pe seama proprietăților lubrifiante ale bisulfurii de molibden. În cazul suprafeței mai rugoase (fig. 7), vîrful nu apare atît de pronunțat, ceea ce nu se explică decît prin subiectivitatea intervenită în aplicarea cu mîna a sarcinii în timpul experimentării.

Figurile 2, 4, 6 și 8 redau variația vitezei de rotație a tamburului în perioada de încercare. Turația mai mare și apoi scăderea acesteia în perioada de început a încercării se datorește variației cu sarcina a turației motorului electric asincron folosit pentru antrenarea tamburului. Scăderea a urmat imediat ce s-a aplicat sarcina pe cuplul de frecare. Vîrful forței de frecare menționat mai sus nu este însă reflectat în mod vizibil în diagrama de viteze, deoarece aceasta a fost înregistrată prin intermediul unui generator de curent care posedă o inerție ce depășește viteza cu care s-a produs procesul.

Factorii care au condus la aceste variate aspecte privind procesul de alunecare vor fi analizați mai jos în mod detaliat prin studierea straturilor superficiale ale suprafețelor de frecare.

Pentru punerea în evidență a efectelor de suprafață în cazul lubrifianților solizi au fost efectuate în prealabil unele încercări fără folosirea acestor lubrifianți și anume cu modelele 4—2 și 4—4, pregătite și încercate în condițiile arătate mai sus. Astfel, în figura 22 se prezintă suprafața activă, fără bisulfură de molibden, a sabotului și a tamburului la mărirea 3 : 1 a modelului 4—2 cu rugozitatea mai fină a sabotului, după funcționarea timp de 15 minute în ulei tip 408. Microgeometria inițială, rezultată din prelucrare, a tamburului este arătată în figura 25, iar în figurile 26 și 27 această microgeometrie după încercare, toate trei figurile la mărirea 100 : 1 și fără atac. Ceea ce apare caracteristic la aceste suprafețe ale tamburului din fontă cu grafit nodular este că microgeometria de prelucrare nu s-a schimbat în mod vizibil. Aceasta se datorește mai întîi faptului că materialul piesei conjugate a sabotului este un bronz de plumb deci cu duritate mai redusă, iar timpul de funcționare a fost relativ scurt (15 min). La acest rezultat au contribuit de asemenea constituenții antigripanți ai ambelor materiale și anume grafitul nodular la tambur și plumbul la sabot. Grafitul nodular apare în suprafața tamburului sub formă de mici pete negre (fig. 25, 26 și 27), iar plumbul la sabot de asemenea ca pete și puncte negre în fig. 23 și 24. Procesul de frecare a avut totuși un efect asupra suprafeței tamburului și anume a mărit într-o oarecare măsură gradul de șlefuire astfel încît au ieșit în evidență constituenții duri ai

fontei și anume carburile. Acest efect se poate vedea în figura 26, dar mai ales în figura 27, aceste carburi apărînd sub formă de pete mai deschise la culoare. Evident că pe măsură ce fazele dure din suprafață devin mai proeminente, datorită uzării stratului inițial de deformare plastică ce le acoperă rezultat din prelucrare, acțiunea abrazivă a acestora asupra suprafeței conjugate de frecare poate să crească. Intrarea direct în proces a carburilor contribuie totodată la stabilizarea procesului de uzură. Valoarea forței de frecare poate varia în această fază, în mod analog ca la rodaj, fiind mai mare la început cînd frecarea de contact predomină, așa cum s-a arătat mai sus. La sabotul din BzXPb27, efectul procesului de frecare este mai vizibil, microgeometria suprafeței active prezentîndu-se după încercare ca în figura 23 și în figura 24, ambele la mărirea 32 : 1. Deoarece s-a lucrat fără rodaj și perioada de încercare a fost relativ scurtă, suprafața sabotului apare modificată prin procesul de frecare în mod neuniform. Astfel, la una din părțile frontale ale suprafeței sabotului microgeometria de prelucrare a fost modificată total (fig. 23), iar la mijlocul acesteia în măsură mai redusă, încît rizurile rezultate de la prelucrare sînt încă parțial vizibile (fig. 24). Microgeometria din figura 23 poate fi considerată specifică acestui cuplu de materiale și corespunzătoare pentru stadiul de formare a suprafeței tamburului, reprezentate de figura 27.

În condițiile folosirii bisulfurii de molibden a fost încercat modelul 4—1 cu aceeași microgeometrie ca și sabotul modelului 4—2, adică avînd suprafața sabotului mai finisată, iar jumătate din suprafața tamburului cu rugozitatea mărită prin corodare chimică cu Nital 10%. În figura 9, la mărirea 3 : 1, se prezintă suprafața activă a sabotului (sus) și a tamburului (jos) în stare inițială de prelucrare, iar în figura 10 se prezintă sabotul (sus) și tamburul (jos) după încercare. Suprafața atacată a tamburului se vede în figură în jumătatea de sus a acestuia. Rugozitatea suprafeței la sabot, rezultată din prelucrare și înainte de a fi unsă cu bisulfura de molibden și de a fi încercată se vede în figura 11 la mărirea 32 : 1. Și acest model a fost încercat fără rodaj prealabil ceea ce a condus, datorită și duratei relativ scurte de încercare, la formarea incompletă a suprafeței prin acțiunea procesului de frecare, aceasta apărînd în unele părți mai mult, în altele mai puțin modificată. Astfel, în figura 12, la mărirea 32 : 1, se prezintă suprafața sabotului într-o regiune de margine frontală în care modificarea suprafeței s-a produs în cea mai mare măsură. Deși modificarea este avansată, urmele de prelucrare au fost șterse complet numai în porțiunea centrală a figurii și pe o fișie îngustă situată mai sus, zone care se prezintă mai continue și mai deschise la culoare. Între aceste două zone parțiale modificarea suprafeței este ceva mai redusă, dungile negre subțiri și ovazi paralele, orizontale reprezentînd adînciturile rizurilor de la prelucrare. După cum se vede modificarea suprafeței sub acțiunea procesului de frecare constă mai întîi din nivelarea asperităților, care se datorează efectului combinat de tasare sub acțiunea presiunilor, precum și uzurii. În figura 13, la mărirea mai mare de 600 : 1, se arată o porțiune din zona cea mai lucioasă din figura 12, iar în figura 14, la aceeași mărire, zona de frontieră dintre partea cu luciu și cea fără luciu a suprafeței din figura 12. Caracterul de relativă continuitate a materialului în suprafață, adică lipsa de rizuri în cazul figurii 13, denotă completa modificare a microgeometriei de prelucrare.

Mai jos de porțiunea lucioasă din figura 12 se continuă suprafața activă a sabotului către mijlocul acestuia, apărînd de culoare mai închisă în figură. Comparată cu figura 11 se poate vedea că în această zonă procesul de frecare nu a afectat în mod perceptibil microgeometria suprafeței sabotului și, ceea ce nu apare în figura 12 și nici în figura 14, pe această zonă stratul de bisulfură de molibden depus inițial se constată a fi rămas și după încercare. În zona lucioasă modificată din figura 12 nu au putut fi constatate, cu mijloacele de investigație folosite, urme din stratul de bisulfură de molibden depus inițial și în mod uniform pe întreaga suprafață de lucru a sabotului. Aceste date permit să se tragă două concluzii cu privire la acțiunea stratului de bisulfură de molibden în condițiile de aplicare și încercare de față. Și anume mai întîi, că în procesele de frecare semifluide, predominante de contact (zonele cu luciu), stratul de bisulfură de molibden depus inițial nu persistă fiind îndepărtat odată cu straturile superficiale din materialul care alcătuiește suprafața. Iar în al doilea rînd, că în zonele de alunecare unde predomină frecarea lichidă, stratul de bisulfură de molibden depus inițial se dovedește a prezenta o oarecare persistență pe suprafață. Adică legăturile fizice dintre bisulfură și suprafața metalică (în cazul de față bronzul de plumb) se constată a fi mai puternice decît cele lubrifiant lichid-bisulfură de molibden, cel puțin în condițiile frecării lichide inexistente sau foarte reduse din stratul de adsorbție al lubrifiantului lichid. Condițiile în care s-a studiat fenomenul permit ca, deocamdată, această apreciere să poată avea numai caracter calitativ.

În cealaltă parte frontală a suprafeței sabotului a rezultat în același timp, din frecare, o zonă similară cu modificări de suprafață (fig. 15, la mărirea 32 : 1), însă cu ceva mai puțin accentuată decît în cazul figurii 12. Caracterul modificării se vede că este același, constînd din tasare combinată cu uzare a vîrfurilor rizurilor de suprafață rezultate din prelucrare. În zona cu cea mai accentuată modificare suprafața prezintă o continuitate de material bine vizibilă (fig. 16, mărirea 600 : 1), asemănătoare ca în cazul figurii 13. Zona de frontieră dintre luciu (jos) și suprafața fără luciu (sus) redată de figura 17 la mărirea de 600 : 1 prezintă aceleași caractere întîlnite în cazul figurii 14. Aspectul prezenței și absenței stratului de bisulfură de molibden are același caracter ca și în cazul figurii 12, acest strat nemaiputînd fi constatat în zona cu luciu a suprafeței, adică unde procesul de frecare a provocat un transfer de metal de pe suprafață. În zonele unde frecarea a avut un caracter lichid stratul de bisulfură de molibden a rămas aderent de peretele metalic al sabotului. Aici mai trebuie observat că suprafața corespunzătoare a tamburului, care a lucrat pe această jumătate a sabotului, nu a fost unsă cu bisulfură de molibden și nici atacată chimic.

În figura 18, la mărirea 32 : 1, se prezintă suprafața tamburului din oțel RW90 care a lucrat conjugat cu sabotul de la modelul 4—1 a cărui suprafață a fost analizată mai sus. Astfel în partea de jos a figurii se arată microgeometria rezultată din prelucrare, iar în partea de sus microgeometria obținută prin coroziune chimică cu Nital 10%. La mărirea 150 : 1 aspectul suprafeței atacate chimic care nu a lucrat este arătat în figura 19, iar în figura 20, la aceeași mărire, suprafața atacată și unsă cu bisulfură de molibden, după ce a lucrat cu sabotul 4—1. O influență net modificatoare pare să nu fi avut procesul de frecare asupra acestei supra-

feţe, ceea ce se explică prin duritatea ei foarte ridicată. Aspectul care nu a putut fi redat însă prin fotografii este acela de nuanţă arămie a suprafeţei rugozitate care a lucrat, nuanţă rezultată din frecarea pe sabotul din bronz de plumb. Această nuanţă arămie indică un transfer de material de pe sabot pe suprafaţa tamburului. Materialul transferat şi aderat pe suprafaţa tamburului nu a putut fi însă observat ca atare cu mijloacele de investigaţie folosite. O microanaliză spectroscopică şi roentgenoscopică ar înlesni desigur identificarea materialului străin, chiar în această cantitate extrem de redusă prezentă pe suprafaţa tamburului. O uşoară modificare a suprafeţei tamburului apare totuşi dacă se examinează cu suficientă atenţie figurile 19 şi 20. Se vede astfel că în suprafaţa care a lucrat (fig. 20) petele mici albe, care formează constituenţii duri ai structurii oţelului, apar puţin mai extinse atît ca arie individuală cît şi ca pondere în suprafaţa totală, decît în suprafaţa care nu a lucrat (fig. 19). Această mărire a petelor poate proveni din uzarea în adîncime a constituenţilor proeminenţi. S-ar putea însă să se datoreze şi materialului aderat străin, care acoperind microzone de mai multe proeminenţe, aceste microzone apar ca pete asemănătoare cu o faţă mai mare de grăunte. În mijlocul jumătăţii de jos a figurii 21 se poate vedea o dungă orizontală de culoare puţin mai închisă. Aceasta a rezultat din procesul de frecare şi reprezintă urma muchiei frontale a sabotului. Mai jos de această dungă apare la mărirea 32 : 1 suprafaţa tamburului asperitată care nu a lucrat, iar de-asupra ei suprafaţa asperitată care a lucrat. Dunga însăşi are o oarecare lăţime, prezintă la fel aspectul arămiu semnalat mai sus şi de asemenea o modificare mai accentuată a microgeometriei iniţiale. Aceasta arată că aci a existat un regim de lucru cu puternice presiuni pe muchii, în care ponderea frecării de contact a fost mai mare. Aspectul modificator al suprafeţei dure din dunga neagră ar putea fi elucidat mai complet de asemenea prin microanalize spectro şi roentgenoscopice.

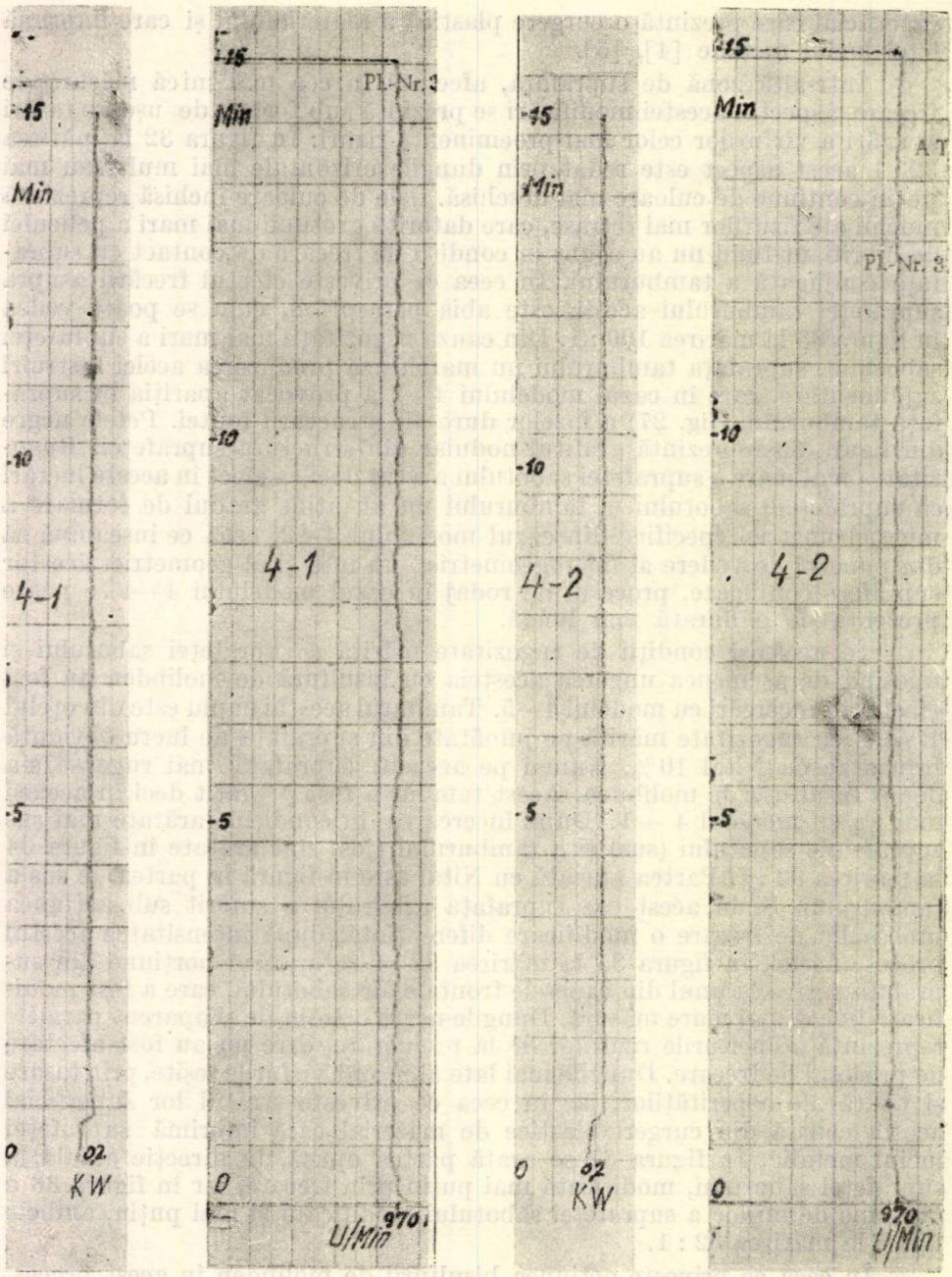
În condiţii de microgeometrie cu o rugozitate mai mare a suprafeţei sabotului din BzXPb27, au fost efectuate încercări mai întîi fără bisulfură de molibden cu modelul 4—4, avînd tamburul din fontă cu grafit nodular. Înainte de încercare, în regimul de funcţionare arătat mai sus, suprafeţele sabotului (sus) şi a tamburului (jos) se prezintă la mărirea 3 : 1 ca în figura 28. Suprafaţa sabotului prezintă rizuri regulate rezultate din strunjire, cu mici puncte negre care redau plumbul din aliaj. La mărirea 32 : 1 această stare de rugozitate şi petele negre reprezentînd plumbul pot fi văzute în figura 30. Suprafaţa tamburului are rizuri de prelucrare mai fine (rezultate din şlefuire), punctele foarte mici negre reprezentînd grafitul nodular din structură. În figura 29 la aceeaşi mărire de 3 : 1 se prezintă aceleaşi suprafeţe după încercare şi fără bisulfură de molibden, condiţii analoge de experimentare ca şi în cazul modelului 4—2 la care sabotul a avut microgeometria mai fină. Figura 31 la mărirea 32 : 1 prezintă o porţiune din suprafaţa activă marginală frontală a sabotului care a lucrat şi asupra căreia efectele modificatoare ale procesului de frecare au fost mai accentuate. Dungile orizontale de culoare închisă reprezintă adînciturile rizurilor de prelucrare. Vîrfurile acestor rizuri au fost tasate şi uzate sub acţiunea procesului de frecare şi apar cu o lăţime mai mare şi de culoare deschisă în figură. Culoarea deschisă se datoreşte stratului

superficial care prezintă o curgere plastică a materialului și care imprimă feței luciul metalic [4], [5].

Într-altă zonă de suprafață, afectată în cea mai mică măsură de frecare, aspectul acestei modificări se prezintă sub formă de ușoare tasări și uzări a vîrfurilor celor mai proeminente rizuri. În figura 32 la mărirea 32 : 1 acest aspect este redat prin dungile orizontale mai mult sau mai puțin continue de culoare mai deschisă. Cele de culoare închisă reprezintă muchii ale rizurilor mai retrase, care datorită grosimii mai mari a peliculei de lubrifiant fluid nu au ajuns în condiții de frecare de contact cu suprafața conjugată a tamburului. În ceea ce privește efectul frecării asupra suprafeței tamburului acesta este abia perceptibil, cum se poate vedea în figura 33 la mărirea 100 : 1. Din cauza rugozității mai mari a suprafeței sabotului, suprafața tamburului nu marchează producerea acelei lustruiri suplimentare, care în cazul modelului 4—2 a provocat apariția în suprafața tamburului (fig. 27) a fazelor dure ale structurii fontei. Petele negre din figura 33 reprezintă grafitul nodular din structura suprafeței. Rugozitatea mai mare a suprafeței sabotului a avut deci ca efect în aceste lucrări că suprafețele sabotului și tamburului nu au atins gradul de formare a microgeometriei specifice din cazul modelului 4—2, ceea ce înseamnă că din punctul de vedere al microgeometriei, nu însă și al geometriei acestor suprafețe conjugate, procesul de rodaj în cazul modelului 4—4 se poate prezenta de o durată mai lungă.

În aceleași condiții de rugozitate mărită a suprafeței sabotului și folosind de asemenea ungerea acesteia cu bisulfură de molibden au fost efectuate încercări cu modelul 4—5. Tamburul acestui cuplu este din oțelul RW90, cu rugozitate mărită pe jumătate din suprafața de lucru obținută prin atac cu Nital 10%. Numai pe această suprafață mai rugoasă s-a depus bisulfură de molibden. Acest tambur a fost pregătit deci în același mod ca și modelul 4 — 1. După încercarea în condițiile arătate mai sus suprafețele sabotului (sus) și a tamburului (jos) sînt arătate în figura 34 la mărirea 32 : 1. Partea atacată cu Nital este în figură în partea de sus a tamburului. Și în acest caz suprafața sabotului a suferit sub acțiunea procesului de frecare o modificare diferențiată, după intensitatea acestui proces. Astfel, în figura 35 la mărirea 32 : 1 se arată o porțiune din suprafața activă la unul din capetele frontale ale sabotului, care a fost modificată în cea mai mare măsură. Dungile negre orizontale și aparent paralele reprezintă adînciturile rizurilor de la prelucrare, care nu au fost afectate de procesul de frecare. Dungile mai late albe sînt vîrfurile teșite, prin tasare și uzură ale asperităților, iar în ceea ce privește stratul lor superficial acesta constă din curgeri plastice de material care imprimă suprafeței luciul metalic. În figura 37 se arată partea opusă, în direcție axială, a suprafeței sabotului, modificată mai puțin prin frecare, iar în figura 36 o porțiune de mijloc a suprafeței sabotului modificată și mai puțin, ambele figuri la mărirea 32 : 1.

În ceea ce privește acțiunea bisulfurii de molibden în acest proces, pe muchiile lățite ale rizurilor din figura 35 nu a putut fi constatată prezența acestui lubrifiant solid. De asemenea nu apare în fotografii și nici prin observare directă nu a putut fi semnalată, existența bisulfurii de molibden în golurile dintre rizurile sabotului, care la ungerea suprafeței cu acest lubrifiant spațiile respective au fost în întregime umplute cu această



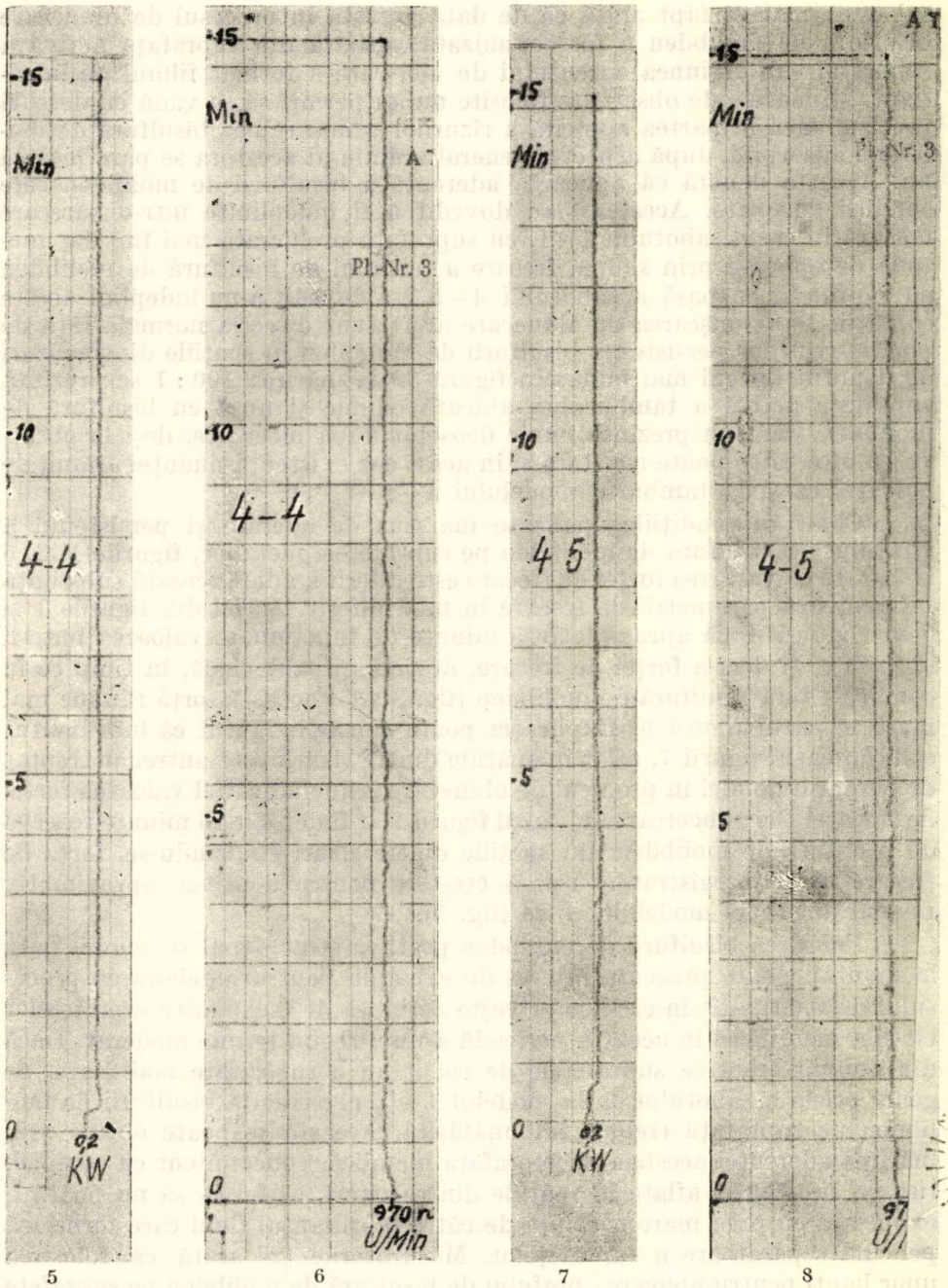
1 2 3 4

Fig. 1. — Modelul 4—1. Variația în timpul încercării a puterii absorbite de motorul electric de antrenare. (Microgeometria la sabot fină, cu bisulfură de molibden, $p_m = 74$ kgf/cm^2).

Fig. 2. — Modelul 4—1. Variația cu timpul a turației tamburului în cazul figurii 1 (970 rot/min = 1,16 m/s viteză periferică).

Fig. 3. — Modelul 4—2. Variația în timpul încercării a puterii absorbite de motorul electric de antrenare (Microgeometria la sabot fină, fără bisulfură de molibden, $p_m = 74$ kgf/cm^2).

Fig. 4. — Modelul 4—2. Variația cu timpul a turației tamburului în cazul fig. 3. (970 rot/min = 1,16 m/s viteză periferică).



5 6 7 8

Fig. 5. — Modelul 4—4. Variația în timpul încercării a puterii absorbite de motorul electric de antrenare (Rugozitatea la sabot mare, fără bisulfură de molibden, $p_m = 74$ kgf/cm^2).

Fig. 6. — Modelul 4—4. Variația cu timpul a turației tamburului în cazul figurii 5 (970 rot/min = 1,16 m/s viteză periferică).

Fig. 7. — Modelul 4—5. Variația în timpul încercării a puterii absorbite de motorul electric de antrenare (Rugozitatea la sabot mare, cu bisulfură de molibden, $p_m = 74$ kgf/cm^2).

Fig. 8. — Modelul 4—5. Variația cu timpul a turației tamburului în cazul figurii 7 (970 rot/min = 1,16 m/s viteză periferică).

substanță. Acest fapt arată că de data aceasta în procesul de alunecare bisulfura de molibden a fost expulzată, spălată din suprafața activă a sabotului sub acțiunea curentului de ulei care a format filmul de lubrifiant. Mijloacele de observare folosite nu au permis să se vadă cu destulă precizie dacă în partea adîncită a rizurilor a mai rămas bisulfură de molibden adsorbită, după aspectul general arămiu al acestora se pare însă că nu. Aceasta denotă că aplicarea aderentă a bisulfurii de molibden cere condiții adecvate. Acestea s-au dovedit a fi îndeplinite într-o oarecare măsură în cazul sabotului 4—1, cu suprafața prelucrată mai fin, dar metoda de aplicare prin simplă frecare a prafului de bisulfură de molibden pe suprafața rugoasă a sabotului 4—5 s-a dovedit a nu îndeplini aceste condiții. Dacă mișcarea de alunecare ar fi avut direcția normală față de poziția rizurilor persistența bisulfurii de molibden în spațiile dintre rizuri ar fi putut deveni mai bună. În figura 38 la mărirea 100 : 1 se prezintă suprafața activă a tamburului, atacată chimic și unsă cu bisulfură de molibden, care nu prezintă nimic deosebit după încercare, deși la observarea directă se poate constata și în acest caz existența nuanței arămii de culoare, ca și la tamburul modelului 4—1.

Chiar în condițiile analizate mai sus de aderare și persistență a stratului de bisulfură de molibden pe suprafețele metalice, figurile 1, 3, 5 și 7 arată că valoarea forței de frecare este diferită, adică această substanță influențează parametrii de frecare în mod diferit. Astfel din figurile 1 și 7 se vede că după aproximativ 5 minute de funcționare valoarea puterii absorbite, și deci a forței de frecare, devine aproape egală, în timp ce în condițiile fără bisulfură de molibden (fig. 3 și 5) această forță rămîne mai mare în cazul figurii 5. Explicația poate consta în faptul că lubrifiantul solid în cazul figurii 7, aflat în spațiile dintre rizuri, este antrenat treptat de curentul de ulei în procesul de alunecare reducînd astfel valoarea forței de frecare. Dacă încercarea în cazul figurii 7 ar fi depășit 15 minute rezerva de bisulfură de molibden din spațiile dintre rizuri epuizîndu-se, forța de frecare ar fi înregistrat o ușoară creștere pentru a atinge aproximativ nivelul din cazul modelului 4—4 (fig. 5).

Folosirea bisulfurii de molibden praf, ca strat depus o singură dată la montaj, poate prezenta interes de exemplu pentru ameliorarea procesului de rodaj, atît în ceea ce privește acțiunea de menajare a suprafețelor cît și a menținerii în această perioadă a unui regim termic moderat. Dacă din anumite motive suprafețele de rodat au o rugozitate mai mare, de genul celeia a sabotului de la modelul 4—5, persistența bisulfurii de molibden pe suprafață trebuie îmbunătățită. Aceasta se poate obține prin mărirea aderenței acesteia pe suprafața metalică, concomitent cu compactizarea substanței aflate în spațiile dintre rizuri, astfel ca să nu poată fi expulzată cu prea mare ușurință de către lubrifiantul fluid care formează pelicula separatoare a suprafețelor. Măsurătorile [2] arată că folosirea unor lianți pentru aplicarea prafului de bisulfură de molibden pe suprafețe conduce la o rezistență de aderare mai mare decît în cazul aplicării acestui praf prin intermediul unui mediu volatil, cum este de exemplu eterul.

Primită la redacție la 4 august 1966.

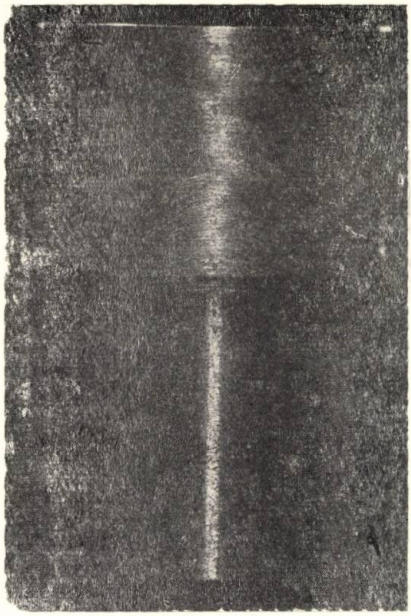


Fig. 9. — Modelul 4—1. Microgeometria de prelucrare la sabot (sus) şi la tambur (jos), 3 : 1.

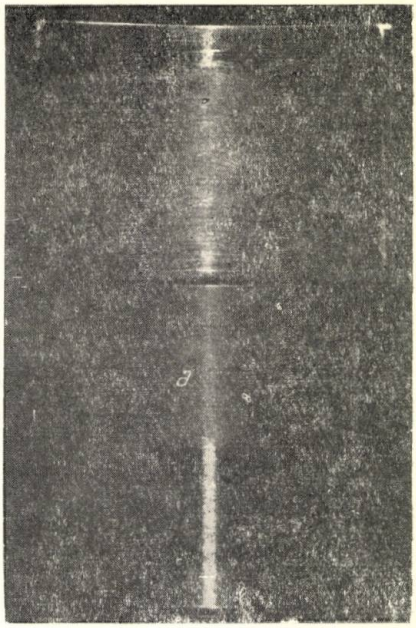


Fig. 10. — Modelul 4—1. Suprafaţa activă a sabotului (sus) şi a tamburului (jos) după încercare cu bisulfură de molibden. a — jumătatea de suprafaţă a tamburului rugozitată cu Nital 10%, 3 :1.

Fig. 11. — Modelul 4—1. Microgeometria de prelucrare la sabot (Rugozitatea corespunzătoare hîrtiei abrazive 320), 32 : 1.

Fig. 12. — Modelul 4—1. Microgeometria la sabot modificată (culoare deschisă) prin procesul de alunecare (cu bisulfură de molibden). Porţiunea la un capăt. a — zona cu modificarea cea mai intensă, 32 :1.

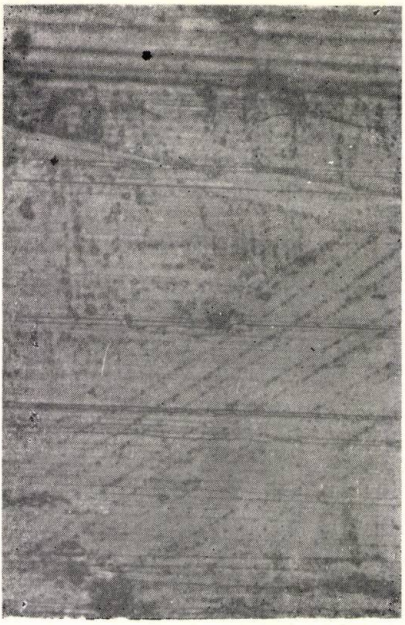


Fig. 13. — Modelul 4—1. Aspectul suprafeței în zona a din figura 12, 600 : 1.

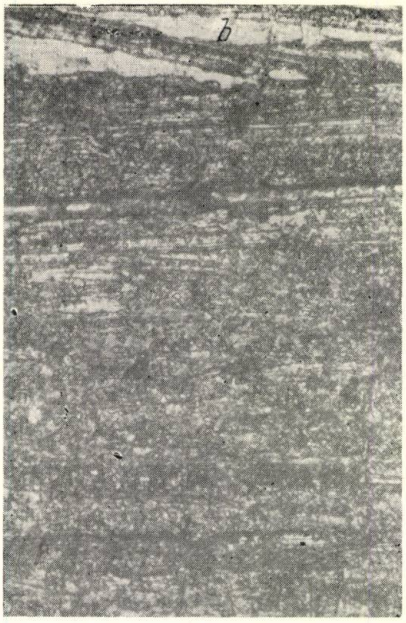


Fig. 14. — Modelul 4—1. Zona de frontieră (modificare intensă — modificare redusă) în cazul figurii 12. b — modificare intensă, 600 : 1.

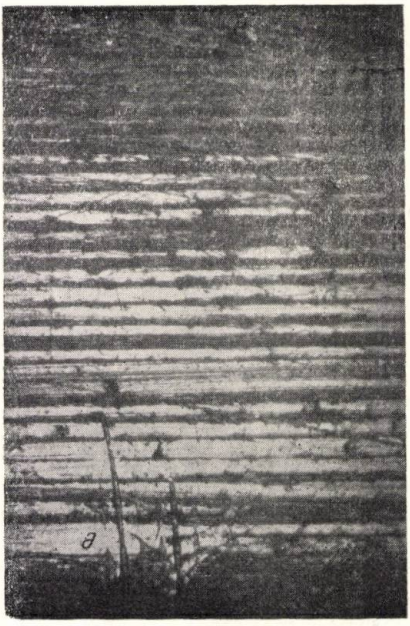


Fig. 15. — Modelul 4—1. Microgeometria la sabot modificată (culoare deschisă) prin procesul de alunecare (cu bisulfură de molibden). Porțiunea la al doilea capăt. a — zona cu modificarea cea mai intensă, 32 : 1.

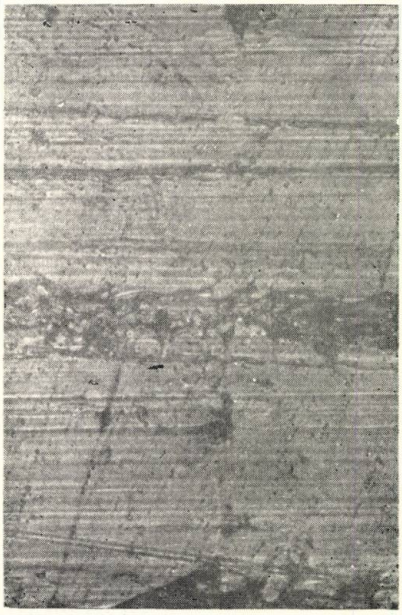


Fig. 16.— Modelul 4—1. Aspectul suprafeței a din figura 15, 600 : 1.

Fig. 17. — Modelul 4—1. Zona de frontieră (modificare intensă — modificare redusă) în cazul figurii 15. b — zona cu modificare intensă, 600 : 1.

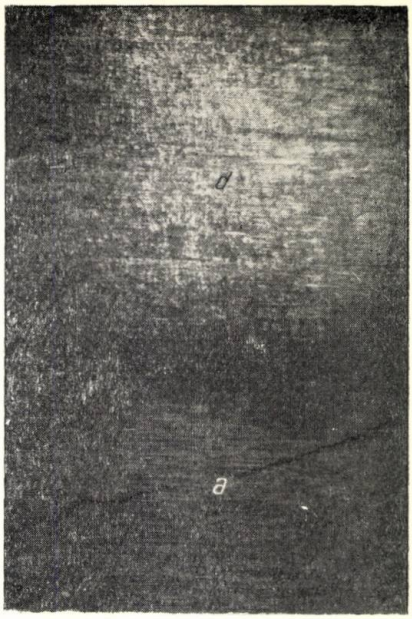


Fig. 18. — Modelul 4—1. Zona de frontieră (rugozitată — nerugozitată) a suprafeței tamburului. a — microgeometria de prelucrare, d — suprafața rugozitată cu Nital 10%, 32 : 1.

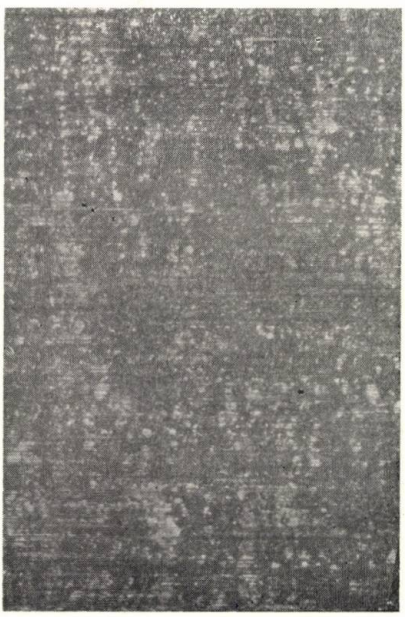


Fig. 19. — Modelul 4—1. Suprafața rugozitată a tamburului înainte de încercare. Petele albe reprezintă carburi, 150 : 1.

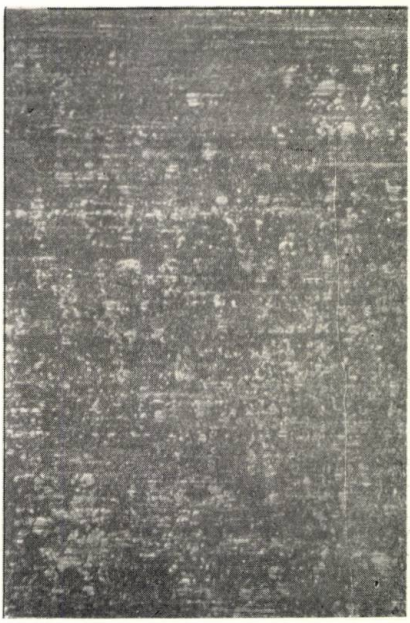


Fig. 20. — Modelul 4—1. Suprafața rugozitată a tamburului, în starea după încercare. Petele albe (carburile) sînt mai numeroase, 150 : 1.

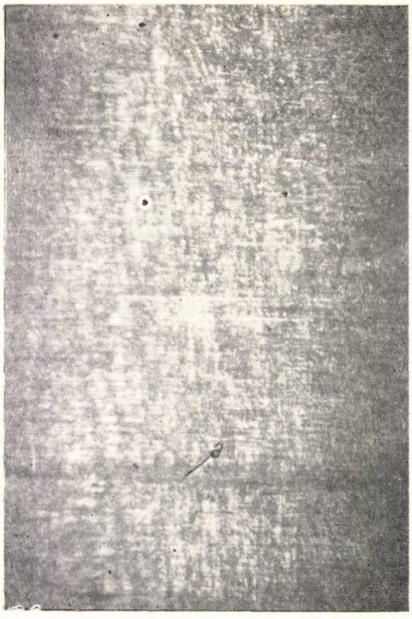


Fig. 21. — Modelul 4—1. Suprafaţa tamburului, a — modificare datorită presiunii intense pe muchii, 32 : 1.

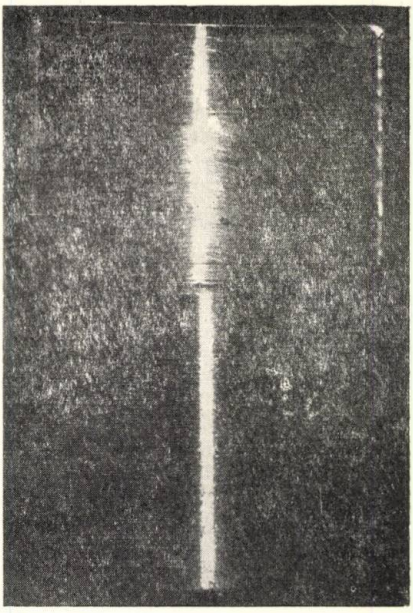


Fig. 22. — Modelul 4—2. Suprafaţa activă a sabotului (sus) şi a tamburului (jos) după încercarea fără bisulfură de molibden, 32 : 1.

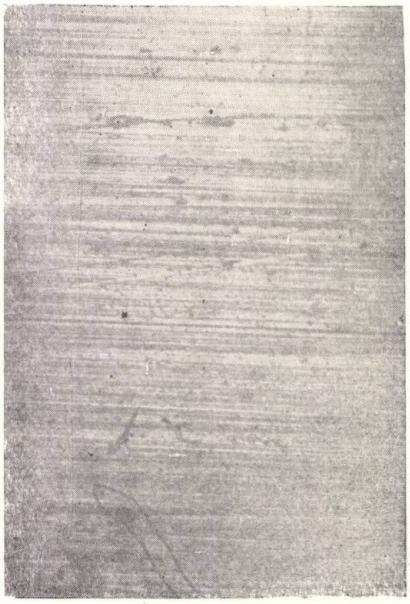


Fig. 23. — Modelul 4—2. Suprafaţa sabotului cu microgeometria modificată prin procesul de alunecare. Porţiunea cu modificare intensă la un capăt, 32 : 1.

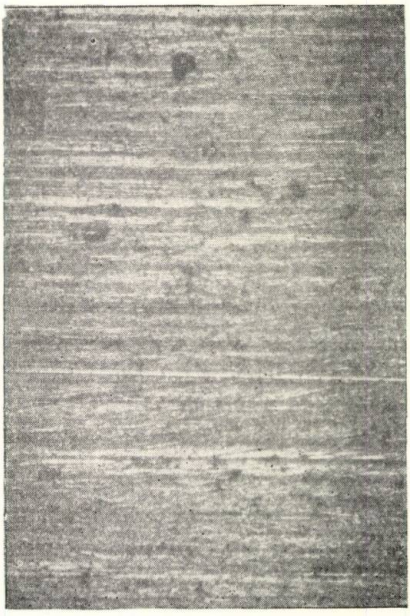


Fig. 24. — Modelul 4—2. Suprafaţa sabotului (partea de mijloc) cu microgeometria mai puţin modificată, 32 : 1.

Fig. 25. — Modelul 4—2. Microgeometria de prelucrare a tamburului. Petele negre reprezintă grafitul nodular, 100 : 1.

Fig. 26. — Modelul 4—2. Microgeometria suprafeței tamburului după încercare. Petele negre reprezintă grafitul nodular, 100 : 1.

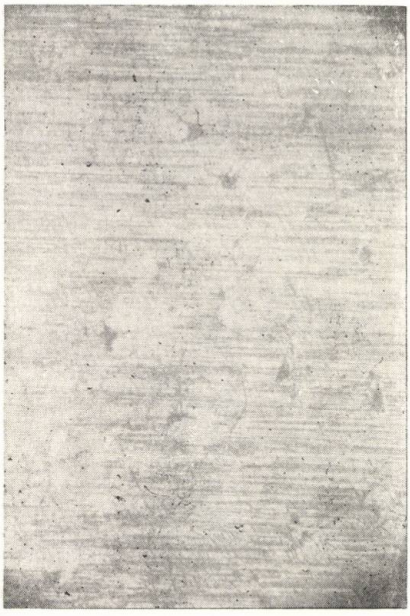


Fig. 27. — Modelul 4—2. Aspect cu carburile puse în evidență (petele albe) prin procesul de frecare la tambur, 100 : 1.

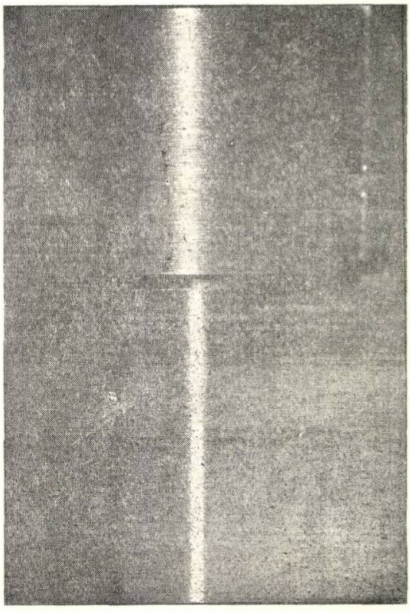


Fig. 28. — Modelul 4—4. Suprafața de lucru mai rugoasă a sabotului (sus) și suprafața tamburului (jos) înainte de încercare, 3 : 1.

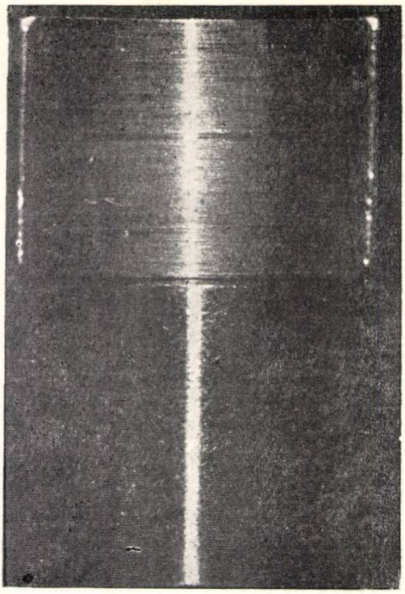


Fig. 29. — Modelul 4—4. Suprafața activă mai rugoasă a sabotului (sus) și a tamburului (jos) după încercare, fără bisulfură de molibden, $\frac{1}{3}$: 1.

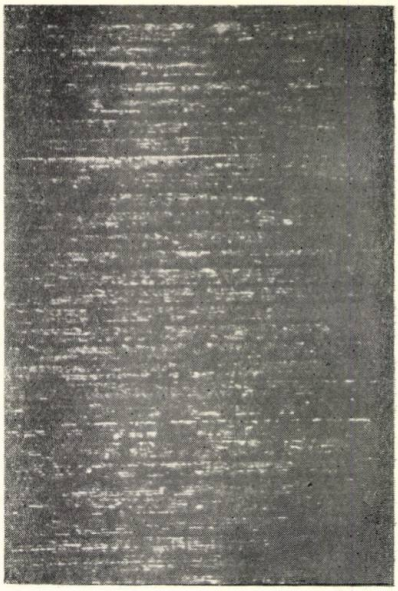


Fig. 30. — Modelul 4—4. Microgeometria mai dură a sabotului înainte de încercare. Petele negre reprezintă plumbul din structură, 32 : 1.

Fig. 31. — Modelul 4—4. Suprafața activă a sabotului modificată mai intens prin procesul de alunecare. Dungile negre orizontale reprezintă adînciturile rizurilor de prelucrare, iar petele negre plumbul din structură, 32 : 1.

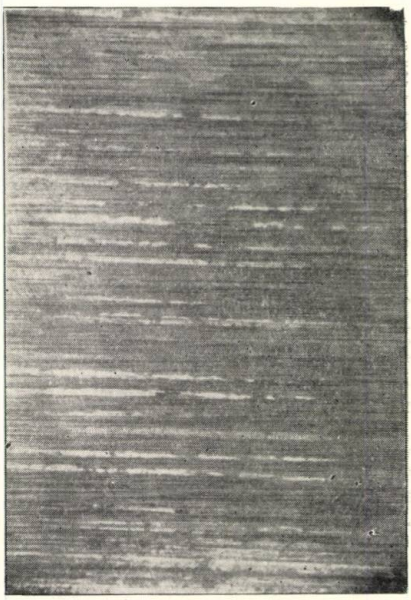


Fig. 32. — Modelul 4—4. Microgeometria la sabot afectată mai puțin de frecare. Dungile albe reprezintă vîrfurile rizurilor de prelucrare afectate de procesul de alunecare, 32 : 1.

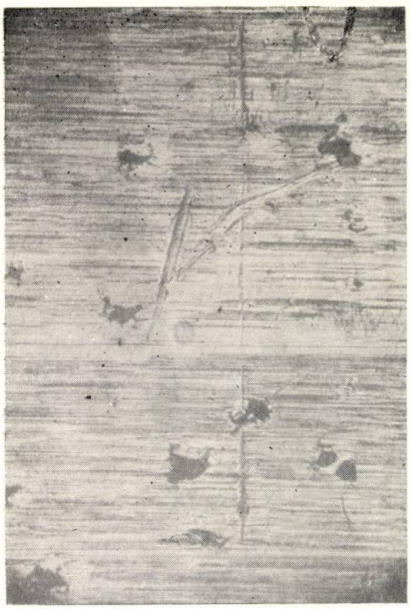


Fig. 33. Modelul 4—4. Suprafața activă a tamburului după încercare. Petele negre reprezintă grafitul nodular din structură, 100 : 1.

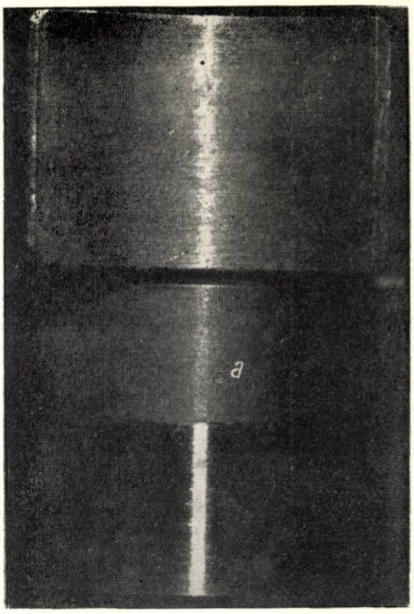


Fig. 34. — Modelul 4—5. Suprafața de lucru mai rugoasă a sabotului (sus) și a tamburului (jos) după încercare cu bisulfură de molibden. a — suprafața tamburului rugozitată cu Nital 10%, 3 : 1.

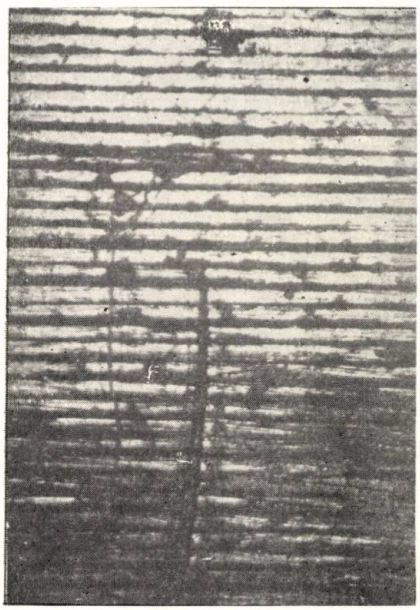


Fig. 35. — Modelul 4—5. Microgeometria sabotului cea mai intens afectată (dungile negre) de procesul de frecare. Zona la un capăt, 32 : 1.

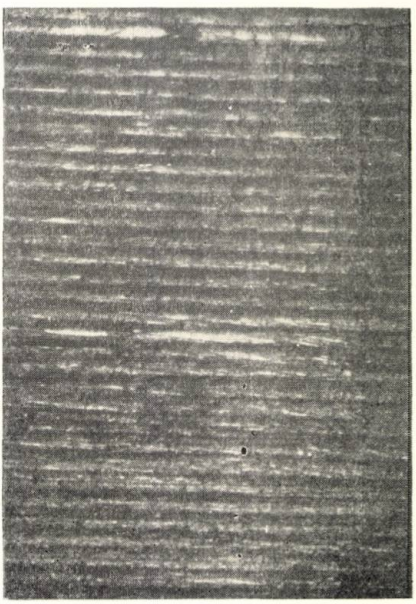


Fig. 36. — Modelul 4—5. Microgeometria de la mijlocul sabotului afectată în măsura cea mai redusă prin frecare. Bisulfura de molibden a fost expulzată dintre rizurile suprafeței, 32 : 1.

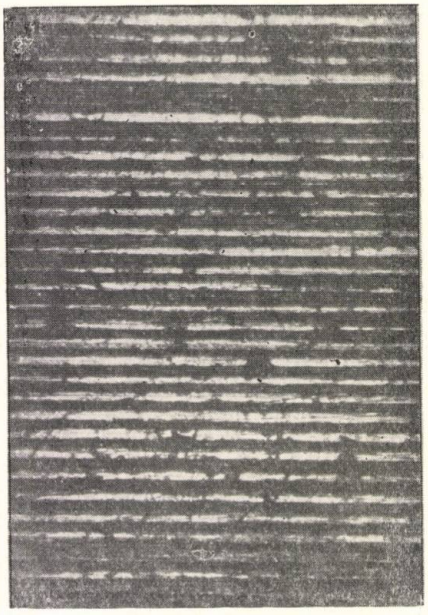


Fig. 37. — Modelul 4 — 5. Modificare mai redusă a microgeometriei la celălalt capăt al saboţului. Nu apare bisulfura de molibden între rizuri, 32 : 1.

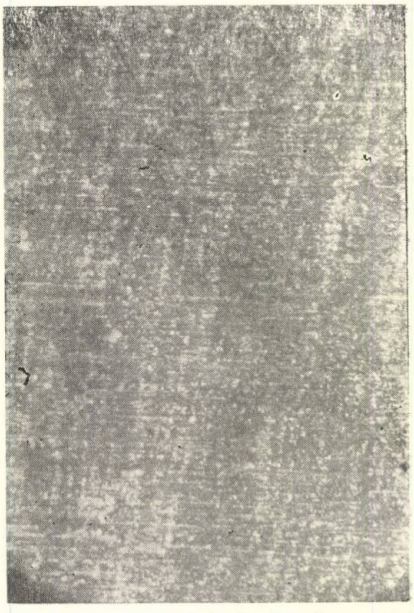


Fig. 38. — Modelul 4—5. Suprafaţa activă a tamburului imperceptibil afectată de procesul de frecare, 100 : 1.

BIBLIOGRAFIE

1. J. GÄNSHEIMER, *Schmierung mit Feststoffen*, Konstruktion, *10*, 397 (1960).
2. OLGA BIȚĂ, I. DINCĂ, *Aspecte ale frecării și uzurii în cazul lubrifierii cu bisulfură de molibden*, St. cerc. mec. apl., **18**, *2* (1965).
3. GH. VASILCA, AL. NICA, *Aspecte de structură în suprafața activă la unele materiale antifricțiune pentru lagăre*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *2* (1963).
4. F. P. BOWDEN, D. TABOR, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford, 1954.
5. GH. VASILCA, *Unele influențe ale procesului de alunecare asupra suprafețelor metalice. I. Suprafețe stanate*, St. cerc. mec. apl., **19**, *1* (1966).

STUDIUL ANALITIC AL MECANISMELOR CU CINCI ELEMENTE DE CATEGORIILE III ŞI V PRIN METODA ANALIZEI ARMONICE COMPLEXE

de R. C. BOGDAN şi D. LARIONESCU
Centrul de mecanica solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

531.1

Folosind metoda analizei armonice complexe se studiază mecanismele cu cinci elemente şi cuple cinematice de translaţie, de categoriile III şi V. Pentru diverse puncte ale acestor mecanisme se determină vectorii de poziţie, vitezele şi acceleraţiile.

Se obţin toţi parametrii cinematici, dezvoltaţi sub formă de serii Fourier complexe, ceea ce permite determinarea lor optimă prin polinoame exponenţiale de un anumit ordin, ordinul polinomului fiind funcţie de mărimea erorii acceptate. Impunem condiţii restrictive pentru elementele cunoscute, în vederea asigurării mobilităţii acestor categorii de mecanisme; de asemenea introducem unele condiţii care influenţează rapiditatea convergenţei seriilor, astfel încît ordinul polinoamelor folosite în aproximarea parametrilor cinematici să fie suficient de mic. Prin acest studiu realizăm legătura cu mecanismele de tip general studiate anterior, ceea ce permite ilustrarea modului unitar de aplicare a metodei analizei armonice complexe în cercetarea mecanismelor. Se dă un exemplu de calcul numeric.

În lucrările noastre anterioare [1], [2], [3] am expus metoda analizei armonice complexe de cercetare a grupelor structurale binare (grupe Assur) în cazul mişcării plane generale. Prin legarea acestor grupe structurale binare cu diferite elemente conducătoare, funcţie de aspectul lor, am elaborat de asemenea o sistematizare generală [7] a mecanismelor fundamentale plane, stabilind cinci categorii distincte.

În prezenta lucrare vom studia mecanisme fundamentale cu cinci elemente, realizate cu ajutorul grupelor structurale de aspectele III şi V.

Pentru a înlesni urmărirea studiului nostru, vom reaminti foarte succint cîteva elemente specifice — în sensul metodei noastre — ale cercetării grupelor mai sus menționate.

1. GRUPA STRUCTURALĂ DE ASPECTUL III

Pentru această grupă (fig. 1) se cunoaște mișcarea cuplei cinematice A_2 și a suportului cuplei cinematice A_1. Vectorul de poziție z_2 are dezvoltarea :

$$z_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{1}$$

În ceea ce privește mișcarea suportului de translație, vom considera cunoscut un vector de poziție complex z_1^* al unui punct A_1^*, precum și unghiul λ al suportului cu sensul pozitiv al axei Ox; unghiul ν este constant.

$$\begin{aligned} z_1^* &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)*} \cdot e^{ik\varphi}, \\ e^{i\lambda} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_k \cdot e^{ik\varphi}, \\ \Psi &= \Phi_2 - \Phi_1. \end{aligned} \tag{2}$$

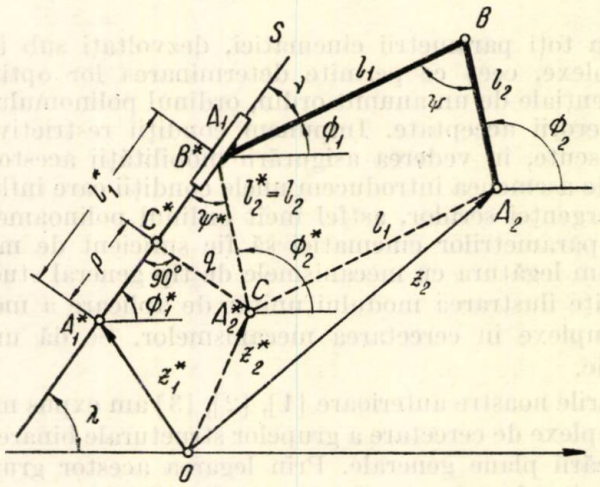


Fig. 1.

Din figura anterioară rezultă :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \lambda - \nu \\ A_k^{(1)} &= e^{-i\nu} \cdot \lambda_2. \end{aligned} \tag{3}$$

2. GRUPA STRUCTURALĂ DE ASPECTUL V

Considerăm cunoscut vectorul de poziţie complex z_1 al punctului A_1 (fig. 2).

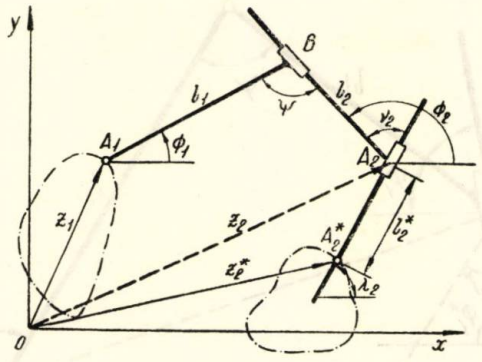


Fig. 2.

De asemenea este determinată mişcarea suportului cuplei A_2, deci vectorul de poziţie complex z_2^* şi unghiul λ_2 al suportului cu sensul pozitiv al axei Ox.

$$z_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi},$$

$$z_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)*} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{4}$$

$$e^{i\lambda_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}.$$

Pentru unghiul Φ_1 avem dezvoltarea cunoscută

$$e^{i\Phi_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{5}$$

iar pentru lungimile variabile l_2 şi l_2^* vom avea dezvoltările

$$l_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi},$$

$$l_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(2)*} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{6}$$

3. MECANISME PENTALATERE DE CATEGORIA III

O caracteristică a acestei categorii de mecanisme este existența unei cuple de translație exterioare A_1, în cadrul grupei structurale A_1BA_2 (fig. 3).

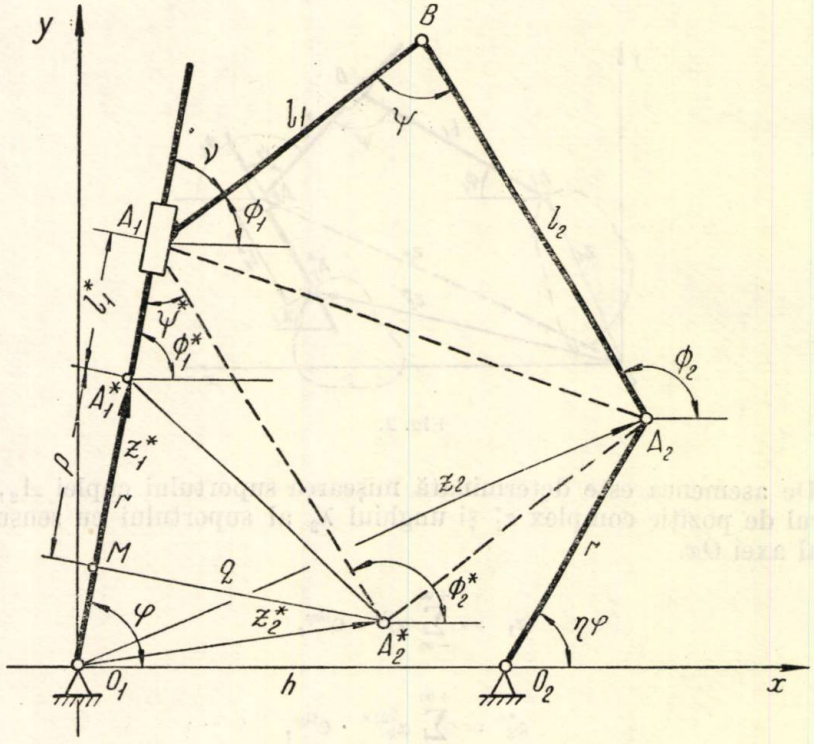


Fig. 3.

Raportul de transmitere η între manivele este considerat constant avînd valori întregi pozitive și negative

$$\eta = \pm \frac{\omega_2}{\omega_1} = \text{const.},$$

unde ω_1 și ω_2 sînt vitezele unghiulare ale manivelelor O_1A_1 și O_2A_2.

La acest mecanism ne propunem să determinăm unghiurile Φ_1, Φ_2, Ψ și lungimea O_1A_1. Unghiul φ_0 reprezintă decalajul inițial între elementele O_1A_1 și O_2A_2.

a). *Cazul* $\eta \neq 1$

Pentru vectorii de poziție complecși z_1^* și z_2 avem următoarele dezvoltări în serie Fourier complexă :

$$z_1^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)*} \cdot e^{ik\varphi} = r\, e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi_0}, \tag{7}$$

$$z_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi} = h + r \cdot e^{i\eta\varphi} \cdot e^{i\varphi_0}, \tag{8}$$

de unde rezultă valoarea coeficienților $\alpha_k^{(1)*}$ și $\alpha_k^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)*} &= r\, e^{i\varphi_0}, \\ \alpha_0^{(2)} &= h, \\ \alpha_\eta^{(2)} &= r \cdot e^{i\varphi_0}. \end{aligned} \tag{9}$$

Observăm că între unghiurile Φ_1 și φ există relația

$$\Phi_1 = \varphi - \nu,$$

din care rezultă

$$\begin{aligned} e^{i\Phi_1} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi} = e^{i\varphi} \cdot e^{-i\nu}, \\ A_1^{(1)} &= e^{-i\nu}, \\ A_m^{(1)} &= 0 \qquad (m \neq 1). \end{aligned} \tag{10}$$

Pentru vectorii $e^{i\Phi_2}$ și $e^{i\Psi}$ obținem următoarele relații asemănătoare :

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_2} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}, \\ e^{i\Psi} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k \cdot e^{ik\varphi}. \end{aligned} \tag{11}$$

Dar vectorul $O_1A_2^*$ se exprimă prin

$$O_1A_2^* = O_1A_2 + A_2A_2^*,$$

de unde rezultă

$$z_2^* = z_2 - l_1 \cdot e^{i\Phi_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)*} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{12}$$

precum și legătura între coeficienții α_k :

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(2)*} &= \alpha_k^{(2)} - l_1 A_k^{(1)}, \\ \alpha_0^{(2)*} &= h, \\ \alpha_1^{(2)*} &= -l_1 \cdot e^{-i\nu}, \\ \alpha_\eta^{(2)*} &= r \cdot e^{i\varphi_0}. \end{aligned} \tag{13}$$

Elementul variabil l_1^* are dezvoltarea

$$l_1^* = A_1^*A_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^* \cdot e^{ik\varphi}, \tag{14}$$

unde $L_{-k}^* = \overline{L}_k^*$.

Din figura 3 observăm

$$A_2^*A_1^* = O_1A_1^* - O_1A_2^*$$

şi deci

$$A_2^*A_1^* = z_1^* - z_2^* = l_2\,e^{i\varphi_2^*} - l_1\,e^{i\Phi_1^*} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k^* \cdot e^{ik\varphi}. \tag{15}$$

Din cele de mai sus rezultă imediat

$$\beta_k^* = \alpha_k^{(1)*} - \alpha_k^{(2)*}$$

şi deci:

$$\begin{aligned} \beta_0^* &= -h, \\ \beta_1^* &= r \cdot e^{i\varphi_0} + l_1 \cdot e^{-i\nu}, \\ \beta_{\eta}^* &= -r \cdot e^{i\varphi_0}. \end{aligned} \tag{16}$$

Vectorul complex

$$V_1^* = A_2^*A_1^* \cdot e^{-i\Phi_1^*}$$

se exprimă prin

$$V_1^* = l_2 \cdot e^{i\Psi^*} - l_1^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k^{(1)*} \cdot e^{ik\varphi}, \tag{17}$$

din care rezultă valoarea coeficienţilor $C_k^{(1)}$

$$\begin{aligned} C_{-1}^{(1)*} &= -h, \\ C_0^{(1)*} &= r \cdot e^{i\varphi_0} + l_1 \cdot e^{-i\nu}, \\ C_{\eta-1}^{(1)*} &= -r \cdot e^{i\varphi_0}. \end{aligned} \tag{18}$$

Dar

$$A_2^*A_1^* = p \cdot e^{i\Phi_1^*} + q \cdot e^{i\left(\Phi_1^* + \frac{\pi}{2}\right)} = (p + iq) \cdot e^{i\Phi_1^*},$$

din care rezultă

$$V_1^* = p + iq, \tag{19}$$

unde

$$\begin{aligned} p &= \sum_{-\infty}^{+\infty} p_k \cdot e^{ik\varphi}, \\ q &= \sum_{-\infty}^{+\infty} q_k \cdot e^{ik\varphi}. \end{aligned} \tag{20}$$

Deoarece p şi q sînt mărimi reale, rezultă totodată şi relaţiile

$$\begin{aligned} p_k &= \overline{p}_{-k}, \\ q_k &= \overline{q}_{-k}. \end{aligned} \tag{21}$$

Din relaţia (17) şi ţinînd seama de (21), obţinem

$$C_k^{(1)\star} = p_k + \mathrm{i}q_k \tag{22}$$

şi deci :

$$p_k = \frac{C_k^{(1)\star} + \overline{C}_{-k}^{(1)\star}}{2}, \qquad q_k = \frac{C_k^{(1)\star} - \overline{C}_{-k}^{(1)\star}}{2\mathrm{i}}, \tag{23}$$

precum şi :

$$p_0 = r\cos\varphi_0 + l_1\cos\nu, \quad p_1 = -\frac{h}{2} = \overline{p}_{-1}, \quad p_{\eta-1} = -\frac{r}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0} = \overline{p}_{-(\eta-1)}, \tag{24}$$

$$q_0 = r\sin\varphi_0 - l_1\sin\nu, \quad q_1 = \frac{h}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \overline{q}_{-1}, \quad q_{\eta-1} = \frac{r}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)} = q_{-(\eta-1)}. \tag{25}$$

Din triunghiul dreptunghic $A_1MA_2^{\star}$ rezultă

$$\sin\Psi^{\star} = \frac{q}{l_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k^{\star}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}$$

şi deci

$$D_k^{\star} = \frac{q_k}{l_2}, \quad D_0^{\star} = \frac{r_0\sin\varphi_0 - l_1\sin\nu}{l_2}, \quad D_1^{\star} = \frac{h}{2l_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \overline{D}_{-1}^{\star}, \quad D_{\eta-1}^{\star} = \frac{r}{2l_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)} = \overline{D}_{-(\eta-1)}^{\star}. \tag{26}$$

Corespunzător metodei generale [1], [2], [3], dezvoltăm $\cos\Psi^{\star}$ în serie Fourier complexă

$$\cos\Psi^{\star} = \pm\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2\Psi^{\star} - \frac{1}{2^2\cdot 2!}\sin^4\Psi^{\star}\ldots \ldots\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)}{2n\cdot n!}\sin^{2\eta}\Psi^{\star}\ldots\right] = \sum_{-\infty}^{+\infty}\Delta_k^{\star}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}. \tag{27}$$

Coeficienții Δ_k^* se obțin cu ajutorul coeficienților D_k^*.
Puterile pare ale funcției sin Ψ^* sînt date de formulele

$$\begin{aligned}
\sin^2 \Psi^* &= \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k^{(2)*} \cdot e^{ik\varphi}, \\
\sin^4 \Psi^* &= \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k^{(4)*} \cdot e^{ik\varphi}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sin^{2n} \Psi^* &= \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k^{(2n)*} \cdot e^{ik\varphi}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Legătura între coeficienți rezultă prin relațiile

$$\begin{aligned}
D_m^{(2)*} &= \sum D_{k+m}^* \overline{D}_k^* = \overline{D}_m^{(2)*}, \\
D_m^{(4)*} &= \sum D_{k+m}^{(2)*} \overline{D}_k^{(2)*} = \overline{D}_{-m}^{(4)*}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
D_m^{(2n)*} &= \sum D_{k+m}^{(2n-2)*} \overline{D}_k^{(2n-2)*} = \overline{D}_{-m}^{(2n)*}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Astfel, de exemplu, coeficienții $D_k^{(2)*}$ rezultă sub următoarea formă:

$$\begin{aligned}
D_0^{(2)*} &= \frac{h^2 + r^2}{2\varphi_2^2} + \left(\frac{r}{l_2} \sin \varphi_0 - \frac{l_1}{l_2} \sin \nu \right), \\
D_1^{(2)*} &= -\frac{h}{2} \left(\frac{r}{l_2} \sin \varphi_0 - \frac{l_1}{l_2} \sin \nu \right) e^{i\frac{\pi}{2}}, \\
D_2^{(2)*} &= -\frac{h^2}{4l_2}, \\
D_{\eta-2}^{(2)*} &= -\frac{rh}{2l_2^2} e^{i\varphi_0}, \\
D_{\eta-1}^{(2)*} &= \frac{r}{l_2} \left(\frac{r}{l_2} \sin \varphi_0 - \frac{l_1}{l_2} \sin \nu \right) e^{i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}, \\
D_\eta^{(2)*} &= \frac{hr}{2l_2^2} e^{i\varphi_0}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Se deduc în final coeficienții dezvoltării în serie Fourier complexă ai funcției cos Ψ^* prin relațiile

$$\begin{aligned}
\Delta_0^* &= \pm 1 \mp \left[\frac{1}{2} D_0^{(2)*} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} D_0^{(4)*} + \cdots \right. \\
&\left. \cdots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n!} D_0^{(2n)*} \cdots \right], \\
\Delta_k^* &= \overline{\Delta}_{-k}^* = \mp \left[\frac{1}{2} D_k^{(2)*} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} D_k^{(4)*} + \cdots \right. \\
&\left. \cdots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n!} D_k^{(2n)*} \cdots \right].
\end{aligned} \tag{31}$$

Semnele + și − corespund situațiilor cînd unghiul Ψ^* se găsește în cadranele 1 și 4 sau 2 și 3.

Fiind cunoscuți coeficienții Δ_k^*, rezultă ușor coeficienții Fourier B_k^*

$$B_k^* = \Delta_k^* + iD_k^* \tag{32}$$

și avem posibilitatea să obținem unghiul Ψ^*, cunoscînd vectorul

$$e^{i\Psi^*} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k^* \cdot e^{ik\varphi}. \tag{33}$$

În continuare, coeficienții $A_k^{(2)}$ rezultă în funcție de coeficienții B_k^* și $A_k^{(1)*}$ prin relația de legătură

$$A_m^{(2)} = \sum A_{k+m}^{(1)*} \cdot B_{-k}^*. \tag{34}$$

Unghiul Φ_2 rezultă prin vectorul

$$e^{i\Phi_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(2)} \cdot e^{ik\varphi}. \tag{35}$$

În final obținem coeficienții L_k^* prin relația

$$L_k^* = l_2 B_k^* - C_k^{(1)}. \tag{36}$$

Prin ultimele relații, categoria acestor mecanisme este complet determinată.

Folosind faptul că triunghiul $A_1^* MA_2^*$ este dreptunghic, rezultă

$$\Psi^* = \arcsin\left\{\frac{r\sin l_0 - l_1 \sin \nu + h\sin\varphi - r\left[\varphi_0 + (\eta - 1)\, l\right]}{l_2}\right\}, \tag{37}$$

$$p = r\cos\varphi_0 + l_1\cos\nu - h\cos\varphi - r\cos\left[\varphi_0 - (\eta - 1)\, l\right] \tag{38}$$

și deci

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \Psi + \varphi, \\ \Phi_1 &= \varphi - \nu, \\ \Psi &= \Psi^* + \nu, \\ l_1 &= l_2 \cos\Psi^* - p. \end{aligned} \tag{39}$$

Relația (37) permite impunerea următoarei condiții de mobilitate

$$l_2 > |r\sin\varphi_0 - l_1\sin\nu| + r + h. \tag{40}$$

Rapiditatea convergenței seriilor este asigurată pentru

$$|r\sin\varphi_0 - l_1\sin\nu| > \frac{h}{2} > \frac{r}{2}. \tag{41}$$

b). *Cazul* $\eta = +1$

În această condiție de funcționare, relațiile (37) și (38) se simplifică și deci

$$\Psi^* = \arcsin\left\{\frac{h\sin\varphi - l_1\sin\nu}{l_2}\right\},$$

$$p = l_1\cos\nu - h\cos\varphi. \tag{42}$$

Parametrii ce urmează a fi determinați se exprimă prin

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \varphi - \nu,\\ \Phi_2 &= \Psi^* + \varphi,\\ \Psi &= \Psi^* + \nu,\\ l_1^* &= l_2\cos\Psi^* - p,\end{aligned} \tag{43}$$

iar condiția (40) devine :

$$l_2 > h + l_1|\sin\nu|. \tag{44}$$

4. MECANISME PENTALATERE DE CATEGORIA V

Această categorie de mecanisme conține două cuple cinematice de translație.

Ne propunem să determinăm următorii parametri : l_1, l_2, Φ_1, Φ_2.

a). *Cazul* $\eta \neq 1$

Vectorii de poziție z_1 și z_2 au următoarele dezvoltări în serie Fourier complexă :

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1 e^{i\varphi}\cdot e^{i\varphi_0} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_k^{(1)}\cdot e^{ik\varphi},\\ z_2 &= h + r_2\cdot e^{i\eta\varphi}\cdot e^{i\varphi_0} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_k^{(2)}\cdot e^{ik\varphi},\end{aligned} \tag{45}$$

de unde rezultă coeficienții $\alpha_k^{(1)}$ și $\alpha_k^{(2)}$,

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(1)} &= r_1\cdot e^{i\varphi_0},\\ \alpha_0^{(2)} &= h,\\ \alpha_\eta^{(2)} &= r_2\, e^{i\varphi_0}.\end{aligned} \tag{46}$$

Vectorul V_2 are dezvoltarea

$$V_2 = A_1A_2e^{-i\Phi_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}C_k^{(2)}\cdot e^{ik\varphi}, \tag{47}$$

rezultînd următoarea relație între coeficienții C_k, β_k și $A_k^{(2)}$:

$$C_m^{(2)} = \sum\beta_{k+m}\overline{A}_k^{(2)}, \tag{48}$$

precum şi

$$C_{-\eta}^{(2)} = h \cdot e^{-i\nu},$$
$$C_{1-\eta}^{(2)} = -r_1 \cdot e^{i(\varphi_0 - \nu)}, \tag{49}$$
$$C_0^{(2)} = r_2 \cdot e^{i(\varphi_0 - \nu)}.$$

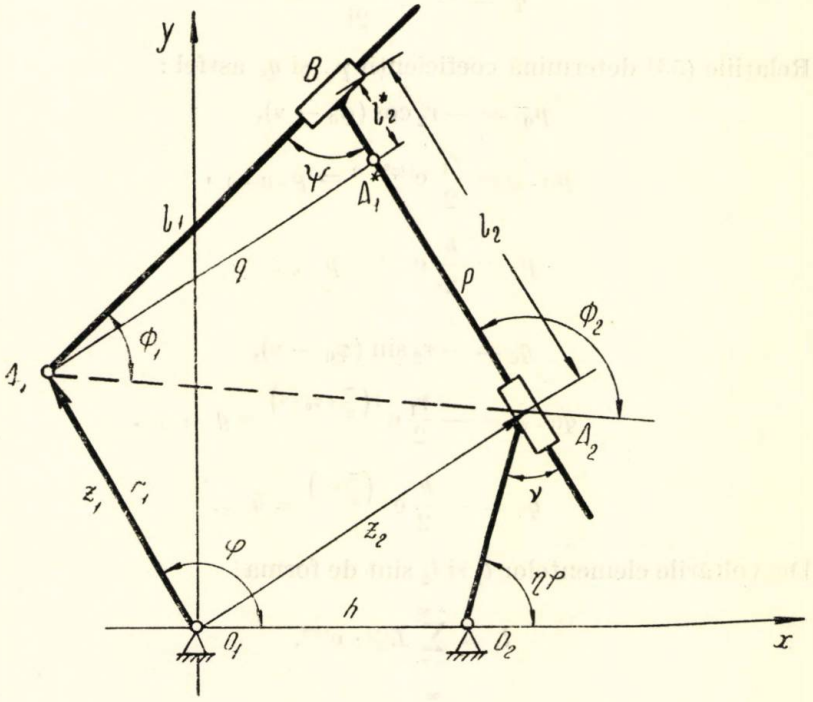


Fig. 4.

Dar

$$A_1A_2 = q \cdot e^{i\Phi_1^*} - p \cdot e^{i\Phi_2} = q \cdot e^{i\Phi_2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{\varepsilon}} - p \cdot e^{i\Phi_2},$$

de unde rezultă :

$$V_2 = -(p + iq). \tag{50}$$

Dezvoltăm în serie mărimile p şi q după relaţiile

$$p = \sum p_k \cdot e^{ik\varphi},$$
$$q = \sum q_k \cdot e^{ik\varphi}, \tag{51}$$

cu

$$p_k = \overline{p}_{-k},$$
$$q_k = \overline{q}_{-k}.$$

Relaţiile (47) şi (50) determină legătura între coeficienţi

$$C_k^{(2)} = -(p_k + iq_k),$$
$$\overline{C}_{-k}^{(2)} = -(p_k - iq_k), \tag{52}$$

din care rezultă imediat :

$$p_k = -\frac{C_k^{(2)} + \overline{C}_{-k}^{(2)}}{2},$$

$$q_k = -\frac{C_k^{(2)} - \overline{C}_{-k}^{(2)}}{2\mathrm{i}}. \tag{53}$$

Relaţiile (53) determină coeficienţii p_k şi q_k astfel :

$$p_0 = -r_2 \cos(\varphi_0 - \nu),$$

$$p_{(1-\eta)} = \frac{r_1}{2} e^{\mathrm{i}(\varphi^0 - \nu)} = \overline{p}_{-(1-\eta)}, \tag{54}$$

$$p_\eta = \frac{h}{2} e^{-\mathrm{i}\nu} = \overline{p}_{-\eta};$$

$$q_0 = -r_2 \sin(\varphi_0 - \nu),$$

$$q_{(1-\eta)} = -\frac{r_1}{2} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_0 - \nu\right)} = \overline{g}_{-(1-\eta)}, \tag{55}$$

$$q_\eta = -\frac{h}{2} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \nu\right)} = \overline{q}_{-\eta}.$$

Dezvoltările elementelor l_1 şi l_2 sînt de forma

$$l_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(1)} \cdot e^{\mathrm{i}k\varphi},$$

$$l_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(2)} \cdot e^{\mathrm{i}k\varphi}. \tag{56}$$

Din triunghiul dreptunghic $A_1 BA_1^*$ avem :

$$l_1 = \frac{1}{\sin \Psi} q,$$

şi deci

$$L_k^{(1)} = \frac{1}{\sin \Psi} q_k, \tag{57}$$

sau :

$$L_0^{(1)} = -\frac{r_2}{\sin \Psi} \sin(\varphi_0 - \nu),$$

$$L_{(1-\eta)}^{(1)} = -\frac{r_1}{2 \sin \Psi} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_0 - \nu\right)}, \tag{58}$$

$$L_\eta^{(1)} = -\frac{h}{2 \sin \Psi} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \nu\right)}$$

Pentru elementul l_2^* obținem de asemenea

$$l_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_k^{(2)*} \cdot e^{ik\varphi}$$

și coeficienții

$$\begin{aligned} L_0^{(2)*} &= -r_2 \operatorname{ctg} \Psi \cdot \sin(\varphi_0 - \nu), \\ L_{(1-\eta)}^{(2)*} &= -\frac{r_1}{2} \operatorname{ctg} \Psi \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_0-\nu\right)}, \\ L_\eta^{(2)*} &= -\frac{h}{2} \operatorname{ctg} \Psi \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\nu\right)}. \end{aligned} \tag{59}$$

Deoarece

$$l_2^* = p_2 + l_2^*,$$

rezultă

$$L_k^{(2)} = p_k + L_k^{(2)*} \tag{60}$$

și deci

$$\begin{aligned} L_0^{(2)} &= -r_2 \cos(\varphi_0 - \nu) - r_2 \operatorname{ctg} \Psi \cdot \sin(\varphi_0 - \nu), \\ L_{1-\eta}^{(2)} &= \frac{r_1}{2} e^{i(\varphi_0-\nu)} - \frac{r_1}{2} \operatorname{ctg} \Psi \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_0-\nu\right)}, \\ L_\eta^{(2)} &= -\frac{h}{2} e^{i\nu} - \frac{h}{2} \operatorname{ctg} \Psi \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\nu\right)}. \end{aligned} \tag{61}$$

În final obținem

$$\Phi_1 = \nu + \eta\varphi - \Psi, \tag{62}$$

$$\Phi_2 = \nu + \eta\varphi, \tag{63}$$

$$\begin{aligned} l_1 = &-\frac{r_2}{\sin \Psi} \cdot \sin(\varphi_0 - \nu) + \frac{h}{\sin \Psi} \sin(\nu + \eta\varphi) + \\ &+ \frac{r_1}{\sin \Psi} \sin[\varphi_0 - \nu + (1 - \eta)\varphi], \end{aligned} \tag{64}$$

$$l_2 = \frac{r_2}{\sin \Psi} \sin(\nu - \varphi_0 - \Psi) + \frac{h}{\sin \Psi} \sin(\nu + \eta\varphi - \Psi) \tag{65}$$

$$\Psi \neq k\pi, \quad k = 0, 1, 2.$$

b). *Cazul* $\eta = +1$

Relațiile anterioare se simplifică după cum urmează:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \nu + \varphi - \Psi, \\ \Phi_2 &= \nu + \varphi, \end{aligned} \tag{66}$$

$$l_1 = -\frac{r_2 - r_1}{\sin \Psi} \sin(\varphi_0 - \nu) + \frac{h}{\sin \Psi} \sin(\nu + \varphi),$$

$$l_2 = \frac{r_2 - r_1}{\sin \Psi} \sin(\nu - \varphi_0 - \Psi) + \frac{h}{\sin \Psi} \sin(\nu + \varphi - \Psi),$$

$$\Psi \neq k\pi, \quad k = 0, 1, 2.$$

5. EXEMPLU NUMERIC

Mecanism pentalater de categoria III, cu următoarele date:

$\eta = +1$, $r = 10$, $l_1 = 20$, $l_2 = 50$, $h = 30$, $\nu = 30°$, $\varphi_0 = 0°$, $\varphi = 90°$.

Obţinem:

$$\Phi_1 = 60°,$$

$$\Phi_2 = 113° 40',$$

$$\Psi = 53° 40',$$

$$l_1^* = 28{,}9,$$

$$\dot{z}_B = -\omega_1 (55{,}5 + 44\,\mathrm{i}),$$

$$\ddot{z}_B = -\varepsilon_1 (55{,}5 + 44\,\mathrm{i}) + \omega_1^2 (98 - 134{,}5\,\mathrm{i}).$$

Primită la redacţie la 29 iulie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, *Contribuţii la cinematica diadei*, Cebîşev, St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959).
2. R. C. Bogdan, *Consideraţii analitice asupra grupelor cinematice cu două elemente*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *1* (1964).
3. — *Studiul general, prin serii armonice complexe, asupra mecanismelor cu cinci elemente articulate*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *2* (1964).
4. — *Mecanisme cu cinci elemente articulate. I. Rapoarte de transmitere pozitive*, St. cerc., mec. apl., **XV**, *5* (1964).
5. — *Mecanisme cu cinci elemente articulate. II. Rapoarte de transmitere negative*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *6* (1964).
6. R. C. Bogdan, T. V. Huncher, *Analiza armonică complexă a grupelor structurale binare de aspect IV şi V, în construcţia mecanismelor*, St. cerc. mec. apl., **24**, *1* (1967).
7. — *Sistematizarea generală şi calculul unitar al mecanismelor fundamentale plane, pentalatere şi patrulatere*, St. cerc. mec. apl., **24**, *2* (1967).
8. — *Mecanisme fundamentale plane, cu unele cazuri particulare ale acestora*, St. cerc. mec. apl., **24**, *4* (1967).
9. Meyer zur Capellen W., *Zur Theorie der Bahnkurven — Rastgetriebe*, Konstruktion, *10* (1963).
10. Chr. Pelecudi, R. C. Bogdan, L. Calmaciuc, *Contribuţii la cinematica mecanismului cu patru elemente*, St. cerc. mec. apl., **XI**, *2* (1960); Mehanika, Izdat. Akad. Nauk SSSR, *3* (1961).
11. R. P. Pollitt, *Five-bar linkages with two drive cranks*, Machine Design, **34**, *2* (1962).
12. S. E. Rose, *Five-bar loop synthesis*, Machine Design, **33**, *21* (1961).
13. D. C. Tao, A. S. Hall, *Analysis of symmetrical five-bar linkages*, Product Engineering, *23* (1952).
14. — *Die Erzeugung von Bewegung mit mehreren Rasten mit Hilfe des fünfgelenkigen zweikurbel Getriebes*, Das Industrieblatt, Februarie, 1962.

RELAȚII GENERALE PENTRU DETERMINAREA UNOR PARAMETRI GEOMETRICI ȘI CINEMATICI AI MOTOARELOR CU PROFIL DE LUCRU TROCOIDAL

de C. I. MANEA
Academia militară generală București

531.1

Pornindu-se de la studiul particularităților constructive și a condițiilor de funcționare, în lucrare, s-au stabilit relații generale pentru determinarea raportului turațiilor dintre arborele motor și piston, a constantei mecanismului de generare a profilului de lucru, a numărului de bucle ale profilului de lucru și a numărului de puncte în contact pe suprafața de lucru pentru întreaga gamă posibilă de motoare de acest tip.

1. INTRODUCERE

Dintre multiplele soluții sub care se pot realiza motoarele cu ardere internă cu piston rotativ, un interes deosebit îl prezintă motoarele cu piston cu mișcare planetară cu profil de lucru trocoidal [1, 2, 5, 6]. Aceasta este o consecință a avantajelor pe care le prezintă aceste tipuri de motoare din punct de vedere al simplității constructive, dimensiunilor de gabarit și greutății și al echilibrajului față de celelalte tipuri de motoare cu piston rotativ, precum și față de motoarele clasice cu piston cu mișcare alternativă de translație.

Cu toate că pînă în prezent au apărut numeroase informații cu privire la unele motoare care fac parte din această categorie, din literatura de specialitate rezultă că nu s-au dedus încă relații care să stabilească legături generale între parametrii lor geometrici și cinematici. Pornindu-se de la studiul condițiilor de funcționare, în lucrarea de față s-au stabilit relații generale pentru determinarea raportului turațiilor dintre arborele motor și piston, a constantei mecanismului de generare a profilului de lucru, a numărului de bucle ale profilului de lucru și a numărului de puncte în contact pe suprafața de lucru pentru întreaga gamă posibilă de motoare.

ST. CERC. MEC. APL. TOM 26 NR. 6 P. 1235–1248 BUCUREȘTI 1967

2. CLASIFICAREA MOTOARELOR CU PROFIL DE LUCRU TROCOIDAL

Din teoria curbelor plane se cunoaşte că sub forma cea mai generală curbele cicloide se numesc trocoide [4]. Ele reprezintă traiectoria descrisă de un punct M aflat la o distanţă oarecare de axa de rotaţie a unui cerc care se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc fix din planul lui. Dacă punctul M se află la o distanţă $r_M > r$ (raza cercului rostogolitor) trocoida se numeşte trocoidă alungită, dacă $r_M < r$ trocoida se numeşte trocoidă scurtată.

Dacă cercul se rostogoleşte la exterior, curba obţinută se numeşte epitrocoidă, dacă cercul se rostogoleşte la interior, curba se numeşte hipotrocoidă. Dacă $r_M = r$ (punctul M se află pe cerc) se obţine epicicloida (dacă cercul se roteşte la exterior) şi hipocicloida (dacă cercul se roteşte la interior).

Motoarele cu piston cu mişcare planetară cu profil de lucru trocoidal se pot clasifica în funcţie de natura curbei folosite la executarea profilului de lucru precum şi în funcţie de organul profilat. Se disting următoarele categorii de motoare :

— motoare cu profil de lucru executat în epitrocoidă ;

— motoare cu profil de lucru executat în hipotrocoidă.

Motoarele cu profil de lucru executat în epitrocoidă se pot clasifica în :

— motoare cu statorul prelucrat în epitrocoidă ;

— motoare cu pistonul prelucrat în epitrocoidă.

Motoarele cu profil de lucru executat în hipotrocoidă se pot clasifica în :

— motoare cu statorul prelucrat în hipotrocoidă ;

— motoare cu pistonul prelucrat în hipotrocoidă.

Din punctul de vedere al condiţiilor de funcţionare şi de generare a profilului de lucru există diferenţe între motoarele cu profil de lucru executat în epitrocoidă şi cele cu profil de lucru executat în hipotrocoidă. De aceea relaţiile ce se stabilesc sînt caracteristice fiecărei game de motoare.

NOTAŢII

r — raza cercului rostogolitor ;

r_0 — raza cercului de bază ;

r_M — distanţa de la centrul cercului rostogolitor la punctul M ;

$k_e = \frac{r}{r_0}$ — constanta mecanismului în cazul motoarelor cu profil de lucru în epitrocoidă ;

$k_h = \frac{r}{r_0}$ — constanta mecanismului în cazul motoarelor cu profil de lucru în hipotrocoidă ;

$e = r - r_0$ — raza manivelei arborelui motor;
n — turația arborelui motor;
n_p — turația pistonului;
$i_e = \frac{n}{n_p}$ — raportul de transmitere a turațiilor în cazul motoarelor cu profil de lucru în epitrocoidă;
$i_h = \frac{n}{n_p}$ — raportul de transmitere în cazul motoarelor cu profil de lucru în hipotrocoidă;
p_e — numărul de epitrocoide (bucle) ale suprafeței de lucru la motoarele cu profil în epitrocoidă;
p_h — numărul de hipotrocoide (bucle) ale suprafeței de lucru la motoarele cu profil în hipotrocoidă;
q_e — numărul de puncte în contact pe suprafața de lucru la motoarele cu profil în epitrocoidă;
q_h — numărul de puncte în contact pe suprafața de lucru la motoarele cu profil în hipotrocoidă.

3. MOTOARELE CU PROFIL DE LUCRU EXECUTAT ÎN EPITROCOIDĂ

Schema mecanismului de generare a profilului de lucru în epitrocoidă se prezintă în figura 1. Pentru a realiza un contur continuu, în construcția motoarelor se folosesc numai epitrocoidele alungite ($r_M > r$). În cazul cînd punctul M aparține cercului rostogolitor (de care este fixat

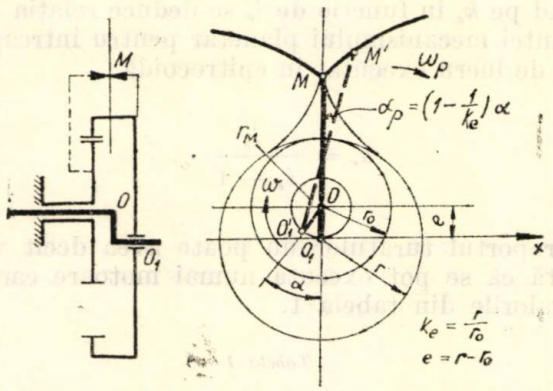


Fig. 1

pistonul fig. 1), acesta va descrie pe partea fixă (stator) epitrocoida. În cazul cînd punctul M aparține părții fixe (soluție prezentată punctat în figura 1), acesta va descrie pe partea mobilă (piston) epitrocoida.

3.1. DETERMINAREA RAPORTULUI DE TRANSMITERE i_e

Cercul rostogolitor fiind plasat pe manivela arborelui motor, care se roteşte cu turaţia n, turaţia sa n_p se determină cu ajutorul relaţiei :

$$n_p = \left(1 - \frac{1}{k_e}\right) n. \tag{1}$$

Întrucît din motive constructive $k_e > 1$, turaţia pistonului (cercului rostogolitor) este mai mică decît turaţia arborelui motor. Din această cauză, pentru a obţine un contur închis, deci pentru ca punctul M să revină în situaţia iniţială, arborele motor va trebui să facă mai multe rotaţii, însă neapărat un număr întreg (pentru ca şi acesta să ajungă în poziţia iniţială). Ţinînd seama de această observaţie, raportul dintre turaţia arborelui motor şi aceea a pistonului i_e nu poate avea decît valorile :

$$i_e = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \ldots\ m \ldots$$

3.2. DETERMINAREA CONSTANTEI MECANISMULUI k_e

Din relaţia (1) se deduce valoarea rapcartelor de transmitere i_e

$$i_e = \frac{n}{n_p} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k_e}} = \frac{k_e}{k_e - 1}. \tag{2}$$

Exprimînd pe k_e în funcţie de i_e se deduce relaţia generală pentru calculul constantei mecanismului planetar pentru întreaga gamă de motoare cu profil de lucru executat în epitrocoidă

$$k_e = \frac{i_e}{i_e - 1}. \tag{3}$$

Întrucît raportul turaţiilor nu poate avea decît valorile stabilite anterior, rezultă că se pot executa numai motoare care admit pentru constanta k_e valorile din tabela 1.

Tabela 1

i_e	2	3	4	5	6 ...	m
k_e	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$ ...	$\frac{m}{m-1}$

3.3. DETERMINAREA NUMĂRULUI DE BUCLE p_e

Numărul de bucle (epitrocoide) cu care se realizează suprafaţa de lucru (număr ce se obţine la o rotaţie completă a pistonului) se determină observînd că o epitrocoidă completă (buclă) se obţine ori de cîte ori manivela $\overline{OO_1}$ (care se roteşte mai repede) se suprapune peste segmentul $\overline{O_1M}$.

Notînd cu α_{p_e} unghiul descris de piston pentru a realiza o buclă, unghiul parcurs în acelaşi timp de arborele motor, va fi $\alpha_e = 2\pi + \alpha_{p_e}$.

Întrucît relaţia (1) exprimă şi legătura dintre unghiurile parcurse de piston şi cele parcurse de arbore, deci

$$\alpha_p = \left(1 - \frac{1}{k_e}\right)\alpha, \tag{4}$$

se poate scrie :

$$\frac{\alpha_{p_e}}{1 - \frac{1}{k_e}} = 2\pi + \alpha_{p_e}.$$

Din ultima relaţie rezultă că unghiul pe care se realizează o buclă va fi dat de ecuaţia

$$\alpha_{p_e} = (k_e - 1)\,2\pi. \tag{5}$$

Numărul de bucle p_e care se obţine la o rotaţie completă a pistonului va fi

$$p_e = \frac{2\pi}{\alpha_{p_e}}. \tag{6}$$

Ţinînd seama de formula (5) se deduce relaţia generală pentru determinarea numărului de bucle

$$p_e = \frac{1}{k_e - 1}. \tag{7}$$

Întrucît k_e poate avea numai valorile din tabela 1, motoarele cu profil de lucru în epitrocoidă se pot realiza cu un număr de bucle după cum rezultă din tabela 2.

Tabela 2

k_e	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}\cdots$	$\frac{m}{m-1}$
p_e	1	2	3	4	5 ...	$m-1$

3.4. DETERMINAREA NUMĂRULUI DE PUNCTE ÎN CONTACT q_e

Numărul de puncte în contact pe care îl are pistonul cu statorul (dacă statorul este prelucrat în epitrocoidă), respectiv statorul cu pistonul (dacă pistonul este prelucrat în epitrocoidă) se determină tot din analiza funcțională. Întrucît arborele motor execută un număr întreg de rotații în timp ce punctul M se rotește o singură dată (dacă se deplasează o dată cu pistonul), rezultă că la fiecare rotație a arborelui motor un alt punct M_1 aflat la aceeași distanță $\overline{O_1M}$ poate începe urmărirea profilului de lucru. Din aceste motive numărul maxim de puncte în contact q_e pe suprafața de lucru va fi egal cu raportul de transmitere

$$q_e = i_e = \frac{1}{1 - \frac{1}{k_e}}$$

sau

$$q_e = \frac{k_e}{k_e - 1}. \tag{8}$$

În tabela 3 s-au trecut valorile pe care le poate lua parametrul q_e în funcție de k_e.

Tabela 3

k_e	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}\cdots$	$\frac{m}{m-1}$
q_e	2	3	4	5	6 ...	m

3.5. DETERMINAREA ECUAȚIEI PROFILULUI DE LUCRU

Ecuația profilului de lucru în sistemul de axe x, y (plasat în axa de rotație a arborelui motor) se obține precizînd coordonatele unui punct curent M' în funcție de unghiul α descris de manivelă. Pe această bază se obține

$$x = \overline{OO_1} \sin(\pi + \alpha) + \overline{O_1M} \sin\left(1 - \frac{1}{k_e}\right)\alpha,$$

$$y = \overline{OO_1} \cos(\pi + \alpha) + \overline{O_1M} \cos\left(1 - \frac{1}{k_e}\right)\alpha.$$

Întrucît $\overline{OO_1} = e$ și $\overline{O_1M} = r_M$ se obține în definitiv

$$x = -e \sin\alpha + r_M \sin\frac{k_e - 1}{k_e}\alpha,$$

$$y = -e \cos\alpha + r_M \cos\frac{k_e - 1}{k_e}\alpha. \tag{9}$$

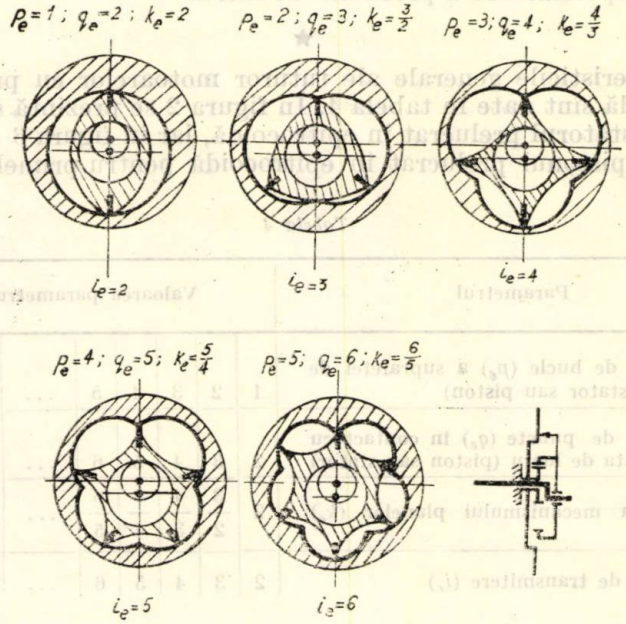

$p_e=1$; $q_e=2$; $k_e=2$
$p_e=2$; $q_e=3$; $k_e=\frac{3}{2}$
$p_e=3$; $q_e=4$; $k_e=\frac{4}{3}$
$i_e=2$
$i_e=3$
$i_e=4$
$p_e=4$; $q_e=5$; $k_e=\frac{5}{4}$
$p_e=5$; $q_e=6$; $k_e=\frac{6}{5}$
$i_e=5$
$i_e=6$

Fig. 2

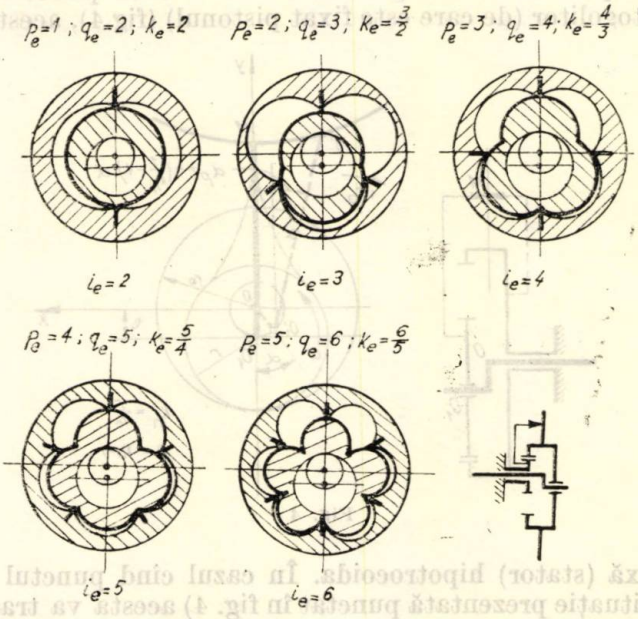

$p_e=1$; $q_e=2$; $k_e=2$
$p_e=2$; $q_e=3$; $k_e=\frac{3}{2}$
$p_e=3$; $q_e=4$; $k_e=\frac{4}{3}$
$i_e=2$
$i_e=3$
$i_e=4$
$p_e=4$; $q_e=5$; $k_e=\frac{5}{4}$
$p_e=5$; $q_e=6$; $k_e=\frac{6}{5}$
$i_e=5$
$i_e=6$

Fig. 3

Particularizînd valoarea lui k_e pentru fiecare caz cercetat se obţine ecuaţia corespunzătoare a profilului de lucru.

★

Caracteristicile generale ale tuturor motoarelor cu profil de lucru în epitrocoidă sînt date în tabela 4. În figura 2 se prezintă schemele motoarelor cu statorul prelucrat în epitrocoidă, iar în figura 3 schemele motoarelor cu pistonul prelucrat în epitrocoidă pentru primele cinci tipuri de motoare.

Tabela 4

Parametrul	Valoarea parametrului						
Numărul de bucle (p_e) a suprafeţei de lucru (stator sau piston)	1	2	3	4	5	...	$m-1$
Numărul de puncte (q_e) în contact cu suprafaţa de lucru (piston sau stator)	2	3	4	5	6	...	m
Constanţa mecanismului planelor (k_e)	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	...	$\frac{m}{m-1}$
Raportul de transmitere (i_e)	2	3	4	5	6	...	m

4. MOTOARE CU PROFIL DE LUCRU EXECUTAT ÎN HIPOTROCOIDĂ

Schema mecanismului de generare a profilului de lucru în hipotrocoidă este prezentată în figura 4. În cazul cînd punctul M aparţine cercului rostogolitor (de care este fixat pistonul) (fig.4), acesta va descrie

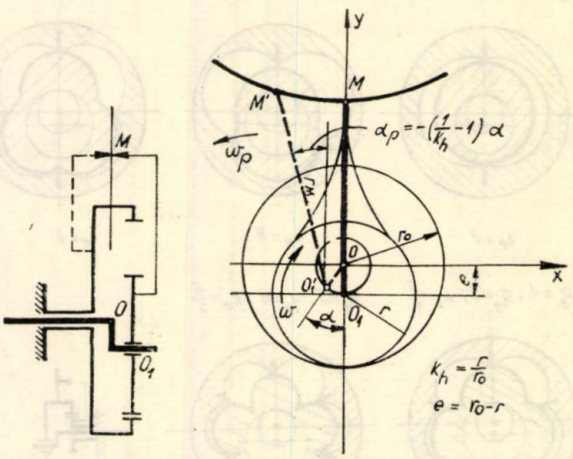


Fig. 4

pe partea fixă (stator) hipotrocoida. În cazul cînd punctul M aparţine părţii fixe (situaţie prezentată punctat în fig. 4) acesta va trasa pe partea mobilă (piston) hipotrocoida.

4.1. DETERMINAREA RAPORTULUI DE TRANSMITERE i_h

Cu notaţiile adoptate anterior, legătura dintre turaţia arborelui motor n şi turaţia pistonului (n_p) este dată de relaţia

$$n_p = -\left(\frac{1}{k_h} - 1\right) n. \tag{10}$$

Din motive constructive constanta mecanismului planetar $k_h = \frac{r}{r_0}$ poate primi numai valori cuprinse între 0 şi 1. Din această cauză turaţia pistonului poate fi mai mare, mai mică sau egală cu turaţia arborelui motor, însă întotdeauna de sens contrar.

Pentru $0 < k_h < \frac{1}{2}$, $|n_p| > |n|$,

Pentru $k_h = \frac{1}{2}$, $|n_p| = |n|$,

Pentru $1 > k_h > \frac{1}{2}$, $|n_p| < |n|$.

Soluţiile la care $0 < k_h \leqslant \frac{1}{2}$ nu permit realizarea unor construcţii cu spaţii variabile în timp, din care cauză nu se pot utiliza în construcţia de motoare.

Punînd din nou condiţia de a realiza un contur închis (vezi 3.1) în cazul cînd $\frac{1}{2} < k_h < 1$ se ajunge la concluzia că raportul de transmitere i_h va putea lua numai valorile

$$i_h = -2, -3, -4, -5, -6, \ldots, -m.$$

4.2. DETERMINAREA CONSTANTEI MECANISMULUI k_h

Întrucît în acest caz raportul de transmitere i_h se exprimă prin relaţia

$$i_h = -\frac{1}{\frac{1}{k_h} - 1} = -\frac{k_h}{1 - k_h}, \tag{11}$$

constanta mecanismului planetar pentru întreaga gamă de motoare cu profil de lucru în hipotrocoidă va fi dată de relaţia :

$$k_h = -\frac{i_h}{1 - i_h}. \tag{12}$$

În tabela 5 s-au trecut valorile pe care le poate lua constanta k_h în funcție de valorile lui i_h stabilite mai sus.

Tabela 5

i_h	$-2,$	$-3,$	$-4,$	$-5,$	$-6,$	$\ldots,$	$-m$
k_h	$\frac{2}{3},$	$\frac{3}{4},$	$\frac{4}{5},$	$\frac{5}{6},$	$\frac{6}{7},$	$\ldots,$	$\frac{m}{m+1}$

4.3. DETERMINAREA NUMĂRULUI DE BUCLE p_h

Numărul de bucle se determină și în acest caz observînd că o hipotrocoidă completă (buclă) se obține ori de cîte ori manivela $\overline{OO_1}$ se suprapune peste segmentul $\overline{O_1M}$.

Dacă α_{p_h} este unghiul descris de piston pentru a realiza o buclă, unghiul parcurs de arborele motor (care se rotește în sens contrar) va fi $\alpha = -(2\pi - \alpha_{p_h})$. Legătura între cele două unghiuri este dată de relația (10) care se poate scrie

$$\alpha_{p_h} = -\left(\frac{1}{k_h} - 1\right)\alpha. \tag{13}$$

Ținînd seama de valoarea lui α se obține

$$\frac{\alpha_{p_h}}{\frac{1}{k_h} - 1} = 2\pi - \alpha_{p_h},$$

de unde:

$$\alpha_{p_h} = (1 - k_h)\, 2\pi. \tag{14}$$

Numărul de bucle care se realizează la o rotație va fi

$$p_h = \frac{2\pi}{\alpha_{p_h}}.$$

Ținînd seama de valoarea lui α_{p_h} dată de relația (14) se obține formula generală pentru calculul lui p_h

$$p_h = \frac{1}{1 - k_h}. \tag{15}$$

În tabela 6 s-au trecut valorile pe care le poate lua p_h, în funcție de k_h

Tabela 6

k_h	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	...	$\frac{m}{m+1}$
p_h	3	4	5	6	7	...	$m+1$

4.4. DETERMINAREA NUMĂRULUI DE PUNCTE ÎN CONTACT q_h

Pe baza unor considerații similare cu cele prezentate la studiul motoarelor cu profil de lucru în epitrocoidă se obține

$$q_h = |i_h| = \frac{1}{\frac{1}{k_h} - 1}$$

sau

$$q_h = \frac{k_h}{1 - k_h}. \tag{16}$$

În tabela 7 s-au prezentat valorile pe care le poate lua parametrul q_h în funcție de k_h.

Tabela 7

k_h	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	...	$\frac{m}{m+1}$
q_h	2	3	4	5	6	...	m

4.5. DETERMINAREA ECUAȚIEI PROFILULUI DE LUCRU

În sistemul de axe x, y, plasat în axa de rotație a arborelui motor, ecuația profilului de lucru se obține scriind coordonatele unui punct M (fig. 4) în funcție de unghiul α descris de manivelă. Se obține

$$x = \overline{OO_1} \sin(\pi + \alpha) + \overline{O_1M'} \sin\left[-\left(\frac{1}{k_h} - 1\right)\alpha\right],$$

$$y = \overline{OO_1} \cos(\pi + \alpha) + \overline{O_1M'} \cos\left[-\left(\frac{1}{k_h} - 1\right)\alpha\right].$$

Folosind notaţiile anterioare pentru $\overline{OO_1}$ şi $\overline{O_1M'}$ se obţine în definitiv

$$x = -e \sin \alpha - r_M \sin \frac{1 - k_h}{k_h} \alpha,$$

$$y = -e \cos \alpha + r_M \cos \frac{1 - k_h}{k_h} \alpha. \tag{17}$$

Particularizînd valoarea lui k_h pentru fiecare caz se obţine ecuaţia corespunzătoare profilului de lucru.

★

Caracteristicile generale ale tuturor motoarelor cu profil de lucru în hipotrocoidă sînt date în tabela 8.

În figura 5 se prezintă schemele motoarelor cu statorul prelucrat în hipotrocoidă cu 3, 4, 5, 6 şi 7 bucle, iar în figura 6 schemele motoarelor cu pistonul prelucrat în hipotrocoidă cu 3, 4, 5, 6 şi 7 bucle.

Tabela 8

Parametrul	Valoarea parametrului						
Numărul de bucle (p_h) a suprafeţei de lucru (stator sau piston).	3	4	5	6	7	...	$m+1$
Numărul de puncte (q_h) în contact pe suprafaţa de lucru (piston sau motor).	2	3	4	5	6	...	m
Constanta mecanismului planetar (k_h).	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	...	$\frac{m}{m+1}$
Raportul de transmitere (i_h).	-2	-3	-4	-5	-6	...	$-m$

5. CONCLUZII

Pe baza studiului prezentat se desprind următoarele concluzii:

1. Motoarele cu piston rotativ cu profil de lucru trocoidal constituie o mare familie a căror caracteristici principale sînt date în tabelele 4 şi 8.

2. Pentru fiecare tip de motor se poate construi profilul de lucru folosind relaţiile 9 şi 17.

Primită la redacţie la 21 martie 1966

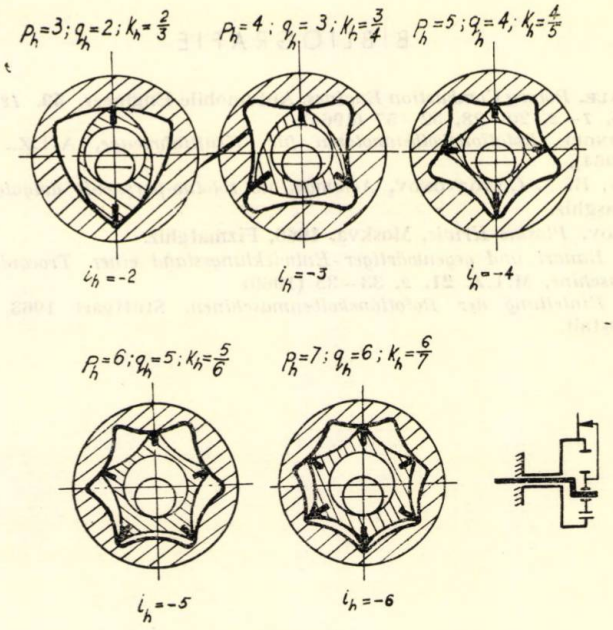

$P_h=3; q_h=2; K_h=\frac{2}{3}$
$P_h=4; q_h=3; K_h=\frac{3}{4}$
$P_h=5; q_h=4; K_h=\frac{4}{5}$
$i_h=-2$
$i_h=-3$
$i_h=-4$
$P_h=6; q_h=5; K_h=\frac{5}{6}$
$P_h=7; q_h=6; K_h=\frac{6}{7}$
$i_h=-5$
$i_h=-6$

Fig. 5

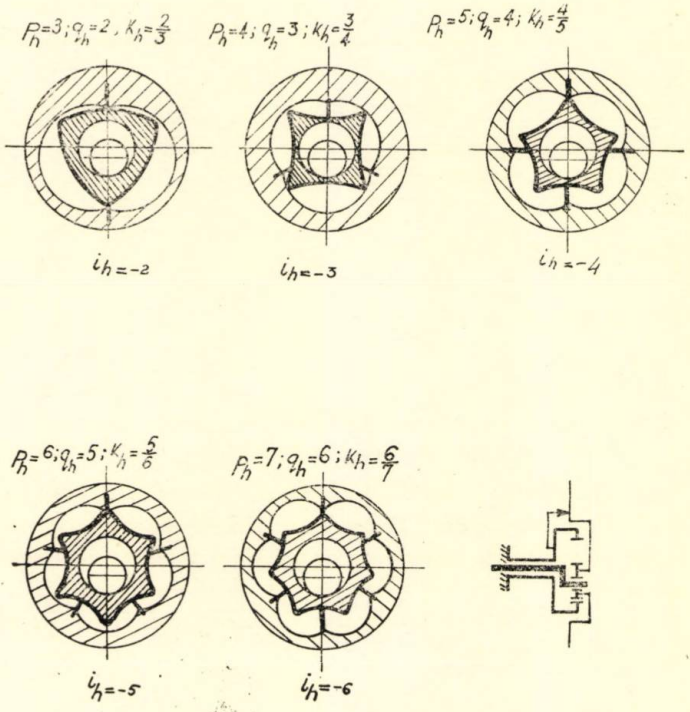

$P_h=3; q_h=2, K_h=\frac{2}{3}$
$P_h=4; q_h=3; K_h=\frac{3}{4}$
$P_h=5; q_h=4; K_h=\frac{4}{5}$
$i_h=-2$
$i_h=-3$
$i_h=-4$
$P_h=6; q_h=5; K_h=\frac{5}{6}$
$P_h=7; q_h=6; K_h=\frac{6}{7}$
$i_h=-5$
$i_h=-6$

Fig. 6

BIBLIOGRAFIE

1. F. R. ANSDALE, *Rotary Combustion Engines*, Automobile Engineer, **53**, *12*, 518–524 (1963); **54**, *1–2*, 20–28, 52–57 (1964).
2. D. W. BENSINGER, *Rotationskolbenmotoren für Kraftfahrzeuge*, A.T.Z., **66**, *4*, 120–125 (1964).
3. S. H. HANIN, B. S. CISTOZVONOV, *Avtomobilnie rotolno-porşnevie dvigateli*, Moskva, 1964, Maşghiz.
4. A. A. SAVELOV, *Ploskie Krivie*, Moskva, 1960, Fizmatghiz.
5. F. WANKEL, *Bauart und gegenwärtiger Entwicklungsstand einer Trocoiden-Rotationskolbenmaschine*, M.T.Z. **21**, *2*, 33–35 (1960).
6. F. WANKEL, *Einteilung der Rotationskolbenmaschinen*, Stuttgart 1963, Deutsche Verlag Anstalt.

CONSIDERAȚII ASUPRA GRADULUI DE ACOPERIRE LA ROȚILE DINȚATE CILINDRICE CU DINȚI DREPȚI *)

de M. D. GAFIȚEANU
Institutul politehnic Iași

În lucrare se prezintă unele considerații asupra gradului de acoperire real la angrenaje cu roți dințate cilindrice cu dinți drepți. Diferența dintre gradul de acoperire teoretic și cel real este determinată de deformații și erorile de prelucrare și crește cu creșterea numărului de dinți și a raportului de transmitere. În aceste condiții, angrenarea este însoțită de fenomene de uzură specifice.
Considerarea gradului de acoperire real prezintă importanță în special la roțile dințate din materiale plastice la care capacitatea portantă este puternic influențată.
Se propune în acest sens o explicație asupra dependenței dintre capacitatea portantă a roților dințate din materiale plastice și numărul de dinți.

1. INTRODUCERE

Capacitatea portantă a angrenajelor este determinată de parametrii geometrici, constructivi, de execuție și de exploatare ai roților dințate componente, în general ai transmisiei.

Analizînd influența numărului de dinți și deci a modulului asupra capacității portante a angrenajelor, influență constatată atît la roțile metalice [13] cît și la cele din materiale plastice [1], [8], s-au observat unele deosebiri față de dependența stabilită prin relațiile clasice de calcul de rezistență; mai mult, au apărut o serie de aspecte în strînsă legătură cu gradul de acoperire.

Fiind cunoscută definiția gradului de acoperire teoretic ca *raportul dintre lungimea arcului de angrenare și pas*, considerații geometrice simple, pentru angrenaje cu roți dințate cilindrice cu dinți drepți, cu dantura

*) Lucrare executată sub conducerea prof. dr. doc. Gh. Manea, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România.

normală necorijată, lipsite de erori dimensionale și de formă și nedeformabile, permit să se stabilească (fig. 1) :

$$\varepsilon = f_0(z_1, i). \tag{1}$$

După cum au arătat însă o serie de încercări experimentale [11], datorită deformațiilor și erorilor de prelucrare, gradul de acoperire real (ε_r) diferă ca mărime de mărimea calculată cu relația (1).

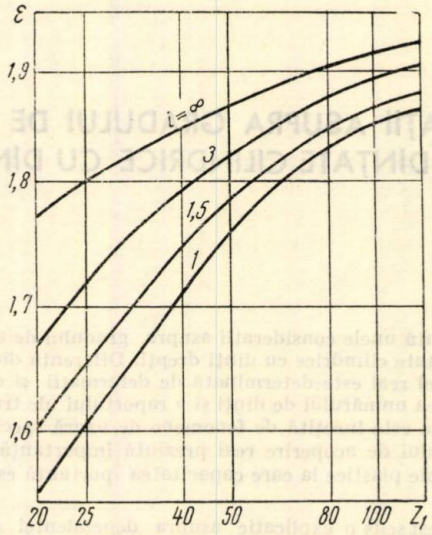


Fig. 1. — Dependența dintre gradul de acoperire teoretic (ε) și numărul de dinți ai pinionului (z_1) și raportul de transmitere (i).

Între gradul de acoperire și capacitatea portantă există o legătură determinată de modificarea condițiilor de solicitare ale dinților, distribuția sarcinii pe dinții în contact precum și de mărimea suprasolicitărilor cu caracter dinamic.

Lucrarea de față caută pe de o parte să precizeze noțiunea de grad de acoperire real și pe de altă parte să analizeze influența acestei mărimi asupra capacității portante.

2. GRADUL DE ACOPERIRE REAL (ε_r)

Gradul de acoperire real se poate determina cu ajutorul relației :

$$\varepsilon_r = \varepsilon + \Delta\varepsilon, \tag{2}$$

în care $\Delta\varepsilon$ este creșterea gradului de acoperire. Această creștere a gradului de acoperire se datorește prezenței deformațiilor la dinții în angrenare și erorilor de prelucrare, în special erorilor de pas [11]. Astfel (fig. 2) punctul de intrare teoretică în angrenare pentru flancurile în evolventă E_1, E_2 în pozițiile E_{11}, E_{21} este punctul S_1 situat pe linia de angrenare. Pentru un

sens de rotație indirect pentru roata dințată (2) se admite o poziție anterioară intrării teoretice în angrenare : flancul E_2 în poziția E_{22}. În ipoteza că roțile dințate nu sînt deformabile și nu au erori de prelucrare, poziției E_{22} pentru flancul dintelui roții (2) îi corespunde poziția E''_{12} pentru flancul E_1 corespunzător dintelui roții (1) sau pinionului (prin rostogolirea fără alunecare a cercurilor de rostogolire).

Deoarece în acest moment se află deja în angrenare alte perechi de dinți, există deformații și deoarece ambele roți pot avea erori de pas (de exemplu abateri pozitive pentru roata (2) și negative pentru roata (1)), pentru sensul de rotație ales flancul dintelui pinionului considerat nu se va găsi în E''_{12} ; există posibilitatea ca acest dinte al pinionului să se afle în poziția E'_{12}, în contact cu dintele roții în punctul S'_1.

Pentru flancurile considerate, angrenarea nu începe deci în punctul S_1, care este în legătură cu gradul de acoperire teoretic, ci în punctul S'_1.

În mod analog (fig. 3), dacă se consideră o poziție E_{22} pentru flancul E_2 al roții dințate, poziție posterioară ieșirii teoretice din angrenare (punctul S_2), flancul corespunzător al pinionului nu se va găsi în E''_{12} ci în poziția E'_{12}, din aceleași motive ca mai sus ; punctul de ieșire din angrenare se va deplasa din S_2 în S'_2.

Faptul că pentru anumite deformații și erori de prelucrare, intrarea și ieșirea din angrenare nu se produc în punctele S_1, S_2 ci anterior și respectiv posterior în S'_1, S'_2, presupune că intrarea și ieșirea din angrenare a flancurilor E_1, E_2 corespund unor unghiuri de rotație pentru pinion și roată mai mari decît cele corespunzătoare gradului de acoperire teoretic.

3. DETERMINAREA CREȘTERII GRADULUI DE ACOPERIRE ($\Delta\varepsilon$)

Pentru determinarea creșterii gradului de acoperire, s-a apreciat că nu este indicată înlocuirea în calcule a evolventelor pentru profilul flancurilor prin alte curbe care să permită o tratare matematică mai simplă ; aceasta, din cauză că aproximațiile inerente acestei înlocuiri (de exemplu evolventă prin parabolă) sînt de același ordin de mărime cu deformațiile și deci ar influența apreciabil rezultatele. Pe baza notațiilor din figura 2 se constată că :

Coordonatele punctului de intrare teoretică în angrenare S_1, în sistemul $X_2O_2Y_2$, sînt :

$$\begin{aligned} X_{2S_1} &= O_2S_1 \cos\alpha_2 = (m/2)\,(iz_1 + 2)\cos\alpha_2, \\ Y_{2S_1} &= O_2S_1 \sin\alpha_2 = (m/2)\,(iz_1 + 2)\sin\alpha_2, \end{aligned} \tag{3}$$

pentru

$$\alpha_2 = 70^\circ - \text{arc sin}\,[iz_1 \cos 20^\circ/(iz_1 + 2)], \tag{4}$$

unde

m — reprezintă modulul ;
z_1 — numărul de dinți ai pinionului ;
i — raportul de transmitere.

În sistemul $X_1 O_1 Y_1$, coordonatele punctului S_1 devin

$$X_{1S_1} = O_1O_2 - X_{2S_1} = (m/2)\ [z_1(1+i) - (iz_1+2)\cos\alpha_2],$$
$$Y_{1S_1} = (m/2)\ (iz_1+2)\ \sin\alpha_2. \tag{5}$$

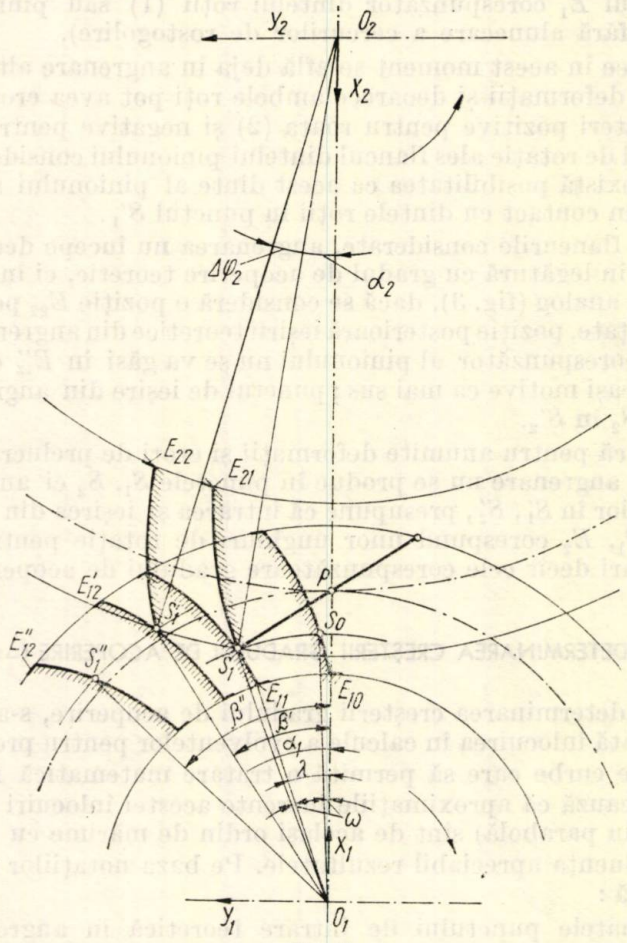


Fig. 2

Ecuația parametrică a evolventei E_1 în poziția E_{10}, în sistemul $X_1 O_1 Y_1$, este:

$$X_1 = (m/2)\ z_1\ (\cos t + t\ \sin t)\ \cos 20°,$$
$$Y_1 = (m/2)\ z_1\ (\sin t - t\ \cos t)\ \cos 20°. \tag{6}$$

Se consideră punctul S_0 care rezultă din intersecția evolventei E_{10} cu cercul de rază O_1S_1, coordonatele punctului S_0 situat pe evolventă fiind

$$X_{1S_0} = (m/2)\ z_1\ (\cos t_0 + t_0\ \sin t_0)\ \cos 20°,$$
$$Y_{1S_0} = (m/2)\ z_1\ (\sin t_0 - t_0\ \cos t_0)\ \cos 20°. \tag{7}$$

Însă

$$O_1 S_0 = O_1 S_1$$

și deci

$$X_{1S_0}^2 + Y_{1S_0}^2 = X_{1S_1}^2 + Y_{1S_1}^2 \tag{8}$$

sau :

$$(m^2/4)\ z_1^2 (1 + t_0^2)\ \cos^2 20° = (m^2/4)\ [[z_1 (1 + i) - (iz_1 + 2)\ \cos\alpha_2]^2 + + (iz_1 + 2)^2\ \sin^2\alpha_2]. \tag{9}$$

Ținînd însă seama de relația (4) se poate scrie :

$$t_0^2 = f_1 (z_1, i). \tag{10}$$

Parametrul t_0 înlocuit în ecuațiile (7) permite determinarea coordonatelor punctului S_0 și în continuare a unghiului ω format de raza vectoare $O_1 S_0$ cu sensul pozitiv al axei $O_1 X_1$:

$$\omega = \text{arc tg}\ (Y_{1S_0}/X_{1S_0}) = \text{arc tg}\ [(\sin t_0 - t_0 \cos t_0)/\cos t_0 + + t_0 \sin t_0)] = f_2 (z_1, i). \tag{11}$$

Se consideră un moment anterior intrării teoretice în angrenare (punctul S_1 cu evolventele respectiv în pozițiile E_{11}, E_{21}). Acest moment, pentru roata 2 este reprezentat prin evolventa E_2 în poziția E_{22} decalată față de poziția E_{21} cu unghiul $\Delta\varphi_2$.

Deoarece cercurile de rostogolire ale celor două roți execută o mișcare de rostogolire fără alunecare, rezultă că față de poziția E_{11} și evolventa E_1 va suferi o deplasare cu $\Delta\varphi_1 = i \cdot \Delta\varphi_2$, pînă în poziția E_{12}''. Ecuația parametrică a evolventei E_1 în poziția E_{11}, în sistemul $X_1 O_1 Y_1$ este :

$$\begin{aligned} X_1 &= (m/2)\ z_1\ [\cos t + (t - \lambda)\ \sin t]\ \cos 20°, \\ Y_1 &= (m/2)\ z_1\ [\sin t - (t - \lambda)\ \cos t]\ \cos 20°, \end{aligned} \tag{12}$$

în care λ este decalajul unghiular dintre pozițiile E_{10} și E_{11} ale evolventei E_1 :

$$\lambda = \alpha_1 - \omega = \text{arc tg}\ (Y_{1S_1}/X_{1S_1}) - \omega = \text{arc tg}\ [(iz_1 + 2)\ \sin\ \alpha_2/[z_1 (1 + + i) - (iz_1 + 2)\ \cos\ \alpha_2]] - \omega = f_3 (z_1, i). \tag{13}$$

Deoarece evolventa E_{12}'' este deplasată în raport cu evolventa E_{11} cu unghiul $\Delta\varphi_1$, ecuațiile ei parametrice în sistemul $X_1 O_1 Y_1$ apar astfel

$$\begin{aligned} X_1 &= (m/2)\ z_1\ [\cos t + (t - \lambda_\varphi)\ \sin t], \\ Y_1 &= (m/2)\ z_1\ [\sin t - (t - \lambda_\varphi)\ \cos t], \end{aligned} \tag{14}$$

unde

$$\lambda_\varphi = \lambda + \Delta_{\varphi_1}. \tag{15}$$

După cum am mai arătat se poate admite concomitent prezența unor deformații la nivelul dinților în angrenaje și a unor erori de pas în așa fel încît evolventa E_{22} rămînînd fixă, evolventa E_1 a dintelui pinionului să se deplaseze o dată cu aceasta din E''_{12} în E'_{12}, intrînd în contact cu evolventa E_{22} în punctul S'_1.

Coordonatele punctului S'_1 în sistemul $X_2 O_2 Y_2$ sînt :

$$\begin{aligned} X_{2S'_1} &= (m/2)\ (iz_1 + 2)\ \cos\ (\alpha_2 + \Delta\varphi_2), \\ Y_{2S'_1} &= (m/2)\ (iz_1 + 2)\ \sin\ (\alpha_2 + \Delta\varphi_2), \end{aligned} \tag{16}$$

iar în sistemul $X_1 O_1 Y_1$:

$$\begin{aligned} X_{1S'_1} &= (m/2)\ [z_1 + (1 + i) - (iz_1 + 2)\ \cos\ (\alpha_2 + \Delta\varphi_2)], \\ Y_{1S'_1} &= (m/2)\ [iz_1 + 2)]\ \sin\ (\alpha_2 + \Delta\varphi_2). \end{aligned} \tag{17}$$

Coordonatele punctului S''_1 situat pe evolventa E''_{12} sînt :

$$\begin{aligned} X_{1S''_1} &= (m/2)\ z_1\ [\cos\ t_1 + (t_1 - \lambda_\varphi)\ \sin\ t_1]\ \cos\ 20°, \\ Y_{1S''_1} &= (m/2)\ z_1\ [\sin\ t_1 - (t_1 - \lambda_\varphi)\ \cos\ t_1]\ \cos\ 20°. \end{aligned} \tag{18}$$

Se consideră că punctul S''_1 rezultă din intersecția evolventei E''_{12} cu cercul de rază $O_1 S'_1$:

$$O_1 S'_1 = O_1 S''_1 \text{ și deci : } X^2_{1S'_1} + Y^2_{1S'_1} = X^2_{1S''_1} + Y^2_{1S''_1} \tag{19}$$

sau :

$$\begin{aligned} (m^2/4)\ z_1^2\ [1 + (t_1 - \lambda_\varphi)^2]\ \cos^2\ 20° = (m^2/4)\ [[z_1\ (1 + i) - (iz_1 + \\ + 2)\ \cos\ (\alpha_2 + \Delta\varphi_2)]^2 + (iz_1 + 2)^2\ \sin^2\ (\alpha_2 + \Delta\varphi_2)], \end{aligned} \tag{20}$$

de unde pe baza relațiilor (13) și (15) :

$$t_1^2 = f_4\ (z_1, i, \Delta\varphi_2). \tag{21}$$

Cunoașterea parametrului t_1 permite determinarea coordonatelor $X_{1S''_1}$ și $Y_{1S''_1}$ precum și a unghiului β'' de poziție a punctului S''_1 :

$$\begin{aligned} \beta'' = \text{arc tg}\ (Y_{1S''_1}/X_{1S''_1}) = \text{arc tg}\ [[\sin\ t_1 - (t_1 - \lambda_\varphi)\ \cos t_1]/[\cos t_1 + \\ + (t_1 - \lambda_\varphi)\ \sin t_1]] = f_5\ (z_1, i, \Delta\varphi_2). \end{aligned} \tag{22}$$

Unghiul de poziție în sistemul $X_1 O_1 Y_1$ a punctului S'_1 este :

$$\begin{aligned} \beta' = \text{arc tg}\ (Y_{1S'_1}/X_{1S'_1}) = \text{arc tg}\ [(iz_1 + 2)\ \sin\ (\alpha_2 + \\ + \Delta\varphi_2)/[z_1\ (1 + i) - (iz_1 + 2)\ \cos\ (\alpha_2 + \Delta\varphi_2)]] = \\ = f_6\ (z_1, i, \Delta\varphi_2). \end{aligned} \tag{23}$$

Dacă suma mărimii deformației (pentru dinții în angrenare) și a mărimii erorilor de pas, raportată la cercul de rostogolire se notează cu δ, atunci :

$$\delta = \frac{mz_1}{2}\ (\beta'' - \beta'), \tag{24}$$

deformația și eroarea de pas raportate la modul sau „relative" rezultă:

$$\delta/m = z_1 (\beta'' - \beta')/2 = f_7 (z_1, i, \Delta\varphi_2). \tag{25}$$

Pentru o deformație și o eroare de pas date (δ), se poate calcula creșterea gradului de acoperire și anume:

— dacă intrarea în angrenare a dintelui roții se produce în poziția E_{22} determinată în sistemul $X_2 O_2 Y_2$ de unghiul $\alpha_2 + \Delta\varphi_2$, pentru $\Delta\varphi_2$ în grade, creșterea gradului de acoperire la intrarea în angrenare este:

$$\Delta\varepsilon_i = \frac{\Delta\varphi_2^0}{360^\circ} \cdot z_2. \tag{26}$$

Din relația (25) se deduce însă:

$$\Delta\varphi_2 = f_8 (z_1, i, \delta/m) \tag{27}$$

și deci:

$$\Delta\varepsilon_i = i \cdot z_1 \cdot f_8 (z_1, i, \delta/m)/360^\circ = f_9 (z_1, i, \delta/m). \tag{28}$$

Se poate observa din relația (28) că între creșterea gradului de acoperire la intrarea în angrenare și deformație și eroarea de pas relativă δ/m pentru z_1 și i date există o dependență funcțională. De asemeni, creșterea gradului de acoperire la intrarea în angrenare, este o mărime adimensională, depinzînd numai de mărimile adimensionale z_1, i, δ/m specifice angrenajului.

Pentru ieșirea din angrenare se procedează asemănător ca la intrarea în angrenare (fig. 3).

Astfel, coordonatele punctului S_2 de ieșire din angrenare, în sistemul $X_1 O_1 Y_1$ sînt:

$$\begin{aligned} X_{1S_2} &= O_1 S_2 \cos\alpha_1 = (m/2)\ (z_1 + 2)\ \cos\alpha_1, \\ Y_{1S_2} &= O_1 S_2 \sin\alpha_1 = (m/2)\ (z_1 + 2)\ \sin\alpha_1, \end{aligned} \tag{29}$$

în care:

$$\alpha_1 = 70^\circ - \text{arc sin}\ [z_1 \cos 20^\circ/(z_1 + 2)]. \tag{30}$$

În sistemul $X_2 O_2 Y_2$, coordonatele punctului S_2 devin:

$$\begin{aligned} X_{2S_2} &= O_1 O_2 - X_{1S_2} = (m/2)\ [z_1 (1 + i) - (z_1 + 2)\ \cos\alpha_1], \\ Y_{2S_2} &= (m/2)\ (z_1 + 2)\ \sin\alpha_1. \end{aligned} \tag{31}$$

Ecuațiile parametrice ale evolventei E_2 în poziția E_{20}, în sistemul $X_2 O_2 Y_2$ sînt:

$$\begin{aligned} X_2 &= (m/2)\ iz_1\ (\cos t + t \sin t)\ \cos 20^\circ, \\ Y_2 &= (m/2)\ iz_1\ (\sin t - t \cos t)\ \cos 20^\circ. \end{aligned} \tag{32}$$

Se consideră punctul S_0 care rezultă din intersecția evolventei E_{20} cu cercul de rază $O_2 S_2$, coordonatele punctului S_0 situat pe evolventă

fiind :

$$X_{2S_0} = (m/2)\, iz_1\, (\cos t_0 + t_0 \sin t_0)\, \cos 20^\circ,$$
$$Y_{2S_0} = (m/2)\, iz_1\, (\sin t_0 - t_0 \cos t_0)\, \cos 20^\circ. \tag{33}$$

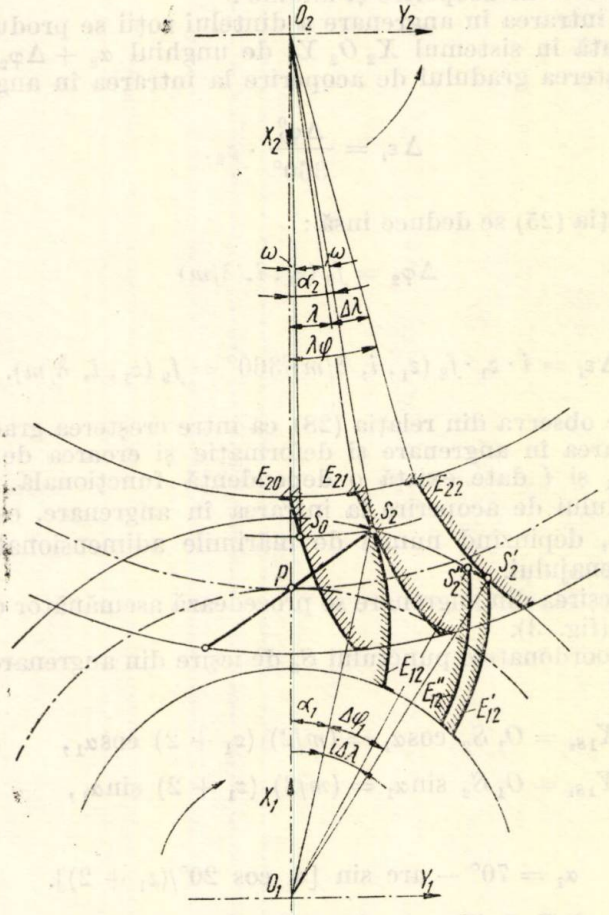


Fig. 3

Însă :

$$O_2 S_0 = O_2 S_2$$

şi deci :

$$X^2_{2S_0} + Y^2_{2S_0} = X^2_{2S_2} + Y^2_{2S_2} \tag{34}$$

sau :

$$(m^2/4)\, i^2 z_1^2 (1 + t_0^2)\, \cos^2 20^\circ = (m^2/4)\, [[z_1 (1 + i) - (z_1 + 2)\, \cos\alpha_1]^2 + \\ + (z_1 + 2)^2 \sin^2\alpha_1], \tag{35}$$

de unde :

$$t_0^2 = f_{10}(z_1, i). \tag{36}$$

Parametrul t_0 înlocuit în relațiile (33) permite determinarea coordonatelor punctului S_0 și deci a unghiului ω format de raza vectoare $O_2 S_0$ cu sensul pozitiv al axei $O_2 X_2$:

$$\omega = \text{arc tg}\,(Y_{2S_0}/X_{2S_0}) = \text{arc tg}\,[(\sin t_0 - t_0 \cos t_0)/(\cos t_0 + t_0 \sin t_0)] = f_{11}(z_1, i). \tag{37}$$

Se consideră un moment posterior ieșirii teoretice din angrenare (punctul S_2 cu evolventele respectiv în pozițiile E_{12}, E_{21}). Evolventa E_2 a roții 2 se va afla în poziția E_{22}, punctul de contact S_2' fiind situat concomitent pe evolventă și pe cercul exterior al roții 1.

Din figura 3 rezultă :

— coordonatele punctului S_2' în sistemul $x_1 O_1 y_1$:

$$\begin{aligned} X_{1S_2'} &= (m/2)\,(z_1 + 2)\cos(\alpha_1 + \Delta\varphi_1), \\ Y_{1S_2'} &= (m/2)\,(z_1 + 2)\sin(\alpha_1 + \Delta\varphi_1) \end{aligned} \tag{38}$$

și în sistemul $x_2 O_2 y_2$:

$$\begin{aligned} X_{2S_2'} &= (m/2)\,[z_1(1 + i) - (z_1 + 2)\cos(\alpha_1 + \Delta\varphi_1)], \\ Y_{2S_2'} &= (m/2)\,(z_1 + 2)\sin(\alpha_1 + \Delta\varphi_1). \end{aligned} \tag{39}$$

Ecuațiile evolventei E_2 în poziția E_{22} în sistemul $x_2 O_2 y_2$ sînt :

$$\begin{aligned} X_2 &= (m/2)\,iz_1\,[\cos t + (t - \lambda_\varphi)\sin t]\cos 20°, \\ Y_2 &= (m/2)\,iz_1\,[\sin t - (t - \lambda_\varphi)\cos t]\cos 20°. \end{aligned} \tag{40}$$

Deoarece însă punctul S_2' este situat pe evolventa E_{22} și are coordonatele $X_{2S_2'}$ și $Y_{2S_2'}$:

$$X_{2S_2'}^2 + Y_{2S_2'}^2 = (m^2/4)\,i^2 z_1^2\,[1 + (t - \lambda_\varphi)^2]\cos^2 20° \tag{41}$$

și ținînd seama de relațiile (39) :

$$(t - \lambda_\varphi)^2 = f_{12}(z_1, i, \Delta\varphi_1). \tag{42}$$

Însă din ecuațiile (39) și (40) rezultă :

$$\begin{aligned} X_{2S_2'} &= (m/2)\,[z_1(1 + i) - (z_1 + 2)\cos(\alpha_1 + \Delta\varphi_1)] = \\ &= (m/2)\,iz_1\,[\cos t + (t - \lambda\varphi)\sin t]\cos 20°, \end{aligned} \tag{43}$$

egalitate din care ținînd seama de relațiile (42) și (30) se poate afla :

$$t = f_{13}(z_1, i, \Delta\varphi_1) \tag{44}$$

și din relația (42) :

$$\lambda\varphi = f_{14}(z_1, i, \Delta\varphi_1). \tag{45}$$

Dacă decalajul unghiular al evolventei E_2 în poziția E_{21} față de poziția E_{20} este λ

$$\lambda = \alpha_2 - \omega = \text{arc tg}\,(Y_{2S_2}/X_{2S_2}) - \omega = \text{arc tg}\,[(z_1 + 2)\,\sin\alpha_1/[z_1(1 + i) - (z_1 + 2)\,\cos\alpha_1]] - \omega = f_{15}(z_1, i) \tag{46}$$

și dacă λ_φ este decalajul unghiular dintre pozițiile E_{22} și E_{20} al evolventei E_2, atunci

$$\Delta\lambda = \lambda_\varphi - \lambda = f_{16}(z_1, i), \tag{47}$$

$\Delta\lambda$ reprezentînd rotirea dintelui roții 2 din poziția ieșirii teoretice din angrenare E_{21} și pînă în poziția E_{22}.

În absența deformațiilor și erorilor de pas, corespunzător rotației roții cu $\Delta\lambda$, pinionul se va roti față de poziția E_{12} cu unghiul $i\Delta\lambda$ pînă în poziția E''_{12}. Dacă însă la nivelul dinților existenți în angrenare există deformații concomitent cu erori de pas, evolventa E_1 se va deplasa din poziția E''_{12}, în sensul rotației pinionului, pînă cînd se va suprapune peste poziția E'_{12} și va intra în contact în punctul S'_2 cu evolventa E_{22}.

Această deformație a dinților din angrenare, corespunzătoare condițiilor de lucru date, împreună cu eroarea de pas raportate la cercul de rostogolire al pinionului va fi deci:

$$\delta = (m/2)\,z_1\,(\Delta\varphi_1 - i\Delta\lambda)$$

și

$$\delta/m = z_1\,(\Delta\varphi_1 - i\Delta\lambda)/2. \tag{48}$$

Pe baza relației (47) se poate deduce în continuare

$$\delta/m = f_{17}(z_1, i, \Delta\varphi_1). \tag{49}$$

Deoarece ieșirea reală din angrenare a dintelui roții, față de poziția teoretică de ieșire din angrenare se produce după ce dintele a parcurs arcul corespunzător unghiului $\Delta\lambda$, creșterea gradului de acoperire pentru ieșirea din angrenare va fi:

$$\Delta\varepsilon_e = \frac{\Delta\lambda^\circ \cdot z_1 \cdot i}{360^\circ} \tag{50}$$

sau ținînd seama de relația (49)

$$\Delta\varepsilon_e = f_{18}(z_1, i, \delta/m) \tag{51}$$

cu aceleași concluzii ca și pentru intrarea în angrenare.

Creșterea totală a gradului de acoperire pentru o deformație și o eroare de pas date se poate considera astfel

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_i + \Delta\varepsilon_e = f_{19}(z_1, i, \delta/m). \tag{52}$$

Datorită aspectului specific al ecuațiilor evolventei (funcții transcendente), dependența $\Delta\varepsilon = f_{19}(z_1, i, \delta/m)$ a fost precizată prin calcule

numerice, impunînd diferite valori z_1, i și δ/m și calculînd mărimile corespunzătoare $\Delta\varepsilon$.

Pe această bază s-au putut trasa o serie de curbe

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon\,(z_1, i, \delta/m)$$

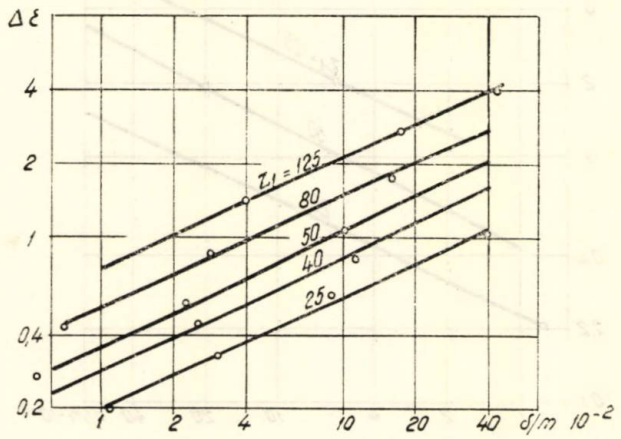


Fig. 4. — Dependența dintre creșterea gradului de acoperire ($\Delta\varepsilon$) și deformația și abaterea de pas relative (δ/m) pentru diferite valori z_1 și $i = 1$.

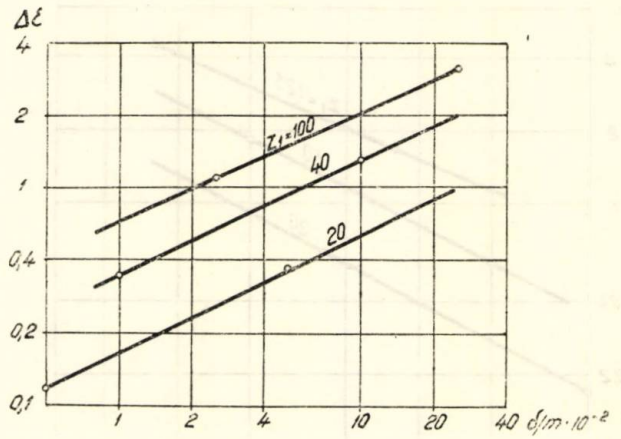


Fig. 5. — Dependența dintre creșterea gradului de acoperire ($\Delta\varepsilon$) și deformația și abaterea de pas relative (δ/m) pentru diferite valori z_1 și $i = 1{,}5$.

în figurile 4, 5, 6 și 7 pentru domeniul

$$z_1 = 20 \ldots 125 \text{ dinți},$$

$$i = 1 - \infty,$$

$$\delta/m = 0{,}005 \ldots 0{,}4.$$

Interpretarea matematică a acestor curbe în legătură cu dependentele funcționale stabilite anterior din condiții geometrice au dus la următoarele concluzii :

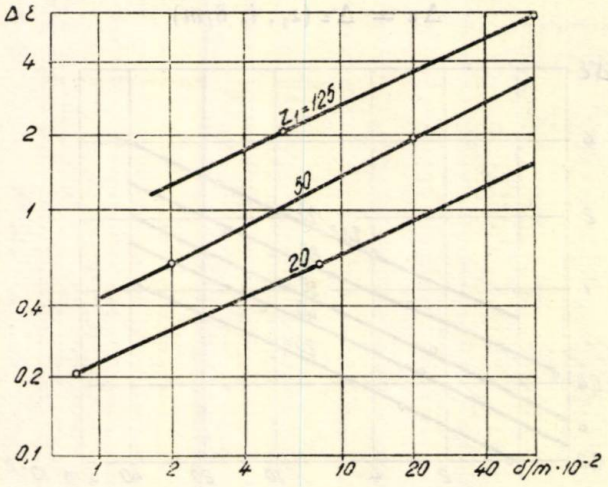


Fig. 6. — Dependența dintre creșterea gradului de acoperire ($\Delta\varepsilon$) și deformația și abaterea de pas relative (δ/m) pentru diferite valori z_1 și $i = 3$.

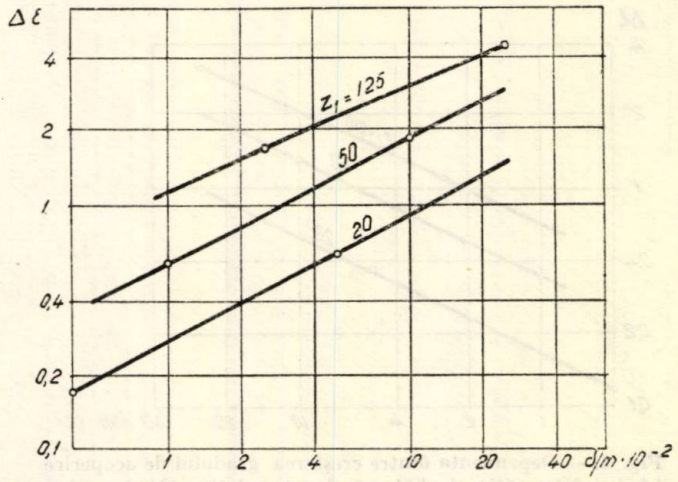


Fig. 7. — Dependența dintre creșterea gradului de acoperire ($\Delta\varepsilon$) și deformația și abaterea de pas relative (δ/m) pentru diferite valori z_1 și $i = \infty$.

— creșterea gradului de acoperire nu depinde de dimensiunile roților luate ca atare ci de numărul de dinți ai pinionului, de raportul de transmitere și deformația și abaterea de pas „relative" sau raportate la modul ;

— creșterea gradului de acoperire este cu atît mai mare cu cît crește numărul de dinți ai pinionului ;

— creșterea gradului de acoperire este cu atît mai mare cu cît crește raportul de transmitere;

— deformația are influență mai mică asupra creșterii gradului de acoperire în porțiunea de intrare în angrenare a dinților pinionului decît în cea de ieșire din angrenare.

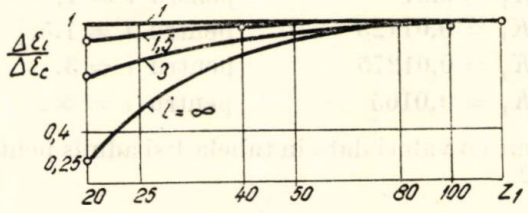


Fig. 8. — Raportul dintre creșterea gradului de acoperire la intrarea ($\Delta\varepsilon_i$) și la ieșirea ($\Sigma\varepsilon_e$) din angrenare, în funcție de numărul de dinți ai pinionului și de raportul de transmitere.

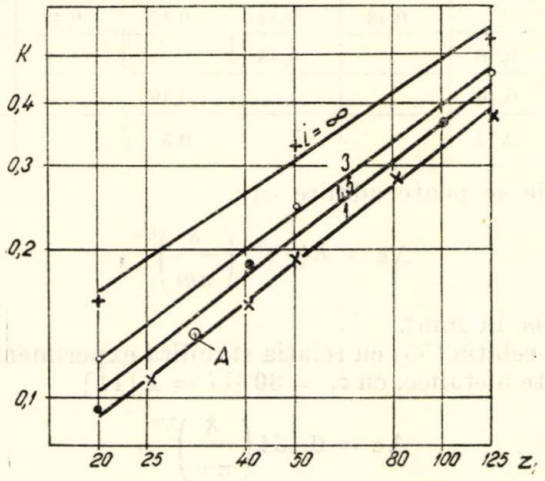


Fig. 9. — Dependența dintre coeficientul K, numărul de dinți z_1 și raportul de transmitere i. 0 — A — rezultat experimental pentru roți dințate metalice [11]. (pentru δ în μm și m în mm).

Această deosebire se accentuează o dată cu micșorarea numărului de dinți z_1 sau cu creșterea raportului de transmitere (fig. 8).

— pe baza acestor rezultate s-a putut aprecia că dependența $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon(z_1, i, \delta/m)$ pentru diferite valori z_1 și i se poate exprima cu suficientă precizie cu ajutorul unei relații de tipul.

$$\Delta\varepsilon = K\left(\frac{\delta}{\pi m}\right)^{1/n}, \tag{53}$$

în care

K — coeficient dependent de numărul de dinți ai pinionului și de raportul de transmitere (fig. 9 pentru δ în μm și m în mm).

Coeficientul K pe baza curbelor din figura 9 se poate scrie astfel

$$K \simeq K_1 \cdot z_1^{3/4}, \tag{54}$$

în care:

$K_1 = 0{,}01$ pentru $i = 1$,
$K_1 = 0{,}01125$ pentru $i = 1{,}5$,
$K_1 = 0{,}01275$ pentru $i = 3$,
$K_1 = 0{,}0165$ pentru $i = \infty$,

n — exponent cu valori date în tabela 1 şi admis pentru simplificarea calculelor $n = 1/2$.

Tabela 1

Valori calculate pentru exponentul n.

i	z_1						
	20	25	40	50	80	100	125
1		0,43	0,43	0,47	0,48		0,48
1,5	0,50		0,48			0,46	
3	0,46			0,49			0,465
∞	0,52			0,5			0,43

În concluzie se poate admite că:

$$\Delta\varepsilon \simeq K_1 \cdot z_1^{3/4} \left(\frac{\delta}{\pi m}\right)^{1/2}, \tag{55}$$

(cu δ în μm şi m în mm).

Comparînd relaţia (55) cu relaţia stabilită experimental de Niemann pentru roţi dinţate metalice, cu $z_1 = 30$ şi $i = 1$ [11]

$$\Delta\varepsilon = 0{,}134 \left(\frac{\delta}{\pi m}\right)^{1/2}, \tag{56}$$

se constată diferenţe mai mici de 5%.

4. PARTICULARITĂŢI ALE ANGRENĂRII

După cum am arătat, intrarea şi ieşirea reală din angrenare se produc în punctele S_1' şi S_2' situate în afara liniei de angrenare teoretice. Rezultă că pe porţiunile $S_1'S_1$ şi S_2S_2' locul geometric al punctelor de contact nu va coincide cu linia de angrenare teoretică.

Abaterea de la linia de angrenare teoretică, determină pentru porţiunile respective, apariţia unor fenomene de interferenţă specifice.

Această interferenţă se manifestă prin pătrunderea vîrfului dintelui roţii conduse în piciorul dintelui roţii conducătoare şi a vîrfului dintelui roţii conducătoare în piciorul dintelui roţii conduse. Pătrunderea în flancuri este determinată de poziţia punctelor S_1' şi S_2' faţă de punctele S_1, S_2 de

intrare respectiv de ieșire teoretică din angrenare și atrage pe lîngă subțierea vîrfului dintelui, formarea unor șanțuri de-alungul flancului dintelui pe toată lungimea sa în zona piciorului (fig. 13).

La stabilirea dependenței $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon\ (z_1, i, \delta/m)$ a fost posibilă și calcularea poziției punctelor S'_1, S'_2, și S_1, S_2 față de cercul de rostogolire

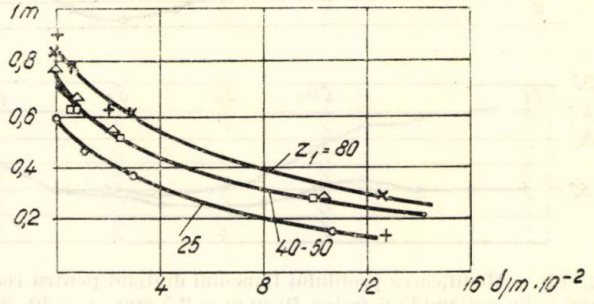


Fig. 10. — Poziția punctelor S_1, S_2 pentru ($\delta/m = 0$) și S'_1, S'_2 față de cercul de rostogolire în module, în funcție de deformația și eroarea de pas relative δ/m și numărul de dinți z_1, pentru $i = 1$.

și deci precizarea poziției șanțului de roadere în profil prin interferență. Pentru exemplificare în figura 10 sînt date rezultatele acestor calcule pentru $i = 1$.

După cum se poate observa, pe măsura creșterii deformației și deci a sarcinii, fenomenul de interferență se accentuează, punctele S'_1, S'_2 se apropie de cercul de rostogolire și chiar pot trece în porțiunea capului dintelui (fig. 11).

În aceste condiții, uzura datorită acestei interferențe cu caracter specific apare ca o componentă importantă a fenomenului complex de uzură a flancurilor dinților.

La constatări similare s-a ajuns pe baza studiului profilului flancurilor dinților [2] [11]. Astfel la roțile dințate din poliamide pe lîngă apariția unor deformații cu caracter plastic din ce în ce mai pronunțate pe măsura apropierii de vîrful dintelui, în zona piciorului dintelui apar scobituri din ce în ce mai accentuate o dată cu creșterea sarcinii și a duratei de funcționare (fig. 12, 13).

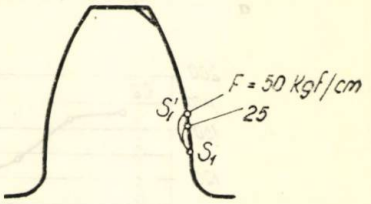


Fig. 11. — Roaderea flancului dintelui prin interferență pentru o roată dințată din poliamida cu $m = 4$, $z = 25$, $i = 1$ (roata dințată pereche din oțel).

În afara scobiturilor din zona piciorului dintelui, apar puternice fenomene de roadere în zona cercului exterior care se manifestă prin modificări accentuate ale aspectului profilului chiar dacă se iau în considerație deformațiile plastice, care de altfel apar și pe flancurile pasive. Pe diagramele de profil (fig. 12, 13) se mai observă de asemeni că începutul roaderii se produce ceva mai aproape de cercul de rostogolire decît punctul S'_2; aceasta se poate explica prin eventuala diferență între

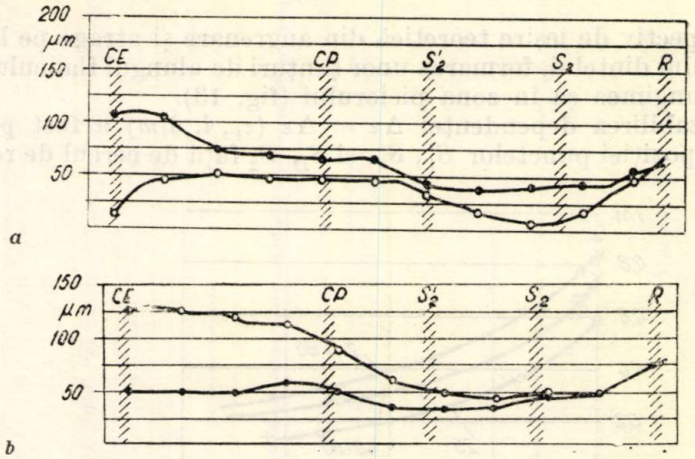


Fig. 12. — Modificarea profilului flancului dintelui pentru roată dințată din poliamidă 6 (relon *P*) cu $m = 2{,}5$ mm, $z = 40$, $\beta = 0°$ și sarcina pe dinte 45 Kgf/cm după $2{,}22 \cdot 10^6$ cicluri, *CE*-cerc exterior, *CP* — cerc de rostogolire, S_2' — punct de ieșire reală din angrenare, S_2 — punct de ieșire teoretică din angrenare, *R* — începutul racordării la cercul de fund, *a* — flanc activ, *b* — flanc pasiv. Roată din poliamidă pe roată din oțel: ● — înainte de funcționare, ○ — după funcționare.

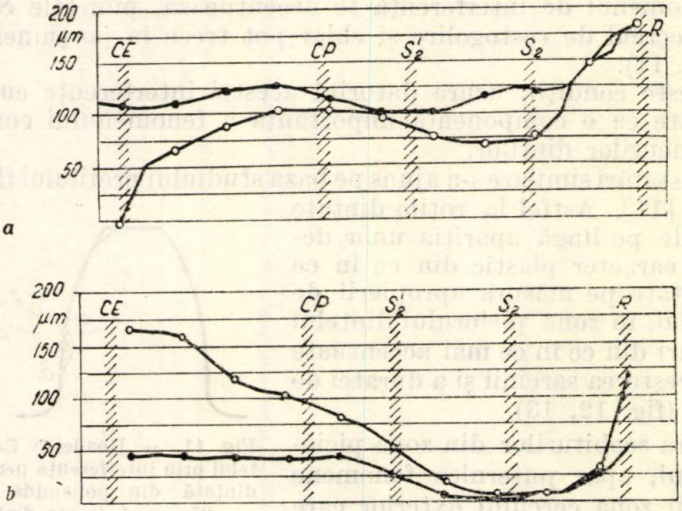


Fig. 13. — Modificarea profilului flancului dintelui pentru roată dințată din poliamidă 6 (relon *P*) cu $m = 2{,}5$ mm, $z = 40$, $\beta = 0°$ și sarcina pe dinte 51,1 Kgf/cm după $1{,}79 \cdot 10^6$ cicluri. *CE* — cerc exterior, *CP* — cerc de rostogolire, S_2 — punct de ieșire reală din angrenare, S_2 — punct de ieșire teoretică din angrenare, *R* — începutul racordării la cercul de fund, *a* — flanc activ, *b* — flanc pasiv. Roată din poliamidă pe roată din oțel: ● — înainte de funcționare, ○ — după funcționare.

deformațiile calculate și cele reale, diferență datorită metodicei de calcul și modulului de elasticitate mai redus ca urmare a temperaturii de funcționare de cca 40 ... 46 °C.

Prezența unor fenomene de roadere și între punctul de ieșire teoretică din angrenare S'_2 și racordarea R se datorește probabil realizării contactului dintre vîrful dintelui pinionului și flancului dintelui roții anterior punctului S_2.

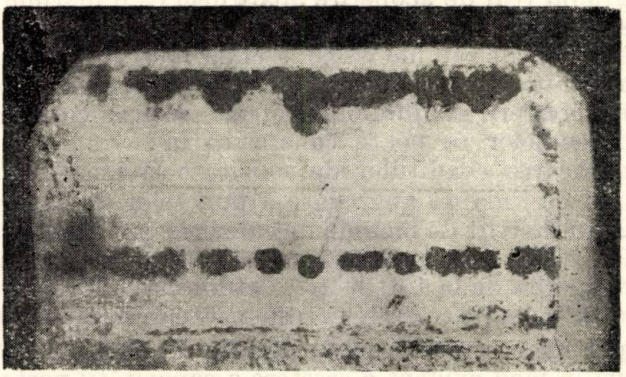


Fig. 14. — Deteriorarea flancurilor dinților (aproximativ 40% din suprafața activă) pentru o roată din poliamidă 6, $m = 2{,}5$, $z = 40$, $i = 1$, sarcina pe dinte 40,4 Kgf/cm, după $18{,}6 \cdot 10^6$ cicluri de solicitare.

Mult mai evidente apar aceste fenomene de uzură cu caracter specific dacă sînt puse în legătură cu apariția gropițelor de oboseală de contact pitting. Dacă la roțile dințate metalice gropițele, a căror prezență indică zone puternic solicitate de eforturi unitare de contact, apar în imediata vecinătate a cercului de rostogolire la roțile din poliamidă încercate, pentru sarcini pe dinte la care ruperea prin încovoiere încă nu se produce, gropițele apar atît către vîrful dintelui cît și în zona de angrenare S'_2 S_2 (fig. 14).

Datorită fenomenelor de uzură menționate se produce o modificare a formei flancurilor față de forma teoretică. Fără îndoială că o asemenea modificare afectează într-o anumită măsură și creșterea gradului de acoperire care devine astfel variabilă în raport cu timpul. După cum se poate observa din figurile 12, 13 mărimea uzurii în piciorul dintelui în momentul ieșirii din funcționare atinge aproximativ jumătate din valoarea deformației raportate la un dinte.

Încercările făcute de G. Niemann pe roți dințate metalice cu diferite erori de pas arată însă că modificarea creșterii gradului de acoperire, cu atît mai mare cu cît și creșterea gradului de acoperire este mai mare, se produce numai pînă la aproximativ 4.10^6 cicluri și că valoarea finală a creșterii gradului de acoperire reprezintă chiar în aceste condiții $\Delta\varepsilon_{final} \geqslant \geqslant 0{,}52\ \Delta\varepsilon_{initial}{}^{2/3}$.

5. INFLUENȚA CREȘTERII GRADULUI DE ACOPERIRE ASUPRA COMPORTĂRII ROȚILOR DINȚATE ÎN EXPLOATARE

Din cele prezentate, se poate observa că pentru un angrenaj cu dimensiuni normale, gradul de acoperire poate atinge valori care depășesc cu mult gradul de acoperire teoretică. De asemenea această depășire este cu atît mai mare cu cît crește numărul de dinți pentru un diametru dat.

La roțile dințate din materiale plastice, cu deformații ale dinților apreciabile, gradul real de acoperire apare deci ca o mărime necesară a fi luată în considerație.

Această concluzie rămîne valabilă chiar dacă în timpul funcționării, după cum am arătat, datorită uzurii, gradul de acoperire real se micșorează.

Influența creșterii gradului de acoperire asupra comportării în funcționare a angrenajelor se poate concretiza în :

a — modificarea condițiilor de solicitare la încovoiere ale dinților prin deplasarea pe linia de angrenare a punctelor de angrenare unipară pentru $\varepsilon < 2$. Indiferent de metoda de calculare a coeficientului de formă c_f [4], [5], [9], [10], [12] pentru o roată dată ($z = 25$ dinți), creșterea gradului de acoperire de la 1,61 la 1,8, determină o micșorare a coeficientului c_f cu cca 10% deci o creștere corespunzătoare a capacității portante ;

b — repartizarea sarcinii pe un număr de dinți mai mare sau egal cu 2 determină în mod evident o creștere a capacității portante.

În sprijinul acestor afirmații se pot menționa încercările statice ale lui Glanville [7], Ermakov [6], Belîi [1], referitoare la influența poziției punctului de angrenare pe linia de angrenare asupra capacității portante. La rezultate asemănătoare, pentru încercări dinamice însă, a ajuns și Niemann [11]. Pe baza celor arătate anterior apare de asemeni posibilitatea explicării, cel puțin parțiale, a influenței numărului de dinți asupra capacității portante, influență constatată experimental [1], [2], [8] la roțile dințate din materiale plastice și foarte apropiată de influența numărului de dinți asupra gradului real de acoperire ;

c — datorită însă faptului că angrenarea nu se realizează integral pe linia dreaptă de angrenare specifică angrenajelor în evolventă, apar suprasolicitări cu caracter dinamic, uzuri caracteristice, zgomote, în special la roțile dințate metalice, care afectează într-o oarecare măsură funcționarea.

Condițiile în care influențele avantajoase specificate la punctele a, b sînt cu pondere mai mare decît cele dezavantajoase de la punctul c urmează să fie stabilite în viitor.

6. CONCLUZII

Din cele prezentate se desprind următoarele concluzii :

1 — Datorită deformațiilor și erorilor de prelucrare, gradul de acoperire real este diferit și mai mare decît gradul de acoperire teoretic. Această diferență crește cu numărul de dinți, cu mărimea deformației și a erorilor de prelucrare și cu raportul de transmitere.

2 — Ca urmare a modificării profilului flancului dinților în timp prin roadere, gradul de acoperire real se micșorează în timp.

3 — Modificînd condițiile de solicitare ale dinților precum și repartiția sarcinii pe dinți, gradul de acoperire real poate avea o influență asupra capacității portante a angrenajelor în special a celor din materiale plastice. Există posibilitatea explicării, pe această bază a dependenței dintre capacitatea portantă și numărul de dinți ținînd seama de dependența dintre gradul de acoperire și numărul de dinți.

4 — Particularitățile angrenării în condiții care nu satisfac legea angrenării determină apariția roaderii dinților însoțită de solicitări dinamice și zgomote în funcționare.

Primită la redacție la 7 iulie 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. Belîi V., *Zubciatie peredaci iz plastmas*, Nauka i tehnika Minsk, 1965.
2. Cornelius E. A., *Untersuchungen an ölgeschmierten Zahnrädern aus thermoplastischen Kunststoffen*, Konstruktion, **11**, *17*, 437—447 (1965).
3. Dolezal V. A., *Rascetnaia nagruzka zubciatih peredaci*, Mașghiz, Moskva, 1957.
4. Dudley-Winter, *Zahnräder*, Springer Verlag, Berlin-Götingen-Heidelberg, 1961.
5. Dudley W. D., *Gear Handbook*, Mc. Graw Book Comp. New York-Toronto-London, 1962.
6. Ermakov V. A., *Nagruzocinaia sposobnosti plastmasovîh zubciatih kalios*, Vestnik Mașinostroenia 5 (1962).
7. Glanville A., *Nylon Gears*, Machinery 2280, 89, 1956.
8. Hall K. W., Alvord H. H., *Zytel Spur Gears*, Mechanical Engineering *5*, 50—53 (1959).
9. Henriot G., *Traité théorique et pratique des engrenages*, Dunod, Paris, 1960.
10. Kudriavțev V. N. *Zubciatie peredaci*, Mașghiz, Moskva, 1957.
11. Niemann G., *Dinamiceskie nagruzki na zubiah șesteren*, trad. l. germană. Mașinostroenie, Sbornik perevodov i obzorov inostranoi periodiceskoi literaturi, **9**, *51*, 20—54 (1957).
12. Niemann G., *Maschinenelemente*, Bd. 2, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
13. Niemann G., *Einfluss von Modul, Schrägungswinkel und Profilverschiebung auf die Zahnflanken-Tragfähigkeit*, Konstruktion, *6*, 236—239 (1960).

3 — Modificînd condițiile de solicitare ale diferitelor piese și repartiția sarcinii pe dinți, gradul de acoperire real poate avea o influență asupra capacității portante a angrenajelor în special a celor din materiale plastice. Există posibilitatea explicării, pe această bază a dependenței dintre capacitatea portantă și numărul de dinți tinînd seama de dependența dintre gradul de acoperire și numărul de dinți.

4 — Particularitățile angrenării în condiții care nu satisfac legea angrenării determină specificul roților dințate folosite de solicitări dinamice și vibrații.

Primită la redacție la 7 iulie 1960.

BIBLIOGRAFIE

1. Bach V., Zahnräder perodact fr pleatmes, Neuka i tehnika Moscu, 1953.
2. Genkata E. A., Determination en diperentielles Zahnräder une theoriplatinata, Konstruktion, 11, 17, 147—147 (1957).
3. Dolgaev V. A., Rasceplenie nagruzki sudovîh peredaci, Magghis, Moskva, 1957.
4. Dudley-Wynn, Zahnräder, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1951.
5. Dudley W. D., Gear Handbook, Mc. Graw Book Comp. New York-Toronto-London, 1962.
6. Esakov V. A., Nagruzocinaia sposobnosti pricimmozubi zubcatîh kolies, Vestnik Mașinostroenia 3 (1923).
7. Glazunov A., Nylon Gears, Machinery 2280, 89, 1952.
8. Hall R. W., Nylon II. 11. Xpel Spur Gears, Mechanical Engineering 3, 30—33 (1957).
9. Hasbrov G., Traité théorique et pratique des engrenages, Dunod, Paris, 1960.
10. Kudreavțev V. N., Zubcatîe perodaci, Mașghiz, Moskva, 1957.
11. Niemann G., Dimensionierung gepruft an zahlen gezeigt, Trad. I. Germană, Mașinostroenie, Sbornik perevodov i obzorov inostrannoi periodicescoi literaturi, 9, 47, 31 (1957).
12. Niemann G., Maschinenelemente, Bd. 2, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
13. Niemann G., Räderpaar von Abrieb, Schmierungsgrad und Profilüberdeckung auf die Zahnflanken Tragfähigkeit, Konstruktion, 6, 238—239 (1960).

ASPECTE NOI ÎN TEORIA REȚELELOR STRUCTURALE

de IOAN GH. SANDU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

Se prezintă aspecte originale legate de teoria indicilor și rapoartelor de reglare. Astfel, introducîndu-se noile noțiuni ca, rang de formare al indicelui unei grupe de turații și raport de reglare al grupei de un anumit rang, se tratează într-o formă generalizată noi proprietăți ale structurii rețelelor fiind necesare studiului de analiză și sinteză în vederea alegerii rețelei optime.

INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [5] a fost elaborată o metodă grafo-analitică pentru alegerea rețelei optime cu care ocazie s-au prezentat și concluziile referitoare la cîteva laturi ale teoriei rețelelor. Ne propunem în continuare să evidențiem noi aspecte ale acestei teorii.

După cum se știe, construcția rețelelor depinde exclusiv de numerele de turații ale grupelor de turații (p_i, unde $1 \leqslant i \leqslant k$) și de valoarea indicelui fiecărei grupe (α_{p_i}). Totodată avînd în vedere că numai pentru o singură ecuație cinematică numărul rețelelor este foarte ridicat (deoarece $\alpha_{p_i} \neq$ const.), apare necesar și util ca în analiza lor să studiem variația valorii indicelui unei aceleeași grupe (fie p_i) descoperind astfel noi proprietăți ale rețelelor. Amintim că indicele unei grupe în expresia căruia se substituie cifrei 1 valoarea φ, reprezintă în notația convențională logaritmică [1] — [3], rația turațiilor ei (fig. 1).

Pentru q și $\bar{\varphi}$ date[1]) putem scrie ecuația cinematică (1) și apoi, cu ajutorul indicilor vom obține una din ecuațiile structurale posibile (2).

$$q = \prod_{i=1}^{k} p_i, \tag{1}$$

$$q_1 = [p_k]_{\alpha_{p_k}} \times \ldots \times [p_i]_{1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{i-1}} \times \ldots \times [p_2]_{\alpha_{p_2}} \times [p_1]_1 . \tag{2}$$

[1]) Pentru demonstrațiile din această lucrare considerăm cazul general al cutiilor de viteze cu k axe și k grupe ale căror numere de turații respectă condiția $p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_i \neq \ldots \neq p_k$.

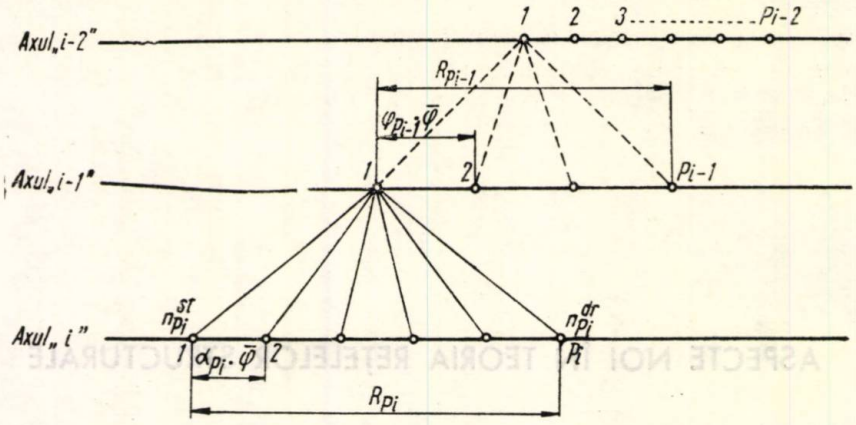


Fig. 1

Prin aceasta, regula de formare a indicilor pusă în evidență în ecuația (2), permite scrierea valorii indicelui grupei oarecare p_i :

$$\alpha_{p_i} = 1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_{i-1} \tag{3}$$

sau altfel

$$\alpha_{p_i} = \frac{q}{\prod_{i=i}^{k} p_i}. \tag{4}$$

CONȚINUT

Indicele grupei p_i, maxim, se obține atunci cînd el se formează ultimul $\left(\prod_{i+1}^{i=k} p_i = 1\right)$ și are valoarea

$$\alpha^{\max}_{p_i} = \frac{q}{p_i}. \tag{5}$$

Evident, atunci cînd se formează primul, valoarea sa este minimă, și anume :

$$\alpha^{\min}_{p_i} = 1. \tag{6}$$

Prin urmare, valoarea indicelui unei grupe este variabilă și în același timp crescătoare între $\alpha^{\min}_{p_i}$ și $\alpha^{\max}_{p_i}$, după cum el se formează primul, al doilea, ș.a.m.d., respectiv ultimul.

Apare astfel un număr de ordine a formării indicelui grupei pe care-l vom denumi în continuare *rang de formare*. El se va putea distinge folosind notația $(\alpha_{p_i})_x$, unde pentru fiecare grupă $p_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ rangul x capătă valorile $1 \leqslant x \leqslant i$ și $i \leqslant x \leqslant k$.

Spre exemplu, pentru $x = 1$ se obține $(\alpha_{p_i})_1$ adică indicele grupei p_i este de rang 1 (se formează primul); pentru $x = 2$ se obține $(\alpha_{p_i})_2$ adică are rangul 2 (se formează al doilea); ș.a.m.d. pînă la $x = k$ cînd el devine $(\alpha_{p_i})_k$ adică este de rang k (se formează ultimul).

Putem deci scrie

$$(\alpha_{p_i})_1 \leqslant (\alpha_{p_i})_x \leqslant (\alpha_{p_i})_k, \tag{7}$$

pentru toate valorile $1 \leqslant x \leqslant i$ și $i \leqslant x \leqslant k$.

Valoarea indicelui grupei p_i de rang $k-1$ presupunînd că cel de rang k se formează la grupa p_y rezultă cu ușurință prin particularizarea, ca atare, a relației (4). Precizăm că vom folosi în continuare pentru indicele unei grupe oarecare de un anumit rang expresia sub forma (4), în care termenii produsului de la numitor îi vom scrie, de la stînga la dreapta, în ordinea în care rangul indicilor lor corespunzători este crescător în același sens. În consecință

$$(\alpha_{p_i})_{k-1} = \frac{q}{p_i \cdot p_y}. \tag{8}$$

Se observă că acest indice are $k-1$ valori distincte deoarece pentru fiecare p_i, y ia toate valorile $1 \leqslant y \leqslant i-1$ și $i+1 \leqslant y \leqslant k$. Ca urmare, avem

$$(\alpha_{p_i})_{k-1}^{\min} \leqslant (\alpha_{p_i})_{k-1} \leqslant (\alpha_{p_i})_{k-1}^{\max}, \tag{9}$$

pentru orice $1 \leqslant i \leqslant k$.

Această observație permite să scriem

$$(\alpha_{p_i})_x^{\min} \leqslant (\alpha_{p_i})_x \leqslant (\alpha_{p_i})_x^{\max}, \tag{10}$$

pentru orice $1 \leqslant i \leqslant k$ dar numai pentru $1 < x < k$, deoarece dacă se privesc relațiile (5) și (6), se observă că sînt două cazuri particulare. Astfel, indicele oricărei grupe p_i care se formează primul ($x = 1$) respectiv ultimul ($x = k$), are o singură valoare distinctă. Adică

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_{p_i})_1^{\min} \equiv (\alpha_{p_i})_1^{\max} \equiv \alpha_{p_i}^{\min} = 1, \\ (\alpha_{p_i})_k^{\min} \equiv (\alpha_{p_i})_k^{\max} \equiv \alpha_{p_i}^{\max} = \frac{q}{p_i}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

În aceste condiții relația (7) capătă o formă mai generală:

$$\begin{aligned} \alpha_{p_i}^{\min} < (\alpha_{p_i})_2^{\min} \leqslant (\alpha_{p_i})_2 \leqslant (\alpha_{p_i})_2^{\max} < \ldots < (\alpha_{p_i})_x^{\min} \leqslant \\ \leqslant (\alpha_{p_i})_x \leqslant (\alpha_{p_i})_x^{\max} < \ldots < \alpha_{p_i}^{\max}. \end{aligned} \tag{12}$$

Ne propunem să găsim numărul valorilor distincte ale indicelui general, $(\alpha_{p_i})_x$, pe care-l vom nota cu $N_{(\alpha_{p_i})_x}$.

Astfel pentru cazurile amintite, el devine

$$\left.\begin{aligned} N_{(\alpha_{p_i})_1} = 1, \\ N_{(\alpha_{p_i})_k} = 1 = C_{k-1}^{k-1} \text{ valori distincte}, \\ N_{(\alpha_{p_i})_{k-1}} = k-1 = C_{k-1}^{1} \text{ valori distincte}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ca să stabilim o formulă generală vom merge din aproape în aproape, încît vom continua cu rangul $x = k - 2$. Deci indicele grupei p_i se formează antepenultimul, presupunînd că penultimul se formează la grupa p_y iar ultimul la grupa p_z.

$$\text{Atunci, } (\alpha_{p_i})_{k-2} = \frac{q}{p_i \cdot p_y \cdot p_z}, \tag{14}$$

în care $1 \leqslant i \leqslant k$; $1 \leqslant y \leqslant i-1$ şi $i+1 \leqslant y \leqslant k-1$; $2 \leqslant z \leqslant i-1$ şi $i+1 \leqslant z \leqslant k$.

Considerînd i dat, vom varia pe y şi z pentru toate valorile cuprinse între limitele lor, cu condiţia ca produsele $p_y \cdot p_z$ să nu se repete. Astfel:

$$(k-2)\text{ termeni}\begin{cases} N(p_1 \cdot p_z) = k-2 \text{ valori distincte pentru } y=1;\ 2 \leqslant z \leqslant i-1 \\ \qquad\qquad \text{şi } i+1 \leqslant z \leqslant k, \\ N(p_2 \cdot p_z) = k-3 \text{ valori distincte pentru } y=2;\ 3 \leqslant z \leqslant i-1 \\ \vdots \qquad\qquad \text{şi } i+1 \leqslant z \leqslant k, \\ N(p_{i-1} \cdot p_z) = k-i \text{ valori distincte pentru } y=i-1;\ i+1 \leqslant z \leqslant k, \\ \vdots \\ N(p_{k-1} \cdot p_z) = 1 \text{ valori distincte pentru } y=k-1;\ z=k. \end{cases} \tag{15}$$

Adunînd toate valorile obţinem

$$N_{(\alpha_{p_i})_{k-2}} = \sum_{i=2}^{k-1} (k-i) = \frac{(k-1)\cdot(k-2)}{1 \cdot 2} = C_{k-1}^2 \text{ valori distincte.} \tag{16}$$

Continuăm demonstraţia cu rangul $x = k-3$, admiţînd pentru aceasta că indicii de rang $k-2$, $k-1$ şi k se formează respectiv la grupele p_y, p_z, şi p_u.

Atunci,

$$(\alpha_{p_i})_{k-3} = \frac{q}{p_i \cdot p_y \cdot p_z \cdot p_u}, \tag{17}$$

în care

$$1 \leqslant i \leqslant k;$$
$$1 \leqslant y \leqslant i-1 \text{ şi } i+1 \leqslant y \leqslant k-2;$$
$$2 \leqslant z \leqslant i-1 \text{ şi } i+1 \leqslant z \leqslant k-1;$$
$$3 \leqslant u \leqslant i-1 \text{ şi } i+1 \leqslant u \leqslant k.$$

Analog raţionamentului precedent, obţinem:

$$(k-3)\text{ termeni}\begin{cases} N(p_1 \cdot p_2 \cdot p_u) = k-3 \text{ valori distincte pentru } y=1;\ z=2; \\ \qquad\qquad 3 \leqslant u \leqslant i-1 \text{ şi } i+1 \leqslant u \leqslant k, \\ N(p_1 \cdot p_3 \cdot p_u) = k-4 \text{ valori distincte pentru } y=1;\ z=3; \\ \vdots \qquad\qquad 4 \leqslant u \leqslant i-1 \text{ şi } i+1 \leqslant u \leqslant k, \\ N(p_1 \cdot p_{k-1} \cdot p_k) = 1 \text{ valori distincte pentru } y=1;\ z=k-1;\ u=k, \end{cases} \tag{18}$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\rightarrow N_{(\alpha p_i)_{[k-3]_1}} = \sum_{i=3}^{k-1} (k-i) = \dfrac{(k-2)(k-3)}{2}, \\
(k-4)\ \text{termeni}\ \left\{\begin{array}{l} N(p_2 \cdot p_3 \cdot p_u) = k-4 \text{ valori distincte pentru } y=2;\ z=3; \\ \qquad 4 \leqslant u \leqslant i-1 \text{ și } i+1 \leqslant u \leqslant k, \\ N(p_2 \cdot p_4 \cdot p_u) = k-5 \text{ valori distincte pentru } y=2;\ z=4; \\ \qquad 5 \leqslant u \leqslant i-1 \text{ și } i+1 \leqslant u \leqslant k, \\ \vdots \\ N(p_2 \cdot p_{k-1} \cdot p_k) = 1 \text{ valori distincte pentru } y=2;\ z=k-1; \\ \qquad u=k, \end{array}\right. \\
\longrightarrow N_{(\alpha p_i)_{[k-3]_2}} = \sum_{i=4}^{k-1} (k-i) = \dfrac{(k-3)(k-4)}{2}, \\
\left\{\begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} N(p_{k-2} \cdot p_{k-1} \cdot p_k) = 1 \text{ valori distincte pentru } y=k-2; \\ \qquad z=k-1,\ u=k, \end{array}\right. \\
\rightarrow N_{(\alpha p_i)_{[k-3]_{k-3}}} = 1.
\end{array}\right\} \quad (k-3)\ \text{termeni} \qquad (18)
$$

Acum, adunînd numerele valorilor parțiale găsim :

$$N_{(\alpha p_i)_{k-3}} = N_{(\alpha p_i)_{[k-3]_1}} + N_{(\alpha p_i)_{[k-3]_2}} + \ldots + N_{(\alpha p_i)_{[k-3]_{k-3}}} =$$

$$= \frac{1}{2}[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (k-3)(k-2)] = \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= C_{k-1}^3 \text{ valori distincte.} \qquad (19)$$

Este evidentă regula de formare a numărului valorilor distincte ale unui indice de un anumit rang, privind relațiile (13), (16) și (19) astfel că pentru cazul general (rang x), avem :

$$N_{(\alpha p_i)_x} = C_{k-1}^{x-1} \text{ valori distincte,} \qquad (20)$$

pentru orice $1 \leqslant i \leqslant k$ și pentru $1 \leqslant x \leqslant k$ la fiecare i.

Acum rezultă ușor numărul total de valori distincte ale indicelui de toate rangurile ale oricărui termen p_i pe care-l notăm cu $N_{\alpha p_i}$:

$$N_{\alpha p_i} = \sum_{x=1}^{k} N_{(\alpha p_i)_x} = \sum_{x=1}^{k} C_{k-1}^{x-1} = 2^{k-1} \text{ valori distincte,} \qquad (21)$$

pentru orice $1 \leqslant i \leqslant k$.

Știm că în analiza rețelelor elementul cel mai important îl constituie raportul de reglare al grupelor, care este determinat în principal de indicele lor (fig. 1) conform relației

$$R_{p_i} = \varphi^{\alpha p_i \cdot (p_i - 1)}. \qquad (22)$$

Atunci cunoscînd numărul valorilor distincte ca și valorile propriu-zise ale indicelui unei grupe de un anumit rang sau de toate rangurile, cunoaștem în fond aceleași elemente ale raportului de reglare al grupei.

Dacă ținem seama de notația $(\alpha_{p_i})_x$ și de semnificația ei, apare necesar să introducem denumirea de raport de reglare de un anumit rang (x)

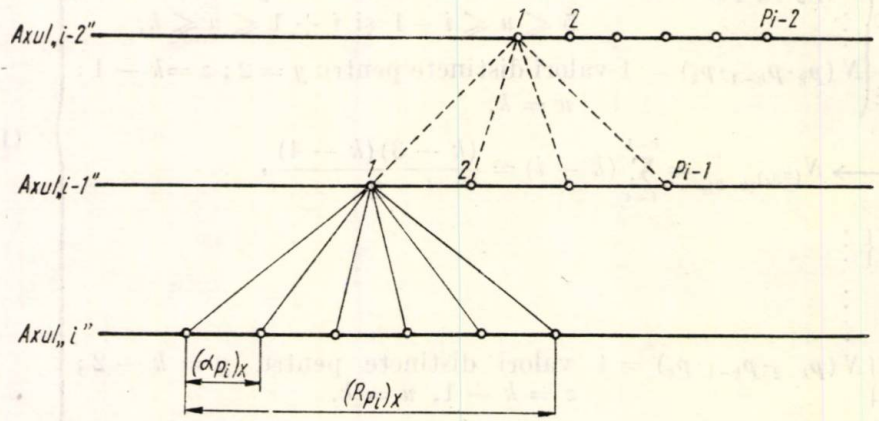


Fig. 2

pe care-l vom distinge cu notația $(R_{p_i})_x$ (vezi fig. 2) și a cărui valoare, conform (22) va fi :

$$(R_{p_i})_x = \varphi^{(\alpha_{p_i})_x \cdot (p_i - 1)}. \tag{23}$$

În baza relației (10), putem scrie :

$$(R_{p_i})_x^{\min} \leqslant (R_{p_i})_x \leqslant (R_{p_i})_x^{\max}, \tag{24}$$

în care limitele sînt date de relațiile :

$$(R_{p_i})_x^{\min} = \varphi^{(\alpha_{p_i})_x^{\min} \cdot (p_i - 1)}, \tag{25}$$

$$(R_{p_i})_x^{\max} = \varphi^{(\alpha_{p_i})_x^{\max} \cdot (p_i - 1)}. \tag{26}$$

De asemenea, analog relațiilor (11) și (12), avem :

$$\left.\begin{aligned} (R_{p_i})_1^{\min} \equiv (R_{p_i})_1^{\max} \equiv R_{p_i}^{\min} = \varphi^{\alpha_{p_i}^{\min} \cdot (p_i - 1)}, \\ (R_{p_i})_k^{\min} \equiv (R_{p_i})_k^{\max} \equiv R_{p_i}^{\max} = \varphi^{\alpha_{p_i}^{\max} \cdot (p_i - 1)}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$R_{p_i}^{\min} < (R_{p_i})_2^{\min} \leqslant (R_{p_i})_2 \leqslant (R_{p_i})_2^{\max} < \ldots < (R_{p_i})_x^{\min} \leqslant (R_{p_i})_x \leqslant$$

$$\leqslant (R_{p_i})_x^{\max} < \ldots < R_{p_i}^{\max}. \tag{28}$$

Pentru un i dat, numărul valorilor distincte ale raportului de reglare al grupei p_i de rang x, va fi egal — ca urmare a relației (23) — cu cel al indicelui de rang x al aceleiași grupe. Acest lucru permite să scriem :

$$N_{(R_{p_i})_x} = N_{(\alpha_{p_i})_x} = C_{k-1}^{x-1} \text{ valori distincte,} \qquad (29)$$

pentru orice $1 \leqslant i \leqslant k$, și pentru $1 \leqslant x \leqslant k$ la fiecare i.

Rezultă atunci :

$$N_{R_{p_i}} = N_{\alpha_{p_i}} = 2^{k-1} \text{ valori distincte,} \qquad (30)$$

pentru orice $1 \leqslant i \leqslant k$,

în care $N_{R_{p_i}}$ este numărul total de valori distincte ale raportului de reglare de toate rangurile ale grupei oarecare p_i.

Într-o rețea structurală știm că fiecare grupă are cîte un indice de un anumit rang.

Astfel la o grupă el este de rang k, la alta de rang $k - 1$, la o a treia de rang $k - 2$, ș.a.m.d., încît fiecare va avea un raport de reglare propriu corespunzător rangului indicelui ei. Interesează cum stau (comparativ ca valoare) între ele rapoartele de reglare ale grupelor din cadrul unei rețele.

ALEGEREA RAPOARTELOR DE REGLARE PENTRU COMPARAȚIE

Fiind suficientă găsirea unui singur cuplu de rapoarte, considerăm două grupe oarecare p_c și p_d din ecuația cinematică (1) ai căror indici se formează consecutiv, adică sînt, de exemplu, de rang $x - 1$ și respectiv x (fig. 3).

Pentru ca concluziile comparației să fie exclusive și definitive, apare necesar să alegem nu orice raport de reglare al lor [știm că atît grupa p_c cît

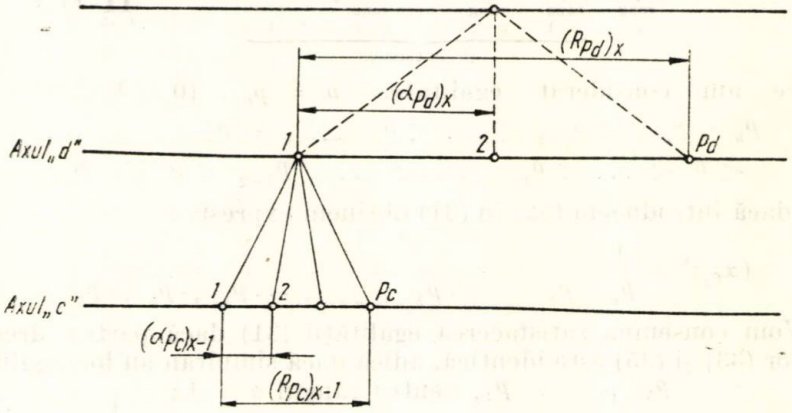


Fig. 3

și p_d, funcție de rang, vor avea un număr de rapoarte de reglare dat de relația (29)], ci rapoartele $(R_{p_c})_{x-1}^{max}$ și $(R_{p_d})_x^{min}$.

Totuși alegerea făcută este ideală dar nu și reală. Astfel în contul unei demonstrații ulterioare semnalăm imposibilitatea utilizării rapoartelor

menționate, făcînd cu acest prilej remarca unei proprietăți însemnate a rețelelor structurale. Este vorba de faptul că din numărul mare de rețele care se pot reprezenta pentru o aceeași ecuație cinematică (1), nu există nici una care, atunci cînd x, p_c și p_d sînt oarecari, să aibă simultan $(R_{p_c})_{x-1}^{\max}$ și $(R_{p_d})_x^{\min}$ deci implicit, nici o ecuație structurală cu indicii $(\alpha_{p_c})_{x-1}^{\max}$ și $(\alpha_{p_d})_x^{\min}$.

Pentru demonstrație, pornim de la faptul că indicii de mai sus fiind formați consecutiv trebuie să respecte egalitatea

$$(\alpha_{p_d})_x^{\min} = (\alpha_{p_c})_{x-1}^{\max} \cdot p_c . \tag{31}$$

Vom arăta că această relație nu se poate satisface în cazul general amintit, ci numai în anumite cazuri particulare.

Ținînd seama de recomandările de la început cu privire la ordinea termenilor din produsul de la numitorul relației (4), indicii $(\alpha_{p_c})_{x-1}^{\max}$ și $(\alpha_{p_d})_x^{\min}$ pot avea următoarele expresii :

$$(\alpha_{p_c})_{x-1}^{\max} = \underbrace{\frac{1}{p_c}}_{\substack{\text{rang}\\ x-1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{p_d}}_{\substack{\text{rang}\\ x}} \cdot \frac{q}{\underbrace{p_{h+(k-x)} \cdot p_{h+(k-x-1)} \cdots p_{h+\theta+1} \cdot p_{h+\theta-1} \cdots p_{h+2} \cdot p_{h+1} \cdot p_h}_{(k-x)\text{ termeni}}} ; \tag{32}$$

$$(\alpha_{p_d})_x^{\min} = \frac{1}{\underbrace{p_d}_{\substack{\text{rang}\\ x}} \underbrace{p_j \cdot p_{j-1} \cdots p_{j-(k-x-1)}}_{\substack{\text{rang}\\ x+1 \quad x+2 \quad x+(k-x-1)+1=k}}} \cdot \frac{q}{(k-x)\text{ termeni}} = \frac{1}{p_d} \cdot \frac{q}{\prod_{\theta=0}^{k-x-1} p_{j-\theta}} , \tag{33}$$

în care am considerat egalitatea $p_d = p_{h+\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant k-x)$, și

$$p_h < p_{h+1} < p_{h+2} < \ldots < p_{h+(k-x-1)} < p_{h+(k-x)} < \ldots$$
$$< p_i < \ldots < p_{j-(k-x-1)} < \ldots < p_{j-2} < p_{j-1} < p_j . \tag{34}$$

Acum dacă introducem (32) în (31) obținem expresia :

$$(\alpha_{p_d})_x^* = \frac{1}{p_d} \cdot \frac{q}{p_{h+(k-x)} \cdot p_{h+(k-x-1)} \cdots p_{h+2} \cdot p_{h+1} \cdot p_h} . \tag{35}$$

Vom consemna satisfacerea egalității (31) dacă partea dreaptă a relațiilor (33) și (35) este identică, adică dacă simultan au loc egalitățile :

$$\left.\begin{aligned} &p_{h+(k-x)} = p_j, \text{ pentru rangul } x+1 ;\\ &p_{h+(k-x-1)} = p_{j-1}, \text{ pentru rangul } x+2 ;\\ &\vdots\\ &p_{h+1} = p_{j-(k-x-2)}, \text{ pentru rangul } k-1 ;\\ &p_h = p_{j-(k-x-1)}, \text{ pentru rangul } k. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Observăm că, condiția necesară și suficientă ca (36) să existe este ca cel puțin la unul din capete (rangul $x + 1$ sau k) să avem egalitate. Adică

$$h + (k - x) = j, \text{ pentru rangul } x + 1 \tag{37}$$

sau

$$h = j - (k - x - 1), \text{ pentru rangul } k. \tag{38}$$

Cunoscînd semnificația termenilor p_h și p_j, putem scrie :

$$h = 1 \text{ și } j = k. \tag{39}$$

Atunci, înlocuind (39) pe rînd în (37) și (38), găsim că egalitățile (36) există numai cînd $x = 1$ sau $x = 0$, valori care însă nu au sens pentru ceea ce ne-am propus [2].

Am demonstrat astfel că pentru p_c, p_d și x oarecari nu avem rețele care să aibă simultan $(R_{p_c})^{\max}_{x-1}$ și $(R_{p_d})^{\min}_{x}$.

Vor fi însă posibile rețelele care posedă $(R_{p_c})^{*}_{x-1} \neq (R_{p_c})^{\max}_{x-1}$ și $(R_{p_d})^{\min}_{x}$ sau $(R_{p_c})^{\max}_{x-1}$ și $(R_{p_d})^{*}_{x} \neq (R_{p_d})^{\min}_{x}$ [$(R_{p_c})^{*}_{x-1}$ respectiv $(R_{p_d})^{*}_{x}$ sînt rapoarte de reglare oarecare din numărul posibil, dat pentru fiecare grupă de relația (29)], acestea fiind deci cuplurile generale de rapoarte pe care le vom folosi pentru comparație.

CAZURI PARTICULARE ÎN OPERAȚIA DE ALEGERE A CUPLULUI DE RAPOARTE DE REGLARE NECESARE COMPARAȚIEI

1. Unul din acestea este $x = x$; $p_c = p_j$ și $p_d = p_h$.
Ca urmare, cuplul de rapoarte va fi format din :

$$(R_{p_j})^{\max}_{x-1} = \varphi^{(\alpha_{p_j})^{\max}_{x-1} \cdot (p_j - 1)} \tag{40}$$

și

$$(R_{p_h})^{\min}_{x} = \varphi^{(\alpha_{p_h})^{\min}_{x} \cdot (p_h - 1)}, \tag{41}$$

în care

$$(\alpha_{p_j})^{\max}_{x-1} = \frac{1}{\underbrace{p_j}_{\text{rang } x-1}} \cdot \frac{q}{\prod_{\theta=0}^{k-x} p_{h+\theta}}, \tag{42}$$

iar p_h poate avea indicele de rang x, $x + 1, \ldots, k$, și

$$(\alpha_{p_h})^{\min}_{x} = \frac{1}{p_h} \cdot \frac{q}{\prod_{\theta=0}^{k-x-1} p_{j-\theta}}, \tag{43}$$

unde p_j poate avea indicele cel puțin de rang $x + 1$.

---

[2]) Se observă (vezi relațiile (23) și (28)) că, pentru ca comparația rapoartelor de reglare ale grupelor cu indicii de rang consecutiv să aibă sens, trebuie ca $2 \leqslant x \leqslant k$.

După cum am văzut, pentru a putea utiliza un cuplu de rapoarte trebuie respectată egalitatea (31). Or, privind relațiile (42) și (43) observăm că p_j trebuie, în cel mai fericit caz, să aibă simultan indicele de rang $x-1$ respectiv $x+1$, ceea ce este imposibil. Ca urmare scriind că

$$(\alpha_{p_h})_x^{\min} \neq (\alpha_{p_j})_{x-1}^{\max} \cdot p_j \,, \tag{44}$$

rezultă imposibilitatea existenței într-o rețea a cuplului $(R_{p_j})_{x-1}^{\max}$ și $(R_{p_h})_x^{\min}$, însă numai pentru $2 \leqslant x \leqslant k-1$ deoarece la $x=k$, egalitatea (31) are loc pentru orice $1 \leqslant c \leqslant h-1$ și $h+1 \leqslant c \leqslant k$, inclusiv $c=j$.

Astfel, să considerăm deci $x=k$, $p_c=p_c$ și $p_d=p_h$. Vom avea:

$$(\alpha_{p_c})_{k-1}^{\max} = \frac{1}{p_c} \cdot \frac{q}{p_h}, \tag{45}$$

$$(\alpha_{p_h})_k^{\min} = \frac{q}{p_h}. \tag{46}$$

Dacă se înlocuiesc aceste relații în egalitatea (31), se constată valabilitatea ei, adică

$$(\alpha_{p_h})_k^{\min} = (\alpha_{p_c})_{k-1}^{\max} \cdot p_c \,, \tag{47}$$

pentru orice $1 \leqslant c \leqslant h-1$ și $h+1 \leqslant c \leqslant k$, inclusiv $c=j$.

Consemnăm în acest fel prezența la unele rețele ale cuplului de rapoarte $(R_{p_c})_{k-1}^{\max}$ și $(R_{p_h})_k^{\min}$.

2. Acest caz particular, este dat de $x=x$, $p_c=p_h$ și $p_d=p_j$.

Pentru el, cuplul de rapoarte devine

$$(R_{p_h})_{x-1}^{\max} = \varphi^{(\alpha_{p_h})_{x-1}^{\max} \cdot (p_h-1)} \tag{48}$$

și

$$(R_{p_j})_x^{\min} = \varphi^{(\alpha_{p_j})_x^{\min} \cdot (p_j-1)}, \tag{49}$$

în care:

$$(\alpha_{p_h})_{x-1}^{\max} = \frac{1}{\underbrace{p_h}_{\substack{\text{rang}\\ x-1}}} \cdot \frac{1}{\underbrace{p_{h+(k-x+1)}}_{\substack{\text{rang}\\ x}}} \cdot \frac{q}{\underbrace{p_{h+(k-x)}}_{\substack{\text{rang}\\ x+1}} \cdot \underbrace{p_{h+(k-x-1)}}_{\substack{\text{rang}\\ x+2}} \cdots \underbrace{p_{h+2}}_{\substack{\text{rang}\\ k-1}} \cdot \underbrace{p_{h+1}}_{\substack{\text{rang}\\ k}}}, \tag{50}$$

$$(\alpha_{p_j})_x^{\min} = \frac{1}{\underbrace{p_j}_{\substack{\text{rang}\\ x}}} \cdot \frac{q}{\underbrace{p_{j-1}}_{\substack{\text{rang}\\ x+1}} \cdot \underbrace{p_{j-2}}_{\substack{\text{rang}\\ x+2}} \cdots \underbrace{p_{j-(k-x-1)}}_{\substack{\text{rang}\\ k-1}} \cdot \underbrace{p_{j-(k-x)}}_{\substack{\text{rang}\\ k}}}. \tag{51}$$

Pentru acest caz, egalitatea (31) devine:

$$(\alpha_{p_j})_x^{\min} = (\alpha_{p_h})_{x-1}^{\max} \cdot p_h. \tag{52}$$

Vom arăta că egalitatea (52) există numai într-un singur caz particular.

Astfel, folosind relațiile (50) și (51) vom consemna satisfacerea relației (52), dacă simultan există egalitățile :

$$\left.\begin{aligned} &p_j = p_{h+(k-x+1)}, \text{ pentru rangul } x; \\ &p_{j-1} = p_{h+(k-x)}, \text{ pentru rangul } x+1; \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ &p_{j-(k-x-1)} = p_{h+2}, \text{ pentru rangul } k-1; \\ &p_{j-(k-x)} = p_{h+1}, \text{ pentru rangul } k. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Condiția necesară și suficientă ca (53) să existe este ca la unul din capete să avem egalitate, adică trebuie ca

$$j = h + (k - x + 1), \tag{54}$$

de unde scoatem

$$x = k - j + h + 1. \tag{55}$$

Introducînd relațiile (39) în (55), găsim cazul particular căutat :

$$x = 2. \tag{56}$$

Deci pentru $x = 2$ avem rețele cu cuplul de rapoarte format din $(R_{p_h})_1^{\max}$ și $(R_{p_j})_2^{\min}$, deoarece are loc egalitatea (31), care aici capătă forma

$$(\alpha_{p_j})_2^{\min} = (\alpha_{p_h})_1^{\max} \cdot p_h. \tag{57}$$

REZULTATELE COMPARAȚIEI

Considerînd enumerarea tuturor cuplurilor de rapoarte de reglare de mai sus drept alegerea necesară comparației despre care am amintit, vom demonstra că într-o rețea structurală rapoartele de reglare ale grupelor de turații sînt crescătoare ca valoare, în sensul în care rangul de formare a indicilor este crescător, și ca o consecință, raportul de reglare maxim în rețea este al grupei avînd indicele format ultimul (rang k) fiind tocmai raportul de reglare maxim al ei (conform relației (27)). Demonstrațiile se vor efectua pentru cazurile generale, respectiv particulare, de cupluri de rapoarte stabilite mai înainte.

Cazul I. Considerăm cuplul format din rapoartele $(R_{p_c})_{x-1}^*$ și $(R_{p_d})_x^{\min}$.

Vom arăta că

$$(R_{p_c})_{x-1}^* < (R_{p_d})_x^{\min}. \tag{58}$$

Pentru aceasta scriem expresiile lor :

$$(R_{p_c})_{x-1}^* = \varphi^{(\alpha_{p_c})_{x-1}^* \cdot (p_c - 1)}, \tag{59}$$

$$(R_{p_d})_x^{\min} = \varphi^{(\alpha_{p_d})_x^{\min} \cdot (p_d - 1)}. \tag{60}$$

Indicii fiind formați consecutiv permit scrierea egalității:

$$(\alpha_{p_d})_x^{\min} = (\alpha_{p_c})_{x-1}^{*} \cdot p_c. \tag{61}$$

Acum folosind relațiile (59), (60) și (61), inegalitatea (58) de demonstrat, devine:

$$p_d > 2 - \frac{1}{p_c}. \tag{62}$$

Or, inegalitatea (62) este posibilă chiar și pentru cazul extrem cînd $c = j$ și $d = h$ deoarece în cutiile de viteze orice $p_i \geqslant 2$.

Cazul II. Considerăm celălalt cuplu de rapoarte format din $(R_{p_c})_{x-1}^{\max}$ și $(R_{p_d})_x^{*}$. În acest caz, vom arăta că p_d nu va fi oricare dintre $1 \leqslant d \leqslant k$ ci pentru a avea $(R_{p_c})_{x-1}^{\max}$, el trebuie să aibă o valoare particulară.

Astfel, conform relației (32) putem scrie

$$(\alpha_{p_c})_{x-1}^{\max} = \frac{1}{p_c} \cdot \frac{q}{\prod_{\theta=0}^{k-x} p_{h+\theta}} \tag{63}$$

și

$$(\alpha_{p_h})_x^{\max} = \frac{q}{\prod_{\theta=0}^{k-x} p_{h+\theta}}, \tag{64}$$

în care $1 \leqslant c \leqslant i$ și $i \leqslant c \leqslant k$, dar $c \neq h + \theta$ unde $0 \leqslant \theta \leqslant k - x$. Totodată, știind că termenii p_c și p_d au indicii de rang consecutiv, putem scrie

$$(\alpha_{p_d})_x^{*} = (\alpha_{p_c})_{x-1}^{\max} \cdot p_c. \tag{65}$$

Introducînd relația (63) în (65) și ținînd seamă de (64), obținem

$$(\alpha_{p_d})_x^{*} = (\alpha_{p_h})_x^{\max}. \tag{66}$$

Consemnăm deci egalitatea $p_d = p_h$ și în consecință, pentru acest caz, particularitatea cuplului de rapoarte care va fi format din $(R_{p_c})_{x-1}^{\max}$ și $(R_{p_h})_x^{\max}$.

Vom avea de demonstrat

$$(R_{p_c})_{x-1}^{\max} < (R_{p_h})_x^{\max} \tag{67}$$

sau

$$\varphi^{(\alpha_{p_c})_{x-1}^{\max} \cdot (p_c - 1)} < \varphi^{(\alpha_{p_h})_x^{\max} \cdot (p_h - 1)}. \tag{68}$$

Știind că

$$(\alpha_{p_h})_x^{\max} = (\alpha_{p_c})_{x-1}^{\max} \cdot p_c, \tag{69}$$

inegalitatea de demonstrat (68), devine:

$$p_h > 2 - \frac{1}{p_c}, \tag{70}$$

care, după cum s-a văzut, este valabilă pentru orice $1 \leqslant c \leqslant i$ și $i \leqslant c \leqslant k$.

Cazul III. Îl constituie cuplul particular amintit, format din rapoartele $(R_{p_c})_{k-1}^{\max}$ și $(R_{p_h})_k^{\min}$. Trebuie să arătăm deci că :

$$(R_{p_c})_{k-1}^{\max} < (R_{p_h})_k^{\min} \tag{71}$$

sau

$$\varphi^{(\alpha_{p_c})_{k-1}^{\max}\cdot(p_c-1)} < \varphi^{(\alpha_{p_h})_k^{\min}\cdot(p_h-1)}. \tag{72}$$

Cu ajutorul relațiilor (45) și (46), inegalitatea (72) de demonstrat, se reduce la inegalitatea (70), care am arătat că este posibilă întotdeauna.

Cazul IV. Apare pentru cel de al doilea cuplu particular, compus din rapoartele $(R_{p_h})_1^{\max}$ și $(R_{p_j})_2^{\min}$. Analog situațiilor precedente, vom arăta și aici că :

$$(R_{p_h})_1^{\max} < (R_{p_j})_2^{\min}, \tag{73}$$

sau particularizînd relațiile (48) și (49) pentru $x = 2$ vom avea de demonstrat :

$$\varphi^{(\alpha_{p_h})_1^{\max}\cdot(p_h-1)} < \varphi^{(\alpha_{p_j})_2^{\min}\cdot(p_j-1)}. \tag{74}$$

Folosind acum relația (57) și efectuînd unele operații simple inegalitatea de demonstrat (74), devine :

$$p_j > 2 - \frac{1}{p_h}, \tag{75}$$

evidentă, conform relațiilor analoge precedente.

În concluzie, avînd în vedere valabilitatea inegalităților (58), (67), (71) și (73), și particularizînd rangul x pentru toate valorile cuprinse între $2 \leqslant x \leqslant k$, ajungem la constatarea pe care am anticipat-o că într-o rețea rapoartele de reglare ale grupelor sînt crescătoare, în sensul în care rangul indicilor este crescător. Apare deci evident că raportul de reglare maxim în rețea este al grupei avînd indicele de rang k (format ultimul) și, conform relațiilor (27) este tocmai raportul de reglare maxim al ei.

CONCLUZII

Făcînd o sinteză a celor prezentate vom consemna următoarele concluzii importante :

1. Pentru fiecare din termenii p_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ care se stabilesc inițial să satisfacă prin produsul lor valoarea q dată, se pot forma atît indicii de toate rangurile $[(\alpha_{p_i})_x$, pentru toate valorile $1 \leqslant x \leqslant k]$, cît și cei de același rang de formare.

2. Numărul valorilor distincte ale indicilor de același rang x este egal cu C_{k-1}^{x-1}.

3. Numărul total de valori distincte ale indicelui oricărui termen p_i este egal cu 2^{k-1}.

4. Întotdeauna indicele oricărui termen p_i care se formează primul (rang 1) respectiv ultimul (rang k), are valoarea minimă (1) respectiv maximă (q/p_i), între celelalte valori ale lui.

5. În fiecare grupă de turații p_i există un raport de reglare între turațiile sale extreme care variază în funcție de valoarea indicelui său, pentru q și φ dați.

6. Numărul valorilor distincte ale raportului de reglare al grupei p_i având un indice de rang x, este egal cu C_{k-1}^{x-1}.

7. Numărul total de valori distincte ale acestui raport este egal cu 2^{k-1}.

8. Pentru fiecare grupă de turații p_i, raportul de reglare minim $[R_{p_i}^{\min}]$ se obține cînd indicele său se formează primul (rang 1), iar cel maxim $[R_{p_i}^{\max}]$ cînd indicele său se formează ultimul (rang k).

9. Într-o rețea structurală rapoartele de reglare ale grupelor de turații sînt crescătoare în sensul în care rangul de formare a indicilor grupelor este crescător, raportul de reglare maxim în rețea găsindu-se la grupa cu indicele format ultimul, fiind tocmai raportul de reglare maxim al ei.

Primită la redacție la 23 decembrie 1965,
o nouă versiune la 25 aprilie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. E. Botez, *Cinematica mașinilor-unelte*, Edit. tehnică, București, 1961.
2. N. S. Acerkan, *Calculul și construcția mașinilor-unelte*, (trad. din lb. rusă) Edit. tehnică, București, 1955.
3. I. Diaconescu și colab., *Mașini-unelte vol. I*, Edit. transp. și telecom. București, 1959.
4. R. Germar, *Die Getriebe für Normdrehzahlen*, Berlin, Julius Springer, 1932.
5. Ioan Gh. Sandu, *Alegerea rețelei structurale optime la elaborarea cinematicii cutiilor de viteze cu mai mult de două axe*, St. cerc. mec. apl., *4*, *19* (1965).

STUDII

NOTA I

ÎNCERCĂRI PRIVIND PLASTICIZAREA PARȚIALĂ A ELEMENTELOR ÎNCOVOIATE DE BETON*)

de C. AVRAM, I. FILIMON și R. MARINOV

Centrul de cercetări tehnice al Academiei Republicii Socialiste România, Timișoara

539.3

În lucrarea [1] s-au prezentat unele concluzii privind influența calității betonului și a înălțimii secțiunii transversale a elementelor încovoiate asupra plasticizării parțiale a zonei întinse de beton, respectiv asupra capacității portante relative a acestor elemente și s-au propus formule practice de calcul.
În 1965 s-au continuat verificările experimentale încercînd șapte serii de elemente din beton de calitate $R_b = 74 \ldots 536$ kgf/cm^2. Rezultatele obținute confirmă, în general, presupunerile teoretice.

1) PROGRAMUL ÎNCERCĂRILOR

Pentru a acoperi cu rezultate experimentale o mare parte a cîmpului de valori ale coeficientului de plasticizare parțială w_{fp} și ale raportului $m = R_{ti}/R_t$ date în figura 3 [1] și tabela 1 [1], s-au confecționat în 1965 șapte serii de elemente din beton, ale căror caracteristici geometrice sînt date în tabela 1. Fiecare serie conține șase tipuri de elemente și fiecare tip cîte două elemente. Fiecare element a fost încercat de două ori, forța concentrată fiind aplicată la mijlocul deschiderii $l = 3h$ (fig. 4 [1]), pentru menținerea modului de încercare standardizat pentru prismele de $10 \times 10 \times 55$ cm.

Momentul încovoietor experimental de rupere M_f^e reprezintă, pentru fiecare serie și tip de elemente, media a 4 rezultate; pentru fiecare încercare s-au măsurat dimensiunile b și h ale secțiunii transversale de rupere.

*) Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mecanique Appliquée **12**, 4 (1967) (în limba franceză).

ST. CERC. MEC. APL. TOM 26 NR. 6 P. 1283–1289 BUCUREȘTI 1967

S – c. 5932

Tabela 1

Caracteristicile geometrice ale elementelor experimentale (vezi fig. 4[1]).

Tipul	Lățime b cm	Înălțime h cm	Deschidere l cm	Lungime L cm
1	2	3	4	5
S_{n1}	10	10	30	55
S_{n2}	10	15	45	85
S_{n3}	10	20	60	110
S_{n4}	10	30	90	165
S_{n5}	10	40	120	200
S_{n6}	10	50	150	245

$n = 1, 2, \ldots, 7$

Rezistența betonului la compresiune R_b a fost determinată pe cuburi de 20 cm latură, ca medie a 12 rezultate pentru fiecare serie. Rezistența la întindere R_t a fost determinată pe elemente avînd $h = 10$ cm (prisme standardizate în România) cu formula:

$$R_t = \frac{M_f^e}{0{,}292 \cdot w_{fp} \cdot bh^2},$$

unde w_{fp}, pentru $h = \text{const.}$, este funcție de R_b conform fig. 3 [1] și tabelei 1 [1]:

$R_b = 74; 114; 137; 170; 183; 264; 536$ kgf/cm²
$w_{fp} = 1{,}00; 1{,}00; 0{,}99; 0{,}98; 0{,}97; 0{,}95; 0{,}88.$

Rezistența convențională la întindere R_{ti} a fost determinată pentru fiecare serie și tip de element cu ajutorul formulei lui Navier:

$$R_{ti} = \frac{6\,M_f^e}{bh^2}.$$

Încercările au fost efectuate cu ajutorul unei prese de încovoiere de 7 tf cu o viteză de încărcare constantă și egală aproximativ cu 0,5 kgf/cm² sec pentru fibra extremă întinsă.

Betonul a fost preparat cu ciment portland cu rezistențe inițiale mari RIM 400 și cu agregate de Ghioroc de 0...30 mm.

2) REZULTATE EXPERIMENTALE ȘI VALORI TEORETICE

Valorile experimentale R_b, R_t, R_{ti} și M_f^e sînt date în tabela 2 (coloanele 2, 3, 4 și 7).

Valorile teoretice ale momentului încovoietor de rupere în ipoteza plasticizării totale a zonei întinse de beton sînt calculate cu formula (2) [1]:

$$M_f^{tt} = 0{,}292 \cdot bh^2 \cdot R_t$$

(tabela 2, coloana 8).

Cu valorile de mai sus s-au putut calcula valorile experimentale ale raportului $m^e = R_{ti}/R_t$ (coloana 5) și ale coeficientului de plasticizare parțială a zonei întinse de beton $w_{fp}^e = M_f^e/M_f^{tt}$ (coloana 9).

Tabela 2

Valorile experimentale și teoretice ale lui M_f, m și w_{fp}

Seria și tipul	R_b kgf/cm²	R_t kgf/cm²	R_{ti} kgf/cm²	$m^e = \frac{R_{ti}}{R_t}$	m^t tab. 1[1]	M_f^e kgfm	M_f^{tt} for. 2[1]	$w_{fp}^e = \frac{M_f^e}{M_f^{tt}}$	w_{fp}^t tab. 1[1]	M_f^{tp} for. 6[1]	$100 \cdot \frac{M_f^e - M_f^{tp}}{M_f^e}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_{11}			12,5	1,78	1,75	22,6	22,6	1,00	1,00	22,6	0,0
S_{12}			11,0	1,57	1,57	42,3	47,1	0,90	0,90	42,3	0,0
S_{13}	74	7,03	8,9	1,27	1,45	59,2	82,1	0,72	0,83	68,1	+13,2
S_{14}			5,2	0,74*)	1,31	81,0	184,7	0,43	0,75	138,4	+41,3*)
S_{15}			8,8	1,25	1,22	234,0	341,0	0,69	0,70	240,0	+ 2,5
S_{16}			4,3	0,61*)	1,19	185,0	521,0	0,44	0,68	360,0	+48,5*)
S_{21}			25,4	1,77	1,75	43,7	43,7	1,00	1,00	43,7	0,0
S_{22}			20,1	1,39	1,57	75,5	94,0	0,80	0,90	85,6	+11,7
S_{23}	114	14,4	18,3	1,28	1,45	122,0	167,5	0,73	0,83	139,0	+12,2
S_{24}			19,0	1,32	1,31	284,0	393,0	0,72	0,75	293,0	+ 3,1
S_{25}			11,7	0,51*)	1,22	312,0	669,0	0,47	0,70	468,0	+33,3*)
S_{26}			11,1	0,77*)	1,19	483,0	1080,0	0,44	0,68	734,0	+34,2*)
S_{31}			27,1	1,64	1,73	47,8	48,2	0,99	0,99	47,8	0,0
S_{32}			27,8	1,69	1,56	104,1	108,2	0,96	0,89	96,5	− 7,9
S_{33}	137	16,5	23,7	1,44	1,43	155,0	192,5	0,81	0,82	157,8	+ 1,8
S_{34}			21,8	1,32	1,31	325,0	432,0	0,75	0,75	324,0	− 0,3
S_{35}			19,0	1,15	1,22	506,0	770,0	0,66	0,70	538,0	+ 5,9
S_{36}			—	—	1,19	—	—	—	0,68	—	—
S_{41}			32,9	1,67	1,71	56,3	57,4	0,98	0,98	56,3	0,0
S_{42}			32,6	1,65	1,54	120,6	130,0	0,92	0,88	115,0	− 4,9
S_{43}	170	19,7	31,2	1,58	1,42	204,5	230,0	0,88	0,81	186,5	− 9,6
S_{44}			23,8	1,21	1,29	351,5	517,0	0,68	0,74	383,0	+ 8,2
S_{45}			27,9	1,42	1,21	746,0	918,0	0,81	0,69	634,0	−17,6
S_{46}			29,1	1,48	1,17	1220,0	1434,0	0,85	0,67	960,0	−27,1
S_{51}			32,4	1,69	1,70	55,6	57,2	0,97	0,97	55,6	0
S_{52}			40,5	2,11*)	1,54	155,5	126,3	1,23*)	0,88	111,4	−40,0*)
S_{53}	183	19,2	42,1	2,19*)	1,42	280,0	225,0	1,24*)	0,81	182,0	−65,0*)
S_{54}			—	—	1,30	—	—	—	0,74	—	—
S_{55}			23,8	1,24	1,21	645,0	895,0	0,72	0,69	618,4	− 4,4
S_{56}			24,7	1,29	1,17	1040,0	1400,0	0,74	0,67	936,0	−11,1
S_{61}			49,0	1,64	1,66	83,0	87,2	0,95	0,95	83,0	0
S_{62}			37,0	1,24	1,50	142,0	196,5	0,72	0,86	109,0	+16,0
S_{63}	264	29,9	36,0	1,21	1,40	245,0	349,6	0,70	0,80	279,0	+12,2
S_{64}			39,5	1,32	1,28	593,0	726,0	0,75	0,73	638,0	+ 7,1
S_{65}			41,8	1,40	1,19	1114,0	1400,0	0,82	0,68	951,0	−17,1
S_{66}			45,2	1,51	1,17	1900,0	2180,0	0,87	0,67	1462,0	−30,0*)
S_{71}			55,6	1,53	1,54	93,3	106,2	0,88	0,88	93,3	0
S_{72}			53,4	1,47	1,42	198,2	238,0	0,83	0,81	193,0	− 2,7
S_{73}	536	36,3	51,0	1,40	1,33	345,0	424,0	0,81	0,76	322,0	− 7,1
S_{74}			45,2	1,25	1,22	731,0	954,0	0,77	0,70	655,5	− 9,8
S_{75}			44,5	1,23	1,17	1211,0	1695,0	0,72	0,67	1136,0	− 6,6
S_{76}			37,3	1,03	1,14	1350,0	2650,0	0,59	0,65	1720,0	− 9,9

*) Valori anormale datorită neomogenității accidentale a betonului.

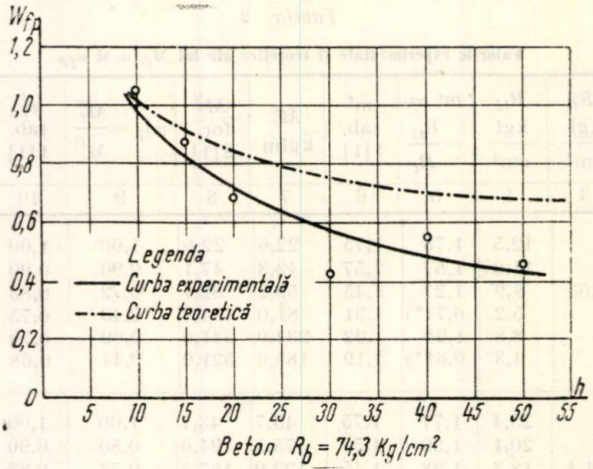


Fig. 1

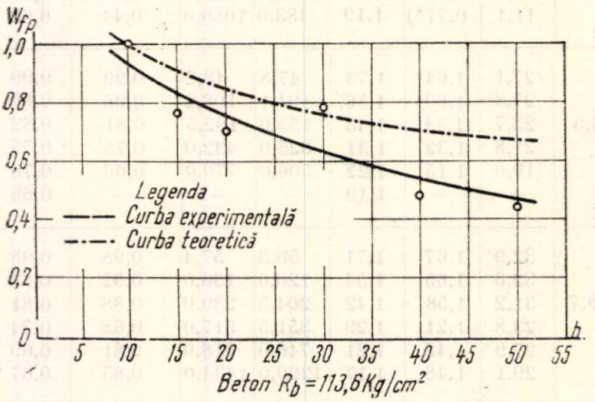


Fig. 2

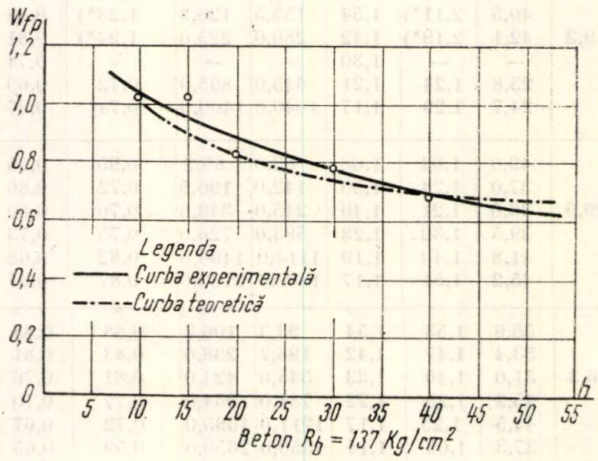


Fig. 3

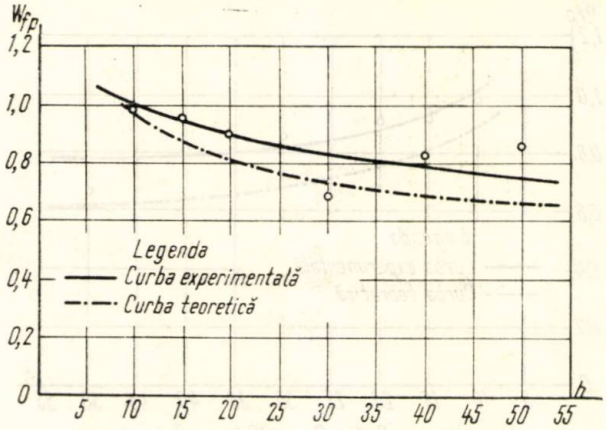


Fig. 4

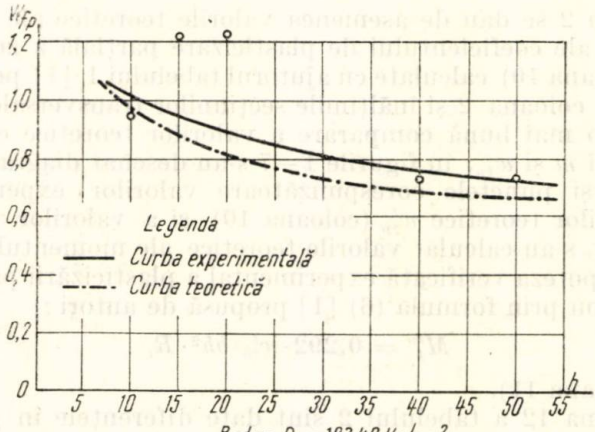


Fig. 5

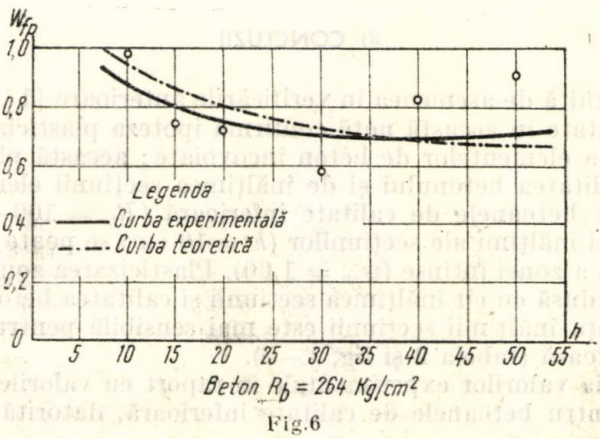


Fig.6

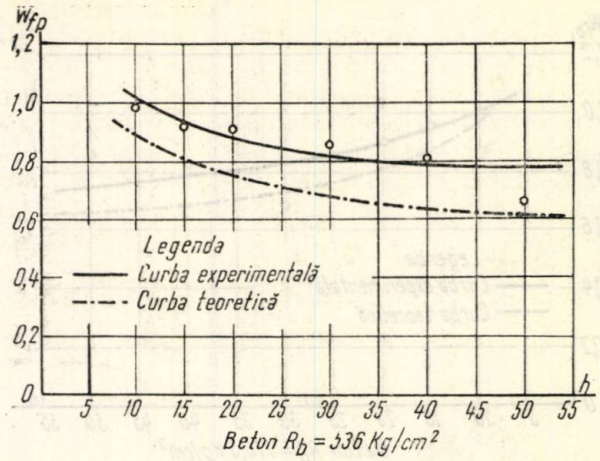


Fig. 7

În tabela 2 se dau de asemenea valorile teoretice ale raportului m^t (coloana 6) și ale coeficientului de plasticizare parțială a zonei întinse de beton w_f^t (coloana 10) calculate cu ajutorul tabelului 1 [1] pentru calitățile de beton din coloana 2 și înălțimile secțiunilor transversale din tabela 1.

Pentru o mai bună comparare a valorilor teoretice cu cele experimentale ale lui m și w_{fp}, în figurile 1—7 s-au desenat diagramele curbelor teoretice w_{fp}^t și punctele corespunzătoare valorilor experimentale. Cu ajutorul valorilor teoretice w_{fp}^t (coloana 10) și a valorilor experimentale R_t (coloana 3), s-au calculat valorile teoretice ale momentului încovoietor de rupere, în ipoteza verificată experimental a plasticizării parțiale a zonei întinse de beton prin formula (6) [1] propusă de autori :

$$M_f^{tp} = 0{,}292 \cdot w_{fp}^t \cdot bh^2 \cdot R_t$$

(tabela 2, coloana 11).

În coloana 12 a tabelului 2 sînt date diferențele în procente între valorile teoretice, după formula propusă de autori, și valorile experimentale ale momentului de rupere (de fisurare) M_f.

3) CONCLUZII

Cum rezultă de asemenea în verificările anterioare [1], analiza încercărilor prezentate în această notă confirmă ipoteza plasticizării parțiale a zonei întinse a elementelor de beton încovoiate ; această plasticizare este funcție de calitatea betonului și de înălțimea secțiunii elementului încovoiat. Pentru betoanele de calitate inferioară ($R_b = 100—150$ kgf/cm²) și pentru mici înălțimi ale secțiunilor ($h = 10$ cm) se poate admite plasticizarea totală a zonei întinse ($w_{fp} = 1{,}00$). Plasticizarea zonei întinse este cu atît mai redusă cu cît înălțimea secțiunii și calitatea betonului sînt mai mari ; influența înălțimii secțiunii este mai sensibilă pentru betoanele de calitate inferioară (tabela 2 și fig. 1—7).

Dispersia valorilor experimentale în raport cu valorile teoretice este mai mare pentru betoanele de calitate inferioară, datorită eterogenității

mai mari a acestor betoane. Valorile medii experimentale w_{fp} se situează, în general, sub curbele teoretice pentru betoanele de calitate inferioară și deasupra acestor curbe pentru betoanele de calitate superioară (fig. 1—7). Diferențele între valorile experimentale M_f^e și valorile teoretice M_f^{tp} calculate cu formula (6) [1] propusă de autori, cu excepția unor elemente din seriile 1, 2 și 5, sînt cuprinse între -17% și $+16\%$ (tabela 2, coloana 12), ceea ce este acceptabil, fiind cunoscut că capacitatea portantă a elementului încovoiat depinde de rezistența la întindere a betonului.

Formula teoretică :

$$M_f^{tt} = 0{,}292 \cdot bh^2 \cdot R_t \cong \frac{1}{3{,}5} \cdot bh^2 \cdot R_t ,$$

acceptată de normativele anumitor țări (ipoteza plasticizării totale a zonei întinse), dă valori prin exces (tabela 2, coloana 8), ceea ce duce la diminuarea coeficientului de siguranță presupus.

Lucrările experimentale continuă.

Primită la redacție la 4 aug. 1966.

BIBLIOGRAFIE

[1] Avram C., Filimon I., Marinov R., *Aspecte privind plasticizarea parțială a elementelor încovoiate din beton și microbeton*, St. Cerc. Mec. Apl., **20**, *6*, p. 1463—1474 (1965).

MOMENTELE PLASTICE ALE SECȚIUNILOR ELEMENTELOR DE OȚEL I ȘI [LAMINATE ÎN ROMÂNIA

de VALERIU PETCU
Institutul de cercetări în construcții
și economia construcțiilor (INCERC), București

539.3

În lucrare se studiază influența forțelor tăietoare și axiale asupra valorilor momentelor plastice ale secțiunilor elementelor I și [laminate în România. Sînt luate în considerație solicitările la încovoiere cu forță tăietoare, încovoiere cu forță axială, precum și la încovoiere cu forță tăietoare și forță axială. Rezultatele obținute își găsesc aplicație în calculul plastic al structurilor alcătuite din elementele laminate studiate în cadrul acestei lucrări.

1. INTRODUCERE

Una din ipotezele teoriei plastice simple aplicate structurilor de oțel constă în neglijarea efectului forțelor tăietoare și axiale asupra mărimii momentelor plastice ale secțiunilor critice.

Această ipoteză este acceptabilă atîta timp cît valorile acestor forțe se mențin între anumite limite. De îndată însă ce aceste limite sînt depășite, neglijarea efectului forțelor tăietoare și axiale conduce la supraestimarea valorilor momentelor plastice și implicit la supraestimarea capacității portante a structurilor. De aceea, pentru evitarea unei astfel de situații, apare necesară stabilirea limitelor între care forțele tăietoare și axiale au efecte neglijabile, precum și determinarea corecțiilor ce trebuie aduse valorilor momentelor plastice date de teoria plastică simplă, de îndată ce aceste limite sînt depășite.

În ultimul timp această problemă a făcut obiectul mai multor studii, dintre care se remarcă cel efectuat de M. R. HORNE [1] atît prin modul în care este rezolvată problema cît și prin posibilitățile pe care le oferă din punctul de vedere al aplicării practice a rezultatelor obținute. Referitor la această problemă, o situație specială este oferită de structurile alcătuite exclusiv din elemente laminate de oțel avînd secțiunile de formă I sau [,

datorită faptului că dimensiunile geometrice ale acestor secțiuni sînt date în standarde de specialitate. Această situație face posibilă determinarea prealabilă a momentelor plastice ale secțiunilor, ceea ce constituie o simplificare substanțială a operațiilor de dimensionare a structurilor de oțel în domeniul plastic și de verificare a capacității de rezistență a acestora.

În cele ce urmează se determină momentele plastice ale secțiunilor I și [ale elementelor de oțel laminate în România, ținîndu-se seama de efectul forțelor tăietoare și axiale.

Studiul are la bază rezultatele obținute de M. R. HORNE [1] în acest domeniu.

II. IPOTEZE DE CALCUL

Ipotezele care stau la baza studiului sînt următoarele :

1. Se consideră că oțelul este un material elasto-plastic.

2. Solicitarea la încovoiere are loc în planul inimii la secțiunile I, respectiv într-un plan paralel cu planul inimii, trecînd prin centrul de încovoiere, la secțiunile [.

3. Fiecare secțiune se consideră formată din trei dreptunghiuri, dintre care două reprezintă tălpile iar a treia inima secțiunii (fig. 1).

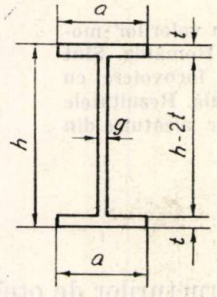


Fig. 1

Laturile mici ale dreptunghiurilor care aproximează tălpile sînt egale cu grosimea medie a tălpilor iar laturile mari ale dreptunghiului care aproximează inima sînt egale cu diferența dintre înălțimea secțiunii și dublul grosimii medii a tălpilor.

4. Forța tăietoare este preluată exclusiv de inima secțiunii.

Această forță se presupune uniform distribuită pe înălțimea inimii.

5. Forța axială este de asemenea preluată exclusiv de inima secțiunii.

III. NOTAȚII

În cele ce urmează se folosesc următoarele notații :

a — lățimea tălpilor secțiunii ;
g — grosimea inimii secțiunii ;
h — înălțimea totală a secțiunii ;
M_p — momentul plastic al secțiunii solicitate la încovoiere pură ;
M_{pq} — momentul plastic al secțiunii solicitate la încovoiere cu forță tăietoare ;
M_{pn} — momentul plastic al secțiunii solicitate ca încovoiere cu forță axială ;
M_{pqn} — momentul plastic al secțiunii solicitate la încovoiere cu forță tăietoare și forță axială ;
N — forța axială care solicită secțiunea ;
N_p — valoarea maximă a forței axiale preluate de inima secțiunii ;
Q — forța tăietoare care solicită secțiunea ;

Q_p — valoarea maximă a forței tăietoare preluate de inima secțiunii;
S — momentul static al unei jumătăți de secțiune, determinat în raport cu axa de simetrie perpendiculară pe planul de încovoiere;
t — grosimea medie a tălpilor secțiunii;
W_p — modulul de rezistență plastic al secțiunii;
y — distanța de la axa de simetrie la axa neutră a secțiunii complet plastificate solicitate la încovoiere cu forță axială, sau la încovoiere cu forță tăietoare și forță axială;
σ_c — efortul unitar normal de curgere al oțelului;
σ_q — efortul unitar normal în inima secțiunii complet plastificate solicitate la încovoiere cu forță tăietoare;
σ_{qn} — efortul unitar normal în inima secțiunii complet plastificate solicitate la încovoiere cu forță tăietoare și forță axială;
τ — efortul unitar tangențial produs de forța tăietoare Q;
τ_c — efortul unitar tangențial de curgere al oțelului.

IV. SOLICITAREA LA ÎNCOVOIERE PURĂ

Prin definiție, momentul plastic al unei secțiuni solicitate la încovoiere pură este egal cu momentul încovoietor corespunzător plastificării complete a secțiunii (fig. 2).

Mărimea acestui moment este dată de relația

$$M_p = W_p \sigma_c. \tag{1}$$

Modulul de rezistență plastic al secțiunilor care admit o axă de simetrie perpendiculară pe planul de încovoiere are expresia

$$W_p = 2S. \tag{2}$$

Cu notațiile din figura 1, expresia (2) devine

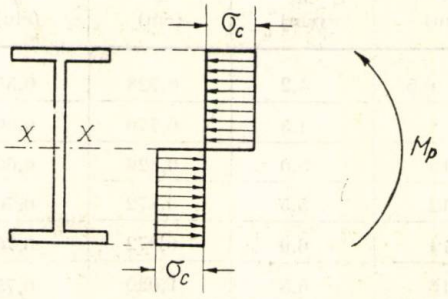


Fig. 2

$$W_p = at\,(h - t) + \frac{1}{4} g(h - 2t)^2. \tag{3}$$

Valorile modulilor de rezistență plastici ai secțiunilor I și [sînt date în tabelele 1 și 2, alături de celelalte caracteristici geometrice ale acestor secțiuni [2], [3], [4].

Tabela 1

Secțiuni I. Caracteristici geometrice

I	h (cm)	a (cm)	t (cm)	g (cm)	W_p (cm³)
8	8	4,2	0,577	0,39	22,8
10	10	5,0	0,664	0,45	39,8
12	12	5,8	0,752	0,51	63,6
14	14	6,6	0,840	0,57	95,4
16	16	7,4	0,928	0,63	136
18	18	8,2	1,016	0,69	187
20	20	9,0	1,104	0,75	250
22	22	9,8	1,192	0,81	324
24	24	10,6	1,280	0,87	412
26	26	11,3	1,377	0,94	514
28	28	11,9	1,485	1,01	632
30	30	12,5	1,582	1,08	762
32	32	13,1	1,692	1,15	914
36	36	14,3	1,905	1,30	1276
40	40	15,5	2,110	1,44	1714

Tabela 2

Secțiuni [. Caracteristici geometrice

[	h (cm)	a (cm)	t (cm)	g (cm)	W_p (cm³)
6,5	6,5	4,2	0,728	0,55	21,6
8	8	4,5	0,776	0,60	31,8
10	10	5,0	0,826	0,60	49,0
12	12	5,5	0,872	0,70	72,6
14	14	6,0	0,972	0,70	103
16	16	6,5	1,020	0,75	138
18	18	7,0	1,068	0,80	179
20	20	7,5	1,116	0,85	228
22	22	8,0	1,214	0,90	292
24	24	8,5	1,262	0,95	358
26	26	9,0	1,360	1,00	442
30	30	10,0	1,560	1,00	632

V. SOLICITAREA LA ÎNCOVOIERE CU FORȚĂ TĂIETOARE

După S. HEYMAN și V. L. DUTTON [1], distribuția de eforturi pe înălțimea secțiunii, corespunzătoare plastificării complete a secțiunii datorită solicitării la încovoiere cu forță tăietoare, este cea reprezentată în figura 3.

Momentul plastic al secțiunii are expresia

$$M_{pq} = at(h - t)\sigma_c + \frac{1}{4} g(h - 2t)^2 \sigma_q . \tag{4}$$

Conform criteriului de curgere al lui *von* MISES, eforturile unitare σ_c, σ_q și τ satisfac egalitatea

$$\sigma_q^2 + 3\tau^2 = \sigma_c^2 . \tag{5}$$

Efortul unitar τ este dat de relația

$$\tau = \frac{Q}{g(h - 2t)} . \tag{6}$$

Dacă momentul încovoietor este nul iar inima secțiunii se plastifică numai sub acțiunea forței tăietoare, rezultă $\sigma_q = 0$ și $\tau = \tau_c$, iar din egalitatea (5) se obține

$$\tau_c = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} . \tag{7}$$

Pe de altă parte însă, în situația descrisă mai sus are loc egalitatea

$$\tau_c = \frac{Q_p}{g(h - 2t)} . \tag{8}$$

Din relațiile (6)—(8) rezultă

$$\tau = \frac{Q}{Q_p} \cdot \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} . \tag{9}$$

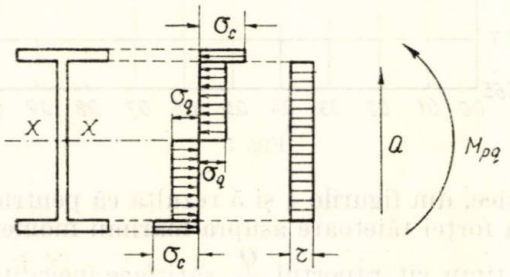


Fig. 3

Relațiile (5) și (9) conduc la următoarea expresie a efortului unitar σ_q

$$\sigma_q = \sigma_c \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^2}. \tag{10}$$

Ținînd seama de relația (10), expresia momentului plastic devine

$$M_{pq} = \left[at(h-t) + \frac{1}{4}g(h-2t)^2\right]\sqrt{1 - \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^2}\,\sigma_c. \tag{11}$$

În figurile 4 și 5 sînt trasate domeniile de variație ale raportului $\frac{M_{pq}}{M_p}$ în funcție de raportul $\frac{Q}{Q_p}$, pentru secțiunile I și [considerate în acest studiu.

Dacă se admite o eroare de maximum 2% la determinarea valorilor

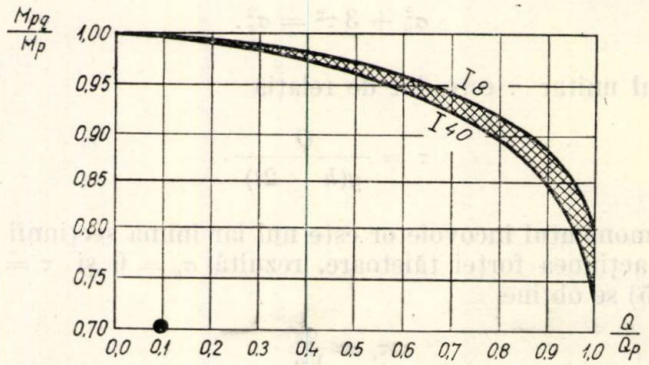


Fig. 4

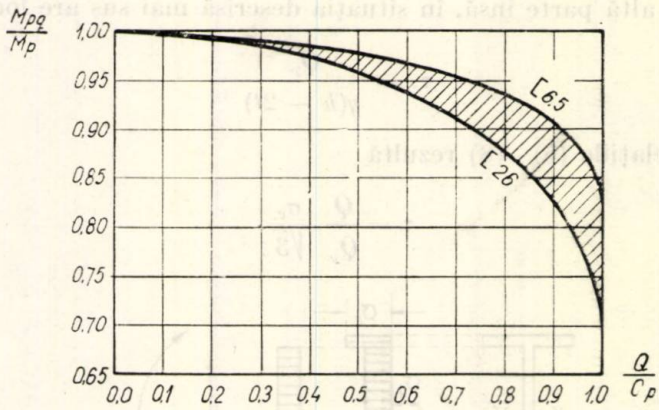


Fig. 5

momentelor plastice, din figurile 4 și 5 rezultă că pentru ambele tipuri de secțiuni influența forței tăietoare asupra mărimii momentului plastic este neglijabilă atîta timp cît raportul $\frac{Q}{Q_p}$ satisface inegalitatea $\frac{Q}{Q_p} < \frac{1}{3}$.

Pentru secțiunile I și [considerate în acest studiu, în tabelele 3 și 4 sînt date valorile forței tăietoare $Q_0 = \frac{Q_p}{3}$, pînă la care momentele plastice pot fi luate egale cu cele corespunzătoare încovoierii pure. Aceste valori au fost determinate în ipoteza că limita de curgere a oțelului este egală cu 2100 kgf/cm² [5].

Tabela 3

Secțiuni I. Forța tăietoare $Q_0 = \frac{Q_p}{3}$

I	Q_0 (tone)	I	Q_0 (tone)	I	Q_0 (tone)
8	1,08	18	4,46	28	10,2
10	1,58	20	5,40	30	11,7
12	2,17	22	6,42	32	13,3
14	2,84	24	7,53	36	16,9
16	3,60	26	8,83	40	20,9

Tabela 4

Secțiuni [. Forța tăietoare $Q_0 = \frac{Q_p}{3}$

[	Q_0 (tone)	[	Q_0 (tone)	[	Q_0 (tone)
6,5	1,15	14	3,41	22	7,12
8	1,57	16	4,23	24	8,27
10	2,03	18	5,12	26	9,45
12	2,91	20	6,12	30	10,90

VI. SOLICITAREA LA ÎNCOVOIERE CU FORȚĂ AXIALĂ

Distribuția de eforturi pe înălțimea secțiunii, corespunzătoare plastificării complete a secțiunii datorită solicitării la încovoiere cu forță axială, este reprezentată în figura 6.

Momentul plastic al secțiunii are expresia

$$M_{pn} = at(h - t)\,\sigma_c + \left[\frac{1}{4}g(h - 2t)^2 - gy^2\right]\sigma_c. \tag{12}$$

Din ecuația de proiecții pe direcția normalei la secțiune rezultă

$$y = \frac{N}{2g\,\sigma_c}. \tag{13}$$

Dacă momentul încovoietor este nul iar inima secțiunii se plastifică în întregime numai sub acțiunea forței axiale, se obține

$$h - 2t = \frac{N_p}{g\sigma_c}. \tag{14}$$

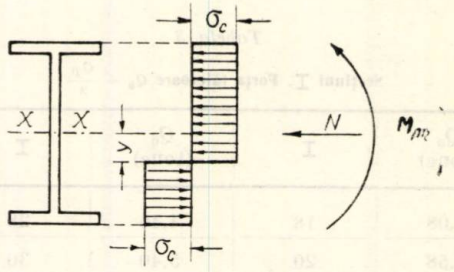


Fig. 6

Prin eliminarea efortului unitar σ_c între egalitățile (13) și (14), expresia distanței y devine

$$y = \frac{N}{N_p} \cdot \frac{h - 2t}{2}. \tag{15}$$

Ținînd seama de relația (15), expresia momentului plastic devine

$$M_{pn} = \left[at(h - t) + \frac{1}{4} g(h - 2t)^2 \left(1 - \frac{N^2}{N_p^2}\right)\right] \sigma_c. \tag{16}$$

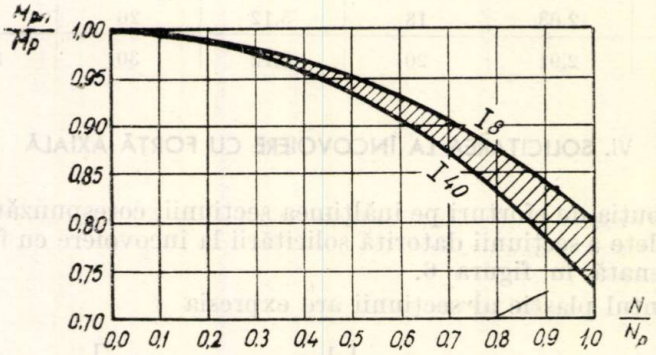


Fig. 7

În figurile 7 și 8 sînt trasate domeniile de variație ale raportului $\frac{M_{pn}}{M_p}$ în funcție de raportul $\frac{N}{N_p}$, pentru secțiunile I și [considerate în acest studiu.

Dacă se admite o eroare de maximum 2% la determinarea valorilor momentelor plastice, din figurile 7 și 8 rezultă că pentru ambele tipuri de secțiuni influența forței axiale asupra mărimii momentului plastic este

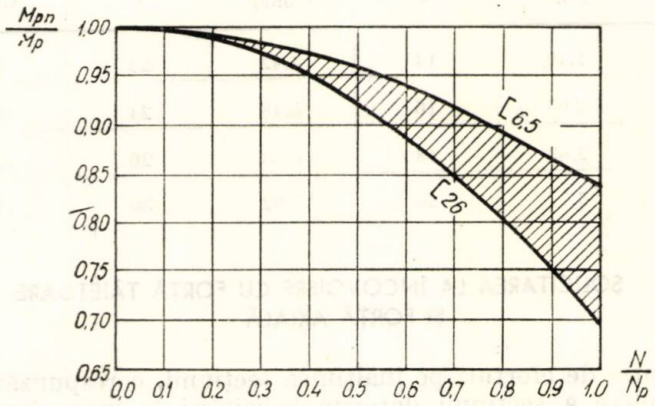


Fig. 8

neglijabilă atîta timp cît raportul $\frac{N}{N_p}$ satisface inegalitatea $\frac{N}{N_p} \leqslant \frac{1}{4}$.

Pentru secțiunile I și [considerate în acest studiu, în tabelele 5 și 6 sînt date valorile forței axiale $N_0 = \frac{N_p}{4}$ pînă la care momentele plastice pot fi luate egale cu cele corespunzătoare încovoierii pure. Aceste valori au fost determinate în ipoteza că limita de curgere a oțelului este egală cu 2100 kgf/cm² [5].

Tabela 5

Secțiuni I. Forța axială $N_0 = \frac{N_p}{4}$

I	N_0 (tone)	I	N_0 (tone)	I	N_0 (tone)
8	1,40	18	5,78	28	13,2
10	2,05	20	7,00	30	15,1
12	2,81	22	8,32	32	17,2
14	3,68	24	9,76	36	21,9
16	4,67	26	11,5	40	27,1

Tabela 6

Secțiuni [. Forța axială $N_0 = \frac{N_p}{4}$

[	N_0 (tone)	[	N_0 (tone)	[	N_0 (tone)
6,5	1,49	14	4,42	22	9,22
8	2,03	16	5,48	24	10,70
10	2,63	18	6,63	26	12,2
12	3,77	20	7,92	30	14,1

VII. SOLICITAREA LA ÎNCOVOIERE CU FORȚĂ TĂIETOARE ȘI FORȚĂ AXIALĂ

Distribuția de eforturi pe înălțimea secțiunii, corespunzătoare plastificării complete a secțiunii datorită solicitării la încovoiere cu forță tăietoare și forță axială, este reprezentată în figura 9.

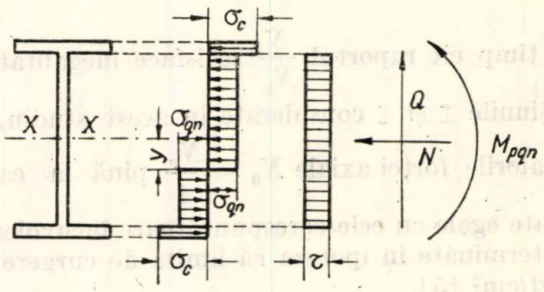


Fig. 9

Momentul plastic are expresia

$$M_{pqn} = at(h - t)\,\sigma_c + \left[\frac{1}{4}\,g(h - 2t)^2 - gy^2\right]\sigma_{qn}. \tag{17}$$

Din ecuația de proiecții pe direcția normalei la secțiune rezultă

$$y = \frac{N}{2g\sigma_{qn}}. \tag{18}$$

Ținînd seama de relația (14), expresia distanței y devine

$$y = \frac{N}{N_p} \cdot \frac{h - 2t}{2} \cdot \frac{\sigma_c}{\sigma_{qn}}. \tag{19}$$

Conform criteriului de curgere al lui *von* MISES, eforturile unitare σ_c, σ_{qn} și τ satisfac egalitatea

$$\sigma_c^2 = \sigma_{qn}^2 + 3\tau^2. \tag{20}$$

Relațiile (9) și (20) conduc la următoarea expresie a efortului unitar σ_{qn}

$$\sigma_{qn} = \sigma_c \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^2} \cdot \tag{21}$$

Ținînd seama de relațiile (9) și (21), expresia momentului plastic devine

$$M_{pqn} = at(h - t)\,\sigma_c + \frac{1}{4}\,g(h - 2t)^2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^2} - \frac{\left(\frac{N}{N_p}\right)^2}{1 - \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^2} \right] \sigma_c. \tag{22}$$

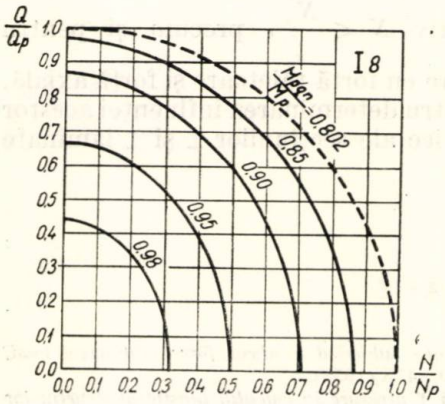


Fig. 10

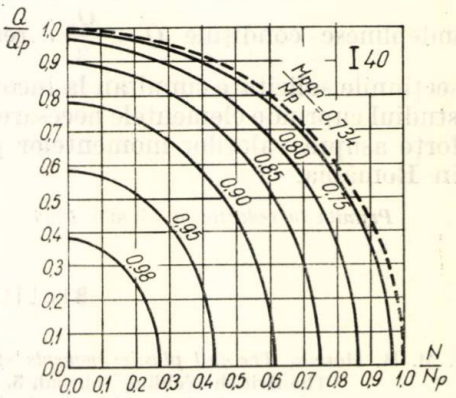


Fig. 11

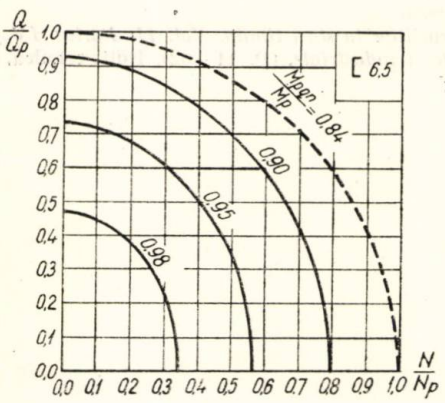


Fig. 12

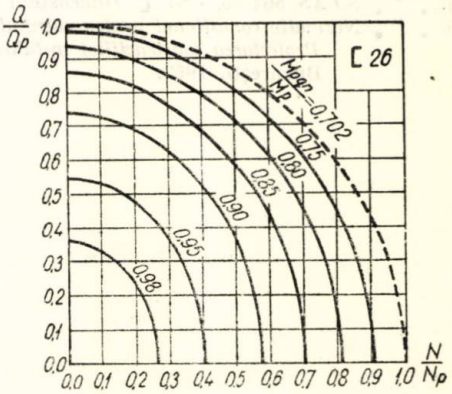


Fig. 13

În figurile 10—13 sînt trasate domeniile de variație ale raportului $\frac{M_{pqn}}{M_p}$ în funcție de rapoartele $\frac{Q}{Q_p}$ și $\frac{N}{N_p}$ pentru secțiunile I și [considerate în acest studiu.

VIII. CONCLUZII

Rezultatele obținute în cadrul acestui studiu sînt următoarele:

1. Momentele plastice ale secțiunilor solicitate la încovoiere cu forță tăietoare nu sînt practic influențate de forța tăietoare, dacă aceasta satisface inegalitatea $Q < \frac{Q_p}{3}$.

2. Momentele plastice ale secțiunilor solicitate la încovoiere cu forță axială nu sînt practic influențate de forța axială, dacă aceasta satisface inegalitatea $N < \frac{N_p}{4}$.

3. Pentru cazurile în care forța tăietoare, respectiv forța axială, nu îndeplinesc condițiile $Q < \frac{Q_p}{3}$, respectiv $N < \frac{N_p}{4}$, precum și pentru secțiunile solicitate simultan la încovoiere cu forță tăietoare și forță axială, studiul cuprinde elementele necesare pentru determinarea influenței acestor forțe asupra valorilor momentelor plastice ale secțiunilor I și [laminate în România.

Primită la redacție la 25 mai 1966

BIBLIOGRAFIE

1. M. R. Horne, *The full plastic moments of sections subjected to shear force and axial load*, The British Welding Journal, **5**, *4*, 170–178 (1958).
2. V. Petcu, *Caracteristicile profilelor laminate* I *și* [*necesare în calculul plastic al structurilor de oțel*. Standardizarea, **15**, *5*, 252–254 (1963).
3. * * * *STAS* 565-63. *Oțel* I. *Dimensiuni și toleranțe.*
4. * * * *STAS* 564-63. *Oțel* [. *Dimensiuni și toleranțe.*
5. * * * *Normativ condiționat pentru calculul construcțiilor la stări limită, Vol. II, Partea IV. Proiectarea construcțiilor metalice, civile și industriale*, (P. 11–62). Edit. tehnică, București, 1963.

ASUPRA CALCULULUI REȚELELOR DE GRINZI PRIN ITERAȚIE

de GELU ONU
Institutul de proiectări transporturi

În articol este prezentată o metodă iterativă de calcul pentru rețele de grinzi rezemate pe patru laturi, aplicabilă în cazurile în care nu se pot neglija rigiditățile la torsiune ale grinzilor orientate după o direcție.
Metoda folosește alternativ două sisteme de bază, cu ajutorul cărora, fără a se scrie ecuații de condiție, se determină treptat prin corectări succesive necunoscutele statice ale rețelei.

A intrat în practica proiectării rețelelor de grinzi utilizarea unor metode aproximative de calcul, metode în care se face abstracție de influența unor legături din structură. Astfel în cazul planșeelor din beton armat în casete, se utilizează o metodă iterativă de calcul în care se neglijează rigiditatea grinzilor la torsiune. De asemenea, în cazul cadrelor spațiale ortogonale cu noduri fixe formate din stîlpi și rețele de grinzi și încărcate cu sarcini verticale relativ uniforme, se neglijează condițiile de egalitate a săgeților la noduri. Aceste simplificări de calcul sînt admise numai în măsura în care prin aproximațiile făcute nu se realizează o îndepărtare sensibilă de la minimul energiei potențiale totale de deformație a structurii reale.

În cazul rețelelor plane sau făcînd parte din structuri spațiale, rețele alcătuite din grinzi cu rigidități diferite și încărcate cu sarcini nesimetrice, prin neglijarea unor legături de la noduri se obțin solicitări de calcul, uneori, destul de depărtate de cele reale. Evident, în aceste cazuri este necesar să se facă un calcul mai exact, în care să se țină seama și de legăturile secundare ale sistemului.

În cele ce urmează este prezentată o metodă de calcul prin iterație a rețelelor de grinzi, metodă în care se ține seama atît de influența translației nodurilor cît și de rigiditatea la torsiune a grinzilor principale.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 26 NR. 6 P. 1303 – 1325 BUCUREȘTI 1967

1. METODA DE CALCUL

Fie o rețea de grinzi (fig. 1) încărcată cu sarcini perpendiculare pe planul ei, care întrunește următoarele caracteristici :

— sarcinile exterioare sînt concentrate la noduri ;

— grinzile principale, X, au rigidități la torsiune și încovoiere diferite de zero ;

— grinzile secundare, Y, au rigiditățile la încovoiere diferite de zero, iar la torsiune practic egale cu zero ;

— atît grinzile X cît și grinzile Y sînt simplu rezemate la capete.

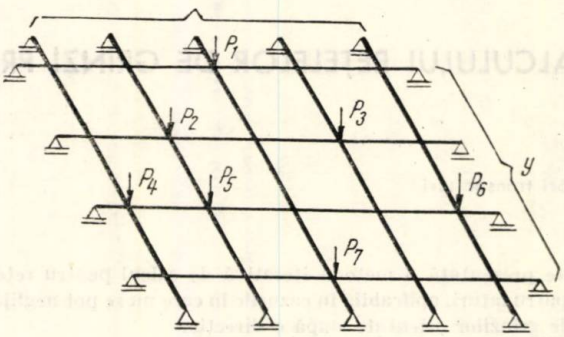


Fig. 1. — Rețea ortogonală de grinzi, rezemată pe patru laturi.

Abordînd rezolvarea problemei prin intermediul mijloacelor specifice metodei generale a deplasărilor, forma de bază se obține introducînd legături suplimentare, încastrări și penduli, destinate să împiedice rotirile și translațiile nodurilor. Sub acțiunea sarcinilor exterioare, în legăturile suplimentar introduse, se dezvoltă reacțiuni. Punîndu-se condiția de anulare a acestor reacțiuni se obține sistemul ecuațiilor de condiție prin rezolvarea căruia se determină necunoscutele problemei : rotirile și translațiile nodurilor rețelei. Pentru fiecare nod trebuie scrise cîte două condiții de restabilire a echilibrului static real. Considerînd numărul nodurilor rețelei egal cu n, numărul ecuațiilor de condiție va fi egal cu $2\,n$. Dacă se notează cu $Z_1 \ldots Z_n$ translațiile necunoscute ale nodurilor și cu $Z_{n+1} \ldots Z_{2n}$ rotirile de asemenea necunoscute ale nodurilor, se obține sistemul ecuațiilor de condiție în forma următoare :

$$\begin{cases} \text{(a)} \begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + \ldots + r_{1n} \cdot Z_n + r_{1 \cdot n+1} \cdot Z_{n+1} + \ldots + r_{1 \cdot 2n} \; Z_{2n} + R_{1s} = 0, \\ \vdots \\ r_{n \cdot 1} Z_1 + \ldots + r_{n \cdot n} \, Z_n + r_{n \cdot n+1} \cdot Z_{n+1} + \ldots + r_{n \cdot 2n} \cdot Z_{2n} + R_{ns} = 0, \end{cases} \\ \text{(b)} \begin{cases} r_{n+1 \cdot 1} Z_1 + \ldots + r_{n+1 \cdot n} Z_n + r_{n+1 \cdot n+1} \cdot Z_{n+1} + \ldots + r_{n+1 \cdot 2n} Z_{2n} + R_{n+1 \cdot s} = 0, \\ \vdots \\ r_{2n \cdot 1} Z_1 + \ldots + r_{2n \cdot n} Z_n + r_{2n \cdot n+1} \cdot Z_{n+1} + \ldots + r_{2n \cdot 2n} \cdot Z_{2n} + R_{2n \cdot s} = 0. \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

Coeficienții necunoscutelor au următoarea semnificație : r_{ij} reprezintă efortul produs în legătură i, introdusă în vederea blocării deplasării pe direcția i, cînd sistemul de bază este încărcat cu $Z_j = 1$; R_{is}, reprezintă

efortul produs în legătura i cînd sistemul de bază este acționat de încărcarea exterioară.

Ecuațiile (a), care exprimă anularea forțelor de fixare din penduli, reprezintă condiții de lucru mecanic virtual nul corespunzătoare deplasării nodurilor rețelei. Ecuațiile (b), care exprimă anularea reacțiunilor — momente din încastrările suplimentar introduse, au semnificația ecuațiilor de nod scrise pentru calculul cadrelor.

Evident determinarea necunoscutelor statice, rotiri și translații de noduri, revine la a rezolva sistemul de ecuații (1). Rezolvarea acestuia se poate face prin orice metodă de calcul cunoscută, singurul criteriu de alegere a modalității de rezolvare fiind accesibilitatea metodei utilizate. Deoarece rețeaua de grinzi este o structură cu un grad de nedeterminare statică ridicat, apare indicată aplicarea unei metode de calcul prin aproximații succesive. Avantajoasă ar fi metoda în care calculul se efectuează fără a se scrie ecuații de condiție, iterația, cu o convergență satisfăcătoare, urmînd a se efectua pe o schemă de transmiteri, după ce în prealabil, pe baza unor semnificații fizice, au fost determinați termenii liberi și coeficienții de transmitere. Utilizarea unui procedeu de calcul într-o singură etapă pe baza metodei clasice de iterație (Gauss) sau prin rezolvarea succesivă a ecuațiilor, pe lîngă dezavantajul de a se opera pe o schemă complicată pe care se efectuează transmiteri atît între nodurile reale ale rețelei cît și între nodurile fictive corespunzătoare necunoscutelor — translații de noduri, mai prezintă dezavantajul unei convergențe destul de lente. Avînd în vedere toate acestea, considerăm că este mai avantajoasă metoda de calcul care folosește alternativ două sisteme de bază, cu ajutorul cărora se determină treptat, prin corectări succesive, necunoscutele statice ale rețelei. Calculul prin utilizare alternativă a două sisteme de bază corespunde unui procedeu de iterare care derivă dintr-o generalizare a metodei Seidel. După cum se știe în metoda Seidel calculul sistemului se efectuează prin rezolvarea succesivă a ecuațiilor. Generalizînd metoda, determinarea necunoscutelor sistemului se poate efectua iterativ prin rezolvarea succesivă a unor grupuri de ecuații din sistem. Printr-o judicioasă împărțire a sistemului inițial în sisteme componente care urmează să fie rezolvate succesiv, se poate obține o accelerare a convergenței generale a iterației. Rezolvarea în acest fel devine avantajoasă atunci cînd gruparea ecuațiilor în sisteme componente se poate face pe baza semnificațiilor fizice ale necunoscutelor. În cazul sistemului de ecuații (1), avînd două categorii de necunoscute, translații și rotiri de nod, este indicată împărțirea acestuia în două sisteme componente, determinarea necunoscutelor efectuîndu-se prin rezolvarea alternativă a celor două sisteme. Astfel, mai întîi se consideră necunoscutele — rotiri de nod egale cu zero — și se rezolvă prima jumătate (a) a sistemului (1); valorile găsite pentru necunoscutele $Z_1 \ldots Z_n$ se introduc în ecuațiile (b) și se rezolvă a doua jumătate a sistemului, în care necunoscute sînt rotirile nodurilor $Z_{n+1} \ldots Z_{2n}$. Valorile găsite pentru $Z_{n+1} \ldots Z_{2n}$ se introduc în (a) și se determină alte valori pentru necunoscutele translații de nod, iterația continuîndu-se în acest fel pînă cînd diferența dintre valorile obținute în două cicluri consecutive devine neglijabilă.

Rezolvarea sistemului pe această cale este avantajoasă numai în măsura în care metoda oferă posibilitatea determinării necunoscutelor pe o

schemă de transmiteri fără a mai fi necesară scrierea ecuațiilor de condiție. Din examinarea modului în care este rezolvat pe cale numerică sistemul de ecuații (1) rezultă imediat procedeul de rezolvare pe schemă de transmiteri. Se vede ușor că sistemul de ecuații (a) poate fi calculat iterativ pe o schemă de transmiteri (fig. 2 a) obținută din rețeaua reală prin blocarea rotirii nodurilor. La fel, sistemul de ecuații (b) se rezolvă pe o schemă de transmiteri (fig. 2 b), obținută tot din rețeaua reală, prin blocarea trans-

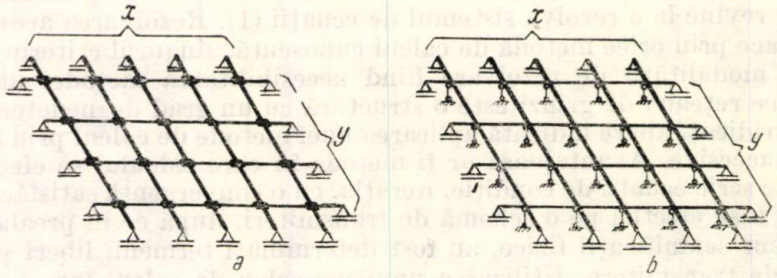


Fig. 2. — Forme de bază în metoda deplasărilor.

lațiilor. În ambele cazuri, elementele necesare efectuării calculului pe schemă — coeficienții de repartiție, coeficienții de transmitere au semnificații fizice precise. În același timp cele două forme de bază utilizate succesiv furnizează una alteia termenii liberi : rotirile și săgețile nodurilor. Deci, avem de a face cu un procedeu de transmitere alternativă a rotirilor și săgeților, care derivă direct din sistemul ecuațiilor de condiție al metodei generale a deplasărilor.

Utilizarea procedeului de iterare directă prezintă dezavantajul că la rezolvarea sistemului de ecuații (1), prin blocarea rotirilor nodurilor, se introduce o rigiditate suplimentară la translație care reduce simțitor convergența iterației. Acest fapt este cu atît mai supărător cu cît în structura reală grinzile principale nu sînt încastrate în grinzile secundare acestea din urmă avînd rigiditate neglijabilă la torsiune. Avînd în vedere acest fapt, apare mai indicată utilizarea iterației indirecte, deoarece aceasta oferă posibilitatea adoptării unor procedee de calcul care evită, cel puțin parțial, introducerea rigidităților suplimentare.

În paragraful 2 este prezentat un procedeu de iterare indirectă în care rotirile și translațiile nodurilor nu apar explicit, rezolvarea pe schemă de transmiteri efectuîndu-se cu necunoscute de altă natură decît cele specifice metodei generale din care derivă procedeul. Se va vedea că este vorba de un procedeu de iterare indirectă în care calculul se efectuează cu forțe și momente de capăt, procedeu care se încadrează în metoda generală a deplasărilor.

După cum se știe, rezolvarea sistemelor de ecuații liniare prin iterație se începe prin determinarea valorilor inițiale Z_i^0 ale necunoscutelor. Pentru aceasta, în mod arbitrar, în fiecare ecuație se consideră toate necunoscutele egale cu zero, cu excepția necunoscutei de pe diagonala principală. Nu întotdeauna însă alegerea valorilor inițiale pe această cale este avantajoasă. În cazurile în care valorile Z_i^0 diferă mult de valorile reale ale necunoscutelor volumul calculelor se mărește sensibil. Acest neajuns se am-

plifică în cazul rezolvării în cicluri pe forme de bază diferite, deoarece în fiecare ciclu valorile Z_i^0 urmează să se stabilească pe baza aceluiași criteriu arbitrar. Determinarea valorilor inițiale pe această cale nu este însă obligatorie. Se poate accepta orice criteriu care conduce la valori inițiale ale necunoscutelor mai apropiate de cele reale. Astfel, dacă într-o etapă oarecare a iterației generale se pot stabili, cu o aproximație acceptabilă, valori pentru un grup de necunoscute, acestea, introduse simultan în sistemul de ecuații (1) pot fi utilizate în ciclul respectiv ca termeni liberi, iterația efectuîndu-se asupra unui sistem de ecuații redus. Mai mult, acest artificiu de calcul poate fi utilizat în fiecare ciclu al iterației generale, cu condiția să se obțină o simplificare a calculelor sau o îmbunătățire a convergenței iterației. Deci, dacă pe baza unui criteriu fizic oarecare se pot stabili valori acceptabile pentru necunoscutele translații de nod, iterația se va efectua numai asupra rotirilor nodurilor, în fiecare ciclu urmînd să se rezolve numai sistemul de ecuații (b). Evident, artificiul este reversibil putîndu-se alege valori pentru rotiri, iterația urmînd a se efectua numai asupra sistemului de ecuații (a).

În paragraful (4) este prezentat un procedeu de calcul bazat pe acest artificiu. Se va vedea că valorile translațiilor nodurilor se determină direct, fără iterație, pe o formă de bază static determinată (fig. 4) încărcată cu sarcinile exterioare (în ciclul 1) și cu eforturile din pendulii de fixare.

Acest procedeu este deosebit de avantajos din punctul de vedere al simplității calculelor deoarece înlătură necesitatea efectuării iterației pe prima formă de bază.

Dacă determinarea eforturilor în rețeaua de grinzi din figura 1 este abordată prin intermediul metodei generale a eforturilor, se poate, de asemenea, ajunge la un procedeu de calcul pe două forme de bază. Forma de bază în metoda eforturilor se obține transformînd schema statică într-un sistem static determinat prin suprimarea unui număr de legături egal cu numărul necunoscutelor. Gradul de nedeterminare statică al rețelei fiind egal cu $2\ n$, sistemul ecuațiilor de condiție poate fi scris tot sub forma (1), necunoscutele însă fiind de altă natură : $Z_1, \ldots, Z_n$ reprezintă eforturile din pendulii care leagă între ele grinzile la noduri (vezi fig. 4), iar $Z_{n+1}, \ldots, Z_{2n}$ reprezintă momentele de încastrare elastică a grinzilor secundare în grinzile principale. Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi au semnificațiile cunoscute ale metodei eforturilor.

Determinarea necunoscutelor se poate efectua iterativ prin procedeul expus la început, procedeu care reclamă scrierea ecuațiilor de condiție, sau direct pe schema de transmiteri. În acest de al doilea caz, mai întîi urmează să se determine valorile eforturilor $Z_1, \ldots, Z_n$, din pendulii de legătură, în ipoteza că necunoscutele $Z_{n+1}, \ldots, Z_{2n}$ sînt egale cu zero. Aceasta revine la a efectua iterația pe forma de bază reprezentată în figura 3. Apoi valorile găsite pentru eforturile $Z_1, \ldots, Z_n$ devin termeni liberi în ecuațiile $n + 1, \ldots, 2\ n$, care condiționează egalitatea rotirilor la noduri. Se vede ușor că efectuarea iterației pe o formă de bază fără penduli de legătură între grinzi ($Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_n = 0$) se poate înlocui cu un calcul pe schema de transmiteri reprezentată în figura 2 *b*. În paragraful 3 sînt date detalii în plus privitoare la acest procedeu de calcul.

Din cele examinate pînă acum a rezultat posibilitatea calculării rețelelor de grinzi prin iterație pe două forme de bază fără scrierea ecuațiilor de condiție, prin procedee care derivă fie din metoda generală a eforturilor fie din metoda deplasărilor. În general, în statica construcțiilor, rezolvarea unei structuri prin aproximații succesive presupune identificarea treptată a deformației sistemului de bază cu deformata structurii reale. În cazul de față, prin utilizarea alternativă a două forme de bază, se urmărește ca numai deformata uneia din ele să se identifice cu defor-

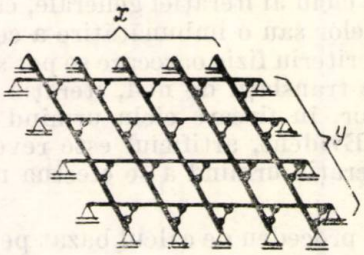


Fig. 3. — Formă de bază în metoda eforturilor.

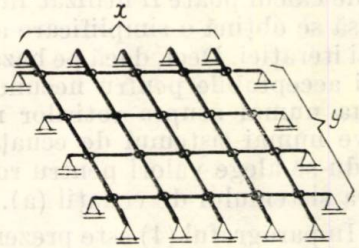


Fig. 4. — Formă de bază în metoda eforturilor.

mata reală a rețelei, celălalt sistem de bază avînd un rol auxiliar. Sistemul de bază auxiliar, pe care-l vom numi „prima formă de bază" poate fi reprezentat prin schemele statice din figurile 2 *b*, 3 sau 4. Sistemul de bază a cărui fibră medie deformată va trebui să se confunde în final cu deformata reală a rețelei, numit „a doua formă de bază", este reprezentat în figura 2*a*. După cum s-a văzut, în funcție de caracteristicile primei forme, de bază, calculul capătă particularități care diferențiază modul de operare, obținîndu-se astfel variante diferite ale aceleiași metode de calcul. Faptul că de fiecare dată cea de-a doua formă de bază utilizată este aceeași ne face să întrevedem posibilitatea utilizării alături de aceasta și a altor forme de bază în afara celor reprezentate în figurile 2 *a*, 3 sau 4. Singurul criteriu după care se alege una sau alta din formele de bază auxiliare îl constituie rapiditatea obținerii rezultatelor. Cu alte cuvinte, fiind vorba de o problemă de calcul prin aproximații succesive, alegerea formelor de bază auxiliare se va face în funcție de rapiditatea convergenței iterației.

S-a amintit mai înainte că determinarea pe cale iterativă a necunoscutelor sistemului de ecuații (1) prin rezolvarea simultană sau succesivă a tuturor ecuațiilor se face cu o convergență destul de lentă. Deoarece necunoscutele sistemului sînt de două tipuri, criteriul de convergență Wittmeyer nu este satisfăcut decît într-o măsură foarte redusă. Ameliorarea convergenței iterației se poate efectua principial pe două căi : fie prin eliminarea din sistem a ecuațiilor care nu satisfac criteriul Wittmeyer, fie prin eliminarea alternativă din schema de iterare a unor necunoscute. Deoarece atît în metoda generală a eforturilor cît și în metoda deplasărilor la fiecare nod apar cîte două necunoscute, o îmbunătățire certă a iterației nu se poate realiza decît prin eliminarea unui număr de ecuații sau necunoscute egal cel puțin cu numărul nodurilor.

Eliminarea pe cale analitică din sistemul (1) a „n" ecuații constituie o operațiune cu atît mai dificilă cu cît numărul nodurilor este mai mare. În cazul rețelelor de grinzi, care au un grad de nedeterminare statică ridicat, este evident mai avantajoasă a doua cale de îmbunătățire a convergenții — eliminarea succesivă din iterație a necunoscutelor de același tip — ceea ce conduce la procedeul de rezolvare succesivă a sistemelor de ecuații (a) și (b).

Rezolvarea sistemului de ecuații (1) în cicluri prin utilizarea alternativă a două sisteme de bază ridică, din punctul de vedere al convergenții iterației, două probleme : ameliorarea convergenței iterației în cadrul fiecărui ciclu și ameliorarea convergenței iterației generale a ciclurilor.

Deoarece în sistemele de ecuații (a) și (b) intră numai necunoscute de același tip, la rezolvarea acestora prin iterație este asigurată o convergență satisfăcătoare, chiar dacă criteriul Wittmeyer nu este satisfăcut în toate ecuațiile sistemelor. Pentru cazurile în care convergența este mai slabă, în paragraful 5, se va indica o modalitate de îmbunătățire a ei.

Dacă convergența iterației în cadrul fiecărui ciclu este asigurată, nu se poate spune același lucru despre convergența iterației generale a ciclurilor. Șirul termenilor iterației generale nefiind întotdeauna convergent, rația progresiei geometrice prin însumarea căreia se determină o necunoscută oarecare Z_i, poate fi mai mare decît 1. Evident, în aceste cazuri rezolvarea prin aproximații succesive nu este posibilă.

Deoarece diversitatea formelor de bază îngreunează stabilirea unui criteriu matematic privind convergența iterației generale, ne vom mărgini, pornind de la fenomenul fizic, să dăm numai cîteva indicații privind aprecierea convergenței.

Deoarece cea de a doua formă de bază este aceeași în toate variantele de calcul examinate, accelerarea convergenței iterației depinde în primul rînd de alegerea unui sistem de bază auxiliar adecvat. Pentru ca rația progresiei geometrice a iterației generale să fie cît mai apropiată de zero este necesar ca prin modificările aduse structurii reale la transformarea ei în sistem de bază auxiliar să se realizeze o modificare minimă a energiei potențiale de poziție a rețelei reale. Îndeplinirea acestui deziderat nu poate fi satisfăcută decît în cazul în care barele primului sistem de bază au rigidități apropiate de rigiditățile reale ale grinzilor rețelei.

Deci, în vederea ameliorării convergenței iterației generale, prima formă de bază va fi aleasă urmărindu-se o asemănare cît mai fidelă cu structura reală. Pe baza acestei observații se pot stabili condiții de utilizare practică a sistemelor de bază auxiliare : în cazul rețelelor de grinzi care au rigidități mari la torsiune este indicată utilizarea formei de bază din figura 2 *a* ; utilizarea schemei statice din figura 3 drept sistem de bază auxiliar este potrivită în cazul rețelelor care au rigidități reduse la torsiune ; la rezolvarea rețelelor care au grinzi secundare puțin rigide la torsiune cele mai bune rezultate se obțin prin utilizarea formei de bază din figura 4. La majoritatea structurilor în componența cărora intră rețele de grinzi și mai ales în cazul planșeelor din beton armat în casete, forma de bază auxiliară care conduce la cea mai rapidă convergență este cea din figura 3.

Dacă la o structură oarecare forma de bază nu poate fi aleasă în funcție de rigiditățile grinzilor rețelei, un indiciu privind convergența iterației generale poate fi obținut prin determinarea eforturilor în pendulii de fixare (fig. 2 *b*) după un ciclu de calcul. Dacă la cele mai solicitate noduri ale rețelei rapoartele dintre sarcinile exterioare P_i și eforturile corespunzătoare din pendulii de fixare S_i sînt mai mari decît unu, se poate considera că iterația generală are convergența asigurată. Evident, forma de bază auxiliară prin intermediul căreia se obțin cele mai mici rapoarte S_i/P_i asigură cea mai rapidă convergență iterației generale. Importanța pe care o are alegerea unei forme de bază cît mai potrivite va fi evidențiată într-un exemplu de calcul din care se va vedea că convergența iterației generale obținută în trei variante de calcul și apreciată în funcție de mărimea rației progresiei geometrice variază în limite largi (de la simplu la triplu). Menționînd că în afara celor discutate mai există și alte modalități de a conduce calculul, în continuare vor fi prezentate succint variante de calcul bazate pe sistemele de bază din figurile 2 *a*, 3 și 4.

2. REȚELE CU GRINZI PRINCIPALE RIGIDE LA TORSIUNE

a) PRIMA FORMĂ DE BAZĂ

Prin blocarea rotirii nodurilor rețelei, conform figurii 2 *a*, grinzile principale capătă numai deformații de încovoiere, sub aspectul răsucirii ele împiedicînd deformarea rețelei. Deci, dacă se consideră că grinzile principale au rigidități infinite la torsiune se poate renunța la blocajele de la noduri. În această situație fiecare panou de grindă secundară (fiecare tronson de grindă secundară încadrat de două noduri consecutive), reprezintă o grindă încastrată perfect la capete. Sub acțiunea sarcinilor exterioare în aceste panouri vor apărea momente încovoietoare de natura celor provocate de denivelarea reazemelor la o grindă perfect încastrată la capete. Deci, la mijlocul fiecărui panou de grindă secundară momentul încovoietor este nul. În aceste condiții, în calcul se va putea considera că fiecare grindă secundară are cîte o articulație la mijlocul panourilor. Se aleg drept necunoscute statice, forțele tăietoare din articulațiile de la mijlocul panourilor intermediare și reacțiunile din reazemele grinzilor secundare. Cu ajutorul lor se calculează momentele de încastrare perfectă care vor încărca cel de al doilea sistem de bază. Pentru determinarea necunoscutelor statice se desfac articulațiile de la mijlocul panourilor și se suprimă reazemele secundare. Se obțin o serie de grinzi independente, grinzile principale, din care se dezvoltă lateral console încărcate la capete cu necunoscutele x_i. Necunoscutele sistemului se determină punînd condiții de săgeată la capetele consolelor. Sistemul de ecuații obținut se poate rezolva direct dacă numărul necunoscutelor este redus, sau prin aproximații succesive.

În vederea stabilirii elementelor necesare calculului prin iterație se va scrie ecuația de condiție pentru articulația j. Se presupune că articu-

lația j se găsește situată între grinzile principale k și $k+1$. În figura 5 sînt reprezentate cele două grinzi, cu consolele respective; de asemenea sînt figurate sarcinile exterioare și necunoscutele statice care acționează la capetele consolelor.

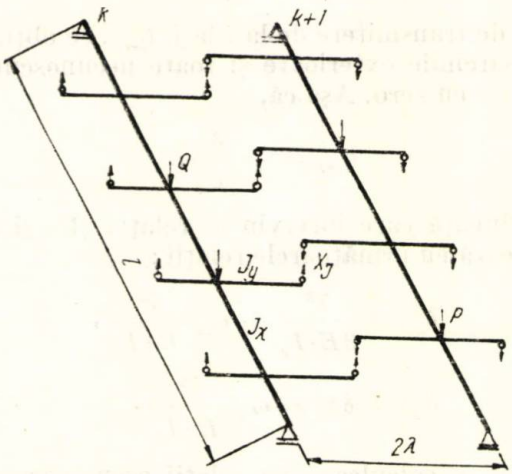


Fig. 5. — Două grinzi din rețeaua reprezentată în figura 2 *a*.

Se pune condiția ca săgețile în j, calculate pe cele două grinzi, să fie egale:

$$\begin{aligned} \Delta_j^{(k)} &= \Delta_j^{(k+1)}, \\ \Delta_j^{(k)} &= \Delta_{jQ}^{(k)} - x_j \cdot \delta_{jj}^{(k)} - \sum x_i \cdot \delta_{ij}^{(k)}, \\ \Delta_j^{(k+1)} &= \Delta_{jP}^{(k+1)} + x_j \cdot \delta_{jj}^{(k+1)} + \sum x_i \cdot \delta_{ij}^{(k+1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Înlocuind aceste expresii în (2) se obține, explicit, ecuația de condiție din j:

$$x_j \cdot (\delta_{jj}^{(k)} + \delta_{jj}^{(k+1)}) = \Delta_{jQ}^{(k)} - \Delta_{jP}^{(k+1)} - \sum x_i \, (\delta_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}^{(k+1)}), \tag{2'}$$

cu notațiile:

$$\begin{aligned} \delta_{jj}^{(k)} + \delta_{jj}^{(k+1)} &= \delta_{jj}, \\ \delta_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}^{(k+1)} &= \delta_{ij}, \\ \Delta_{jQ}^{(k)} - \Delta_{jP}^{(k+1)} &= \Delta_j, \end{aligned}$$

relația (2') se scrie astfel

$$x_j \cdot \delta_{jj} = \Delta_j - \sum x_i \cdot \delta_{ij}. \tag{2''}$$

În fiecare punct de condiție se poate scrie cîte o ecuație similară. Din (2') și (2'') se obțin expresiile elementelor necesare calculului prin aproximații succesive: valorile inițiale ale necunoscutelor statice, x_j^0, și coeficienții de transmitere.

Dacă în relaţia (2″) se face $x_i = 0$, se obţine valoarea iniţială a necunoscutei x_j

$$x_j^0 = \frac{\Delta_j}{\delta_{jj}}. \tag{3}$$

Coeficientul de transmitere de la i la j, $t_{i\to j}$, se obţine tot din relaţia (2″) considerînd sarcinile exterioare şi toate necunoscutele, cu excepţia celor din i şi j, egale cu zero. Aşa că,

$$t_{i\to j} = -\frac{\delta_{ij}}{\delta_{jj}}, \tag{4}$$

coeficienţii de influenţă care intervin în relaţia (1′) şi implicit în (2″), (3) şi (4) se calculează cu următoarele relaţii :

$$\delta_{jj}^{(k)} = \frac{\lambda^3}{3E \cdot I_y} + \omega_{jj}\frac{l^3}{E \cdot I_x}, \qquad \delta_{ij}^{(k)} = \delta_{ji}^{(k)} = \omega_{ij}\frac{l^3}{E \cdot I_x}, \tag{5}$$

$\delta_{jj}^{(k+1)}$ şi $\delta_{ij}^{(k+1)}$ se calculează cu relaţii asemănătoare relaţiilor (5). Coeficienţii ω_{ij} şi ω_{jj} sînt daţi în lucrările de specialitate [1], [4].

Pentru rezolvarea prin aproximaţii succesive pe schemă de transmiteri a sistemului canonic corespunzător primei forme de bază, este necesar să se determine mai întîi valorile iniţiale ale necunoscutelor cu ajutorul relaţiei (3). În continuare aceste valori se transmit, corectîndu-se succesiv pînă cînd valorile de transmis, devin neglijabile. Operaţia de iteraţie constă deci numai în transmiteri între articulaţiile reţelei. În final, prin însumarea termenilor care au apărut pe schemă la fiecare articulaţie, se obţin valorile finale ale necunoscutelor. Aceleaşi operaţiuni se efectuează în toate ciclurile de calcul. Dată fiind forma aleasă pentru sistemul de bază, în ecuaţia (2′) intră, pe lîngă necunoscuta din articulaţia j, necunoscutele care acţionează la capetele consolelor celor două grinzi principale care încadrează articulaţia j. Din acest motiv, pe schemă se vor efectua transmiteri de la o articulaţie la toate articulaţiile adiacente celor două grinzi principale situate de o parte şi de alta a articulaţiei de la care se transmite.

După determinarea tuturor necunoscutelor, x_i, se calculează momentele încovoietoare din secţiunile de încastrare a grinzilor secundare în grinzile principale. Aceste momente constituie încărcarea exterioară a celui de al doilea sistem de bază.

b) A DOUA FORMĂ DE BAZĂ

În figura 2 *b* este reprezentată cea de-a doua formă de bază. Aceasta se obţine din structura reală împiedicînd cu penduli translaţia nodurilor. Deci o reţea de grinzi cu noduri fixe. Rezolvarea prin aproximaţii succesive a acestei structuri este asemănătoare cu rezolvarea prin iteraţie a

unui cadru etajat cu noduri fixe, cu deosebirea că în cazul de față pe grinzile principale, în loc de momente încovoietoare, se repartizează și transmit momente de răsucire. Dacă se aleg drept necunoscute momentele de la capetele barelor, coeficienții de repartiție la nod și de transmitere se calculează cu relații cunoscute (vezi [1]).

— Coeficientul de repartiție de la nodul j aferent barei încovoiate $j\ i$:

$$r_{ji} = \frac{K_{ji}}{\Sigma K_{ji} + \Sigma T_{jk}};$$

— Coeficientul de repartiție de la nodul j aferent barei răsucite $j\ k$:

$$r_{jk} = \frac{T_{jk}}{\Sigma K_{ji} + \Sigma T_{jk}};$$

— Coeficientul de transmitere, în varianta Dașek pe bara încovoiată $j\ i$:

$$t_{j\to i} = -\frac{1}{2} r_{ji}; \tag{6}$$

— Coeficientul de transmitere în varianta Dașek, pe bara răsucită $j\ k$:

$$t_{j\to k} = r_{jk}. \tag{6'}$$

După cum s-a arătat în cadrul fiecărui ciclu, a doua formă de bază se încarcă cu momentele de încastrare determinate pe forma de bază auxiliară. În figura (6) este reprezentată o porțiune din cea de a doua formă de bază încărcată cu momentele de încastrare corespunzătoare ciclului n. Aceste momente se repartizează în rețea. La sfîrșit, momentele obținute în urma interației se însumează la fiecare nod și se repartizează capetelor de bară obținîndu-se momentele de echilibru $\Delta M_{ji}^{(n)}$. În acest fel, pe barele încovoiate, Y, pe lîngă momentele de încastrare $\mathfrak{M}_{ji}^{(n)}$ apar momentele de echilibru $\Delta M_{ji}^{(n)}$ datorită deblocării răsucirii grinzilor principale. La sfîrșitul ciclului pe grinzile principale există numai momentele de echilibru (de răsucire) $\Delta M_{jk}^{(n)}$.

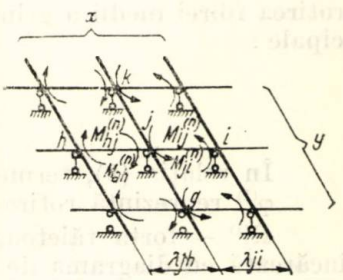


Fig. 6. — Momente încovoietoare pe capete de bară la sfîrșitul ciclului n de calcul.

Momentele încovoietoare de echilibru de pe grinzile secundare produc forțele de fixare $S_j^{(n)}$ în penduli. La un nod oarecare j, forța de fixare din pendul, corespunzătoare ciclului n, se calculează cu relația

$$S_j^{(n)} = \frac{\Delta M_{ji}^{(n)} + \Delta M_{ij}^{(n)}}{\lambda_{ij}} + \frac{\Delta M_{kj}^{(n)} + \Delta M_{jk}^{(n)}}{\lambda_{jk}}. \tag{7}$$

Cu relația (7) se calculează forțele de fixare din toți pendulii. Aceste forțe încarcă prima formă de bază în ciclul următor, $n + 1$.

În cursul desfășurării calculului eforturile din penduli descresc continuu ceea ce corespunde cu o apropiere treptată și continuă a deformatei celui de-al doilea sistem de bază de deformata reală a rețelei. Cînd eforturile din pendulii de fixare devin zero, cele două deformate coincid iar solicitările din rețea sînt cele reale.

Momentul încovoietor final, din secțiunea de încastrare a barei $j\ i$ în nodul j, se obține însumînd momentele de încastrare perfectă și momentele de echilibru determinate în fiecare ciclu de calcul

$$M_{ji} = [\mathfrak{M}_{ji}^{(1)} + \Delta M_{ji}^{(1)}] + [\mathfrak{M}_{ji}^{(2)} + \Delta M_{ji}^{(2)}] + \dots \tag{8}$$

Momentele de răsucire finale se obțin de asemenea prin însumarea momentelor de torsiune calculate în fiecare ciclu :

$$M_{jk} = \Delta M_{jk}^{(1)} + \Delta M_{jk}^{(2)} + \Delta M_{jk}^{(3)} + \dots \tag{8'}$$

3. REȚELE DE GRINZI CU RIGIDITĂȚI LA TORSIUNE REDUSE

În cazurile în care în alcătuirea rețelei intră grinzi cu rigidități la torsiune scăzute este indicat să se aleagă ca formă de bază auxiliară schema din figura 3. Luînd drept necunoscute statice eforturile din pendulii de legătură, structura poate fi rezolvată direct, pentru un grad de nedeterminare statică redus, sau prin aproximații succesive. Deoarece rezolvarea acestei scheme este dată în (1), (4), (7) ne vom mărgini la a arăta pe scurt cum se trece de la o formă de bază la alta.

În urma rezolvării sistemului de bază auxiliar se determină eforturile din pendulii de legătură. Sub acțiunea acestor eforturi și a sarcinilor exterioare aferente, se trasează diagramele de momente și se calculează rotirea fibrei medii a grinzilor secundare în dreptul fiecărei grinzi principale :

$$\varphi_j^{(1)} = \frac{\Omega_j^{(1)}}{E \cdot I_y}. \tag{9}$$

În relația (9), termenii au semnificațiile :

$\varphi_j^{(1)}$ reprezintă rotirea fibrei medii a grinzii secundare la nodul j;

$\Omega_j^{(1)}$ — forța tăietoare în secțiunea j a grinzii secundare, Y, încărcată cu diagrama de momente;

I_y — momentul de inerție al grinzii secundare Y.

În locul expresiei (9) se poate utiliza relația cunoscută dintre momente și rotiri, pentru aceasta fiind însă necesar să se determine în prealabil săgețile nodurilor rețelei.

Dacă rigiditățile la torsiune ale grinzilor principale sînt nule, schema statică, pe care au fost determinate rotirile $\varphi_j^{(1)}$ se confundă cu rețeaua reală. În realitate însă grinzile principale au rigidități finite ceea ce face ca pe a doua formă de bază să se modifice solicitările determinate pe sistemul de bază auxiliar. Trecerea la a doua formă de bază se efectuează introducînd penduli de fixare la nodurile rețelei. În același timp se ia în considerație rigiditatea reală la torsiune a grinzilor principale, de unde nece-

sitatea de a calcula momentele de torsiune provocate de rotirile $\varphi_j^{(1)}$. Calculul acestor momente se face în ipoteza că nodurile rețelei nu se pot nici roti nici deplasa, ceea ce le imprimă caracter de momente de încastrare perfectă. Pe o bară oarecare, $j\ k$, momentul de încastrare perfectă se determină cu relația

$$\mathfrak{M}_{jk} = \frac{G \cdot I_t}{\lambda_{j \cdot k}} (\varphi_j^{(1)} - \varphi_k^{(1)}).$$

În urma repartizării în rețea a tuturor momentelor de încastrare perfectă se stabilesc pe toate capetele de bară momentele de la sfîrșitul primului ciclu al iterației.

Eforturile din pendulii de fixare se calculează cu relația

$$S_j^{(1)} = \frac{M_{ji}^{(1)} + M_{ij}^{(1)}}{\lambda_{ij}} + \frac{M_{hj}^{(1)} + M_{jh}^{(1)}}{\lambda_{jh}}. \tag{10}$$

Cînd energia potențială de deformație acumulată prin răsucirea grinzilor principale este neglijabilă în raport cu energia potențială acumulată de întreaga rețea, valorile obținute pentru forțele de fixare $S_j^{(1)}$ sînt neînsemnate. În acest caz dacă se consideră că aproximația obținută este satisfăcătoare, calculul poate fi oprit aici. Dacă aproximația obținută este insuficientă se trece la ciclul următor al iterației generale. Calculul se continuă pînă cînd se obține exactitatea dorită.

În fiecare ciclu, la nodurile rețelei, se determină două categorii de momente :

— Momentele încovoietoare $M_j^{(n)}$ stabilite pe sistemul de bază auxiliar, și

— Momentele încovoietoare $M_{ji}^{(n)}$ și de torsiune $M_{jk}^{(n)}$ determinate pe a doua formă de bază.

Însumînd valorile obținute, în toate ciclurile iterației generale, se determină momentele finale. Momentul încovoietor final, la capătul j al barei ji, este dat de relația

$$M_{ji} = [M_j^{(1)} + M_{ji}^{(1)}] + [M_j^{(2)} + M_{ji}^{(2)}] + \dots \tag{11}$$

Momentul de răsucire final, pe bara $j\ k$, se determină cu expresia

$$M_{jk} = M_{jk}^{(1)} + M_{jk}^{(2)} + M_{jk}^{(3)} + \dots \tag{11'}$$

După determinarea momentelor de la capetele tuturor barelor se stabilesc solicitările de calcul care interesează.

4. REȚELE CU GRINZI SECUNDARE PUȚIN RIGIDE LA ÎNCOVOIERE

Uneori grinzile secundare, care intră în alcătuirea planșeelor, au rigidități la încovoiere mult mai mici decît rigiditățile corespunzătoare ale grinzilor principale. În aceste cazuri, deoarece energia potențială de deformație acumulată prin încovoierea grinzilor secundare, este mult mai

mică decît energia potenţială de deformaţie acumulată de grinzile principale, prin introducerea unor articulaţii la capetele panourilor grinzilor secundare nu se modifică prea mult energia potenţială de poziţie a reţelei reale.

Avînd în vedere acest fapt, este indicat să se aleagă drept sistem de bază auxiliar, schema statică din figura 4. La alegerea acestui sistem de bază trebuie să se aibă în vedere că dacă cota-parte aferentă grinzilor secundare din energia potenţială de deformaţia acumulată de întreaga structură nu este suficient de redusă, convergenţa iteraţiei generale este foarte lentă.

Calculul pe prima formă de bază se rezumă la a determina săgeţile grinzilor principale în dreptul tuturor nodurilor reţelei. Trecerea la o a doua formă de bază (fig. 2 *b*) se efectuează astfel : se blochează cu pendulii de fixare sistemul auxiliar deformat de încărcarea exterioară şi apoi se restabilesc legăturile de încastrare elastică dintre grinzile secundare şi principale ; o dată cu restabilirea acestor legături, apar la noduri, pe grinzile secundare, momente de încastrare perfectă care se distribuie apoi în reţea.

Notînd cu y_j şi y_i săgeţile nodurilor j, respectiv i, momentele de încastrare perfectă la capetele barei ji se obţin cu relaţia :

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_j = \frac{6EI_y}{\lambda_{ij}^2}(y_j - y_i).$$

Dacă bara ji este un panou marginal al grinzii secundare, în i fiind un reazim simplu, momentul de încastrare perfectă din j se determină cu relaţia

$$\mathfrak{M}_j = \frac{3EI_y}{\lambda_{ij}^2} \cdot y_j .$$

La sfîrşitul unui ciclu oarecare n, al iteraţiei generale, eforturile în penduli se determină cu relaţia

$$S_j^{(n)} = \frac{M_{ji}^{(n)} + M_{ij}^{(n)}}{\lambda_{ij}} + \frac{M_{jh}^{(n)} + M_{hj}^{(n)}}{\lambda_{hj}} . \qquad (12)$$

În relaţia (12) termenii au următoarele semnificaţii :

— $S_j^{(n)}$ reprezintă efortul din pendulul de fixare a nodului j la sfîrşitul ciclului n.

— $M_{ji}^{(n)}$, $M_{ij}^{(n)}$, $M_{jh}^{(n)}$ şi $M_{hj}^{(n)}$ reprezintă momentele încovoietoare de la capetele barelor ij şi jh la sfîrşitul iteraţiei din ciclul n.

Cu forţele de fixare $S_j^{(n)}$ se încarcă prima formă de bază din ciclul următor de calcul. Iteraţia se efectuează pînă cînd diferenţa dintre momentele determinate în două cicluri consecutive, devine neglijabilă. Momentele finale, încovoietoare şi de torsiune, se determină însumînd momentele corespunzătoare determinate în toate ciclurile iteraţiei generale.

5. DETALII DE CALCUL

Calculul rețelelor de grinzi cu ajutorul iterației, pe două forme de bază, se desfășoară în majoritatea cazurilor cu o convergență destul de lentă. De aceea este indicat să se folosească ori de cîte ori este necesar, atît pe prima cît și pe a doua formă de bază, procedee care accelerează calculul. Un procedeu de accelerare a convergenței iterației care conduce uneori la o reducere însemnată a volumului calculelor, constă în utilizarea unui coeficient de transmitere obținut prin însumarea progresiei geometrice care se formează la nod în cazul în care iterația se efectuează numai între două noduri consecutive. Considerînd rețeaua din figura 2 b, cu un moment neechilibrat M_j^0, la nodul j, procedeul constă în următoarele :

Se consideră toate nodurile rețelei blocate la rotire, cu excepția nodului j și a unui nod vecin oarecare i. Momentul M_j^0 se transmite pînă la epuizarea numai între aceste două noduri. Însumînd progresia geometrică care se formează în cursul iterației la nodul i, se determină „momentul total" M_i

$$M_i = M_j^0 (t_{j\to i} + t_{j\to i}^2 \times t_{i\to j} + t_{j\to i}^3 \times t_{i\to j}^2 + \ldots) = \frac{t_{j\to i}}{1 - t_{j\to i} \times t_{i\to j}} M_j^0 .$$

Făcînd raportul între acest moment și momentul M_j^0 se obține un coeficient de transmitere totală de la j la i, $t'_{j\to i}$, cu ajutorul căruia se determină direct valoarea totală a momentului M_i :

$$t'_{j\to i} = \frac{M_i}{M_j^0} = \frac{t_{j\to i}}{1 - t_{j\to i} \times t_{i\to j}} .$$

Dacă rețeaua ar avea numai nodurile i și j, prin distribuirea la nod a momentului M_i s-ar obține momentele definitive pe capetele barelor concurente în i. Prin utilizarea coeficientului de transmitere totală, un moment neechilibrat oarecare se transmite între două noduri consecutive o singură dată. Alegîndu-se o ordine convenabilă pentru succesiunea transmiterilor, de la nodurile mai solicitate la cele mai puțin solicitate, calculul se efectuează cu un număr de operațiuni redus față de cazul în care ar fi utilizați coeficienții de transmitere obișnuiți.

Utilizarea coeficienților de transmitere totală prezintă însă dezavantajul de a face calculele ceva mai greoaie. Totodată trebuie să se aibă grijă ca acele cantități care au fost deja transmise între două noduri vecine cu ajutorul coeficientului t' să nu mai fie transmise între aceste noduri.

Metoda de calcul a rețelelor plane de grinzi cu ajutorul iterației efectuate pe două forme de bază poate fi aplicată și în cazul rețelelor spațiale. Pentru aceasta este necesar să se țină seama de legăturile suplimentare existente la nodurile de legătură ale grinzilor rețelei cu stîlpii structurii. În acest scop, calculul rotirilor inițiale sau al momentelor de încastrare perfectă pe prima formă de bază se va face luînd în considerație încastrarea elastică de la capetele grinzilor rețelei. De asemenea, pe a doua formă de bază, calculul se va conduce pe întreaga structură, efectuîndu-se transmiteri atît pe grinzi cît și pe stîlpi.

6. CONCLUZII

Metoda de calcul prezentată este destinată rezolvării rețelelor de grinzi în cazurile în care nu se pot neglija rigiditățile la torsiune ale grinzilor orientate după o direcție.

Metoda se bazează pe utilizarea alternativă a două sisteme de bază, calculul efectuîndu-se pe schemă de transmiteri, prin aproximații succesive.

Ideea utilizării alternative a două sisteme de bază pentru calculul structurilor static nedeterminate cu grade de libertate, nu este nouă. În ultimii 30 de ani au fost făcute numeroase propuneri de rezolvare a structurilor într-o singură etapă, fără scrierea ecuațiilor de condiție, prin intermediul unor metode de calcul în care se efectuează alternativ două tipuri de echilibrări : pentru rotiri și pentru translații. Deoarece metodele propuse sînt destinate rezolvării cadrelor, am considerat utilă prezentarea unei metode de calcul specifică rețelelor de grinzi. Aceasta cu atît mai mult cu cît în cazul rețelelor de grinzi cu noduri care transmite torsiuni, metodele de calcul bazate pe scrierea și rezolvarea sistemelor de ecuații de condiție sînt în unele cazuri practic inaplicabile fără ajutorul mașinilor de calcul.

Primită la redacție la 10 februarie 1966; o nouă versiune la 8 mai 1966.

EXEMPLE DE CALCUL

1. Rețeaua de grinzi din fig. 7, va fi rezolvată cu ajutorul celor trei variante de calcul expuse.

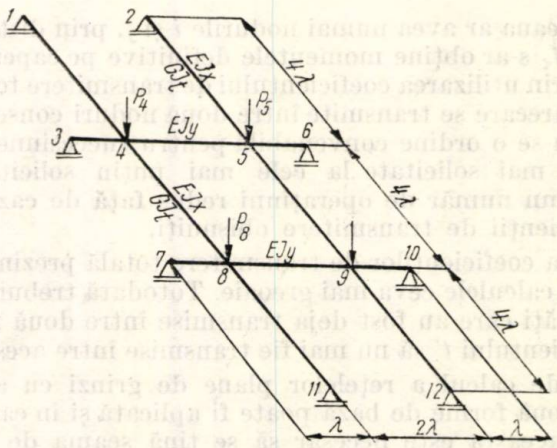


Fig. 7

Se dau :

$$EI_x = 60$$
$$GI_t = 2$$
$$EI_y = 0{,}4$$
$$P_4 = P_5 = P_8 = P_9 = P.$$

1) VARIANTA I

Sistemul de bază auxiliar are grinzile principale infinit rigide la torsiune ($G \cdot I_t = \infty$). Deoarece încărcarea exterioară este simetrică, necunoscutele (reacțiunile din 3, 6, 7 și 10) sînt egale și se determină direct :

$$x_3 = x_6 = x_7 = x_{10} = \frac{\Delta_3}{\delta_{33} + \delta_{37}},$$

$$\delta_{33} = \frac{\lambda^3}{3EI_y} + 0{,}01646\,\frac{(12\lambda)^3}{EI_x} = (0{,}833 + 0{,}4737)\,\lambda^3 = 1{,}307\,\lambda^3,$$

$$\delta_{37} = 0{,}0144\,\frac{(12\lambda)^3}{EI_x} = 0{,}415\,\lambda^3,$$

$$\Delta_3 = (0{,}01646 + 0{,}0144)\,\frac{(12\lambda)^3}{EI_x}\,P = 0{,}889\,\lambda^3 \cdot P,$$

$$x_3 = \frac{0{,}889\,P}{1{,}307 + 0{,}415} = 0{,}516\,P.$$

Momente de încastrare perfectă pentru a doua formă de bază :

$$\mathfrak{M}_{43} = \lambda \cdot x_3 = 0{,}516\,\lambda P.$$

Deoarece a doua formă de bază este încărcată simetric, grinzile principale între nodurile 4 și 8, respectiv 5 și 9, nu sînt solicitate la torsiune.

Coeficienții de repartiție la nod, corespunzători încărcării simetrice :

$$r_{4\cdot3} = \frac{3EI_y}{0{,}25\,GI_t + 4EI_y} = 0{,}57\,; \qquad r_{4\cdot5} = \frac{EI_y}{0{,}25\,GI_t + 4EI_y} = 0{,}19\,; \qquad r_{4\cdot1} = 0{,}24.$$

Momentele la capetele barelor la sfîrșitul primului ciclu al iterației generale :

$$M'_{4\cdot3} = (1 - r_{4\cdot3})\,\mathfrak{M}_{43} = -\,0{,}516\,(1 - 0{,}57)\,\lambda \cdot P = -\,0{,}222\,\lambda P,$$
$$M'_{4\cdot5} = 0{,}516 \times 0{,}19\,\lambda P = 0{,}098\,\lambda P,$$
$$M'_{4\cdot1} = 0{,}516 \times 0{,}24\,\lambda P = 0{,}124\,\lambda P.$$

Diferența dintre $M'_{4\cdot3}$ și $\mathfrak{M}$ provoacă efortul din pendulul de fixare a nodului 4

$$\Delta M'_{4\cdot3} = -\,0{,}222\,\lambda P + 0{,}516\,\lambda P = 0{,}294\,\lambda P.$$

Eforturile din cei patru penduli de fixare, sînt egale

$$S_4 = S_5 = S_8 = S_9 = \frac{\Delta M'_{43}}{\lambda} = 0{,}294\,P.$$

Raportul $\dfrac{S_4}{P} = 0{,}294$ reprezintă rația progresiei geometrice după care se formează termenii iterației ciclurilor. Cunoscînd rația, valorile momentelor finale se determină direct :

$$M_{4\cdot3} = \frac{-\,0{,}222}{1 - 0{,}294}\,\lambda P = -\,0{,}314\,\lambda P,$$

$$M_{4\cdot5} = \frac{0{,}098}{1 - 0{,}294}\,\lambda P = 0{,}139\,\lambda P,$$

$$M_{4\cdot1} = \frac{0{,}124}{1 - 0{,}294}\,\lambda P = 0{,}175\,\lambda P.$$

2) VARIANTA a II-a

Sistemul de bază auxiliar se obţine considerînd că la nodurile 4, 5, 8 şi 9, între grinzi, există numai legături pendulare. În toţi pendulii de legătură eforturile sînt aceleaşi şi se determină direct :

$$x_4 = x_5 = x_8 = x_9 = \frac{\Delta_4}{\delta_{44} + \delta_{54} + \delta_{84}},$$

$$\delta_{44} = 0{,}01646 \frac{(12\lambda)^3}{EI_x} + 0{,}01172 \frac{(4\lambda)^3}{EI_y} = 2{,}35\ \lambda^3,$$

$$\delta_{54} = 0{,}00911 \frac{(4\lambda)^3}{EI_y} = 1{,}46\ \lambda^3,$$

$$\delta_{84} = 0{,}0144 \frac{(12\lambda)^3}{EI_x} = 0{,}415\ \lambda^3,$$

$$\Delta_4 = (0{,}01646 + 0{,}0144) \frac{(12\lambda)^3}{EI_x} P = 0{,}889\ \lambda^3 P,$$

$$x = \frac{0{,}889\ P}{2{,}35 + 1{,}46 + 0{,}415} = 0{,}21\ P.$$

Momentele încovoietoare pe grinzile secundare, la nodurile reţelei sînt aceleaşi : $M = 0{,}21\ \lambda P$.

Rotirile fibrelor medii deformate ale grinzilor secundare, în dreptul grinzilor principale, sînt egale între ele :

$$\varphi' = \frac{0{,}21\ \lambda^2\ P}{EI_y} = 0{,}525\ \lambda^2 P.$$

Momentele de încastrare perfectă la torsiune pentru a doua formă de bază

$$\mathfrak{M}_{4\cdot1} = \varphi' \frac{GI_t}{4\lambda} = 0{,}2625\ \lambda P.$$

Momentele la capetele barelor la sfîrşitul primului ciclu al iteraţiei generale :

$$M'_{4\cdot3} = -\ \mathfrak{M}_{4\cdot1} \cdot r_{4\cdot3} = -\ 0{,}2625 \times 0{,}57\ \lambda P = -\ 0{,}15\ \lambda P,$$

$$M'_{4\cdot5} = -\ \mathfrak{M}_{4\cdot1}\ r_{4\cdot5} = -\ 0{,}2625 \times 0{,}19\ \lambda P = -\ 0{,}05\ \lambda P,$$

$$M'_{4\cdot1} = 0{,}2625 \times 0{,}76\ \lambda P = 0{,}2\ \lambda P.$$

Eforturile din pendulii de fixare la sfîrşitul primului ciclu :

$$S_4 = \frac{M'_{4\cdot3}}{\lambda} = -\ 0{,}15\ P.$$

Raportul $\frac{S_4}{P} = -\ 0{,}15$ reprezintă raţia progresiei geometrice alternante, după care se formează termenii iteraţiei generale. Valorile momentelor finale se determină direct :

$$M_{4\cdot3} = -\ \frac{0{,}21 + 0{,}15}{1 + 0{,}15} \lambda P = -\ 0{,}313\ \lambda P,$$

$$M_{4\cdot5} = \frac{0{,}21 - 0{,}05}{1 + 0{,}15} \lambda P = 0{,}139\ \lambda P,$$

$$M_{4\cdot1} = \frac{0{,}20}{1 + 0{,}15} \lambda P = 0{,}174\ \lambda P,$$

3) VARIANTA a III-a

Pe prima formă de bază se determină săgețile grinzilor principale la nodurile rețelei :

$$y_4 = y_5 = y_8 = y_9 = (0{,}01646 + 0{,}0144)\frac{(12\lambda)^3}{EI_x} \cdot P = 0{,}889\ \lambda^3 P.$$

Pe a doua formă de bază, obținută prin restabilirea continuității legăturilor la noduri și prin introducerea pendulilor de fixare suplimentari, apar mai întîi, momentele de încastrare perfectă,

$$\mathfrak{M}_{4.3} = \frac{3EI_y}{\lambda^2} y_4 = 1{,}067\ \lambda P,$$

și apoi momentele de pe capetele barelor :

$$M'_{4.3} = -\ \mathfrak{M}_{4.3}(1 - r_{4.3}) = -\ 1{,}067 \times 0{,}43\ \lambda P = -\ 0{,}458\ \lambda P,$$

$$M'_{4.5} = 1{,}067 \times 0{,}19\ \lambda P = 0{,}202\ \lambda P,$$

$$M'_{4.1} = 1{,}067 \times 0{,}24\ \lambda P = 0{,}256\ \lambda P.$$

Eforturile din cei patru penduli de fixare, sînt egale :

$$S_4 = S_5 = S_8 = S_9 = \frac{M'_{4.3}}{\lambda} = -\ 0{,}458\ P.$$

Rația progresiei : $\dfrac{S_4}{P} = -\ 0{,}458.$

Cunoscînd rația progresiei geometrice, momentele finale se obțin direct :

$$M_{4.3} = \frac{-\ 0{,}458}{1 + 0{,}458}\lambda \cdot P = -\ 0{,}314\ \lambda P,$$

$$M_{4.5} = \frac{0{,}202}{1 + 0{,}458}\lambda P = 0{,}139\ \lambda P,$$

$$M_{4.1} = \frac{0{,}256}{1 + 0{,}458}\lambda P = 0{,}175\ \lambda P,$$

$$M_{4.8} = 0.$$

2. Rețeaua de grinzi din fig. 7, încărcată cu sarcinile $P_4 = P_9 = 1000$, va fi rezolvată prin procedeul care utilizează drept primă formă de bază schema statică din fig. 4 ($P_5 = P_8 = 0$).

Săgețile nodurilor 4, 5, 8 și 9 calculate pe prima formă de bază :

$$y_4 = y_9 = 0{,}01646\frac{(12\lambda)^3}{EI_x} \cdot 1000 = 473{,}7\ \lambda^3,$$

$$y_5 = y_8 = 0{,}0144\frac{(12\lambda)^3}{EI_x} \cdot 1000 = 415\ \lambda^3.$$

Coeficienţii de repartiţie la nod pentru a doua formă de bază :

$$r_{4\cdot8} = r_{8\cdot4} = r_{5\cdot9} = r_{9\cdot5} = r_{4\cdot1} = r_{8\cdot11} = r_{5\cdot2} = r_{9\cdot12} = \frac{0{,}25 \cdot G \cdot I_t}{05G \cdot I_t + 5EI_y} = \frac{0{,}5}{3} = 0{,}1667,$$

$$r_{4\cdot3} = r_{5\cdot6} = r_{8\cdot7} = r_{9\cdot10} = \frac{3E \cdot I_y}{05\ G \cdot I_t + 5E \cdot I_y} = \frac{1{,}2}{3} = 0{,}4,$$

$$r_{4\cdot5} = r_{5\cdot4} = r_{8\cdot9} = r_{9\cdot8} = \frac{2E \cdot I_y}{05\ GI_t + 5EI_y} = \frac{0{,}8}{3} = 0{,}2666.$$

Coeficienţii de transmitere (după Dasek) :

$$t_{4\cdot5} = t_{5\cdot4} = t_{9\cdot8} = -\ 0{,}5 \cdot r_{4\cdot5} = -\ 0{,}1333,$$

$$t_{4\cdot8} = t_{8\cdot4} = t_{5\cdot9} = t_{9\cdot5} = r_{4\cdot8} = 0{,}1667.$$

I. CICLUL I

Momente de încastrare perfectă :

$$\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}_{4\cdot3} = -\ \mathfrak{M}^{\mathrm{I}}_{9\cdot10} = -\ \frac{3EI_y}{\lambda_2} \cdot y_4 = -\ 568{,}4\ \lambda,$$

$$\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}_{5\cdot4} = \mathfrak{M}^{\mathrm{I}}_{4\cdot5} = -\ \mathfrak{M}^{\mathrm{I}}_{8\cdot9} = -\ \mathfrak{M}^{\mathrm{I}}_{9\cdot8} = \frac{6EI_y}{\lambda^2}(y_4 - y_5) = 140{,}9\ \lambda,$$

$$\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}_{5\cdot6} = -\ \mathfrak{M}^{\mathrm{I}}_{8\cdot7} = \frac{3EI_y}{\lambda^2} \cdot y_5 = 498\ \lambda.$$

Calculul momentelor se efectuează pe schemă de transmiteri. Coeficienţii de repartiţie nu au fost trecuţi pe schemă (fig. 8).

Ordinea corectării nodurilor este următoarea : 5, 8, 4, 9, 5, 8, 4 etc.

După efectuarea tuturor transmiterilor, se trage linie, şi se repartizează la noduri momentele neechilibrate. Valorile finale ale momentelor de pe capetele barelor sînt încadrate. Aceste valori trebuie multiplicate cu λ.

Eforturile din pendulii de fixare :

$$S^{\mathrm{I}}_4 = S^{\mathrm{I}}_9 = \frac{M^{\mathrm{I}}_{4\cdot3}}{\lambda} + \frac{M^{\mathrm{I}}_{4\cdot5} + M^{\mathrm{I}}_{5\cdot4}}{\lambda} = -\ \frac{296{,}4\ \lambda}{\lambda} - \frac{(210{,}1 - 7{,}4)\ \lambda}{2\ \lambda} = -\ 405{,}2,$$

$$S^{\mathrm{I}}_5 = S^{\mathrm{I}}_8 = \frac{M^{\mathrm{I}}_{5\cdot6}}{\lambda} + \frac{M^{\mathrm{I}}_{4\cdot5} + M^{\mathrm{I}}_{5\cdot4}}{\lambda} = -\ \frac{160\ \lambda}{\lambda} - \frac{(210{,}1 - 7{,}4)\ \lambda}{2\ \lambda} = -\ 51{,}2.$$

Eforturile din penduli reprezintă încărcarea exterioară în ciclul II al iteraţiei generale.

II. CICLUL II

Săgeţile nodurilor, sub forţele S^{I}_4, S^{I}_9, S^{I}_5 şi S^{I}_8, pe prima formă de bază :

$$y_4 = y_9 = -\ (0{,}01646 \times 405{,}2 + 0{,}0144 \times 51{,}2)\frac{(12\ \lambda)^3}{E \cdot I_x} = -\ 213\ \lambda^3,$$

$$y_5 = y_8 = -\ (0{,}01646 \times 51{,}2 + 0{,}0144 \times 405{,}2)\frac{(12\ \lambda)^3}{EI_x} = -\ 192{,}5\ \lambda^3.$$

Momente de încastrare perfectă :

$$\mathfrak{M}^{II}_{4\cdot3} = -\mathfrak{M}^{II}_{9\cdot10} = -\frac{3EI_y}{\lambda^2}\cdot y_4 = 256\ \lambda,$$

$$\mathfrak{M}^{II}_{5\cdot4} = \mathfrak{M}^{II}_{4\cdot5} = -\mathfrak{M}^{II}_{8\cdot9} = -\mathfrak{M}^{II}_{9\cdot8} = \frac{6\times0,4}{\lambda^2}(-213+192,5)\ \lambda^3 = -49,2\ \lambda,$$

$$\mathfrak{M}^{II}_{5\cdot6} = -\mathfrak{M}^{II}_{8\cdot7} = \frac{3\times0,4}{\lambda^2}(-192,5)\ \lambda^3 = -231\ \lambda.$$

Calculul momentelor se efectuează pe schemă de transmiteri, corectarea nodurilor făcîndu-se în aceeaşi ordine ca în primul ciclu al iteraţiei. Dăm direct valorile finale pe capete de bară, la sfîrşitul ciclului II :

$$M^{II}_{4\cdot3} = -M^{II}_{9\cdot10} = 128,2\ \lambda;\quad M^{II}_{4\cdot5} = -M^{II}_{9\cdot8} = -84,6\ \lambda;\quad M^{II}_{5\cdot4} = -M^{II}_{8\cdot9} = 7,8\ \lambda;$$

$$M^{II}_{5\cdot6} = -M^{II}_{8\cdot7} = -80,2\ \lambda;\quad M^{II}_{4\cdot8} = M^{II}_{5\cdot9} = -M^{II}_{8\cdot4} = -M^{II}_{9\cdot5} = 9,6\ \lambda;$$

$$M^{II}_{4\cdot1} = -M^{II}_{9\cdot12} = -53,2\ \lambda;\quad M^{II}_{5\cdot2} = -M^{II}_{8\cdot11} = 62,8\ \lambda.$$

Se calculează eforturile din pendulii de fixare :

$$S^{II}_4 = S^{II}_9 = \frac{128,2\ \lambda}{\lambda} + \frac{84,6\ \lambda - 7,8\ \lambda}{2\ \lambda} = 166,6,$$

$$S^{II}_5 = S^{II}_8 = -\frac{80,2\ \lambda}{\lambda} - \frac{84,6\ \lambda - 7,8\ \lambda}{2\ \lambda} = 41,8.$$

Eforturile din penduli reprezintă încărcarea exterioară în ciclul III al iteraţiei generale.

În ciclul III şi în ciclurile următoare, calculul se conduce la fel ca în ciclul II.

Dăm mai jos sub formă de tablou, valorile momentelor pe capete de bară obţinute în fiecare ciclu. În ultima coloană a tabloului sînt trecute valorile finale ale momentelor determinate prin însumarea rezultatelor obţinute în fiecare ciclu de calcul :

	Ciclul de calcul					Valorile finale ale momentelor
	I	II	III	IV	V	
$M_{4\cdot3} = -M_{9\cdot10}$	−296,4 λ	128,2 λ	−55,8 λ	24,6 λ	−11,0 λ	−210,4 λ
$M_{4\cdot5} = -M_{9\cdot8}$	210,1 λ	−84,6 λ	34,5 λ	−14,4 λ	6,1 λ	151,7 λ
$M_{5\cdot4} = -M_{8\cdot9}$	7,4 λ	7,8 λ	− 7,6 λ	4,9 λ	− 2,7 λ	9,8 λ
$M_{5\cdot6} = -M_{8\cdot7}$	160,0 λ	−80,2 λ	39,0 λ	−18,7 λ	8,8 λ	108,9 λ
$M_{4\cdot8} = M_{5\cdot9} = -M_{8\cdot4} = -M_{9\cdot5}$	− 27,0 λ	9,6 λ	− 3,4 λ	1,2 λ	− 0,4 λ	− 20,0 λ
$M_{4\cdot1} = -M_{9\cdot12}$	113,3 λ	−53,2 λ	24,7 λ	−11,4 λ	5,3 λ	78,7 λ
$M_{5\cdot2} = -M_{8\cdot11}$	−140,4 λ	62,8 λ	−28,0 λ	12,6 λ	− 5,7 λ	− 98,7 λ

După cinci cicluri de calcul rezultatele obţinute diferă de cele reale cu cca 1,5%.

Exactitatea acestor rezultate poate fi uşor verificată prin comparaţie cu momentele determinate în primul exemplu de calcul.

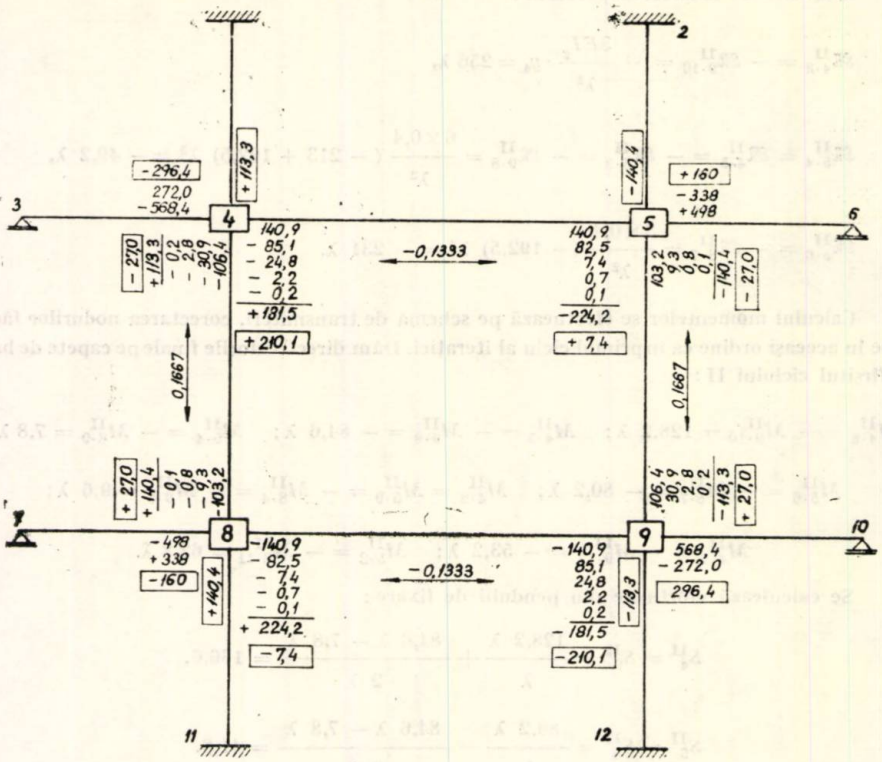


Fig. 8

Dacă în locul sistemului de bază auxiliar folosit în acest exemplu ar fi fost utilizată ca primă formă de bază schema statică din fig. 3, s-ar fi obținut aceeași aproximație de calcul după numai două cicluri ale iterației generale.

BIBLIOGRAFIE

1. AGENT R., *Metoda aproximațiilor succesive*, București, E.S.A.C., 1955.
2. — *O metodă pentru calculul grinzilor continuie și cadrelor pe reazime elastice*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *9* (1959).
3. — *Metode iterative pentru calculul cadrelor cu noduri deplasabile. Metoda nodurilor fictive*, Industria construcțiilor și a materialelor de construcții, **3**, *12* (1955).
4. CIREȘEANU P., *Calculul rețelelor de grinzi în casete*, Ed. tehnică, 1960, București.
5. CSONKA P., *Une contribution à la simplification de la méthode de H. Cross*, Technique Moderne — Construction, *3* (1952).
6. DASEK V., *Das abgekürzte und veralgemeinerte Momentenverteilungsverfahren*, Beton und Eisen, **20** (1940).
7. GHEORGHIU A., *Statica construcțiilor, Vol. II*, Edit. tehnică, 1965.
8. GRINTER L., *Wind Stress Analysis Simplified Transaction*, ASCE 1934 paper 1870.
9. GRINTER L., *Design Of Modern Steel Structures*, New York, Macmillan Comp., 1960.
10. HALÄSZ R., *Verfahren zur Berechnung von Stockwekrahmen nach Cross, Zaytzeff und Csonka*, Baupl. und Bautechnik, *3* (1953).

11. HALLER H., KRANL R., *Vereinfachte Berechnung der Rahmenstütze*, Bauingenieur. *9—10* (1942).
12. HANGAN M., *Influența torsiunii grinzilor în calculul planșeelor*, Bul. Soc. Polit., *9—11* (1936).
13. KANI G., *Die Berechnung mehrschöckiger Rahmen*, Stuttgart, K. Wittwer, 1949.
14. MATEESCU C., *La résolution des systèmes hyperstatiques par deux méthodes récentes*, București, 1938.
15. MAZILU P., *Calculul spațial al cadrelor cu grinzi longitudinale principale și grinzi transversale secundare*, St. cerc. mec. metalurg., *1—2* (1952).
16. — *Statica Construcțiilor, Vol. II*, București, Ed. tehnică, 1959.
17. SCARLAT A., *Statica construcțiilor, Vol. II*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1965.
18. SAGHIN P. P., *Rasciot mnogaiarusnîhram sposobon posledovatelnova saprajenia*, Moscova, 1954.
19. ZAYTZEFF S., *Méthode générale de double relaxation*, Technique Moderne — Construction, *9* (1954) și *1* (1955).

CONTRIBUȚII LA TEORIA MACROSCOPICĂ A DISLOCAȚIILOR ȘI TENSIUNILOR INIȚIALE. II [1]

de C. TEODOSIU
Centrul de mecanica solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

539.3

Această lucrare reprezintă a doua parte a unui studiu consacrat teoriei materialelor cu tensiuni și hipertensiuni inițiale generate de dislocații sau cvasidislocații. Folosind principiul obiectivității materiale și teorema lui Cauchy, se demonstrează că energia de deformație nu poate depinde de distrosiuni și de derivatele lor covariante totale decît prin intermediul tensorilor deformației și hiperdeformației. Se deduc ecuațiile constitutive și se completează sistemul de ecuații ale cîmpului cu condițiile generalizate de compatibilitate a deformațiilor.
Se trece apoi la liniarizarea sistemului de ecuații și se demonstrează teorema de unicitate pentru sistemul liniarizat. În încheierea lucrării se indică o metodă de rezolvare a problemelor la limită, care constă în construirea soluției ca sumă dintre o soluție particulară a sistemului de ecuații și soluția unei probleme la limită asociate, pentru același corp, dar considerat fără tensiuni și hipertensiuni inițiale.

6. TENSORII DEFORMAȚIEI ȘI HIPERDEFORMAȚIEI

Principiul indiferenței materiale cere ca energia de deformație să fie invariantă față de deplasările de corp rigid ale continuului deformat. Tensorii A^k_λ și $A^k_{\lambda;\mu}$ care intervin în expresia energiei se comportă ca vectori față de deplasările de acest fel. Dar atunci, conform unei teoreme a lui Cauchy (vezi [42], p. 143), energia de deformație nu poate depinde decît de produsele scalare ale argumentelor vectoriale luate cîte două și de determinanții argumentelor vectoriale luate cîte trei.

[1] Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **12**, 4 (1967) (în limba engleză).

Vrem să demonstrăm acum, că dacă domeniul funcției energiei este restrîns prin condiția $\det | A^k_\varkappa | \neq 0$, energia se poate exprima ca funcție de un număr mai mic de invarianți, anume

$$\gamma_{\varkappa\lambda} \equiv g_{kl}\, A^k_\varkappa\, A^l_\lambda \tag{6.1}$$

și

$$\rho_{\varkappa\lambda\mu} \equiv g_{ks}\, A^k_\varkappa\, A^s_{\lambda:\mu}. \tag{6.2}$$

Într-adevăr, întrucît matricea $A^k_\varkappa$ este nesingulară, putem rezolva (6.2) în raport cu $A^s_{\lambda:\mu}$, în funcție de $\rho_{\varkappa\lambda\mu}$ și $A^k_\varkappa$, astfel încît

$$W = W(A^k_\varkappa,\ \rho_{\varkappa\lambda\mu}).$$

Folosind acum teorema lui Cauchy, deducem că

$$W = W(\gamma_{\varkappa\lambda},\ \rho_{\varkappa\lambda\mu}). \tag{6.3}$$

Pentru caracterizarea deformației induse de distorsiunile $A^k_\varkappa$, vom folosi două măsuri: $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ și $\rho_{\varkappa\lambda\mu}$. Prima dintre ele, definită prin relația

$$\varepsilon_{\varkappa\lambda} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda}), \tag{6.4}$$

va fi denumită *tensorul deformației*. Întrucît

$$ds^2 - d\sigma^2 = 2\,\varepsilon_{\varkappa\lambda}\,(d\xi)^\varkappa\,(d\xi)^\lambda, \tag{6.5}$$

rezultă că $\varepsilon_{\varkappa\lambda} \equiv 0$, dacă și numai dacă distanța dintre fiecare pereche de puncte infinit vecine, în starea deformată, este aceeași cu cea din starea naturală. Tensorul $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ servește ca măsură a deformației corpului în starea finală în raport cu starea naturală. Variația pătratului elementului de lungime poate fi exprimată și sub forma

$$ds^2 - d\sigma^2 = 2e_{kl}\, dx^k\, dx^l, \tag{6.6}$$

unde

$$e_{kl} \equiv \frac{1}{2}(g_{kl} - c_{kl}), \tag{6.7}$$

Întrucît

$$e_{kl} = \varepsilon_{\varkappa\lambda}\, A^\varkappa_k\, A^\lambda_l,\quad \varepsilon_{\varkappa\lambda} = e_{kl}\, A^k_\varkappa\, A^l_\lambda, \tag{6.8}$$

tensorii e_{kl} și $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ se anulează simultan. Prin urmare tensorul e_{kl} poate fi denumit de asemenea tensor al deformației.

Pentru a obține semnificația geometrică a tensorului $\rho_{\varkappa\lambda\mu}$, vom transforma relația (6.2) cu ajutorul relațiilor (4.4) și (3.13). Avem

$$\rho_{\varkappa\lambda\mu} = g_{ks}\, A^k_\varkappa A^m_\mu\,(\partial_m\, A^s_\lambda + \{{}^{s}_{ml}\}\, A^l_\lambda) = g_{ks}\,(\{{}^{s}_{ml}\} - \Gamma^s_{ml})\, A^k_\varkappa\, A^l_\lambda\, A^m_\mu. \tag{6.9}$$

Presupunem acum că în starea deformată sînt dați doi vectori materiali, paraleli și de aceeași lungime V^k și $V^k + dV^k$, cu originile în punctele vecine $o\,(x^m)$ și $o'\,(x^m + dx^m)$, aparținînd aceluiași element material. Din (3.5) rezultă atunci

$$dV^k = -\{{}^{k}_{ml}\}\, V^l\, dx^m.$$

Prin relaxarea elementului material, vectorul care unește punctele o și o' devine

$$(\mathrm{d}\xi)^{\mu} = A^{\mu}_{m}\ \mathrm{d}x^{m},$$

iar vectorii V^k și $V^k + \mathrm{d}V^k$ devin respectiv

$$V^{\varkappa} = A^{\varkappa}_{k}\ V^k$$

și

$$V^{\varkappa} + \mathrm{d}V^{\varkappa} = (A^{\varkappa}_{k} + \partial_m A^{\varkappa}_{k}\mathrm{d}x^m)\,(V^k - \{{}^{k}_{ml}\}\ V^l\,\mathrm{d}x^m).$$

Din ultimele două relații și din (3.13) deducem

$$\mathrm{d}V^{\varkappa} = (\Gamma^{k}_{ml} - \{{}^{k}_{ml}\})\,A^{\varkappa}_{k}\,A^{l}_{\lambda}\,A^{m}_{\mu}\,V^{\lambda}\,(\mathrm{d}\xi)^{\mu},$$

de unde, ținînd seama de (6.9) și (6.1), obținem după cîteva transformări [2])

$$\mathrm{d}V^{\varkappa} = -\gamma^{\varkappa\sigma}\ \rho_{\sigma\varkappa\mu}\ V^{\lambda}\,(\mathrm{d}\xi)^{\mu}. \tag{6.10}$$

Din (6.10) rezultă că vectorii materiali paraleli, avînd lungimile egale și originile în puncte infinit vecine ale aceluiași element în starea deformată, rămîn paraleli și au lungimi egale după relaxare, dacă și numai dacă $\rho_{\varkappa\lambda\mu} \equiv 0$. Tensorul $\rho_{\varkappa\lambda\mu}$ va fi numit *tensorul hiperdeformației*. El poate fi exprimat prin derivatele tensorului $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ și prin obiectul de neolonomie. Într-adevăr, ținînd seama de (A. 2) și (6.2) obținem

$$\partial_{\mu}\ \varepsilon_{\varkappa\lambda} = \varepsilon_{\varkappa\lambda;\,\mu} = \frac{1}{2}\,(g_{kl}\,A^{k}_{\varkappa;\,\mu}\,A^{l}_{\lambda} + g_{kl}A^{k}_{\varkappa}\,A^{l}_{\lambda;\,\mu}) = \frac{1}{2}\,(\rho_{\lambda\varkappa\mu} + \rho_{\varkappa\lambda\mu}),$$

de unde deducem imediat

$$\partial_{\mu}\varepsilon_{\varkappa\lambda} + \partial_{\lambda}\varepsilon_{\varkappa\mu} - \partial_{\varkappa}\ \varepsilon_{\lambda\mu} = \rho_{\varkappa\lambda\mu} + \rho_{\mu\,[\varkappa\lambda]} + \rho_{\varkappa\,[\mu\lambda]} + \rho_{\lambda\,[\varkappa\mu]}. \tag{6.11}$$

Pe de altă parte, din (6.9) și (6.1) rezultă

$$\rho_{\varkappa\,[\lambda\mu]} = \gamma_{\varkappa\sigma}\,A^{m}_{[\mu}\,A^{l}_{\lambda]}\,\partial_m\,A^{\sigma}_{l} = \gamma_{\varkappa\sigma}\ \Omega^{\sigma}_{\mu\lambda} \equiv \Omega_{\mu\lambda\varkappa}, \tag{6.12}$$

unde

$$\Omega^{\sigma}_{\mu\lambda} \equiv A^{m}_{[\mu}\,A^{l}_{\lambda]}\,\partial_m\,A^{\sigma}_{l} \overset{*}{=} S^{\cdot\,\cdot\,\sigma}_{\mu\lambda} \tag{6.13}$$

este obiectul de neolonomie al sistemului de coordonate $(\varkappa)$ în raport cu (k). Notația $\overset{*}{=}$, introdusă de J. A. Schouten, înseamnă „egal în acest sistem de coordonate"; în cazul nostru, (6.13) este adevărată în sistemul cartezian ortogonal ales pentru fiecare element în starea naturală, pentru care componentele conexiunii $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ sînt nule.

În sfîrșit, înlocuind (6.12) în (6.11) și folosind notația (2.25), obținem

$$\rho_{\varkappa\lambda\mu} = \partial_{\{\lambda}\ \varepsilon_{\varkappa\lambda\}} + \Omega_{\{\mu\lambda\varkappa\}}. \tag{6.14}$$

---

[2]) $\gamma^{\varkappa\sigma}$ se calculează din relațiile $\gamma^{\varkappa\sigma}\,\gamma_{\sigma\lambda} = \delta^{\varkappa}_{\lambda}$, ca pentru orice tensor metric. Deci $\gamma^{\varkappa\lambda} = g^{kl}\,A^{\varkappa}_{k}\,A^{\lambda}_{l}$, $\gamma^{\varkappa\lambda} \neq \delta^{\varkappa\rho}\,\delta^{\lambda\sigma}\,\gamma_{\rho\sigma}$.

Analog, putem introduce un alt tensor, care să caracterizeze hiperdeformația, prin relația

$$r_{klm} \equiv -\delta_{\varkappa\lambda} A^{\varkappa}_{k} A^{\lambda}_{l;m} = -\delta_{\varkappa\lambda} A^{\varkappa}_{k} A^{\lambda}_{l,m}. \tag{6.15}$$

Pentru a obține interpretarea geometrică a acestui tensor, vom transforma (6.15) cu ajutorul relațiilor (3.11) și (3.13). Obținem

$$r_{klm} = -c_{ks} A^{s}_{\lambda} (\partial_m A^{\lambda}_{l} - \{^{p}_{ml}\} A^{\lambda}_{p}) = -c_{ks} (\Gamma^{s}_{ml} - \{^{s}_{ml}\}). \tag{6.16}$$

Considerăm acum doi vectori materiali, V^k și $V^k + \underset{N}{\mathrm{d}} V^k$, în punctele vecine o (x^m) și o' $(x^m + \mathrm{d}x^m)$, care după relaxare devin paraleli și au aceeași lungime în spațiul local euclidian al stării naturale. Conform relației (3.12) avem

$$\underset{N}{\mathrm{d}} V^k = -\Gamma^{k}_{ml} V^l \, \mathrm{d}x^m.$$

Pe de altă parte, doi vectori V^k și $V^k + \underset{D}{\mathrm{d}} V^k$, cu originile în punctele o și o' sînt paraleli și au aceeași lungime în spațiul euclidian al stării deformate, dacă

$$\underset{D}{\mathrm{d}} V^k = -\{^{k}_{ml}\} \, V^l \, \mathrm{d}x^m.$$

Scăzînd ultimele două relații, obținem

$$\underset{D}{\mathrm{d}} V^k - \underset{N}{\mathrm{d}} V^k = (\Gamma^{k}_{ml} - \{^{k}_{ml}\}) \, V^l \, \mathrm{d}x^m,$$

sau încă, ținînd seama de (6.16),

$$\underset{D}{\mathrm{d}} V^k - \underset{N}{\mathrm{d}} V^k = -c^{ks} r_{slm} V^l \, \mathrm{d}x^m. \tag{6.17}$$

Din (6.17) rezultă că vectorii materiali paraleli, care au lungimi egale și originile în puncte vecine ale unui același element de volum, în starea deformată, rămîn paraleli și au lungimi egale după relaxare, dacă și numai dacă $r_{klm} \equiv 0$. De aceea și tensorul r_{klm} poate fi denumit tensor al hiperdeformației. El poate fi exprimat prin derivatele covariante ale tensorului e_{kl} și prin tensorul de torsiune. Într-adevăr, din (6.16) și (3.14) rezultă

$$r_{klm} = -\frac{1}{2} \partial_{\{m} c_{kl\}} + S_{\{mkl\}} + c_{ks} \{^{s}_{ml}\} = -\frac{1}{2} c_{\{kl,m\}} + S_{\{mkl\}}. \tag{6.18}$$

Apoi, folosind relația $g_{kl,m} = 0$, obținem din (6.7) și (6.18),

$$r_{k\{lm} = e_{\{kl,m\}} + S_{\{mkl\}} = e_{kl,m} - e_{lm,k} + e_{mk,l} + S_{\{mkl\}}. \tag{6.19}$$

Ținînd seama de (6.1, (6.2), (3.11) și (6.15) se poate arăta de asemenea că tensorii $\rho_{\varkappa\lambda\mu}$ și r_{klm} sînt legați prin relațiile

$$\rho_{\varkappa\lambda\mu} = 2e_{kl} A^{k}_{\varkappa} A^{l}_{\lambda;\mu} + r_{klm} A^{k}_{\varkappa} A^{l}_{\lambda} A^{m}_{\mu}, \tag{6.20}$$

$$r_{klm} = [2 \varepsilon_{\varkappa\lambda} A^{\varkappa}_{k} A^{\lambda}_{l;m} + \rho_{\varkappa\lambda\mu} A^{\varkappa}_{k} A^{\lambda}_{l} A^{\mu}_{m}. \tag{6.21}$$

7. ECUAȚIILE CONSTITUTIVE

La începutul paragrafului precedent am demonstrat că densitatea energiei depinde de A^s_λ și $A^s_{\lambda;\mu}$ numai prin intermediul tensorului deformației $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ și al tensorului hiperdeformației $\rho_{\varkappa\lambda\mu}$. Dar atunci putem scrie

$$\frac{\partial W}{\partial A^s_\lambda} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\sigma\tau}} \frac{\partial \varepsilon_{\sigma\tau}}{\partial A^s_\lambda} + \frac{\partial W}{\partial \rho_{\sigma\tau\nu}} \frac{\partial \rho_{\sigma\tau\nu}}{\partial A^s_\lambda},$$

$$\frac{\partial W}{\partial A^s_{\lambda;\mu}} = \frac{\partial W}{\partial \rho_{\sigma\tau\nu}} \frac{\partial \rho_{\sigma\tau\nu}}{\partial A^s_{\lambda;\mu}},$$

de unde, ținînd seama de (6.1), (6.2) și (6.4), deducem

$$\frac{\partial W}{\partial A^s_\lambda} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\tau\lambda}} g_{st} A^t_\tau + \frac{\partial W}{\partial \rho_{\lambda\tau\nu}} g_{st} A^t_{\tau;\nu}, \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial A^s_{\lambda;\mu}} = \frac{\partial W}{\partial \rho_{\sigma\lambda\mu}} g_{ps} A^p_\sigma. \tag{7.2}$$

Înlocuind acum (7.2) în (5.10), rezultă

$$h^{lkm} = j \frac{\partial W}{\partial \rho_{\varkappa\lambda\mu}} A^k_\varkappa A^l_\lambda A^m_\mu. \tag{7.3}$$

În ceea ce privește ecuația (5.9), o vom scrie mai întîi sub forma echivalentă

$$t^{kl} = j g^{ks} \left(\frac{\partial W}{\partial A^s_\lambda} A^l_\lambda + \frac{\partial W}{\partial A^s_{\lambda;\mu}} A^l_{\lambda;\mu} \right) - h^{lkm}_{\cdot\cdot\cdot,m}, \tag{7.4}$$

care se poate obține ținînd seama de (5.10). Înlocuind acum pe (7.1) și (7.2) în (7.4), obținem

$$t^{kl} = j \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\varkappa\lambda}} A^k_\varkappa A^l_\lambda + 2 \frac{\partial W}{\partial \rho_{\varkappa\lambda\mu}} A^{(k}_\varkappa A^{l)}_{\lambda;\mu} \right) - h^{lkm}_{\cdot\cdot\cdot,m}. \tag{7.5}$$

Partea antisimetrică a acestei relații dă

$$t^{[kl]} + h^{[l\,k]\,m}_{\cdot\cdot\;\cdot\cdot,m} = 0,$$

ecuație care coincide cu relația (5.20) obținută anterior, fără utilizarea teoremei lui Cauchy, impunînd condiția ca energia de deformație să fie invariantă față de deplasările de corp rigid ale continuului material deformat.

În sfîrșit, dacă ținem seama de definiția (5.24), obținem din partea simetrică a ecuației (7.5), ecuația constitutivă

$$\sigma^{kl} = j \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\varkappa\lambda}} A^k_\varkappa A^l_\lambda + 2 \frac{\partial W}{\partial \rho_{\varkappa\lambda\mu}} A^{(k}_\varkappa A^{l)}_{\lambda;\mu} \right). \tag{7.6}$$

Relaţiile (7.3) şi (7.6) formează ecuaţiile constitutive, care leagă tensorii tensiunii şi hipertensiunii de tensorii deformaţiei şi hiperdeformaţiei.

8. SIMETRIA MATERIALĂ. MATERIALE IZOTROPE

După cum se ştie, proprietăţile de simetrie ale materialului se exprimă prin proprietăţile de invarianţă ale densităţii energiei faţă de transformările continuului material în el însuşi, cu păstrarea lungimilor. În cazul nostru, proprietăţile de simetrie ale materialului sînt date de proprietăţile de invarianţă ale funcţiei

$$W = W(\varepsilon_{\varkappa\lambda},\ \rho_{\varkappa\lambda\mu}), \tag{8.1}$$

faţă de transformările reperelor neolonome în starea naturală, de forma (2.17), definite prin relaţiile

$$(\varkappa) \to (\varkappa') : \quad (\mathrm{d}\xi)^{\varkappa} = O^{\varkappa}_{\varkappa'}\,(\mathrm{d}\xi)^{\varkappa'}, \tag{8.2}$$

$$A^{\varkappa}_{k} = O^{\varkappa}_{\varkappa'}\,A^{\varkappa'}_{k},\quad A^{k}_{\varkappa'} = O^{\varkappa}_{\varkappa'}\,A^{k}_{\varkappa}, \tag{8.3}$$

unde $O^{\varkappa}_{\varkappa'}$ reprezintă matrice ortogonale, iar $\det |O^{\varkappa}_{\varkappa'}| = +1$. Întrucît am presupus că materialul este uniform (§4), proprietăţile de simetrie sînt aceleaşi pentru fiecare particulă în starea naturală; de aceea ne putem limita în consideraţiile noastre la o singură particulă, în interiorul căreia matricea $O^{\varkappa}_{\varkappa'}$ este constantă.

Din (6.4), $(6.9)_2$, (2.18) şi $(8.3)_2$ obţinem atunci

$$\varepsilon_{\varkappa'\lambda'} = \varepsilon_{\varkappa\lambda}\,O^{\varkappa}_{\varkappa'}\,O^{\lambda}_{\lambda'}, \tag{8.4}$$

$$\rho_{\varkappa'\lambda'\mu'} = \rho_{\varkappa\lambda\mu}\,O^{\varkappa}_{\varkappa'}\,O^{\lambda}_{\lambda'}\,O^{\mu}_{\mu'}. \tag{8.5}$$

Grupul de simetrie materială al unui material cu densitatea energiei date de (8.1) este mulţimea tuturor transformărilor de forma (8.2), pentru care

$$W(\varepsilon_{\varkappa'\lambda'},\ \rho_{\varkappa'\lambda'\mu'}) = W(\varepsilon_{\varkappa\lambda},\ \rho_{\varkappa\lambda\mu}), \tag{8.6}$$

sau încă

$$W(\varepsilon_{\varkappa\lambda}\,O^{\varkappa}_{\varkappa'}\,O^{\lambda}_{\lambda'},\ \rho_{\varkappa\lambda\mu}\,O^{\varkappa}_{\varkappa'}\,O^{\lambda}_{\lambda'}\,O^{\mu}_{\mu'}) = W(\varepsilon_{\varkappa\lambda},\ \rho_{\varkappa\lambda\mu}). \tag{8.7}$$

Dacă grupul de transformări (8.2) este dat pentru un anumit material, ecuaţia funcţională (8.7) poate fi considerată ca un sistem de restricţii asupra funcţiei energiei pentru acel material. Grupul de simetrie materială al unui material izotrop şi uniform este mulţimea tuturor transformărilor de forma (8.2). Cristalele sînt caracterizate prin grupuri cristalografice.

În vederea liniarizării ecuaţiilor constitutive, vom presupune că funcţia (8.1) se poate dezvolta în serie după puterile lui $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ şi $\rho_{\varkappa\lambda\mu}$, primii termeni fiind de gradul doi. Aşadar vom avea

$$W = \frac{1}{2}F^{\varkappa\lambda\sigma\tau}\,\varepsilon_{\varkappa\lambda}\,\varepsilon_{\sigma\tau} + \frac{1}{2}G^{\varkappa\lambda\mu\sigma\tau\nu}\rho_{\varkappa\lambda\mu}\,\rho_{\sigma\tau\nu} + H^{\varkappa\lambda\mu\sigma\tau}\,\rho_{\varkappa\lambda\mu}\,\varepsilon_{\sigma\tau} + \hat{W}, \tag{8.8}$$

unde am inclus în $\hat{W}$ toți termenii de grad mai mare ca doi. Datorită formei lui W, tensorii F, G și H trebuie să satisfacă relațiile

$$F^{\varkappa\lambda\sigma\tau} = F^{\lambda\varkappa\sigma\tau} = F^{\sigma\tau\varkappa\lambda},\ G^{\varkappa\lambda\mu\sigma\tau\nu} = G^{\sigma\tau\nu\varkappa\lambda\mu},\ H^{\varkappa\lambda\mu\sigma\tau} = H^{\varkappa\lambda\mu\tau\sigma}. \tag{8.9}$$

Din (8.8) deducem

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\varkappa\lambda}} = F^{\varkappa\lambda\sigma\tau}\varepsilon_{\sigma\tau} + H^{\sigma\tau\varkappa\lambda}\rho_{\sigma\tau\nu} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial \varepsilon_{\varkappa\lambda}}, \tag{8.10}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \rho_{\varkappa\lambda\mu}} = G^{\varkappa\lambda\mu\sigma\tau\nu}\rho_{\sigma\tau\nu} + H^{\varkappa\lambda\mu\sigma\tau}\varepsilon_{\sigma\tau} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial \rho_{\varkappa\lambda\mu}}. \tag{8.11}$$

În cazul materialelor izotrope, tensorii F, G, H trebuie să fie tensori izotropi. Întrucît nu există tensori izotropi de rang impar, tensorul $H^{\varkappa\lambda\mu\sigma\tau}$ trebuie să se anuleze. Ceilalți doi tensori trebuie să fie funcții liniare și omogene de produse de indici Kronecker $\delta^{\varkappa\lambda}$. Există trei produse independente de cîte doi indici Kronecker și cincisprezece produse independente de cîte trei indici Kronecker. Ținînd seama însă de condițiile (8.9), numărul produselor independente se micșorează și obținem în cele din urmă [3])

$$F^{\varkappa\lambda\sigma\tau} = \lambda\delta^{\varkappa\lambda}\delta^{\sigma\tau} + \mu(\delta^{\varkappa\sigma}\delta^{\lambda\tau} + \delta^{\varkappa\tau}\delta^{\lambda\sigma}), \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned} G^{\varkappa\lambda\mu\sigma\tau\nu} = {} & a_1(\delta^{\varkappa\lambda}\delta^{\mu\sigma}\delta^{\tau\nu} + \delta^{\lambda\mu}\delta^{\varkappa\nu}\delta^{\sigma\tau}) + a_2(\delta^{\varkappa\lambda}\delta^{\mu\tau}\delta^{\sigma\nu} + \delta^{\mu\varkappa}\delta^{\lambda\nu}\delta^{\sigma\tau}) + \\ & + a_3\delta^{\varkappa\lambda}\delta^{\mu\nu}\delta^{\sigma\tau} + a_4\delta^{\lambda\mu}\delta^{\varkappa\sigma}\delta^{\tau\nu} + a_5(\delta^{\lambda\mu}\delta^{\varkappa\tau}\delta^{\sigma\nu} + \delta^{\mu\varkappa}\delta^{\lambda\sigma}\delta^{\tau\nu}) + \\ & + a_6\delta^{\mu\varkappa}\delta^{\lambda\tau}\delta^{\sigma\nu} + a_7\delta^{\varkappa\sigma}\delta^{\lambda\tau}\delta^{\mu\nu} + a_8(\delta^{\lambda\sigma}\delta^{\mu\tau}\delta^{\varkappa\nu} + \delta^{\mu\sigma}\delta^{\varkappa\tau}\delta^{\lambda\nu}) + \\ & + a_9\delta^{\varkappa\sigma}\delta^{\lambda\nu}\delta^{\mu\tau} + a_{10}\delta^{\lambda\sigma}\delta^{\mu\nu}\delta^{\varkappa\tau} + a_{11}\delta^{\mu\sigma}\delta^{\varkappa\nu}\delta^{\lambda\tau}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Așadar, termenii pătratici din expresia densității energiei depind, în cazul izotrop, de 13 constante de material.

9. ECUAȚIILE GENERALIZATE DE COMPATIBILITATE A DEFORMAȚIILOR

În teoria clasică a elasticității, ecuațiile de compatibilitate a deformațiilor se pot obține, după cum se știe, impunînd condiția ca tensorul de curbură al conexiunii care descrie transportul paralel în starea nedeformată prin coordonatele stării deformate să se anuleze identic. În cazul nostru, această condiție rămîne valabilă, ea fiind dată de ecuația (3.15) sau, echivalent, de condiția de anulare a tensorului

$$R_{nmlk} \equiv c_{ks}R^{\cdots s}_{nml} \equiv 2(\partial_n \Gamma_{mlk} - \Gamma^s_{ml}\partial_n c_{sk} + \Gamma^s_{np}\Gamma^p_{ml}c_{sk})_{[nm]}.$$

Folosind acum relația $\partial_n c_{sk} = \Gamma_{nsk} + \Gamma_{nks}$, care rezultă imediat din (3.14), obținem

$$R_{nmlk} \equiv 2(\partial_n \Gamma_{mlk} - c^{pq}\Gamma_{nkq}\Gamma_{mlp})_{[nm]} = 0. \tag{9.1}$$

[3]) Pentru o analiză similară, într-un caz liniar, vezi [33].

Transformările ulterioare ale relației (9.2) urmează, în general, linia raționamentelor lui E. Kröner [2]. Tensorul de curbură al unei conexiuni metrice R_{nmlk} este antisimetric atît în prima cît și în a doua pereche de indici și poate fi înlocuit prin tensorul echivalent

$$R^{ij} \equiv \frac{1}{4} \varepsilon^{jnm} \varepsilon^{ilk} R_{nmlk}. \tag{9.2}$$

Rezultă deci că ecuațiile de compatibilitate (9.1) pot fi scrise

$$R^{ij} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{jnm} \varepsilon^{ilk} (\partial_n \Gamma_{mlk} - c^{pq} \Gamma_{nkq} \Gamma_{mlp}) = 0. \tag{9.3}$$

Folosind acum $(6.16)_2$, obținem

$$R^{ij} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{jnm} \varepsilon^{ilk} [- r_{klm,n} + \left\{ {s \atop ml} \right\} (r_{skn} + r_{ksn} + \partial_n c_{sk}) +$$

$$+ c_{sk} \partial_n \left\{ {s \atop ml} \right\} - \left\{ {p \atop nk} \right\} \left\{ {s \atop ml} \right\} c_{sp} - c^{pq} r_{qkn} r_{plm}] = 0. \tag{9.4}$$

Dar, din $(6.19)_2$ avem

$$r_{skn} + r_{ksn} = 2e_{ks,n} = - c_{sk,n}.$$

Înlocuind această relație în (9.4) și ținînd seama că expresia

$$(\partial_n \left\{ {s \atop ml} \right\} + \left\{ {p \atop ml} \right\} \left\{ {s \atop np} \right\})_{[nm]}$$

este nulă, întrucît reprezintă tensorul de curbură al spațiului euclidian al stării deformate, obținem în cele din urmă

$$R^{ij} \equiv - \frac{1}{2} \varepsilon^{jnm} \varepsilon^{ilk} (r_{klm,n} + c^{pq} r_{qkn} r_{plm}) = 0. \tag{9.5}$$

Ecuația (9.5) a fost dedusă, într-o formă puțin diferită, de către E. Kröner și A. Seeger [1], în 1959. Pentru a transforma în continuare această ecuație, vom introduce tensorul de ordinul doi al surselor de tensiuni inițiale $\alpha^p_{\cdot k}$, echivalent cu tensorul antisimetric S_{mlk} și legat de acesta prin relațiile

$$\alpha^p_{\cdot k} = - \varepsilon^{pml} S_{mlk}, \quad S_{mlk} = - \frac{1}{2} \varepsilon_{mlp} \alpha^p_{\cdot k}. \tag{9.6}$$

După cum a arătat E. Kröner [2], în cazul tensiunilor inițiale produse de dislocații, tensorul $\alpha^p_{\cdot k}$ coincide cu tensorul densității dislocațiilor. În cazul general, $\alpha^p_{\cdot k}$ poate fi considerat ca tensor al densității cvasidislocațiilor.

Ținînd seama de $(6.19)_2$ și $(9.6)_2$ obținem, după cîteva calcule intermediare

$$- \frac{1}{2} \varepsilon^{jmn} \varepsilon^{ilk} r_{klm,n} = - \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} e_{ln,km} + \varepsilon^{jmn} \alpha^i_{\cdot m,n} - \frac{1}{2} \varepsilon^{ijn} \alpha^p_{\cdot p,n}.$$

Folosind această relație, partea simetrică a ecuației (9.5) devine

$$- \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} e_{ln,km} = \eta^{ij} + q^{ij}, \tag{9.7}$$

unde

$$\eta^{ij} \equiv -\varepsilon^{nm(i}\,\alpha^{j)}_{\cdot m,\,n} \tag{9.8}$$

reprezintă tensorul simetric al incompatibilității deformațiilor [2], [20], iar

$$q^{ij} \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon^{lk(i}\varepsilon^{j)mn}\,c^{pq}\,r_{qkn}\,r_{plm} \tag{9.9}$$

reprezintă termenul neliniar al ecuației.

În cazul liniar, termenul $q^{ij} \equiv 0$, iar ecuația (9.7) devine

$$-\varepsilon^{ikl}\,\varepsilon^{jmn}\,e_{ln,\,km} = \eta^{ij}. \tag{9.10}$$

În ceea ce privește partea antisimetrică a ecuației (9.5), ea conduce, după cîteva calcule intermediare, la relația

$$\alpha^{n}_{\cdot k,\,n} + c^{pq}\,r_{qkn}\,\alpha^{n}_{\cdot p} = 0. \tag{9.11}$$

După cum au arătat E. Kröner și A. Seeger [1], ecuația (9.11) este legată de condiția ca liniile de dislocații să nu se întrerupă în interiorul materialului. În cazul liniar, această ecuație devine

$$\alpha^{n}_{\cdot k,\,n} = 0. \tag{9.12}$$

În încheierea acestui paragraf, menționăm că așa-numitul tensor al curbărilor de structură $\varkappa^{i}_{\cdot j}$ este echivalent cu tensorul antisimetric $r_{[kl]m}$, fiind legat de acesta prin relațiile

$$r_{[kl]m} = -\varepsilon_{klp}\,\varkappa^{p}_{\cdot m}, \quad \varkappa^{i}_{\cdot j} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{ikl}\,r_{[kl]j}. \tag{9.13}$$

Pentru a demonstra această afirmație, transformăm $(9.13)_2$, ținînd seama de $(6.19)_2$, $(9.6)_2$ și obținem

$$\varkappa^{i}_{\cdot j} = \varepsilon^{ikl}\,e_{jl,\,k} + \frac{1}{2}\,\delta^{i}_{j}\,\alpha^{m}_{\cdot m} - \alpha^{i}_{\cdot j}, \tag{9.14}$$

relație bine cunoscută în teoria dislocațiilor.

10. DETERMINAREA TENSIUNILOR ȘI A HIPERTENSIUNILOR INIȚIALE PRODUSE DE O DENSITATE CUNOSCUTĂ DE CVASIDISLOCAȚII

Starea deformată a unui material de grad 2, în prezența unor surse cunoscute de tensiuni și hipertensiuni inițiale este descrisă complet prin tensorii e_{kl}, r_{klm}, σ^{kl}, h^{lkm}, hence by $6+27+6+27=66$ de funcții, inițial necunoscute. Aceste funcții trebuie să satisfacă cele 30 de ecuații geometrice (6.19) și (9.7), cele 3 ecuații statice (5.26) și cele 33 de ecuații constitutive (7.3) și (7.6), deci în total 66 de ecuații, precum și cele 6

condiţii la limită (5.18), (5.27). Pentru a facilita urmărirea raţionamentelor ulterioare, retranscriem aici toate aceste ecuaţii

$$r_{klm} = e_{kl,m} - e_{lm,k} + e_{mk,l} + S_{\{mkl\}}, \tag{10.1}$$

$$-\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn} e_{ln,km} = \eta^{ij} + q^{ij}, \tag{10.2}$$

$$\sigma^{kl}_{\ldots,l} - h^{lkm}_{\ldots,lm} + f^k = 0, \tag{10.3}$$

$$\sigma^{kl} = j\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\varkappa\lambda}} A^k_\varkappa A^l_\lambda + 2\frac{\partial W}{\partial \rho_{\varkappa\lambda\mu}} A^{(k}_\varkappa A^{l)}_{\lambda;\mu}\right), \tag{10.4}$$

$$h^{lkm} = j\frac{\partial W}{\partial \rho_{\varkappa\lambda\mu}} A^k_\varkappa A^l_\lambda A^m_\mu, \tag{10.5}$$

$$\sigma^{kl} n_l - Dh^{lkm} n_l n_m - 2D_l h^{(l\,|\,k\,|\,m)} n_m + h^{lkm}(b_{lm} - b^p_p n_l n_m) = t^k, \tag{10.6}$$

$$h^{lkm} n_l n_m = h^k, \tag{10.7}$$

ecuaţiile (10.1)—(10.5) fiind valabile pentru $x \in v$, iar (10.6) şi (10.7) pentru $x \in s$. În ceea ce priveşte ecuaţiile constitutive, presupunem că după explicitarea dependenţei densităţii energiei de tensorii $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ şi $\rho_{\varkappa\lambda\mu}$, aceştia din urmă sînt înlocuiţi prin e_{kl} şi r_{klm}, cu ajutorul relaţiilor $(6.8)_2$ şi (6.20). În paragraful următor, această operaţie va fi efectuată complet, în cazul liniar, pentru materialele izotrope. Observăm că sistemul de ecuaţii este liniar, cu excepţia ecuaţiilor constitutive şi a termenului q^{ij} din ecuaţia (10.2). Menţionăm totodată că dacă $S^{\cdot\cdot k}_{ml} \equiv 0$, atunci se reobţine sistemul complet de ecuaţii al problemelor la limită pentru materialele de gradul 2 fără tensiuni iniţiale, operînd în ecuaţiile (10.1)—(10.5) următoarele modificări

$$\eta^{ij} \equiv 0, \quad A^l_\lambda = x^l_{;\lambda}, \quad A^l_{\lambda;\mu} = x^l_{;\lambda\mu},$$

$$q^{ij} = \varepsilon^{lk(i}\varepsilon^{j)mn} c^{pq} e_{\{qk,n\}} e_{\{pl,m\}}.$$

Rezolvarea problemelor la limită în cazul unei densităţi cunoscute a cvasidislocaţiilor revine la rezolvarea unei probleme la limită pentru un material de gradul 2 fără cvasidislocaţii, cu condiţia găsirii unei soluţii particulare a ecuaţiilor (10.1) şi (10.2). Această metodă va fi descrisă în amănunţime în §§ 13—14 pentru cazul liniar şi în § 17 pentru cazul neliniar.

11. LINIARIZAREA ECUAŢIILOR CONSTITUTIVE

Pentru liniarizarea ecuaţiilor constitutive vom presupune că distorsiunile $A^k_\varkappa$ sînt de forma

$$A^k_\varkappa = g^k_\varkappa + \beta^k_\varkappa, \tag{11.1}$$

unde $g^k_\varkappa$ sînt translatori (vezi anexa), iar $\beta^k_\varkappa$ sînt „mici", şi vom neglija produsele dintre tensorii e_{kl}, r_{klm}, $\beta^k_\varkappa$, $\beta^k_{\varkappa,l}$.

Din $(6.8)_2$ obţinem atunci

$$\varepsilon_{\varkappa\lambda} = e_{kl}(g^k_\varkappa + \beta^k_\varkappa)(g^l_\lambda + \beta^l_\lambda) \approx e_{kl} g^k_\varkappa g^l_\lambda. \tag{11.2}$$

Pe de altă parte, putem scrie

$$A^l_{\lambda:\mu} = A^l_{\lambda,m}\, A^m_\mu = \beta^l_{\lambda,m}\, A^m_\mu$$

și deci, din (6.20) rezultă

$$\rho_{\varkappa\lambda\mu} = 2e_{kl}\,(g^k_\varkappa + \beta^k_\varkappa)\,\beta^l_{\lambda,m}\,(g^m_\mu + \beta^m_\mu) + r_{klm}\,(g^k_\varkappa + \beta^k_\varkappa)\,(g^l_\lambda + \beta^l_\lambda)\,(g^m_\mu + \beta^m_\mu),$$

de unde

$$\rho_{\varkappa\lambda\mu} \approx r_{klm}\; g^k_\varkappa\; g^l_\lambda\; g^m_\mu. \tag{11.3}$$

Înlocuind acum (11.2) și (11.3) în (8.10) și (8.11), iar apoi rezultatul obținut în (10.4) și (10.5), și ținînd seama de relația $j \approx 1$, care se poate deduce din (A.22), obținem ecuațiile constitutive liniare

$$\sigma^{kl} = F^{klst}\, e_{st} + H^{klstn}\, r_{stn}, \tag{11.4}$$

$$h^{lkm} = H^{klmst}\, e_{st} + G^{klmstn}\, r_{stn}, \tag{11.5}$$

unde

$$F^{klst} = F^{\varkappa\lambda\sigma\tau}\, g^k_\varkappa\, g^l_\lambda\, g^s_\sigma\, g^t_\tau,\quad H^{klstn} = H^{\varkappa\lambda\sigma\tau\nu}\, g^k_\varkappa\, g^l_\lambda\, g^s_\sigma\, g^t_\tau\, g^n_\nu, \tag{11.6}$$

$$G^{klmstn} = G^{\varkappa\lambda\mu\sigma\tau\nu}\, g^k_\varkappa\; g^l_\lambda\, g^m_\mu\, g^s_\sigma\, g^t_\tau\; g^n_\nu.$$

În ceea ce privește energia de deformație, înlocuind (11.2), (11.3) și (11.6) în (8.8) obținem pentru cazul liniar expresia

$$W = \frac{1}{2}\, F^{klst}\, e_{kl}\, e_{st} + \frac{1}{2}\, G^{klmstn}\, r_{klm}\, r_{stn} + H^{klstn}\, e_{kl}\, r_{stn} \tag{11.7}$$

care, ținînd seama de (11.4) și (11.5), se mai poate scrie

$$W = \frac{1}{2}\,\sigma^{kl}\, e_{kl} + \frac{1}{2}\, h^{lkm}\, r_{klm}. \tag{11.8}$$

În cazul materialelor izotrope, $H^{klmst} = 0$, iar din (8.12) și (8.13) avem, ținînd seama de (A. 12),

$$F^{klmst} = \lambda\, g^{kl}\, g^{st} + \mu\,(g^{ks}\, g^{lt} + g^{kt}\, g^{ls}), \tag{11.9}$$

$$\begin{aligned} G^{klmstn} = {} & a_1\,(g^{kl}\, g^{ms}\, g^{tn} + g^{lm}\, g^{kn}\, g^{st}) + a_2\,(g^{kl}\, g^{mt}\, g^{sn} + g^{mk}\, g^{ln}\, g^{st}) + \\ & + a_3\, g^{kl}\, g^{mn}\, g^{st} + a_4\, g^{lm}\, g^{ks}\, g^{tn} + a_5\,(g^{lm}\, g^{kt}\, g^{sn} + g^{mk}\, g^{ls}\, g^{tn}) + \\ & + a_6\, g^{mk}\, g^{lt}\, g^{sn} + a_7\, g^{ks}\, g^{lt}\, g^{mn} + a_8\,(g^{ls}\, g^{mt}\, g^{kn} + g^{ms}\, g^{kt}\, g^{ln}) + \\ & + a_9\, g^{ks}\, g^{ln}\, g^{mt} + a_{10}\, g^{ls}\, g^{mn}\, g^{kt} + a_{11}\, g^{ms}\, g^{kn}\, g^{lt}. \end{aligned} \tag{11.10}$$

Introducînd acum aceste expresii în ecuațiile constitutive (11.4) și (11.5), obținem

$$\sigma^{kl} = \lambda\, g^{kl}\, e^{\cdot m}_{\cdot\, m} + 2\,\mu\, e^{kl}, \tag{11.11}$$

$$\begin{aligned} h^{lkm} = {} & a_1\,(g^{kl}\, r^{ms}_{\cdot\cdot\, s} + g^{lm}\, r^{\cdot sk}_{s}) + a_2\,(g^{kl}\, r^{\cdot ms}_{s} + g^{mk}\, r^{\cdot sl}_{s}) + \\ & + a_3\, g^{kl}\, r^{\cdot sm}_{s} + a_4\, g^{lm}\, r^{ks}_{\cdot\cdot\, s} + a_5\,(g^{lm}\, r^{\cdot ks}_{s} + g^{mk}\, r^{ls}_{\cdot\cdot\, s}) + \\ & + a_6\, g^{mk}\, r^{\cdot ls}_{s} + a_7\, r^{klm} + a_8\,(r^{lmk} + r^{mkl}) + \\ & + a_9\, r^{kml} + a_{10}\, r^{lkm} + a_{11}\, r^{mlk}. \end{aligned} \tag{11.12}$$

În teoria mediilor Cosserat cu rotații constrînse, folosită anterior de autor [26] pentru determinarea tensiunilor și a cuplurilor de tensiune generate de dislocații în medii izotrope, se presupune că

$$W = W(\varepsilon_{\varkappa\lambda},\ \rho_{[\varkappa\lambda]\mu}),$$

deci că

$$\frac{\partial W}{\partial \rho_{(\varkappa\lambda)\mu}} \equiv 0. \tag{11.13}$$

Din (8.11) și (8.13) rezultă însă

$$\frac{\partial W}{\partial \rho_{(\varkappa\lambda)\mu}} = a_1\,\delta^{\varkappa\lambda}\rho^{\mu\sigma}_{\cdot\cdot\sigma} + (a_1+a_2)\,\delta^{\mu(\varkappa}\rho^{\cdot\cdot\lambda)\sigma}_{\sigma} + a_2\,\delta^{\varkappa\lambda}\rho^{\cdot\mu\sigma}_{\sigma} +$$
$$+ a_3\,\delta^{\varkappa\lambda}\rho^{\cdot\sigma\mu}_{\sigma} + (a_4+a_5)\,\delta^{\mu(\varkappa}\rho^{\lambda)\sigma}_{\cdot\cdot\sigma} + (a_5+a_6)\,\delta^{\mu(\varkappa}\rho^{\cdot\lambda)\sigma}_{\sigma} +$$
$$+ (a_7+a_{10})\,\rho^{(\varkappa\lambda)\mu} + (a_8+a_9)\,\rho^{(\varkappa|\mu|\lambda)} + (a_8'+a_{11})\,\rho^{\mu(\varkappa\lambda)}$$

și deci restricția (11.13) impune condițiile

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = -a_5 = a_6,$$
$$a_7 = -a_{10}, \qquad a_8 = -a_9 = -a_{11}. \tag{11.13'}$$

Din (11.7) rezultă în acest caz

$$h^{(lk)m} \equiv 0$$

și

$$h^{[lk]m} = a_4(g^{lm}r^{ks}_{\cdot\cdot s} - g^{km}r^{\cdot ls}_{s} - g^{mk}r^{ls}_{\cdot\cdot s} + g^{mk}r^{\cdot sl}_{s}) +$$
$$+ a_7(r^{klm} - r^{lkm}) + a_8(r^{lmk} + r^{mkl} - r^{kml} - r^{mlk}),$$

sau încă

$$h^{[lk]}_{\cdot\cdot j} = 2a_4(\delta^l_j r^{[ks]}_{\cdot\cdot s} - \delta^k_j r^{[ls]}_{\cdot\cdot s}) + 2a_7 r^{[kl]}_{\cdot\cdot j} +$$
$$+ 2a_8 g_{jt}(r^{[lt]k} - r^{[kt]l}). \tag{11.14}$$

Ținînd seama acum de relațiile $(5.23)_1$ și $(9.13)_1$, obținem din (11.14) ecuațiile constitutive liniare, care leagă tensorul cuplurilor de tensiune μ_{ij} de tensorul curbărilor de structură $\varkappa_{ij}$

$$\mu_{ij} = \beta g_{ij}\varkappa^{m}_{\cdot m} + (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ii}, \tag{11.15}$$

unde

$$\beta = 4a_8,\ \gamma = 2(a_7 - a_8),\ \varepsilon = 2(2a_4 + a_7 - a_8).$$

Ecuațiile (11.15) coincid cu ecuațiile (5.7) din [26]. De fapt, în articolul citat se folosesc transpusele tensorilor μ_{ij} și $\varkappa_{ij}$ din această lucrare, dar această modificare lasă neschimbate ecuațiile constitutive (11.15).

Un alt caz particular important al ecuațiilor constitutive (11.11), (11.12) este cel al materialelor izotrope de grad 2 fără tensiuni și hiper-

tensiuni inițiale. În acest caz, tensorii r_{klm} și h^{lkm} sînt simetrici în l, m. Din (11.12) rezultă atunci

$$h^{lkm} = b_1 (g^{k(l} r^{m)\,s}_{\cdot\cdot\,s} + g^{lm} r_s^{\cdot sk}) + b_2 g^{k(l} r_s^{\cdot m)s} + \\ + b_3 g^{lm} r^{ks}_{\cdot\cdot\,s} + b_4 r^{klm} + b_5 r^{(lm)k}, \tag{11.16}$$

unde am notat

$$b_1 = a_1 + a_5, \qquad b_2 = 2a_2 + a_2 + a_6, \qquad b_3 = a_4,$$
$$b_4 = a_7 + a_9, \qquad b_5 = 2a_8 + a_{10} + a_{11}.$$

Din (11.11) și (11.16) rezultă că în ecuațiile constitutive liniare pentru materialele izotrope de gradul 2, fără tensiuni și hipertensiuni inițiale, intervin 7 constante de material distincte.

12. SISTEMUL LINIARIZAT DE ECUAȚII ALE CÎMPULUI ȘI CONDIȚII LA LIMITĂ. TEOREMA DE UNICITATE

Punînd $q^{ij} = 0$ în (10.2) și înlocuind ecuațiile (10.4) și (10.5) prin (11.4) și (11.5), obținem sistemul liniarizat de ecuații ale cîmpului și condiții la limită

$$r_{klm} = e_{kl,\,m} - e_{lm,\,k} + e_{mk,\,l} + S_{\{mkl\}}, \tag{12.1}$$

$$- \varepsilon^{ikl}\, \varepsilon^{jmn}\, e_{ln,\,km} = \eta^{ij}, \tag{12.2}$$

$$\sigma^{kl}_{\cdot\cdot\,,\,l} - h^{lkm}_{\cdot\cdot\cdot\,,\,lm} + f^k = 0, \tag{12.3}$$

$$\sigma^{kl} = F^{klst}\, e_{st} + H^{klstn}\, r_{stn}, \tag{12.4}$$

$$h^{lkm} = H^{klmst}\, e_{st} + G^{klmstn}\, r_{stn}, \tag{12.5}$$

$$\sigma^{kl}\, n_l - D h^{lkm}\, n_l\, n_m - 2D_l\, h^{(l\,|\,k\,|\,m)}\, n_m + h^{lkm} (b_{lm} - b_p^p\, n_l\, n_m) = t^k, \tag{12.6}$$

$$h^{lkm}\, n_l\, n_m = h^k, \tag{12.7}$$

unde

$$S_{\{mkl\}} \equiv \frac{1}{2} (\varepsilon_{mlp}\, \alpha^{p}_{\cdot k} - \varepsilon_{lkp}\, \alpha^{p}_{\cdot m} + \varepsilon_{kmp}\, \alpha^{p}_{\cdot l}), \tag{12.8}$$

$$\eta^{ij} \equiv - \varepsilon^{nm(i}\, \alpha^{j)}_{\cdot m,\,n}, \tag{12.9}$$

ecuațiile (12.1)—(12.5) fiind adevărate pentru $x \in v$, iar (12.6) și (12.7) pentru $x \in s$. Este ușor de văzut că folosind relațiile (12.1) (12.4) și (12.5), putem elimina tensorii r_{klm}, σ^{kl} și h^{lkm}, obținînd astfel formularea problemei la limită în deformații. De exemplu, în cazul materialelor izotrope, obținem din (11.12) și (12.1)

$$h^{(l\,|\,k\,|\,m)} = (-a_1 + 2a_2 + a_3 - a_5 + a_6)\, g^{k(l} e_s^{\cdot s,\,m)} + 2(a_1 + a_5)\, g^{k(l} e^{m)s}_{\cdot\cdot\,,\,s} + \\ + (a_1 - a_4 + a_5)\, g^{lm}_{\cdot}\, e_s^{\cdot s,\,k} + 2a_4\, g^{lm}\, e^{ks}_{\cdot\cdot\,,\,s} + (2a_8 + a_{10} + a_{11} - a_7 - a_9) e^{lm,\,k} + \\ + 2(a_7 + a_9)\, e^{k(l,\,m)} - 2(a_1 + a_2 + a_5 + a_6)\, g^{k(l} S^{m)\,s}_{\cdot\cdot\,,\,s} + \\ + 2(a_5 - a_4)\, g^{lm}\, S^{ks}_{\cdot\cdot\,,\,s} + 2(a_8 + a_{10} - a_7 - a_9)\, S^{k(lm)}, \tag{12.10}$$

de unde rezultă

$$h^{l,m}_{\cdot k\cdot,lm} = (2a_2 + a_3 - a_4 + a_6)\ \Delta e^{l}_{l,k} + 2\ (a_4 + a_7 + a_9)\ \Delta e^{\cdot l}_{k\cdot,l} + \\ + (2a_1 + 2a_5 - a_7 + 2a_8 - a_9 + a_{10} + a_{11})\ e^{lm}_{\cdot\cdot\cdot,lmk} + \\ + 2\ (a_2 + a_6 - a_1 - a_5)\ S^{lm}_{\cdot\cdot m,lk} + 2\ (a_5 - a_4)\ \Delta S^{\cdot l}_{kl} + \\ + 2\ (a_8 + a_{10} - a_7 - a_9)\ S^{\cdot lm}_{k\cdot\cdot,lm}, \tag{12.11}$$

unde

$$\Delta f \equiv g^{kl}\ f_{,kl}.$$

Putem da diferite alte forme ecuației (12.11), folosind relațiile

$$e^{lm}_{\cdot\cdot\cdot,lm} - \Delta e^{l}_{\cdot l} = 2S^{lm}_{\cdot\cdot m,l}, \tag{12.12}$$

$$S^{\cdot\cdot\ m}_{km\cdot\cdot,l} = S^{\cdot\cdot\ m}_{kl\cdot\cdot,m} + S^{\cdot\cdot\ m}_{lm\cdot\cdot,k}. \tag{12.13}$$

Prima dintre ele reprezintă urma ecuației (12.2), iar a doua se verifică ușor folosind relațiile $(9.6)_2$ și (9.12).

Înlocuind acum (11.11) și (12.11) în (12.3) și ținînd seama de (12.12) obținem

$$[\lambda - (2a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + 2a_5 + a_6 - a_7 + 2a_8 - a_9 + a_{10} + a_{11})\ \Delta]e^{l}_{l,k} + \\ + 2[\mu - (a_4 + a_7 + a_9)\ \Delta]\ e^{\cdot l}_{k\cdot,l} - 2\ (a_1 + a_2 + a_5 + a_6 - a_7 + 2a_8 - \\ - a_9 + a_{10} + a_{11})\ S^{lm}_{\cdot\cdot m,lk} + 2\ (a_4 - a_5)\ \Delta S^{\cdot l}_{kl} + 2\ (a_7 + a_9 - a_8 - \\ - a_{10})\ S^{\cdot lm}_{k\cdot\cdot,lm} + f_k = 0. \tag{12.14}$$

Cele șase componente ale tensorului deformației (e_{kl}) trebuie să satisfacă ecuațiile (12.2) și (12.14) precum și condițiile la limită (12.6) și (12.7) în care $h^{(l|k|m)}$ trebuie înlocuit prin (12.10). După integrarea sistemului de ecuații, partea lui h^{lkm} antisimetrică în l, m rezultă direct din (11.12) și (12.1), anume

$$h^{[l|k|m]} = (-a_1 + a_3 + a_5 - a_6)\ g^{k[l}\ e^{s,m]}_{s} + 2\ (a_1 - a_5)\ g^{k[l}\ e^{m]s}_{\cdot\cdot\cdot,s} + \\ + 2\ (a_{10} - a_{11})\ e^{k[l,m]} + 2\ (-a_1 + a_2 + a_5 - a_6)\ g^{k[l}\ S^{m]s}_{\cdot\cdot\ ,s} + \\ + (a_7 - a_9 - a_{10} + a_{11})\ S^{lmk} + 2\ (a_8 - a_{11})\ S^{k[lm]}. \tag{12.15}$$

În încheierea acestui paragraf, vom demonstra o teoremă de unicitate pentru soluția sistemului de ecuații ale cîmpului și condiții la limită (12.1)—(12.7).

TEOREMĂ. Dacă densitatea energiei de deformație $W\ (e_{kl},\ r_{klm})$ este o formă pătratică pozitiv definită de argumentele sale, atunci sistemul (12.1)—(12.7) admite cel mult o singură soluție.

Pentru a demonstra această teoremă, să presupunem că sistemul (12.1)—(12.7) admite două soluții diferite și să notăm cu e_{kl}, r_{klm}, σ^{kl}, h^{lkm} diferențele dintre componentele deformației, hiperdeformației, ten-

siunii și hipertensiunii corespunzătoare acestor două soluții. Din (12.1)—(12.7) rezultă atunci

$$r_{klm} = e_{kl,m} - e_{lm,k} + e_{mk,l}, \tag{12.16}$$

$$- \varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn} e_{ln,km} = 0, \tag{12.17}$$

$$\sigma^{kl}_{\ldots,l} - h^{lkm}_{\ldots,lm} = 0, \tag{12.18}$$

$$\sigma^{kl} = F^{klst} e_{st} + H^{klstn} r_{stn}, \tag{12.19}$$

$$h^{lkm} = H^{klmst} e_{st} + G^{klmstn} r_{stn}, \tag{12.20}$$

$$\sigma^{kl} n_l - Dh^{lkm} n_l n_m - 2D_l h^{(l|k|m)} n_m + h^{lkm}(b_{lm} - b^p_p n_l n_m) = 0, \tag{12.21}$$

$$h^{lkm} n_l n_m = 0. \tag{12.22}$$

Observăm că diferențele celor două soluții constituie o nouă soluție a sistemului de ecuații corespunzător absenței surselor de tensiuni și hipertensiuni inițiale, a forțelor masice și a forțelor și hiperforțelor de suprafață.

Din (12.17) și (12.16) obținem

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}), \quad r_{klm} = u_{k,lm}.$$

Introducînd aceste expresii în (11.8) rezultă

$$\int_v W \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_v (\sigma^{kl} u_{k,l} + h^{lkm} u_{k,lm})\, \mathrm{d}v.$$

Transformînd această relație la fel ca pe (5.13), obținem o ecuație analogă cu (5.14) și anume

$$\int_v W \mathrm{d}v = -\int_v (\sigma^{kl}_{\ldots,l} - h^{lkm}_{\ldots,lm})\, u_k \,\mathrm{d}v + \int_s h^{lkm} n_l n_m D u_k \,\mathrm{d}a +$$

$$+ \int_s [\sigma^{kl} n_l - Dh^{lkm} n_l n_m - 2D_l h^{(l|k|m)} n_m + h^{lkm}(b_{lm} - b^p_p n_l n_m)]\, u_k \,\mathrm{d}a,$$

de unde, ținînd seama de (12.16)—(12.22), obținem în cele din urmă

$$\int_v W \mathrm{d}v = 0. \tag{12.23}$$

Întrucît $W \geqslant 0$, deducem din (12.23) că $W \equiv 0$, pentru $x \in v$. Dar W este o formă pătratică pozitiv definită de argumentele sale și ca urmare rezultă $e_{kl} \equiv 0$, $r_{klm} \equiv 0$, pentru $x \in v$, ceea ce demonstrează complet teorema enunțată.

13. DETERMINAREA UNEI SOLUȚII PARTICULARE A ECUAȚIILOR CÎMPULUI. PROBLEMA LA LIMITĂ ASOCIATĂ

În cazul cînd densitatea cvasidislocațiilor este cunoscută, soluția problemei la limită poate fi construită sumînd o soluție particulară a ecuațiilor cîmpului cu soluția unei probleme la limită asociate, pentru

același corp, dar considerat fără tensiuni și hipertensiuni inițiale. Pentru problema la limită asociată, t^k și h^k se corectează cu termeni suplimentari, care țin seama de valorile la limită ale tensiunilor și hipertensiunilor corespunzătoare soluției particulare. În cele ce urmează, vom afecta toate mărimile corespunzătoare soluției particulare cu cîte o bară, iar pe cele corespunzătoare soluției problemei la limită asociate cu cîte o tildă. Vom nota mai întîi cu $\bar{e}_{ln}$ o soluție particulară a ecuațiilor (12.2), deci

$$- \varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}\bar{e}_{ln,km} = \eta^{ij}. \tag{13.1}$$

După cum se știe [43], §4, dacă pe suprafața corpului s, avem $\eta^{ij} = 0$, sau cel puțin $\eta^{ij}n_i = 0$, soluția ecuațiilor (12.2), în coordonate carteziene ortogonale este

$$\bar{e}_{ij}(z) = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\eta_{ij}(z') - \eta_{mm}(z')\delta_{ij}}{|z - z'|}\,dv', \tag{13.2}$$

unde z și z' sînt vectorii de poziție ai punctelor de coordonate (z_1, z_2, z_3) și respectiv (z_1', z_2', z_3'), v este domeniul ocupat de corpul elastic, iar $dv' = dz_1'\,dz_2'\,dz_3'$.

În cazul general se poate obține de asemenea o soluție particulară a ecuațiilor (12.2) cu ajutorul formulelor (13.2), dar înlocuind tensorul η^{ij} printr-un alt tensor $\bar{\eta}^{ij}$, care se anulează suficient de repede la infinit și este obținut prelungind pe η^{ij} continuu și diferențiabil prin suprafața corpului. Soluția astfel obținută satisface ecuațiile (12.2) în toate punctele din interiorul și de pe suprafața corpului, cu condiția să luăm drept domeniu de integrare tot spațiul.

Vom introduce acum notațiile

$$\bar{r}_{klm} \equiv \bar{e}_{kl,m} - \bar{e}_{lm,k} + \bar{e}_{mk,l} + \mathcal{S}_{(mkl)}, \tag{13.3}$$

$$\bar{\sigma}^{kl} \equiv F^{klst}\bar{e}_{st} + H^{klstn}\bar{r}_{stn}, \tag{13.4}$$

$$\bar{h}^{lkm} \equiv H^{klmst}\bar{e}_{st} + G^{klmstn}\bar{r}_{stn}, \tag{13.5}$$

$$e_{kl} \equiv \bar{e}_{kl} + \tilde{e}_{kl}, \quad r_{klm} \equiv \bar{r}_{klm} + \tilde{r}_{klm}, \tag{13.6}$$

$$\sigma^{kl} \equiv \bar{\sigma}^{kl} + \tilde{\sigma}^{kl}, \quad h^{lkm} \equiv \bar{h}^{lkm} + \tilde{h}^{lkm}. \tag{13.7}$$

Înlocuind (13.1) și (13.3)—(13.7) în (12.1) — (12.7) obținem

$$\tilde{r}_{klm} = \tilde{e}_{kl,m} - \tilde{e}_{lm,k} + \tilde{e}_{mk,l}, \tag{13.8}$$

$$- \varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}\tilde{e}_{ln,km} = 0, \tag{13.9}$$

$$\tilde{\sigma}^{kl}_{\ldots,l} - \tilde{h}^{lkm}_{\ldots,lm} + \tilde{f}^k = 0, \tag{13.10}$$

$$\tilde{\sigma}^{kl} = F^{klst}\tilde{e}_{st} + H^{klstn}\tilde{r}_{stn}, \tag{13.11}$$

$$\tilde{h}^{lkm} = H^{klmst}\tilde{e}_{st} + G^{klmstn}\tilde{r}_{stn}, \tag{13.12}$$

$$\tilde{\sigma}^{kl} n_l - D\tilde{h}^{lkm} n_l n_m - 2D_l \tilde{h}^{(l\,k\,m)} n_m + \tilde{h}^{lkm}(b_{lm} - b^p_p n_l n_m) = \tilde{t}^k, \quad (13.13)$$

$$\tilde{h}^{lkm} n_l n_m = \tilde{h}^k, \quad (13.14)$$

unde am notat*)

$$\tilde{f}^k \equiv f^k + \bar{\sigma}^{kl}{}_{..l} - \bar{h}^{lkm}{}_{....lm}, \quad (13.15)$$

$$\tilde{t}^k \equiv t^k - \bar{\sigma}^{kl} n_l + D\bar{h}^{lkm} n_l n_m + 2D_l \bar{h}^{(l|k|m)} n_m - \bar{h}^{lkm}(b_{lm} - b^p_p n_l n_m), \quad (13.16)$$

$$\tilde{h}^k \equiv h^k - \bar{h}^{lkm} n_l n_m. \quad (13.17)$$

Dar întrucît (13.9) reprezintă tocmai condițiile de compatibilitate ale lui Saint-Venant, soluția generală a ecuațiilor (13.9) și (13.8) este

$$\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}), \quad \tilde{r}_{klm} = u_{k,lm}, \quad (13.18)$$

unde u_k sînt componentele vectorului deplasare al problemei la limită asociate. Înlocuind acum (13.18), (13.11) și (13.12) în (13.10), (13.13) și (13.14) obținem ecuațiile diferențiale și condițiile la limită pe care trebuie să le satisfacă componentele deplasării.

De exemplu, în cazul materialelor izotrope, deducem din (13.10)

$$[(\lambda+\mu) - (2a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_5 + a_6 + 2a_8 + 2a_{10} + a_{11})\Delta]\, u^l{}_{.,kl} +$$

$$+ [\mu - (a_4 + a_7 + a_9)\Delta]\Delta u_k + \tilde{f}_k = 0, \quad (13.19)$$

sau încă

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l_1^2\Delta)\, u^l{}_{.,kl} - \mu(1 - l_2^2\Delta)(u^l{}_{.,kl} - \Delta u_k) + \tilde{f}_k = 0, \quad (13.20)$$

unde

$$l_1^2 = (2a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_5 + a_6 + 2a_8 + a_{10} + a_{11})/(\lambda + 2\mu), \quad (13.21)$$

$$l_2^2 = (a_4 + a_7 + a_9)/\mu. \quad (13.22)$$

În notații vectoriale, ecuația (13.20) se mai scrie

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l_1^2\Delta)\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{u} - \mu(1 - l_2^2\Delta)\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{f}} = 0. \quad (13.23)$$

Problema la limită asociată s-a redus deci la determinarea a trei funcții u_k, care trebuie să satisfacă cele trei ecuații diferențiale (13.20) și cele șase condiții la limită (13.13) și (13.14).

Ecuația (13.23) a fost studiată în amănunțime de către R. D. Mindlin în articolul său consacrat teoriei liniare a corpurilor cu microstructură [33]. Între altele, R. D. Mindlin a generalizat reprezentareaNeuber-Pap-

*) În cazul materialelor izotrope, $\tilde{f}^k$ este dat de membrul stîng al ecuației (12.14), în care e_{kl} trebuie înlocuit prin $\bar{e}_{kl}$.

kovici din teoria clasică a elasticității, demonstrînd că soluția generală a ecuației (13.23) este de forma

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} - l_2^2 \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{B} - \frac{1}{2}(k_1 - l_1^2)\nabla\nabla\,[\boldsymbol{z}\cdot(1 - l_2^2\Delta)\,\boldsymbol{B} + B_0], \quad (13.24)$$

unde $\boldsymbol{z}$ este vectorul de poziție, $\boldsymbol{B}$ și B_0 satisfac ecuațiile

$$\mu(1 - l_2^2\Delta)\,\Delta\boldsymbol{B} = -\tilde{\boldsymbol{f}}, \quad (13.25)$$

$$\mu(1 - l_1^2\Delta)\,\Delta B_0 = \boldsymbol{z}\cdot(1 - l_1^2\Delta)\,\tilde{\boldsymbol{f}} - 4l_1^2\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{f}}, \quad (13.26)$$

iar k_1 este dat de

$$k_1 = (\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu).$$

Primită la redacție la 20 ianuarie 1967.

APLICAREA METODEI PARAMETRILOR INIȚIALI LA STUDIUL STABILITĂȚII BARELOR SOLICITATE LA RĂSUCIRE*)

de D. CRAIFALEANU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

539.3

Se deduc ecuațiile metodei parametrilor inițiali, necesare studiului stabilității barelor solicitate de un moment de răsucire. Se consideră cazul uzual al barelor avînd axa inițial rectilinie și secțiunea transversală circulară constantă.
Relațiile generale se formulează pentru bare așezate pe mai multe reazeme elastice, supuse la răsucire cu compresiune, apoi se particularizează pentru cazul răsucirii pure conservative, utilizînd expresii adimensionale ale parametrilor. La tijele care au condiții la limite identice ca formă în cele două plane longitudinale de coordonate, se utilizează forma complexă a parametrilor, care permite reducerea la jumătate a numărului de ecuații din care se obține condiția de instabilitate. De asemenea se deduc relațiile pentru studiul barelor cu condiții la limite diferite pe cele două direcții transversale. Soluționarea ecuațiilor se face cu ajutorul calculului matriceal, care prezintă avantaje față de metodele anterioare.
Procedeul de aplicare a metodei este ilustrat prin cîteva exemple de bare cu un singur interval, avînd reazeme rigide și diverse condiții la extremități.

1. INTRODUCERE

Calculul momentului de răsucire critic, adică al momentului care produce pierderea stabilității unei bare avînd inițial axa rectilinie, este necesar la o serie de organe de mașini, care au o deosebită importanță în funcționarea unor utilaje și agregate. Astfel se pot cita prăjinile de foraj, arborii de mașini, arborii portelice, burghiele pentru găurirea adîncă, axele cardanice etc. Dat fiind numărul mare de bare care își pot pierde stabilitatea la răsucire, se impune găsirea unor metode de studiu cît mai expeditive, care să poată rezolva o serie de cazuri cu aplicație largă, însă

*) Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mecanique Appliquée, **12**, 2 (1967) (în limba engleză).

necercetate pînă în prezent. Se cere deci rezolvarea problemei sub un număr cît mai mare de aspecte, aşa cum a fost studiată în cazul flambajului produs prin compresiunea simplă.

Întrucît axa barei deformată prin răsucire, în cazul pierderii stabilităţii sale, nu mai este o curbă plană, ca în cazul compresiunii, ci o curbă strîmbă, ea trebuie reprezentată analitic prin două ecuaţii diferenţiale, ceea ce aduce o complicare a calculului. În plus, trebuie examinat şi modul în care se aplică momentul de răsucire, deoarece în multe cazuri o asemenea problemă poate fi neconservativă, ceea ce face imposibilă găsirea unei soluţii, chiar aproximativă.

În prezentul studiu se elaborează o metodă generală de rezolvare a problemelor conservative, cu ajutorul calculului matriceal, utilizînd parametrii iniţiali, reprezentaţi prin săgeţile, unghiurile de deformaţie la încovoiere, momentele încovoietoare şi forţele tăietoare în cele două plane longitudinale, la capătul barei unde se ia originea sistemului de coordonate. Metoda este foarte simplă pentru rezolvarea problemei, în diverse condiţii de rezemare. Cîteva exemple vor ilustra modul de aplicare a metodei.

Unde va fi posibil, se va utiliza forma complexă a parametrilor, care permite reducerea numărului de ecuaţii la jumătate.

2. IPOTEZE DE CALCUL. NOTAŢII

Se consideră o bară cu axa iniţial rectilinie, avînd secţiunea transversală circulară, constantă în lungul barei. Solicitarea are loc în regim elastic, fiind valabile ipotezele clasice (omogenitate, izotropie, legea lui Hooke, ipoteza lui Bernoulli, a micilor deformaţii etc.). Pentru generalitate se vor stabili ecuaţiile necesare studiului unei bare solicitate la capete de către un moment de răsucire şi o forţă de compresiune, din care rezultă apoi cazul particular al barei supusă la răsucire simplă. Se adoptă sistemul drept de axe de coordonate, utilizat în literatura străină la toate problemele de acest gen, cu originea O la unul din capetele barei.

Notaţiile sînt următoarele :

Ox, Oy — axele secţiunii transversale,
Oz — axa în lungul barei,
l — lungimea barei,
$\zeta = \frac{z}{l}$ — coordonata adimensională în lungul barei,
α — rigiditatea la încovoiere a barei,
P — forţa de compresiune,
$\eta_c = \frac{Pl^2}{\alpha}$ — forţa de compresiune adimensională,
M_t — momentul de răsucire,
$\eta = \frac{M_t l}{\alpha}$ — momentul de răsucire adimensional,
M_{to} — momentul de răsucire critic,
u, v — deplasările centrului de greutate al unei secţiuni transversale oarecare, în lungul axelor x, respectiv y,

$\bar{u} = \frac{M_t}{\alpha} u, \bar{v} = \frac{M_t}{\alpha} v$ — deplasările adimensionale,

φ, ψ — unghiurile de deformație la încovoiere în planele Oxz, respectiv Oyz.

M_x, M_y — momentele încovoietoare în jurul axelor x, respectiv y, într-o secțiune oarecare

$\bar{M}_x = \frac{M_x}{M_t}, \bar{M}_y = \frac{M_y}{M_t}$ — momentele încovoietoare adimensionale,

T_x, T_y — forțele tăietoare pe direcțiile axelor x, respectiv y,

$\bar{T}_x = \frac{\alpha}{M_t^2} T_x, \bar{T}_y = \frac{\alpha}{M_t^2} T_y$ — forțele tăietoare adimensionale.

Se mai definesc următoarele mărimi complexe, avînd denumirile date convențional :

$r = u + iv$ — deplasarea complexă,

$\theta = \varphi + i\psi$ — unghiul complex de deformație la încovoiere,

$M = M_x + iM_y$ — momentul încovoietor complex,

$T = T_x + iT_y$ — forța tăietoare complexă,

$\bar{r} = \bar{u} + i\bar{v}$ — deplasarea complexă adimensională,

$\bar{M} = \bar{M}_x + i\bar{M}_y$ — momentul încovoietor complex adimensional,

$\bar{T} = \bar{T}_x + i\bar{T}_y$ — forța tăietoare complexă adimensională,

$i = \sqrt{-1}$

Alte notații care intervin în calcule vor fi specificate în text.

3. STABILIREA ECUAȚIILOR GENERALE ALE METODEI PARAMETRILOR INIȚIALI

3.1. ECUAȚIA GENERALĂ A LINIEI ELASTICE DEFORMATE

Ecuațiile diferențiale ale liniei elastice deformate în planele Oxz și Oyz sînt [1], [3], [5] (fig. 1)

$$\left.\begin{aligned} \alpha \frac{d^4u}{dz^4} + M_t \frac{d^3v}{dz^3} + P \frac{d^2u}{dz^2} = 0, \\ \alpha \frac{d^4v}{dz^4} - M_t \frac{d^3u}{dz^3} + P \frac{d^2v}{dz^2} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Împărțind relațiile cu α, introducînd variabila adimensională $\zeta = \frac{z}{l}$, $\zeta \in [0, 1]$, momentul de răsucire adimensional η și forța de compresiune adimensională η_c menționate la § 2 și însemnînd cu apostrof derivatele în raport cu ζ, se ajunge la sistemul

$$\left.\begin{aligned} u^{IV} + \eta v''' + \eta_c u'' = 0, \\ v^{IV} - \eta u''' + \eta_c v'' = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

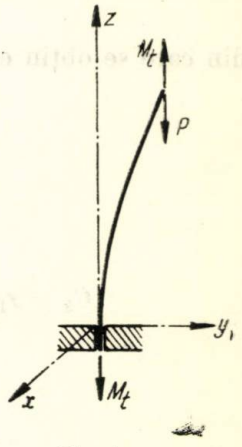


Fig. 1

Utilizînd deplasarea complexă

$$r = u + iv, \tag{3.2}$$

sistemul (3.1) se poate scrie sub forma unei singure ecuații

$$r^{\mathrm{IV}} - i\eta r''' + \eta_c r'' = 0. \tag{3.3}$$

Introducînd soluția $r = e^{\varkappa\zeta}$ se ajunge la ecuația caracteristică

$$\varkappa^4 - i\eta\varkappa^3 + \eta_c\varkappa^2 = 0$$

cu rădăcinile

$$\varkappa_{1,2} = \frac{i}{2}(\eta \pm \sqrt{\eta^2 + 4\eta_c}), \quad \varkappa_3 = \varkappa_4 = 0, \tag{3.4}$$

astfel încît soluția generală a ecuației (3.3) este

$$r = C_1 e^{\varkappa_1\zeta} + C_2 e^{\varkappa_2\zeta} + C_3 + C_4\zeta, \tag{3.5}$$

iar primele trei derivate ale acesteia sînt

$$\left.\begin{aligned} r' &= \varkappa_1 C_1 e^{\varkappa_1\zeta} + \varkappa_2 C_2 e^{\varkappa_2\zeta} + C_4, \\ r'' &= \varkappa_1^2 C_1 e^{\varkappa_1\zeta} + \varkappa_2^2 C_2 e^{\varkappa_2\zeta}, \\ r''' &= \varkappa_1^3 C_1 e^{\varkappa_1\zeta} + \varkappa_2^3 C_2 e^{\varkappa_2\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

În origine, adică pentru $\zeta = 0$, r și primele trei derivate ale sale au valorile respective r_{10}, r'_{10}, r''_{10}, r'''_{10}, care înlocuite în (3.5) și (3.6) conduc la

$$\left.\begin{aligned} r_{10} &= C_1 + C_2 + C_3, \\ r'_{10} &= \varkappa_1 C_1 + \varkappa_2 C_2 + C_4, \\ r''_{10} &= \varkappa_1^2 C_1 + \varkappa_2^2 C_2, \\ r'''_{10} &= \varkappa_1^3 C_1 + \varkappa_2^3 C_2, \end{aligned}\right\}$$

din care se obțin expresiile constantelor de integrare

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{-\varkappa_2 r''_{10} + r'''_{10}}{\varkappa_1^2(\varkappa_1 - \varkappa_2)}, \\ C_2 &= \frac{\varkappa_1 r''_{10} - r'''_{10}}{\varkappa_2^2(\varkappa_1 - \varkappa_2)}, \\ C_3 &= r_{10} - (\varkappa_1 + \varkappa_2)\frac{(\varkappa_1 + \varkappa_2) r''_{10} - r'''_{10}}{\varkappa_1^2\varkappa_2^2} + \frac{r''_{10}}{\varkappa_1\varkappa_2}, \\ C_4 &= r'_{10} - \frac{(\varkappa_1 + \varkappa_2) r''_{10} - r'''_{10}}{\varkappa_1\varkappa_2} \\ &(\varkappa_1 \neq \varkappa_2,\ \varkappa_1 \cdot \varkappa_2 \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Substituind (3.7) în (3.5) rezultă

$$r = r_{10} + r'_{10}\,\zeta - \left[\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1^2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_1\zeta} - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2^2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_2\zeta} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\varkappa_1+\varkappa_2)^2}{\varkappa_1^2\varkappa_2^2} - \frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2} + \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{\varkappa_1\,\varkappa_2}\,\zeta\right] r''_{10} + \left[\frac{1}{\varkappa_1^2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_1\zeta} - \right. \tag{3.8}$$

$$\left. - \frac{1}{\varkappa_2^2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_2\zeta} + \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{\varkappa_1^2\varkappa_2^2} + \frac{1}{\varkappa_1\zeta_2}\,\zeta\right] r'''_{10}.$$

3.2. RELAȚII DIFERENȚIALE ÎNTRE PARAMETRI

Parametrii barei sînt mărimile complexe r, θ, M și T definite la § 2. Se știe că unghiul de deformație la încovoiere poate fi exprimat prin derivata deplasării transversale în raport cu $z = l\zeta$

$$\varphi = \frac{1}{l}u', \qquad \psi = \frac{1}{l}v',$$

$$r' = u' + iv' = l(\psi + i\psi),$$

deci

$$r' = l\theta. \tag{3.9}$$

Expresiile momentelor încovoietoare sînt [1]

$$M_x = -\frac{\alpha}{l^2}v'' + \frac{M_t}{l}u'; \quad M_y = \frac{\alpha}{l^2}u'' + \frac{M_t}{l}v',$$

$$M = M_x + iM_y = \frac{\alpha}{l^2}(-v'' + iu'') + \frac{M_t}{l}(u' + iv'),$$

$$M = i\frac{\alpha}{l^2}r'' + \frac{M_t}{l}r'. \tag{3.9'}$$

Forțele tăietoare sînt date de relațiile [1], [3], [4], [5]

$$T_x = -\frac{\alpha}{l^3}u''' - \frac{M_t}{l^2}v'' - \frac{P}{l}u', \; T_y = -\frac{\alpha}{l^3}v''' + \frac{M_t}{l^2}u'' - \frac{P}{l}v',$$

deci

$$T = T_x + i\,T_y = -\frac{\alpha}{l^3}(u''' + iv''') + \frac{M_t}{l^2}(iu'' - v'') - \frac{P}{l}(u' + iv'),$$

$$T = -\frac{\alpha}{l^3}r''' + i\frac{M_t}{l^2}r'' - \frac{P}{l}r'. \tag{3.9''}$$

La extremitatea barei avînd $\zeta = 0$, parametrii (3.2), (3.9), (3.9') şi (3.9'') capătă valorile

$$\left.\begin{aligned} r_{10} &= u_{10} + iv_{10}, \\ \theta_{10} &= \frac{r'_{10}}{l}, \\ M_{10} &= i\,\frac{\alpha}{l^2}\,r''_{10} + \frac{M_t}{l}\,r'_{10}, \\ T_{10} &= -\frac{\alpha}{l^3}\,r'''_{10} + i\,\frac{M_t}{l^2}\,r''_{10} - \frac{P}{l}\,r'_{10}. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

3.3. ECUAŢIILE METODEI PARAMETRILOR INIŢIALI

Prin substituirea expresiilor (3.10) în ecuaţia (3.8) se obţine

$$r = r_{10} + f(\zeta)\ \theta_{10} + g(\zeta)\ M_{10} + h(\zeta)\ T_{10}, \tag{3.11}$$

unde s-au notat

$$\left.\begin{aligned} f(\zeta) &= -\,l\left[\frac{\eta_c - i\eta\varkappa_1}{\varkappa_1^2(\varkappa_1 - \varkappa_2)}\,e^{\varkappa_1\zeta} - \frac{\eta_c - i\eta\varkappa_2}{\varkappa_1^2(\varkappa_1 - \varkappa_2)}\,e^{\varkappa_2\zeta}\right], \\ g(\zeta) &= -\,i\,\frac{l^2}{\alpha}\left[\frac{1}{\varkappa_1(\varkappa_1 - \varkappa_2)}\,e^{\varkappa_1\zeta} - \frac{1}{\varkappa_2(\varkappa_1 - \varkappa_2)}\,e^{\varkappa_2\zeta} + \frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\right], \\ h(\zeta) &= -\,\frac{l^3}{\alpha}\left[\frac{1}{\varkappa_1^2(\varkappa_1 - \varkappa_2)}\,e^{\varkappa_1\zeta} - \frac{1}{\varkappa_2^2(\varkappa_1 - \varkappa_2)}\,e^{\varkappa_2\zeta} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_1^2\varkappa_2^2} + \frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\,\zeta\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Înlocuind derivatele funcţiilor (3.12) în (3.9), (3.9') şi (3.9'') rezultă

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{l}f'(\zeta)\,\theta_{10} + \frac{1}{l}g'(\zeta)\,M_{10} + \frac{1}{l}h'(\zeta)\,T_{10}, \\ M &= \left[\mathrm{i}\frac{\alpha}{l^2}f''(\zeta) + \frac{M_t}{l}f'(\zeta)\right]\theta_{10} + \left[\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{l^2}g''(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_t}{l}g'(\zeta)\right]M_{10} + \left[\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{l^2}h''(\zeta) + \frac{M_t}{l}h'(\zeta)\right]T_{10}, \\ T &= T_{10}. \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

Folosind expresiile adimensionale ale parametrilor, definite la nr. 2, relațiile (3.11) și (3.13) se pot transpune în forma adimensională

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{r} = \bar{r}_{10} + \bar{f}(\zeta)\theta_{10} + \bar{g}(\zeta)\bar{M}_{10} + \bar{h}(\zeta)\bar{T}_{10},\\
&\theta = \frac{1}{\eta}\bar{f}'(\zeta)\,\theta_{10} + \frac{1}{\eta}\bar{g}'(\zeta)\,\bar{M}_{10} + \frac{1}{\eta}\bar{h}'(\zeta)\,\bar{T}_{10},\\
&\bar{M} = \left[\frac{i}{\eta^2}\bar{f}''(\zeta) + \frac{1}{\eta}\bar{f}'(\zeta)\right]\theta_{10} + \left[\frac{i}{\eta^2}\bar{g}''(\zeta) + \right.\\
&\left. + \frac{1}{\eta}\bar{g}'(\zeta)\right]\bar{M}_{10} + \left[\frac{i}{\eta^2}\bar{h}''(\zeta) + \frac{1}{\eta}\bar{h}'(\xi)\right]\bar{T}_{10},\\
&\bar{T} = \bar{T}_{10},
\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

în care

$$\left.\begin{aligned}
\bar{f}(\zeta) &= \frac{\eta}{l} f(\zeta),\\
\bar{g}(\zeta) &= \frac{\alpha}{l^2}\eta^2 g(\zeta),\\
\bar{h}(\zeta) &= \frac{\alpha}{l^3}\eta^3 h(\zeta).
\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

La capătul barei opus originii, adică pentru $\zeta = 1$, parametrii (3.14) devin

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{r}_{1l} = \bar{r}_{10} + \bar{f}(1)\,\theta_{10} + \bar{g}(1)\,\bar{M}_{10} + \bar{h}(1)\,\bar{T}_{10},\\
&\theta_{1l} = \frac{1}{\eta}\bar{f}'(1)\,\theta_{10} + \frac{1}{\eta}\bar{g}'(1)\,\bar{M}_{10} + \frac{1}{\eta}\bar{h}'(1)\,\bar{T}_{10},\\
&\bar{M}_{1l} = \left[\frac{i}{\eta^2}\bar{f}''(1) + \frac{1}{\eta}\bar{f}'(1)\right]\theta_{10} + \left[\frac{i}{\eta^2}\bar{g}''(1) + \right.\\
&\left. + \frac{1}{\eta}\bar{g}'(1)\right]\bar{M}_{10} + \left[\frac{i}{\eta^2}\bar{h}''(1) + \frac{1}{\eta}\bar{h}'(1)\right]\bar{T}_{10},\\
&\bar{T}_{1l} = \bar{T}_{10}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Relațiile (3.16) se poate scrie sub forma matriceală

$$\mathbf{p}_{1l} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{p}_{10}, \tag{3.17}$$

unde s-au notat matricele

$$\mathbf{p}_{10} = \begin{pmatrix} \bar{r}_{10} \\ \theta_{10} \\ \bar{M}_{10} \\ \bar{T}_{10} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{p}_{1l} = \begin{pmatrix} \bar{r}_{1l} \\ \theta_{1l} \\ \bar{M}_{1l} \\ \bar{T}_{1l} \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

elementele matricei **B** fiind

$$
\left.
\begin{aligned}
b_{12} &= -\eta\left[\frac{\eta_c - i\eta\varkappa_1}{\varkappa_1^2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_1} - \frac{\eta_c - i\eta\varkappa_2}{\varkappa_2^2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_2}\right],\\
b_{13} &= -i\eta^2\left[\frac{1}{\varkappa_1(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa_2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_2} + \frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\right],\\
b_{14} &= -\eta^3\left[\frac{1}{\varkappa_1^2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa_2^2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_2} + \frac{i\eta+\eta_c}{\varkappa_1^2\varkappa_2^2}\right],\\
b_{22} &= -\left[\frac{\eta_c - i\eta\varkappa_1}{\varkappa_1(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_1} - \frac{\eta_c - i\eta\varkappa_2}{\varkappa_2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_2}\right],\\
b_{23} &= -i\eta\left[\frac{1}{\varkappa_1-\varkappa_2}e^{\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa_1-\varkappa_2}e^{\varkappa_2}\right],\\
b_{24} &= -\eta^2\left[\frac{1}{\varkappa_1(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa_2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_2} + \frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\right],\\
b_{32} &= \frac{i}{\eta}\left[\frac{\varkappa_2(\eta_c - i\eta\varkappa_1)}{\varkappa_1(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_1} - \frac{\varkappa_1(\eta_c - i\eta\varkappa_2)}{\varkappa_2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_2}\right],\\
b_{33} &= -\left[\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1-\varkappa_2}e^{\varkappa_1} - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1-\varkappa_2}e^{\varkappa_2}\right],\\
b_{34} &= i\eta\left[\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_1} - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2(\varkappa_1-\varkappa_2)}e^{\varkappa_2} + \frac{i\eta}{\varkappa_1\varkappa_2}\right].
\end{aligned}
\right\} \quad (3.20)
$$

Expresiile adimensionale de mai sus sînt utilizabile numai în cazurile în care momentul de răsucire este nenul. Pentru barele solicitate numai la compresiune trebuie găsită altă formă adimensională.

În absența momentului de răsucire, adică pentru $\eta = 0$, relațiile (3.11) și (3.13) coincid cu cele stabilite în lucrarea [6] în cazul flambajului la compresiune simplă în planul Oxz.

4. METODA PARAMETRILOR INIȚIALI

Se consideră, spre exemplificare, o bară pe mai multe reazeme elastice (fig. 2), avînd deschiderile $l_1, \ldots, l_n$.

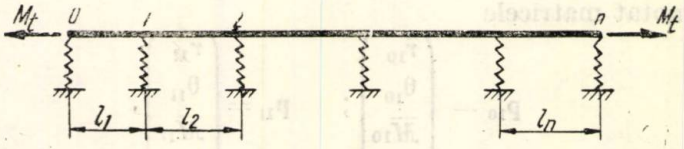


Fig. 2

De-a lungul fiecărui interval l_j rigiditatea la încovoiere α_j este constantă, iar sarcinile adimensionale au expresiile corespunzătoare

$$\eta_j = \frac{M_t l_j}{\alpha_j}, \quad \eta_{cj} = \frac{P l_j^2}{\alpha_j}. \quad (4.1)$$

Se vor utiliza următoarele matrice coloane

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \bar{r}_0 \\ \theta_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{T}_0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}_{j0} \begin{pmatrix} \bar{r}_{j0} \\ \theta_{j0} \\ \bar{M}_{j0} \\ \bar{T}_{j0} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}_{jl} = \begin{pmatrix} \bar{r}_{jl} \\ \theta_{jl} \\ \bar{M}_{jl} \\ \bar{T}_{jl} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

$$(j = 1, \ldots, n)$$

$\mathbf{p}$ este matricea parametrilor inițiali, $\mathbf{p}_{j0}$ reprezintă matricea parametrilor în originea $j-1$ a deschiderii l_j, iar $\mathbf{p}_{jl}$ este matricea parametrilor la capătul j al aceluiași interval. În plus se va nota prin $\mathbf{B}_j$ matricea de transfer (3.19) pentru intervalul l_j, avînd elementele (3.20) în care s-au înlocuit η și η_c prin η_j, respectiv η_{cj}.

În originea O a primului interval parametrii îndeplinesc condițiile la limită exprimate prin ecuația matricială

$$\mathbf{p}_{10} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}. \tag{4.3}$$

La capătul 1 al acestui interval parametrii sînt dați de relația (3.17)

$$\mathbf{p}_{1l} = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{p}_{10}. \tag{4.4}$$

Ținînd seama de continuitatea barei și de elasticitatea reazemului 1, parametrii în originea celui de-al doilea interval se pot scrie în funcție de parametrii de capăt ai primului interval sub forma

$$\mathbf{p}_{20} = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{p}_{1l}. \tag{4.5}$$

La cealaltă extremitate a deschiderii l_2 se găsește în mod similar

$$\mathbf{p}_{2l} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{p}_{20}. \tag{4.6}$$

Matricea $\mathbf{p}_{2l}$ poate fi exprimată în funcție de $\mathbf{p}$ dacă în (4.6) se substituie succesiv (4.5), (4.4) și (4.3), rezultînd

$$\mathbf{p}_{2l} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}.$$

Extinzînd raționamentul în același mod, la capătul intervalului l_n se găsește

$$\mathbf{p}_{nl} = \mathbf{B}_n \cdot \mathbf{C}_{n-1} \cdot \mathbf{B}_{n-1} \ldots \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}. \tag{4.7}$$

Condițiile la extremitatea n a ultimei deschideri sînt date de relația

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{p}_{nl} = \mathbf{O}. \tag{4.8}$$

Introducînd (4.7) în (4.8), condițiile la capătul n al barei se pot scrie în funcție de parametrii inițiali cu ajutorul sistemului algebric liniar dat de

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_n \cdot \mathbf{C}_{n-1} \cdot \mathbf{B}_{n-1} \ldots \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{O}.$$

Acest sistem este omogen, necunoscutele fiind parametri inițiali. Pentru ca sistemul să admită soluții nu toate nule, trebuie ca determinantul Δ al coeficienților să fie egal cu zero

$$\Delta = \det (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_n \cdot \mathbf{C}_{n-1} \cdot \mathbf{B}_{n-1} \ldots \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}) = 0. \tag{4.9}$$

Aceasta este ecuația valorilor proprii și reprezintă condiția de pierdere a stabilității barei. Produsul matricelor din (4.9) se calculează în ordinea dată. În matricea **A** se pot suprima de la început coloanele care au toate elementele nule, ca și rîndurile cu toate elementele nule din matricea **D**, deoarece acestea nu schimbă calculele.

5. ECUAȚIILE METODEI ÎN CAZUL BARELOR SOLICITATE LA RĂSUCIRE SIMPLĂ

5.1. BARE AVÎND CONDIȚII LA LIMITĂ IDENTICE ÎN PLANELE *Oxz* ȘI *Oyz*

Considerînd bara solicitată numai de momentul de răsucire M_t, adică pentru $\eta_c = 0$, funcțiile (3.15) devin, după efectuarea trecerilor la limita corespunzătoare

$$\left.\begin{aligned} \bar{f}(\zeta) &= \mathrm{i}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\zeta}), \\ \bar{g}(\zeta) &= -\mathrm{i}(1 + \mathrm{i}\eta\zeta - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\zeta}), \\ \bar{h}(\zeta) &= \mathrm{i}\left(1 + \mathrm{i}\eta\,\zeta - \frac{\eta^2}{2}\,\zeta^2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\zeta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Matricea $\mathbf{B}_j$ de tipul (3.19) pentru intervalul l_j ia forma

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} 1 & b_{j,12} & b_{j,13} & b_{j,14} \\ 0 & b_{j,22} & b_{j,23} & b_{j,24} \\ 0 & 0 & 1 & b_{j,34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

elementele sale avînd expresiile

$$\left.\begin{aligned} b_{j,12} &= \mathrm{i}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_j}); & b_{j,22} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_j}, \\ b_{j,13} &= -\mathrm{i}(1 + \mathrm{i}\eta_j - e^{\mathrm{i}\eta_j}); & b_{j,23} &= 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_j}, \\ b_{j,14} &= \mathrm{i}\left(1 + \mathrm{i}\eta_j - \frac{\eta_j^2}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_j}\right); & b_{j,24} &= -(1 + \mathrm{i}\eta_j - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_j}), \\ \eta_j &= \frac{M_t l_j}{\alpha_j}; & b_{j,34} &= -\mathrm{i}\eta_j. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

La același rezultat se poate ajunge și direct, folosind ecuația diferențială (3.3), cu $\eta_c = 0$,

$$r^{\mathrm{IV}} = \mathrm{i}\eta\, r''' = 0,$$

care are soluția completă

$$r = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\zeta} + C_2 + C_3\,\zeta + C_4\,\zeta^2,$$

constantele determinîndu-se printr-un calcul analog celui de la § 3.1 și 3.3.

5.2. BARE AVÎND CONDIȚII LA LIMITĂ DIFERITE ÎN PLANELE *Oxz* ȘI *Oyz*

Condițiile la limite în planul *Oxz* pot fi diferite de cele din planul *Oyz* fie datorită rezemării, fie prin modul de aplicare a sarcinii (de exemplu moment cvasitangențial). Atunci ecuațiile (3.14) trebuie descompuse în cele două plane de coordonate, înlocuind mărimile complexe $\overline{r}$, θ, $\overline{M}$ și $\overline{T}$ prin componentele lor $\overline{u}$, $\overline{v}$, φ, ψ, $\overline{M}_x$, $\overline{M}_y$, $\overline{T}_x$ și T_y. În acest mod matricele coloane $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_{j0}$, $\mathbf{p}_{jl}$ vor fi înlocuite prin matricele coloane $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_{j0}$, $\mathbf{q}_{jl}$ cu 8 elemente; $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}_j$, $\mathbf{D}$ vor deveni matrice patrate de rangul 8, cu excepția celor avînd coloane sau rînduri cu toate elementele nule, iar matricea $\mathbf{B}_j$ va fi înlocuită prin matricea patrată $\mathbf{E}_j$ de rangul 8. De exemplu relația

$$\mathbf{p}_{jl} = \mathbf{B}_j \cdot \mathbf{p}_{j0}$$

se substituie prin

$$\mathbf{q}_{jl} = \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{q}_{j0}, \tag{5.4}$$

în care

$$\mathbf{q}_{j0} = \begin{pmatrix} \overline{u}_{j0} \\ \overline{v}_{j0} \\ \varphi_{j0} \\ \psi_{j0} \\ \overline{M}_{xj0} \\ \overline{M}_{yj0} \\ \overline{T}_{xj0} \\ \overline{T}_{yj0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_{jl} = \begin{pmatrix} \overline{u}_{jl} \\ \overline{v}_{jl} \\ \varphi_{jl} \\ \psi_{jl} \\ \overline{M}_{xjl} \\ \overline{M}_{yjl} \\ \overline{T}_{xjl} \\ \overline{T}_{yjl} \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

iar, în cazul răsucirii simple, matricea $\mathbf{E}_j$ are expresia

$$\mathbf{E}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e_{j,13} & e_{j,14} & e_{j,15} & e_{j,16} & e_{j,17} & e_{j,18} \\ 0 & 1 & e_{j,23} & e_{j,24} & e_{j,25} & e_{j,26} & e_{j,27} & e_{j,28} \\ 0 & 0 & e_{j,33} & e_{j,34} & e_{j,35} & e_{j,36} & e_{j,37} & e_{j,38} \\ 0 & 0 & e_{j,43} & e_{j,44} & e_{j,45} & e_{j,46} & e_{j,47} & e_{j,48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e_{j,58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e_{j,67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

unde s-au folosit notațiile

$$
\begin{aligned}
e_{j,13} &= \sin \eta_j; & e_{j,33} &= \cos \eta_j,\\
e_{j,14} &= -(1-\cos \eta_j); & e_{j,34} &= -\sin \eta_j,\\
e_{j,15} &= \eta_j - \sin \eta_j; & e_{j,35} &= 1-\cos \eta_j,\\
e_{j,16} &= 1-\cos \eta_j; & e_{j,36} &= \sin \eta_j,\\
e_{j,17} &= -(\eta_j - \sin \eta_j); & e_{j,37} &= -(1-\cos \eta_j),\\
e_{j,18} &= -\left(1-\frac{\eta_j^2}{2}-\cos \eta_j\right); & e_{j,38} &= \eta_j - \sin \eta_j,\\
e_{j,23} &= 1-\cos \eta_j; & e_{j,43} &= \sin \eta_j,\\
e_{j,24} &= \sin \eta_j; & e_{j,44} &= \cos \eta_j,\\
e_{j,25} &= -(1-\cos \eta_j); & e_{j,45} &= -\sin \eta_j,\\
e_{j,26} &= \eta_j - \sin \eta_j; & e_{j,46} &= 1-\cos \eta_j,\\
e_{j,27} &= 1-\frac{\eta_j^2}{2}-\cos \eta_j; & e_{j,47} &= -(\eta_j - \sin \eta_j),\\
e_{j,28} &= -(\eta_j - \sin \eta_j); & e_{j,48} &= -(1-\cos \eta_j),\\
\eta_j &= \frac{M_t l_j}{\alpha_j}; & e_{j,58} &= \eta_j,\\
& & e_{j,67} &= -\eta_j.
\end{aligned}
\qquad (5.7)
$$

Condiția de instabilitate (4.9) va fi înlocuită prin

$$\Delta = \det\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}_n\cdot\mathbf{C}_{n-1}\cdot\mathbf{E}_{n-1}\cdots\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{A}\right)=0. \qquad (5.8)$$

5.3. CONDIȚII LA LIMITE

S-a demonstrat [1], [2], [3] că singurele probleme conservative se obțin în următoarele condiții la extremitățile barei:

a. Capătul este încastrat, în sensul că permite deformații unghiulare de răsucire, dar nu sînt posibile deformațiile unghiulare de încovoiere (fig. 1).

În acest caz momentul de răsucire are direcția axială.

b. Capătul este liber sau articulat (echivalent cu rezemare simplă pe toate direcțiile transversale) și momentul de răsucire M_t produce în cele două plane longitudinale perpendiculare, ale barei deformate, momente încovoietoare de forma

$$M_x = M_t\,[A\varphi + B\psi]; \quad M_y = M_t\,[C\varphi + (1-A)\psi], \qquad (5.9)$$

A, B, C fiind constante.

Din multitudinea de valori pe care le pot lua constantele A, B și C, două situații particulare sînt uzuale.

Dacă $A = 1$, $B = C = 0$, atunci

$$M_x = M_t\varphi, \quad M_y = 0. \tag{5.10}$$

Este cazul unui disc care nu împiedică deformaţiile barei, acţionat de un cuplu de forţe $M_t = 2Pa$ (fig. 3), care urmăresc înclinarea discului, însă rămîn paralele cu axa Oy [1], [3], [4] la trecerea barei din poziţia rectilinie în cea curbilinie de echilibru. Acest tip de încărcare s-a numit moment *cvasitangenţial* şi se întîlneşte frecvent la discurile turbinelor axiale cu două jeturi de fluid, de asemenea la pale lungi şi la legături cardanice.

Un alt caz particular deosebit de important se obţine înlocuind în (5.9) $A = \frac{1}{2}$, $B = C = 0$, rezultînd

$$M_x = \frac{M_t}{2}\varphi\,; \; M_y = \frac{M_t}{2}\psi, \tag{5.11}$$

adică vectorul $M_t = 2Pa$ are direcţia bisectoarei unghiului dintre axa Oz şi tangenta la fibra medie deformată a barei. Un asemenea moment s-a numit *semitangenţial*. El poate fi realizat prin aplicarea pe circumferinţa unui disc a trei sau mai multe forţe egale şi simetrice (fig. 4), cu aceeaşi

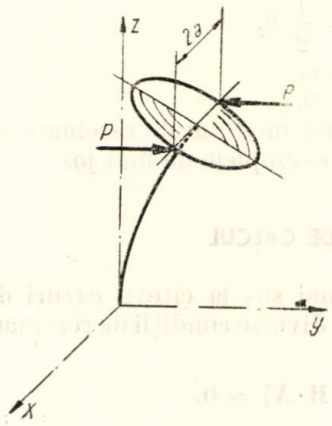


Fig. 3

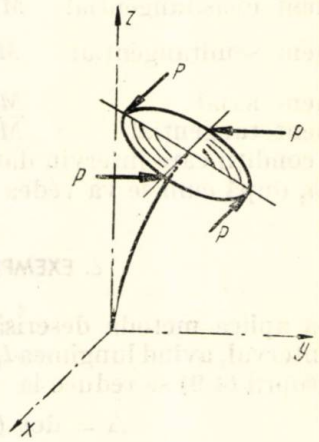


Fig. 4

condiţie ca la cazul precedent, de a-şi păstra direcţia iniţială. În particular, momentul semitangenţial se obţine printr-o distribuţie continuă de forţe circumferenţiale pe periferia unui disc, ca în cazul majorităţii turbinelor axiale.

Condiţiile (5.11) se pot scrie sub forma complexă

$$M = \frac{M_t}{2}\theta. \tag{5.12}$$

În afară de problemele conservative menţionate, se pot cita cîteva cazuri neconservative. Astfel este de exemplu momentul *axial*, al cărui

vector își păstrează direcția inițială axială după deformarea barei, producînt componente de încovoiere nule [5]

$$M_x = M_y = 0, \tag{5.13}$$

respectiv

$$M = 0. \tag{5.14}$$

Acest mod de încărcare se întîlnește extrem de rar, fiind realizat cu aproximație la turbinele Pelton. În cele mai multe cazuri orice deformare a barei este însoțită de o deplasare a liniei de acțiune a forțelor, deci de o înclinare a vectorului moment de răsucire, modulul său rămînînd neschimbat.

Se mai menționează cazul neconservativ al momentului *tangențial*, al cărui vector rămîne permanent tangent la axa deformată a barei, componentele sale de încovoiere fiind

$$M_x = M_t\varphi, \quad M_y = M_t\psi \tag{5.15}$$

sau, folosind mărimi complexe

$$M = M_t\theta. \tag{5.16}$$

Formele adimensionale ale condițiilor de limite de mai sus sînt următoarele :

moment cvasitangențial $\overline{M}_x = \varphi\,;\ \overline{M}_y = 0,$ (5.10′)

moment semitangențial $\overline{M} = \frac{1}{2}\,\theta,$ (5.12′)

moment axial $\overline{M} = 0,$ (5.14′)

moment tangențial $\overline{M} = \theta.$ (5.16′)

Alte condiții care intervin datorită modului de rezemare se pot scrie cu ușurință, după cum se va vedea în exemplele de mai jos.

6. EXEMPLE DE CALCUL

Se va aplica metoda descrisă mai sus la cîteva cazuri de bare cu un singur interval, avînd lungimea l, în diverse condiții de rezemare. Ecuația valorilor proprii (4.9) se reduce la

$$\Delta = \det\,(\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = 0, \tag{6.1}$$

respectiv (5.8) devine

$$\Delta = \det\,(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}) = 0, \tag{6.2}$$

în matricele **B** și **E** renunțîndu-se la indicele j.

La fiecare din cazurile studiate mai jos, momentul de răsucire critic se calculează cu formula

$$M_{t0} = \eta\,\frac{\alpha}{l}, \tag{6.3}$$

η fiind cea mai mică rădăcină nenulă a ecuației (6.1) sau (6.2). Relația (6.3) rezultă din expresia mărimii adimensionale η definită la § 2.

Din problemele ce urmează, primele trei sînt verificări ale unor cazuri tratate anterior pe alte căi, iar ultimele două n-au fost studiate pînă în prezent.

6.1. BARĂ ÎN CONSOLĂ, SOLICITATĂ PRIN MOMENT SEMITANGENȚIAL (fig. 5).

Reacțiunea transversală din încastrare este nulă, iar la capătul liber momentul încovoietor complex adimensional este dat de relația (5.12′), astfel încît condițiile în încastrare și matricea de transformare **A** sînt

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_{10} &= 0, \\ \theta_{10} &= 0, \\ \bar{M}_{10} &= \bar{M}_0, \\ \bar{T}_{10} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

parametri inițiali reducîndu-se la $\bar{M}_0$.

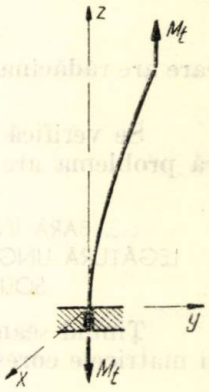


Fig. 5

La cealaltă extremitate condiția este

$$\bar{M}_{1l} = \frac{1}{2}\,\theta_{1l}$$

sau

$$\bar{M}_{1l} - \frac{1}{2}\,\theta_{1l} = 0, \text{ deci } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Produsul matricelor din (6.1) este

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\,b_{23} + 1$$

și înlocuind (5.3)

$$\Delta = \frac{1}{2}(e^{i\eta} + 1) = 0$$

cu rădăcina binecunoscută [1]

$$\eta = \pi.$$

6.2. BARĂ SIMPLU REZEMATĂ LA CAPETE, ÎNCĂRCATĂ CU MOMENT AXIAL ȘI CU FORȚĂ DE COMPRESIUNE (fig. 6)

Rezemarea se consideră egală pe toate direcțiile transversale. Condițiile la limite vor fi, ținînd seama de (5.14′)

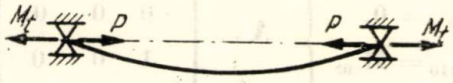


Fig. 6

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_{10} &= 0, \\ \theta_{10} &= \theta_0, \\ \bar{M}_{10} &= 0, \\ \bar{T}_{10} &= \bar{T}_0, \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_{1l} &= 0, \\ \bar{M}_{1l} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{14} \\ 0 & b_{34} \end{pmatrix},$$

$$\Delta = b_{12}\cdot b_{34} = 0.$$

Înlocuind (3.20) și ținînd seamă de (3.4), din anularea lui b_{34} nu se obțin rădăcini reale, iar anularea lui b_{12} conduce, după efectuarea calculelor, la ecuația

$$\eta_c^2 \, e^{i\frac{\eta}{2}} \left(e^{\frac{i}{2}\sqrt{\eta^2+4\eta_c}} - e^{-\frac{i}{2}\sqrt{\eta^2+4\eta_c}} \right) = 0,$$

care are rădăcina

$$\eta^2 + 4\eta_c = 4\pi^2.$$

Se verifică rezultatul din lucrarea [5]. Este interesant de semnalat că problema are soluție deși este neconservativă.

6.3. BARĂ ÎNCASTRATĂ LA UN CAPĂT ȘI AVÎND LA CELĂLALT CAPĂT LEGĂTURĂ UNGHIULARĂ PE DIRECȚIA x ȘI LEGĂTURĂ LINIARĂ PE DIRECȚIA x, SOLICITATĂ PRIN MOMENT CVASITANGENȚIAL (fig. 7)

Ținînd seamă de (5.10′) și de modul de rezemare, condițiile la limite și matricele corespunzătoare sînt :

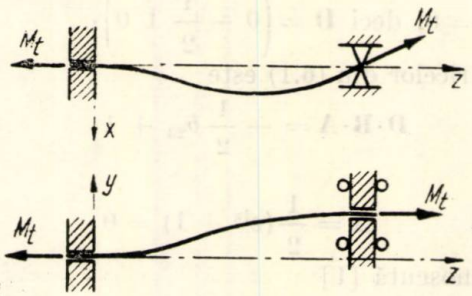


Fig. 7

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}_{10} &= 0, \\ \overline{v}_{10} &= 0, \\ \varphi_{10} &= 0, \\ \psi_{10} &= 0, \\ \overline{M}_{x10} &= \overline{M}_{x0}, \\ \overline{M}_{y10} &= \overline{M}_{y0}, \\ \overline{T}_{x10} &= T_{x0}, \\ \overline{T}_{y10} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}_{1l} &= 0, \\ \psi_{1l} &= 0, \\ \overline{M}_{y1l} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Se aplică condiția (6.2) calculînd mai întîi produsul

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e_{15} & e_{16} & e_{17} \\ e_{47} & e_{46} & e_{47} \\ 0 & 1 & e_{67} \end{pmatrix}.$$

Introducînd (5.7), după dezvoltarea determinantului din (6.2) se obține ecuația

$$\sin \eta - \eta \cos \eta = 0,$$

$$\eta = 4{,}493.$$

Rezultatul coincide cu cel din lucrarea [7].

6.4. BARĂ SIMPLU REZEMATĂ ÎN PLANUL *Oxz* ȘI ÎNCASTRATĂ LA CAPETE ÎN PLANUL *Oyz*, SOLICITATĂ PRIN MOMENT CVASITANGENȚIAL

Se consideră că forțele care produc cuplul M_t la una din extremități sînt paralele cu forțele de la cealaltă extremitate.

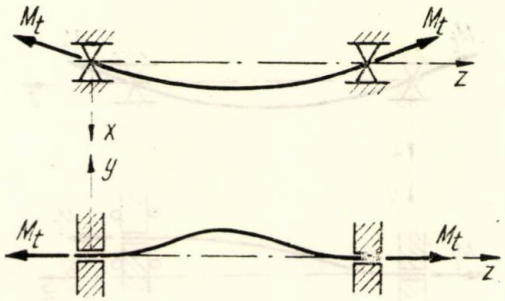


Fig. 8

Condițiile la limite și matricele de transformare sînt :

$$\left.\begin{aligned}
\overline{u}_{10} &= 0,\\
\overline{v}_{10} &= 0,\\
\varphi_{10} &= \varphi_0,\\
\psi_{10} &= 0,\\
\overline{M}_{x10} &= \overline{M}_{x0},\\
\overline{M}_{y10} &= 0,\\
\overline{T}_{x10} &= \overline{T}_{x0},\\
\overline{T}_{y10} &= \overline{T}_{y0},
\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{u}_{1l} &= 0,\\
\overline{v}_{1l} &= 0,\\
\psi_{1l} &= 0,\\
\overline{M}_{y1l} &= 0,
\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
e_{13} & e_{15} & e_{17} & e_{18}\\
e_{23} & e_{25} & e_{27} & e_{28}\\
e_{43} & e_{45} & e_{47} & e_{48}\\
0 & 0 & e_{67} & 0
\end{pmatrix}.$$

Înlocuind (5.7), ecuația (6.2) devine, după dezvoltarea determinantului,

$$\eta \sin \eta + 2 \cos \eta - 2 = 0,$$

cu rădăcina

$$\eta = 6{,}283.$$

6.5. BARĂ SIMPLU REZEMATĂ LA EXTREMITĂȚI ÎN PLANUL *Oxz* ȘI AVÎND ÎN PLANUL *Oyz* ÎNCASTRARE FIXĂ LA UN CAPĂT ȘI ÎNCASTRARE MOBILĂ LA CELĂLALT, SOLICITATĂ PRIN MOMENT CVASITANGENȚIAL (fig. 9)

În origine condițiile sînt

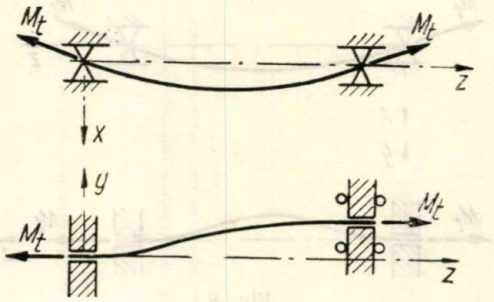


Fig. 9

$$\left.\begin{aligned}
\overline{u}_{10} &= 0,\\
\overline{v}_{10} &= 0,\\
\varphi_{10} &= \varphi_0,\\
\psi_{10} &= \psi_0,\\
\overline{M}_{x10} &= \overline{M}_{x0},\\
\overline{M}_{y10} &= 0,\\
\overline{T}_{x10} &= \overline{T}_{x0},\\
\overline{T}_{y10} &= 0,
\end{aligned}\right| \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

iar la celălalt capăt sînt identice cu (6.4)

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e_{13} & e_{15} & e_{17}\\ e_{43} & e_{45} & e_{47}\\ 0 & 0 & e_{67} \end{pmatrix}.$$

După efectuarea înlocuirilor (5.7) și a calculelor, ecuația (6.2) se reduce la

$$\sin \eta = 0,$$

$$\eta = \pi.$$

7. SCURTE CONCLUZII

Metoda parametrilor inițiali se dovedește avantajoasă la soluționarea problemei stabilității barelor supuse la răsucire. Matricele care intervin în calcule datorită condițiilor la limite se pot scrie imediat, după cum reiese și din aplicațiile tratate. Determinanții obținuți, deși par complicați la prima vedere, se reduc cu ușurință la forme simple, folosind proprietățile de însumare a unei coloane sau linii cu alta. S-au regăsit rezultate stabilite anterior pe alte căi și s-a arătat cum se pot soluționa și probleme noi (§ 6.4 și 6.5), care pot apare în cadrul unui proiect.

Cu ecuațiile stabilite și cu metodica arătată se pot rezolva probleme în diverse condiții de rezemare.

Primită la redacție la 11 ian. 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Ziegler, *Knickung gerader Stäbe unter Torsion*, ZAMP III, 1952.
2. M. Beck, *Knickung gerader Stäbe durch Druck und konservative Torsion*, Ingenieur-Archiv **XXIII**, *4* (1955).
3. В. В. Болотин, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Москва, Физматгиз, 1961.
4. S. D. Pomomariov, V. L. Biderman, K. K. Liharev, V. M. Makusin, N. N. Malinin, V. I. Foedosiev, *Calculul de rezistență în construcția de mașini, vol. III* (traducere din limba rusă), București, Edit. tehnică, 1964.
5. A. Trösch, *Stabilitätsprobleme bei tordierten Stäben und Wellen*, Ingenieur-Archiv **XX** (1952).
6. А.Р. Ржаницын, *Устойчивость равновесия упругих систем*, Москва, Гостехиздат, 1955.
7. В. М. Макушин, *Исследоваиие устойчивости скрученного стержня с равными главными жескостями при изгибе*, Расчеты на прочность, Москва, Машгиз, 1958.

NOTE

DETERMINAREA PRIN METODA MODELĂRII ELECTRICE A LINIILOR DE INFLUENȚĂ LA SISTEMELE STATIC NEDETERMINATE [1])

de NICOLAE ORLOVSCHI
Institutul politehnic, Iași

531.2 : 353.1
624.04 : 624.07

Se face o prezentare schematică a procedeelor din statica construcțiilor pentru determinarea liniilor de influență la sistemele static nedeterminate, arătîndu-se în paralel posibilitățile de modelare electrică pe principiul acestora. Se arată că procedeele bazate pe trasarea deformatelor căii în varianta deplasărilor virtuale sau a forțelor virtuale, comparativ cu procedeul de acționare directă cu sarcina mobilă $P = 1$, prezintă unele dezavantaje în modelare electrică. Se subliniază avantajele ce rezultă din modelarea electrică a echilibrărilor deplasărilor (gradelor de libertate) pe principiul metodei momentelor active. Exemplificarea se face pe un cadru cu stîlpi înclinați.

1. INTRODUCERE

Stabilirea ipotezelor defavorabile de încărcare, corespunzătoare eforturilor maxime în elementele structurilor acționate de sarcini mobile se face cu ajutorul liniilor de influență, determinarea cărora, după cum se știe, necesită efectuarea unui mare volum de calcule, în special în cazul structurilor cu grad mare de nedeterminare statică.

Prin utilizarea de procedee și variante, care permit sistematizarea și mecanizarea calculelor, se obțin unele reduceri ale volumului de muncă; acestea însă nu înlătură de deplin dificultățile în determinarea liniilor de influență.

[1]) Prezentată la Sesiunea științifică a Institutului politehnic Timișoara, 18–20 martie 1966.

Posibilitatea de rezolvare a problemelor de statica structurilor prin metoda analogiilor electrice se extinde şi pentru cazul sarcinilor mobile, liniile de influenţă ale diferitelor eforturi putînd fi determinate într-un timp relativ scurt, iar necesarul de materiale şi aparatură electrică fiind acelaşi ca şi în cazul sarcinilor fixe.

2. CONSIDERAŢII STATICE

Liniile de influenţă ale eforturilor la structurile static nedeterminate se pot obţine pe două căi [1], funcţie de sistemul ce urmează a se rezolva în acest scop (fig. 1).

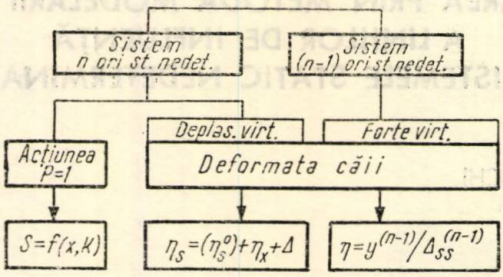


Fig. 1

1. *În prima cale* se rezolvă sistemul dat, de n ori static nedeterminat, ordonatele liniilor de influenţă putînd fi deduse în două moduri :

a) *Acţionînd sistemul dat cu sarcina mobilă* $P = 1$, se calculează eforturile S pentru fiecare din poziţiile sarcinii mobile. În cazul sistemelor simple (grinzi, arce) eforturile S se pot exprima ca funcţii de poziţia x a sarcinii şi de caracteristicile elastice-geometrice K ale sistemului :

$$S = f(x,\ k). \tag{1}$$

Procedeul se recomandă pentru determinarea liniilor de influenţă la sisteme simple cu maximum două sau trei grade de nedeterminare statică ; pentru sistemele mai complicate stabilirea expresiilor (1) se face dificil.

b) *Acţionînd sistemul dat cu o deplasare unitară* $\Delta_S = 1$, pe direcţia efortului S pentru care se cere linia de influenţă, se trasează deformata căii ; ea este linia de influenţă a efortului S, iar ordonatele ei au expresia de forma :

$$\eta_S = \eta_S^0 + \eta_{(x)} + \Delta, \tag{2}$$

în care :

η_S^0 sînt ordonatele liniei de influenţă ale efortului S în sistemul de bază cu care se lucrează (în metoda forţelor sau metoda deplasărilor) ;

$\eta_{(x)}$ rezultă din influenţa directă a momentelor de la extremităţile deschiderii în care se calculează ordonatele şi are expresia de forma

$$\eta_{(x)} = \int M\,\overline{M}_i\,\frac{ds}{EI}; \tag{3}$$

Δ sînt deplasările pe verticală datorită rotirilor barelor.

Acest procedeu, denumit în literatură [2] și procedeul „deplasărilor virtuale", prezintă avantajul de a permite posibilitatea de sistematizare a calculelor, sistemul pe care se operează rămînînd același indiferent de linia de influență care se determină [3], [4].

2. *În calea a doua* se rezolvă sistemul de $(n-1)$ ori static nedeterminat, obținut prin scoaterea legăturii corespunzătoare efortului pentru care se cere linia de influență. Deformata căii acestui sistem, acționat de forța $S=1$, luată la scara $1/\Delta_{SS}^{(n-1)}$, ne va da linia de influență a efortului S, adică

$$\eta_S = \frac{y^{(n-1)}}{\Delta_{SS}^{(n-1)}}, \tag{4}$$

$\Delta_{SS}^{(n-1)}$ este deplasarea după direcția S în sistemul de $(n-1)$ ori static nedeterminat, datorită acțiunii unitare $S=1$.

Procedeul arătat aici este denumit procedeul cinematic sau al „forțelor virtuale" și prezintă dezavantajul că sistemul de bază de $(n-1)$ ori static nedeterminat pe care se operează se modifică pentru fiecare linie de influență.

Pentru structuri mai simple (cu noduri fixe) procedeul permite trasarea cu ușurință a alurei liniilor de influență ale eforturilor.

3. FOLOSIREA METODEI ANALOGIEI ELECTRICE

Pentru soluționarea unei probleme de calcul a structurilor pe calea modelării electrice este necesar să se efectueze următoarele operațiuni:

— realizarea modelului electric prin conectarea schemelor de bare, de grade de libertate și a dispozitivelor suplimentare, care servesc pentru automatizarea unora din operații;

— conectarea la sursele de alimentare sub formă de curent I^0, sau f.e.m. U^0 și efectuarea măsurătorilor de curent la bornele fiecărui circuit-bară;

— pe baza citirilor de curent sau tensiune se stabilește influența sarcinilor mobile asupra structurii, adică se pot trasa liniile de influență.

Criteriile în alegerea metodei din statica construcțiilor pe baza căreia să se realizeze modelarea electrică a structurii trebuie să fie în primul rînd simplitatea și rapiditatea în realizarea operațiunilor de mai sus: modelul, citirile și liniile de influență.

Cercetările teoretice și experimentale au arătat că modelarea electrică a structurilor pe principiul metodei cinematice în scopul obținerii liniilor de influență, prezintă unele dezavantaje, întrucît:

— fiecărei linii de influență îi corespunde o altă structură de $(n-1)$ ori static nedeterminate, deci pentru fiecare linie de influență trebuie să se realizeze un alt model;

— alimentarea schemei se modifică și ea pentru fiecare linie de influență;

— citirile efectuate pe schema structurii constituie doar date necesare pentru trecerea la determinarea liniilor de influență, etapă care se poate realiza fie pe calea analitică de calcul, fie pe calea modelării electrice cu ajutorul unor scheme suplimentare, cum se va vedea mai jos.

Chiar în cazul structurilor foarte simple cum sînt grinzile continue sau cadrele cu noduri fixe, tratate de O. V. Lujin [5], [6] și K. K. Keropian [7], [8], modelarea electrică pe principiul metodei cinematice conduce

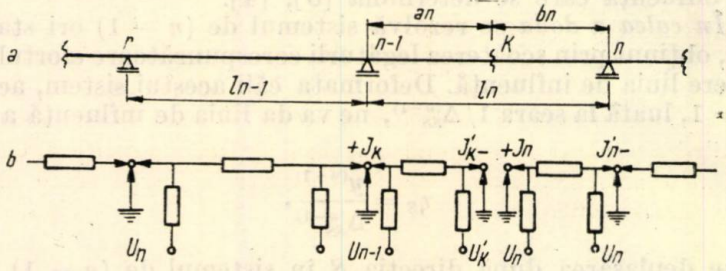


Fig. 2

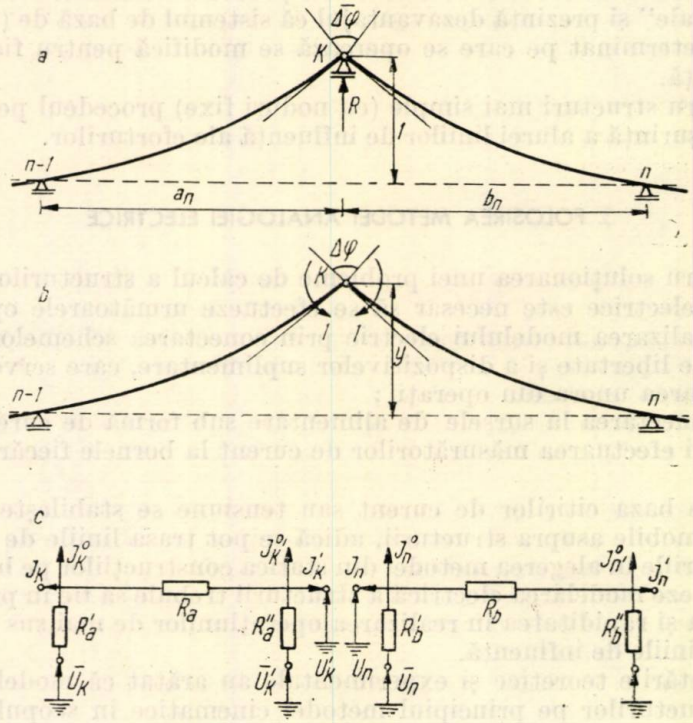


Fig. 3

la operații destul de complicate și scheme suplimentare. Astfel, pentru determinarea liniei de influență a momentului dintr-o secție K la o grindă continuă (fig. 2a), sînt necesare următoarele etape :

a) Modelarea fiecărei deschideri folosind una din scheme : în T, în π sau în punte. Porțiunile a_n și b_n determinate de secțiunea K sînt modelate și ele cu cîte o schemă așa cum se arată în figura 2b ;

b) Rezolvarea structurii la două ipoteze de încărcare, cum se arată în figura 3 și anume :

— *structura rezemată în K și acționată de o săgeată în K egală cu unitatea* (fig. 3a), determinîndu-se prin măsurători de curenți și tensiuni mărimile reacțiunii R și a rotirii relative $\overline{\Delta\varphi}$ din articulația K, cu relațiile

$$R = \left(\frac{I_k}{a_n} + \frac{I'_n}{b_n}\right)\frac{1}{s_m}\ ;\ \overline{\Delta\varphi} = \frac{|\overline{U}'_k| + |U_n|}{s_\varphi}, \tag{5}$$

s_m și s_φ sînt scările pentru momente și rotiri.

Întrucît rotirile celor două porțiuni a_n și b_n sînt de mărime $1/a_n$ și $1/b_n$, alimentarea schemelor electrice trebuie să ne asigure următoarele diferențe de potențial:

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_k &= -\frac{1}{a_n}\cdot 3s_\varphi\ ;\ \overline{U}'_k = \frac{1}{a_n}\cdot 3\ s_\varphi, \\ \overline{U}_n &= \frac{1}{b_n}\cdot 3\ s_\varphi\ ;\ \overline{U}'_n = -\frac{1}{b_n}\cdot 3\ s_\varphi; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

— *structura acționată în K de o pereche de momente unitare*, săgeata în K fiind egală cu y (fig. 3*b*).

Alimentarea schemei electrice ne va da diferențele de potențial

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_k &= -y\frac{1}{a_n}\cdot 3\ s_\varphi\ ;\ \overline{U}'_k = y\frac{1}{a_n}\cdot 3\ s_\varphi, \\ \overline{U}_n &= y\frac{1}{b_n}\cdot 3\ s_\varphi\ ;\ \overline{U}'_n = -y\frac{1}{b_n}\cdot 3\ s_\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Totodată trebuie să avem satisfăcută condiția $I'_k = I_n = s_m$, întrucît momentele în K sînt unitare.

În baza teoremelor de reciprocitate rezultă: $y = \dfrac{\overline{\Delta\varphi}}{R}$, relație ce leagă cele două ipoteze de acționare.

Pentru a obține linia de influență a momentului din secția K se poate proceda în două moduri:

1. Se determină pe cale de calcul ordonatele deformatei căii (fig. 3b) măsurîndu-se în prealabil tensiunea U_r din dreptul reazemelor r ale grinzii continue, adică aflîndu-se rotirile din reazeme

$$\varphi_r = \frac{U_r}{s_\varphi}\cdot\frac{1}{\Delta_\varphi}\cdot \tag{8}$$

Știind că $\Delta_\varphi = \dfrac{|U'_k| + |U_n|}{s_\varphi}$,

rezultă

$$\varphi_r = \frac{U_r}{|U'_k + U_n|}\cdot \tag{8'}$$

Ordonatele liniei de influență dintr-o deschidere se exprimă ca funcții de rotirile din capetele acelei deschideri.

$$\eta = f(\varphi_r, \varphi_{r-1}); \tag{9}$$

2. Se folosesc scheme suplimentare, care modelează electric grinda conjugată (fig. 4) așa cum se procedează în lucrările lui K. K. Keropian [7], [8] și S. Freiberg [9].

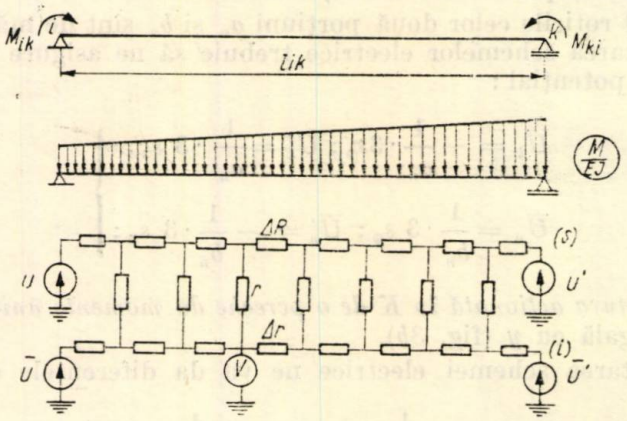


Fig. 4

Trebuie determinate în prealabil momentele din capetele barelor sistemului cu relația

$$M_{ik} = \frac{I_{ik}}{|U'_k| + |U_n|} \frac{s_\varphi}{s_m}, \tag{10}$$

pentru a avea încărcarea grinzii conjugate, care, se știe că este dată de diagrama de momente împărțită la EI.

Tensiunile în diferitele puncte ale rețelei superioare (s) ne vor da momentele din grinda reală, iar tensiunile din rețeaua inferioară (i) ne vor da momentele în grinda conjugată, adică săgețile și deci ordonatele liniei de influență.

Operații similare trebuie efectuate și în cazul modelării electrice după principiul variantei deplasărilor virtuale, linia de influență în acest caz fiind deformata căii structurii acționată de deplasarea unitară $\Delta_s = 1$ după direcția efortului pentru care se determină linia de influență. La structurile cu noduri deplasabile de tipul celor arătate în figura 5, dificultățile sînt și mai mari, datorită atît modelării propriu-zise (apar și circuite de deplasare) cît și deplasărilor liniare ale nodurilor, după direcții oarecare, ceea ce complică trasarea deformatei, fiind necesare măsurători și calcule suplimentare.

Modelarea electrică după procedeul de acționare directă cu sarcina mobilă $P = 1$, constituie o cale mai simplă pentru obținerea liniilor de influență; simplitatea este cu atît mai evidentă cu cît numărul de eforturi pentru care se cer liniile de influență este mai mare.

În acest procedeu, schema electrică este aceeași pentru toate liniile de influență ale momentelor din capetele barelor ; de asemenea, alimentarea, modelînd acțiunea sarcinii mobile $P = 1$, rămîne și ea aceeași pentru toate liniile de influență. Citirile de curenți la bornele de intrare și de ieșire ale circuitelor de bare, corespunzător fiecărei poziții a sarcinii $P = 1$ vor fi chiar ordonatele liniilor de influență ale momentelor din capetele de bare.

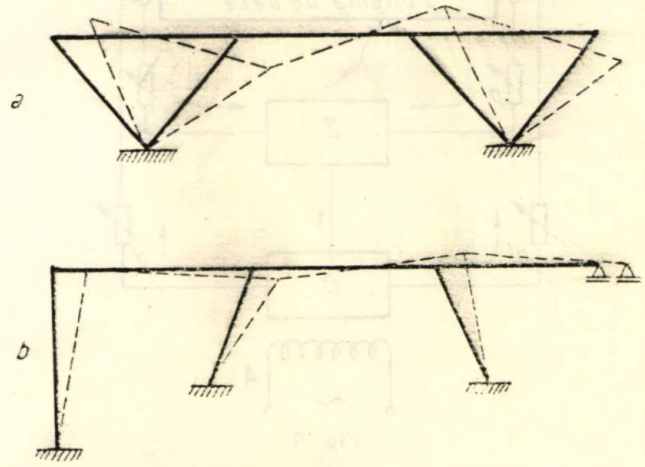


Fig. 5

Cu ajutorul lor, pe cale analitică, folosind relații statice simple, se trece cu ușurință la liniile de influență ale eforturilor din orice secție a elementelor structurii.

Folosind procedeul acționării directe cu sarcina mobilă $P = 1$, Bray J. determina liniile de influență la cadrele cu stîlpi verticali și de înălțimi egale [10].

Modelarea electrică a structurilor oarecare, la care se rotesc atît stîlpii cît și riglele (fig. 5), se poate realiza pe principiul metodei momentelor active [11], [12], echilibrările succesive ale gradelor de libertate putîndu-se face cu ajutorul unui sumator Σ și a unui distribuitor D de curenți, cum se arată în schema bloc din fig. 6 [13]. Sumatorul sumează momentele de la capetele barelor, multiplicate cu rapoartele β_{ik}/β_A realizate de potențiometrele p și înregistrează curentul total.

$$\Sigma I = s_m M_A = s_m \left[\Sigma (M_{ik} + M_{ki}) \frac{\beta_{ik}}{\beta_A} + \Sigma F_i d_i \frac{\beta_{ik}}{\beta_A} \right]. \qquad (11)$$

De la distribuitor, prin intermediul potențiometrelor p', către capetele barelor ce fac parte din lanțul cinematic A se distribuie curenții

$$I_{ik} = \Sigma I \cdot \nu'_{ik} = s_m \cdot M_A \nu'_{ik}, \qquad (12)$$

realizîndu-se astfel echilibrul lanţului cinematic A. ν'_{ik} este coeficientul de distribuţie în capătul i al barei ik a momentului de lanţ M_A şi are expresia :

$$\nu'_{ik} = \frac{\overline{K}'_{ik}}{\overline{K}'_A}; \quad (\overline{K}'_A = \sum_A \overline{K}'_{ik}). \tag{13}$$

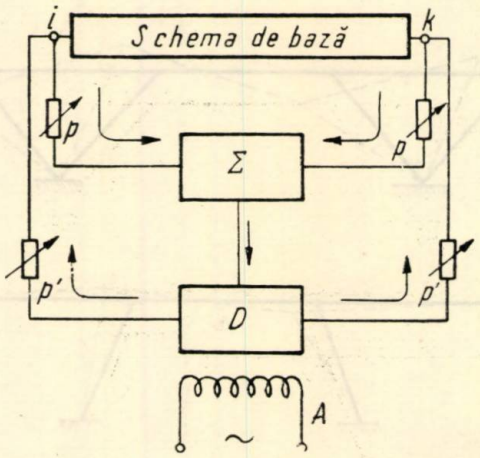


Fig. 6

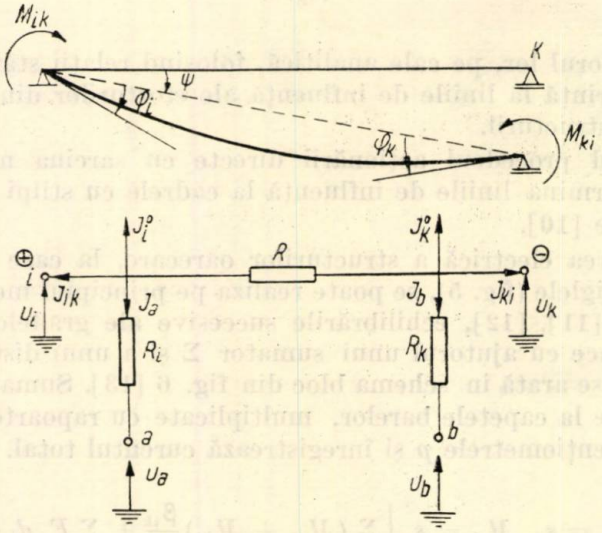


Fig. 7

„Schemele de bază", pentru bare pot fi scheme în π spre exemplu (fig. 7), la care alimentarea se face prin curenţii J_i^0 şi J_k^0, ce corespund momentelor de încastrare perfectă produse de sarcina mobilă $P = 1$, aplicată în diferitele secţiuni ale barei ik.

Caracteristicile barelor sînt modelate potrivit relațiilor

$$R_i = s_k \frac{1}{K_{ik}(1-\gamma_{ik})}; \quad R_k = s_k \frac{1}{K_{ki}(1-\gamma_{ki})}; \quad R = s_k \frac{1}{K_{ik}\gamma_{ik}}, \tag{14}$$

R_i, R_k și R sînt rezistențele schemei. K_{ik} și γ_{ik} sînt rigiditatea la rotire în capătul i al barei ik și respectiv coeficientul de transmitere a momentului de la i la k.

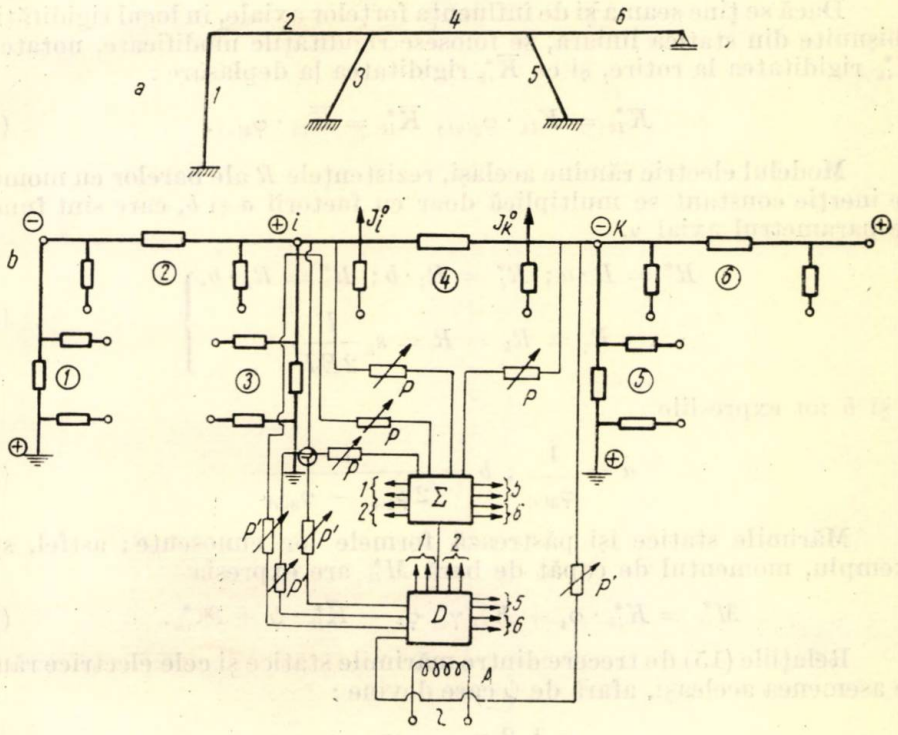


Fig. 8

s_k este scara rigidităților, legată de scările momentelor și ale rotirilor prin relația $s_k = s_m/s_\varphi$. Momentele, rotirile φ din capetele barelor și rotirile ψ ale barelor se determină cu relațiile

$$\left.\begin{aligned} M_{im} &= \frac{1}{s_m} I_{ik}; \quad M_{ki} = -\frac{1}{s_m} I_{ki}, \\ \varphi_i &= \frac{1}{s_\varphi} U_i; \quad \varphi_k = -\frac{1}{s_\varphi} U_k; \quad \psi = \frac{1}{s_\varphi} \frac{\alpha' - \beta}{\alpha'' + \beta} U_a. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Intensitatea curenților de la bornele barelor precum și tensiunile de la fiecare din cele 4 ramuri ale unei scheme de bază se determină prin măsurători.

În figura 8 se prezintă modelul electric pentru cadrul din figura 5*b*. Pentru claritatea figurii nu s-au desenat decît legăturile la barele 3 și 4.

Similar, trebuie legate la sumator și distribuitor toate barele cadrului, întrucît din lanțul cinematic A fac parte toate barele. Alimentarea „schemei de bază" este dată de curenții I^0 de pe bara 4, iar alimentarea schemei de deplasare (de lanț cinematic) se face cu ajutorul autotransformatorului A. Linia de influență a unui moment de capăt de bară M_{ik} se obține prin măsurarea curentului I_{ik}, la fiecare poziție a sarcinii mobile $P=1$ de pe linia de încărcare a structurii și apoi prin reprezentarea grafică a acestor măsurători.

Dacă se ține seama și de influența forțelor axiale, în locul rigidităților obișnuite din statica liniară, se folosesc rigiditățile modificate, notate cu K^*_{ik} rigiditatea la rotire, și cu $\overline{K}^*_{ik}$ rigiditatea la deplasare :

$$K^*_{ik} = K_{ik} \cdot \varphi_{2(\nu)}, \quad \overline{K}^*_{ik} = \overline{K}_{ik} \cdot \varphi_{4(\nu)}. \tag{16}$$

Modelul electric rămîne același, rezistențele R ale barelor cu moment de inerție constant se multiplică doar cu factorii a și b, care sînt funcții de parametrul axial ν.

$$\left.\begin{aligned} R^* = R \cdot a;\ R^*_i = R_i \cdot b;\ R^*_k = R_k \cdot b, \\ R_i = R_k = R = s_k \frac{l}{2EJ}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

a și b au expresiile

$$a = \frac{1}{\varphi_{3(\nu)}};\quad b = \frac{1}{2\varphi_{2(\nu)} - \varphi_{3(\nu)}}. \tag{18}$$

Mărimile statice își păstrează formele lor cunoscute; astfel, spre exemplu, momentul de capăt de bară M^*_{ik} are expresia

$$M^*_{ik} = K^*_{ik} \cdot \varphi_i + K^*_{ki}\, \gamma^*_{ki}\, \varphi_k - \overline{K}^*_{ik} \cdot \psi + \mathfrak{M}^*_{ik}. \tag{19}$$

Relațiile (15) de trecere dintre mărimile statice și cele electrice rămîn de asemenea aceleași, afară de ψ care devine :

$$\psi = \frac{1}{s_\varphi} \frac{2\,\varphi_{2(\nu)} - \varphi_{3(\nu)}}{3\,\varphi_{4(\nu)}} \cdot U_a. \tag{20}$$

Funcțiile $\varphi_{2(\nu)}$, $\varphi_{3(\nu)}$ și $\varphi_{4(\nu)}$, depinzînd de parametrul axial $\nu = kl = l\sqrt{\frac{N}{EJ}}$ sînt intabulate (vezi spre ex. [14]).

Primită la redacție la 28 noiembrie 1966.

BIBLIOGRAFIA

1. R. Guldan, *Rahmentragwerke und Durchlaufträger*, Springer-Verlag, Wien, 1943.
2. P. Mazilu, *Statica Construcțiilor II*, Edit. tehnică, București, 1959.
3. E. Beiu Paladi, *Contribuțiuni la rezolvarea sistemelor static nedeterminate*, Rev. tehnice AGIR Constr. și mat. de constr., *1–3* (1949).
4. N. Orlovschi, *Determinarea liniilor de influență la cadre cu stîlpi înclinați prin metoda momentelor active*, Bul. I. P. Iași, **IX (XIII)** *1–2*, 349–358 (1963).

5. О. В. Лужин, *Построение линий влияния в статически неопределимых рамах методами электрического моделирования. Труды второй межвузовской научно-технической конференции по электрическому моделированию.* Новочеркасск 1962.
6. О. В. Лужин, *Использование простейших электрических моделей для построения линий влияния изгибающих моментов в статически неопределимых рамах*, Строительная механика и расчет сооружений *4* (1963).
7. К. К. Керопян, *Электрические модели некоторых плоских стержневых систем*, Труды РНСИ, вып. XI. Госстройиздат, Москва, 1958.
8. К. К. Керопян, П. М. Чеголин, *Электрическое моделирование в строительной механике*, Госстройиздат, Москва, 1963.
9. S. Freiberg, *Conjugate Beam Simulated by Electric Circuits*, Journal of the Eng. Mech. Division. Proceedings ASCE vol. 87 nr. EM_4 august, 1961.
10. J. M. Bray, *An Electrical Analyser for Frameworks*, The Structural Engineer, **XXXV**, *8* (1957).
11. A. Sesan şi N. Orlovschi, *O generalizare a metodei distribuirii momentelor*, St. cerc. şt., Acad. R.S.R. Fil. Iaşi, **VI**, *3—4*, 59—69 (1955).
12. A. Sesan, *Rezolvarea sistemelor static nedeterminate cu ajutorul momentelor active*, Comunicare ses. şt. jubil. a Inst. Mec. Apl. „Traian Vuia", Acad. R.P.R., 2—4 iulie, 1961.
13. N. Orlovschi, *Unele probleme de modelare electrică a sistemelor de bare*, St. cerc. mec. apl., **22**, *4* (1966).
14. И. П. Прокофьев, А. Ф. Смирнов, *Теория сооружений* (*часть III*), Госстройиздат, Москва 1948.

RECENZII

Y. C. FUNG, *Foundations of solid mechanics* (Bazele mecanicii solidelor), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965, xiv + 526 p.

Mecanica solidelor deformabile se ocupă de deformarea şi mişcarea corpurilor solide, diferenţiindu-se de mecanica fluidelor în special prin faptul că pune în evidenţă vectorul deplasare. Această ramură a mecanicii a căpătat în ultimul timp o dezvoltare din ce în ce mai mare, fiind pusă în legătură cu fenomenele termodinamice şi cu cîmpul electromagnetic. Puţine sînt cărţile care încearcă să atace cele mai variate aspecte legate de deformarea corpurilor solide, una dintre acestea fiind cea publicată recent de prof. Y. C. Fung de la California Institute of Technology.

Pornind de la noţiunile introductive de analiză tensorială şi calcul al variaţiilor, se face o prezentare aproape tuturor problemelor moderne care se pun actualmente în această direcţie, lucrarea fiind destinată inginerilor şi cercetătorilor cu o pregătire de bază pe această linie; cu toate că ea este scrisă pentru cititorii interesaţi în probleme deosebite, se folosesc numai tensiuni în coordonate carteziene — cercul de cititori putînd fi astfel mai mare.

Este interesant de observat că acest volum a fost conceput pornind de la lecţiile predate de autor, care a considerat că noţiunile de teoria elasticităţii nu mai sînt suficiente în stadiul actual de dezvoltare al ştiinţei şi tehnicii. De altfel, ideea de a prezenta un curs general de mecanica solidelor deformabile este din ce în ce mai răspîndită în întreaga lume; credem că ea ar trebui luată în considerare şi în ţara noastră.

Lucrarea cuprinde 16 capitole, urmate de un epilog, în care se face o interesantă legătură între teorie şi practică, inginerie şi ştiinţă. Un număr de note, legate de fiecare capitol în parte, completează textul cu unele date de interes istoric sau cu probleme speciale. Bibliografia este deosebit de bogată (cuprinde aproape 500 de titluri), menţionîndu-se lucrările care cuprind ele însile o literatură extensivă. Un indice de nume şi probleme este foarte util.

Capitolul 1 prezintă prototipuri de corpuri elastice şi viscoelastice, fără a introduce analiza tensorială a tensiunilor şi deformaţiilor. În cazul corpurilor elastice, rezultatele se obţin sub formă finită, punîndu-se în evidenţă legea lui Hooke, ca şi consecinţele ei. Analiza rezultatelor este foarte interesantă. Se introduce energia de deformaţie pozitiv definită şi se arată unicitatea soluţiei. Teoremele de energie potenţială minimă şi energie complementară minimă sînt de asemenea prezentate. Se introduc apoi solidele liniare cu memorie : cele mai importante modele (unidimensionale) de corpuri viscoelastice. Menţionăm oscilaţiile sinusoidale şi problemele structurale ale unor asemenea corpuri.

În capitolul al 2-lea se dau noţiuni fundamentale de analiză tensorială : transformări de coordonate, tensorul metric euclidian, contravarianţă, covarianţă, tensori de ordin superior,

T. CERC. MEC. APL. TOM 26 NR. 6 P. 1377–1381 BUCUREŞTI 1967

cîţiva tensori importanţi. O atenţie specială este acordată pentru derivarea parţială şi pentru diferenţierea covariantă, ca şi pentru interpretarea geometrică a unor asemenea operaţii. Componentele fizice ale unui vector sînt de asemenea puse în evidenţă. Aceste rezultate preliminare sînt apoi aplicate la studiul tensorului tensiune, în capitolul al 3-lea. Se stabilesc ecuaţiile de echilibru şi mişcare, se pune în evidenţă caracterul tensorial al tensiunii, se determină elipsoidul tensiunilor al lui Lamé, cvadrica tensiunilor a lui Cauchy, cercurile lui Mohr, tensiunile normale principale, tensiunile tangenţiale extreme etc. Se trece apoi la coordonate generale, obţinîndu-se componentele tensorului tensiune şi stabilindu-se ecuaţiile de echilibru corespunzătoare. Analiza stării de deformaţie se face în capitolul al 4-lea. Se introduc noţiunile de deformaţie şi rotaţie, discutîndu-se cazul în care sînt finite sau infinitezimale. Problema compatibilităţii deformaţiilor, ca şi problema deplasărilor multiforme (legate de domenii multiplu conexe) sînt de asemenea considerate pe larg. Şi în acest caz se prezintă componentele fizice ale tensorului deformaţie.

Diferite legi de conservare se dau în capitolul al 5-lea. Plecînd de la teorema lui Gauss, se fac descrieri materiale şi spaţiale ale schimbării configuraţiilor (variabile Euler, variabile Lagrange, derivată materială). Se găsesc astfel ecuaţiile de continuitate şi mişcare. Capitolul al 6-lea este destinat studiului comportării elastice şi plastice a materialelor. Se dă astfel legea generalizată a lui Hooke şi se prezintă solidul ideal plastic. Se fac apoi consideraţii cu privire la criteriile de încărcare şi descărcare, la fenomenul de ecruisaj (definiţia lui Drucker), plasticitatea ideală, legi de curgere etc.

În capitolul al 7-lea se studiază elasticitatea liniară. Se dau ecuaţiile fundamentale şi se prezintă problemele la limită corespunzătoare; în cazul echilibrului menţionăm teorema de unicitate. Se rezolvă apoi unele probleme la limită : torsiunea după B. de St. Venant şi încovoierea barelor. Menţionăm, de asemenea, probleme de propagare a undelor: unde elastice plane, unde de suprafaţă Rayleigh, unde Love. Rezolvarea problemelor elasticităţii cu ajutorul potenţialilor se face în capitolul al 8-lea. Se dau întîi potenţiali scalari şi vectoriali pentru cîmpul vectorilor deplasare şi pentru deformaţii. Apoi se trece la vectorul lui Galerkin, la funcţia de deformaţie a lui Love şi la reprezentarea lui Papkovici-Neuber. Menţionăm studiul problemelor lui Kelvin, Boussinesq şi Cerruti (cazul forţei concentrate în interiorul spaţiului elastic, ca şi cazul forţei concentrate — normală sau tangenţială — pe planul de separaţie al semispaţiului elastic), ca şi studiul perturbării soluţiilor elastice odată cu variaţia coeficientului de contracţie transversală al lui Poisson. Reflexia şi refracţia undelor P şi S este de asemenea luată în considerare. Problema lui Lamb (aplicarea bruscă a unei sarcini normale liniare pe un semispaţiu elastic) este studiată cu metoda lui Cagniard. Vectorii lui Galerkin şi Papkovici-Neuber sînt apoi daţi şi pentru cazul dinamic (după M. Iacovache şi E. Sternberg, R. A. Eubanks). Problemele bidimensionale sînt tratate în capitolul al 9-lea. Se consideră astfel starea de tensiune şi starea de deformaţie plană şi se introduce funcţia lui Airy. Autorul dă apoi şi reprezentarea cu ajutorul metodelor funcţiilor de variabilă complexă, stabilind formulele Kolosov-Mushelişvili. Rezolvarea prin metoda alternării este de asemenea prezentată.

În capitolul al 10-lea se fac unele consideraţii generale de calcul variaţional şi se prezintă diferite teoreme energetice ca şi principiul lui B. de St. Venant. Minimizarea funcţionalelor se face luînd în consideraţie derivate de ordin superior, mai multe funcţii necunoscute ca şi mai multe variabile independente; se pun în evidenţă condiţiile naturale la limită. În felul acesta se obţine teorema minimului energiei potenţiale în cazul unor variaţii mici ale deplasărilor şi teorema energiei complementare minime în cazul unor variaţii mici ale tensiunilor. După ce se prezintă principiul lui Reissner şi posibilităţile lui de aplicare la elasticitatea finită, se trece la principiul lui St. Venant, menţionîndu-se justificarea dată de Boussinesq, ca şi consideraţiile făcute ulterior de R. von Mises şi E. Sternberg. Principiul lui Hamilton este dat în capitolul al 11-lea. Rezultatele obţinute se aplică la cazul vibraţiei barelor. Menţionăm şi rezultatele experimentale ale lui Hopkinson. În

coordonate generalizate se dă apoi o reprezentare generală a funcţiilor şi se prezintă diferite metode directe de calcul variaţional.

În capitolul al 12-lea se face legătura între elasticitate şi termodinamică. Se prezintă legile termodinamicii, ecuaţia energiei, funcţia energiei de deformaţie ca şi condiţiile de echilibru termodinamic. Menţionăm interesanta prezentare a restricţiilor termodinamice cu privire la legea constitutivă a unui corp elastic izotrop. Efectul termic este apoi luat în considerare în cazul corpului Hookean. Se stabilesc şi ecuaţiile care leagă proprietăţile termice şi mecanice ale unui solid. Capitolul al 13-lea este destinat termodinamicii ireversibile, pusă în legătură cu vîscoelasticitatea. Menţionăm unele relaţii fenomenologice — principiul lui Onsager. Se dau apoi ecuaţiile fundamentale ale termomecanicii şi ecuaţiile de evoluţie ale unui material cu ereditate liniară. De asemenea, sînt prezentate corpurile vîscoelastice cu anizotropie liniară. Problemele termoelasticităţii sînt prezentate în capitolul al 14-lea. Se stabilesc ecuaţiile fundamentale şi se consideră efectele termice datorite deformaţiei corpului. În cazul ecuaţiilor necuplate se arată diferite metode de rezolvare, în particular metoda lui J. N. Goodier. Se studiază şi cazul unei stări de deformaţie plană. Menţionăm principiile variaţionale pentru termoelasticitatea necuplată şi pentru conducţia căldurii. De asemenea, se dau unele rezultate pentru termoelasticitatea cuplată. Ecuaţiile problemei sînt apoi stabilite şi cu ajutorul coordonatelor Lagrange.

În capitolul al 15-lea se prezintă unele probleme de vîscoelasticitate. Legea constitutivă este dată sub formă diferenţială ; se pun probleme la limită şi se arată modul de utilizare al transformărilor integrale. Propagarea undelor într-un mediu infinit este de asemenea luată în considerare. Menţionăm studiul problemei cvasistatice ca şi unele relaţii de reciprocitate.

Capitolul ultim cuprinde problema deformaţiilor finite. Se introduc tensori de deformaţie, ca şi tensorii de tensiune ai lui Lagrange şi Kirchhoff. Se dă apoi ecuaţia de mişcare cu ajutorul coordonatelor lui Lagrange şi se introduce viteza de deformare. Noţiunile de fluid vîscos, elasticitate, hiperelasticitate şi hipoelasticitate sînt apoi puse în evidenţă. Cu ajutorul funcţiei energie de deformaţie se stabilesc unele principii variaţionale. Cu unele detalii este studiată şi problema deformaţiei mari a plăcilor plane.

Cartea este scrisă deosebit de clar şi atractiv, permiţînd o informare bogată în mecanica solidelor deformabile, chiar dacă unele aspecte ale problemelor au fost mai puţin studiate. Credem că este util ca fiecare cercetător în această ramură a mecanicii să cunoască problemele cuprinse în acest volum, indiferent de direcţia particulară în care lucrează.

P. P. Teodorescu

Structural Steel Design (Calculul structurilor de oţel), by members of the Fritz Engineering Laboratory, The Ronald Press Company, New York, 1964, 892 + XII pag.

Volumul cuprinde o sinteză a rezultatelor studiilor teoretice şi experimentale privind calculul structurilor de oţel, efectuate în cadrul laboratorului de cercetări de pe lîngă catedra de construcţii civile a Universităţii Lehigh din S.U.A.

În prima parte a lucrării sînt expuse proprietăţile mecanice ale oţelurilor pentru construcţii şi modul în care diferiţi factori influenţează asupra acestor proprietăţi. Într-un capitol separat se prezintă noţiunile fundamentale ale comportării elementelor şi structurilor de oţel alcătuite din bare, concepţiile actuale asupra principiilor de dimensionare a structurilor şi consideraţii asupra valorii coeficientului de siguranţă.

Partea intitulată „Structuri" se ocupă cu diferitele tipuri de clădiri şi de poduri din oţel, insistîndu-se asupra modului de alcătuire a acestora şi a elementelor lor componente. Pentru ambele categorii de construcţii se prezintă tipurile de sarcini care le solicită, precum şi modul de combinare a acestora. Această parte se încheie cu un capitol referitor la utilizarea modelelor la dimensionarea structurilor de oţel.

Partea a treia are ca obiect calculul şi alcătuirea constructivă a următoarelor elemente de oţel : bare întinse centric, grinzi obişnuite, grinzi cu inima înaltă, stîlpi comprimaţi centric sau excentric, elemente uşoare din profile de tablă formate la rece şi elemente mixte alcătuite din oţel şi beton. La grinzile obişnuite sînt tratate încovoierea simplă, încovoierea pe două direcţii, efectul forţelor tăietoare, torsiunea cu încovoiere şi flambajul lateral. Separat sînt date elementele necesare pentru dimensionarea acestor grinzi în domeniul plastic. La grinzile cu inima înaltă, problema principală o constituie comportarea inimii la diferite stări de eforturi în domeniile elatic şi plastic. Lucrarea se ocupă pe larg cu rezistenţa şi stabilitatea stîlpilor comprimaţi excentric, atît în domeniul elastic, cît şi în domeniul plastic. O atenţie specială este acordată influenţei eforturilor reziduale asupra comportării acestor elemente de construcţie.

În partea a patra sînt expuse procedeele de sudare şi tehnica sudării, precum şi problemele referitoare la ruperea fragilă, oboseala şi flambajul local al barelor de oţel. Tipurile de îmbinare şi procedeele de realizare a lor prin nituire, bulonare sau sudare, fac obiectul părţii a cincea a volumului.

În ultima parte a lucrării se prezintă modul de soluţionare a problemelor care apar la dimensionarea cadrelor cu un singur nivel, sau cu mai multe nivele. Sînt prezentate separat atît dimensionarea pe baza rezistenţelor admisibile, cît şi dimensionarea în domeniul plastic.

Întregul volum, elaborat pe baza unui vast material documentar, reprezintă un model de soluţionare a problemelor puse de practica proiectării structurilor de oţel, prin intermediul cercetărilor de laborator. Grija pentru realizarea unei sinteze cît mai utile pentru activitatea de proiectare a construcţiilor de oţel este pusă în evidenţă şi de numeroasele exemple de calcul care însoţesc textul. Nivelul ştiinţific superior la care sînt tratate problemele, precum şi rezultatele practice la care se ajunge, fac ca materialul prezentat în acest volum să fie deosebit de util cercetătorilor şi inginerilor care se ocupă cu studiul şi proiectarea construcţiilor de oţel alcătuite din bare.

Valeriu Petcu

H. PASCAL, *Curgerea nestaţionară a gazelor prin conducte magistrale*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1967, 267 p., 87 fig.

Transportul prin conducte al gazelor, care se află într-o continuă dezvoltare, ridică o serie de probleme teoretice interesante şi în acelaş timp utile pentru diverse aplicaţii practice. Printre acestea se situează în primul rînd problemele legate de scurgerea nestaţionară a gazelor prin conducte, a căror rezolvare prezintă o serie de dificultăţi deoarece ecuaţiile diferenţiale pe care le satisfac presiunea şi debitul masic sînt neliniare.

Autorul acestei monografii se ocupă de mai mult timp de problemele amintite mai sus şi a obţinut o serie de rezultate teoretice interesante. Preocupările sale şi buna cunoaştere a acestui domeniu l-au îndreptăţit să elaboreze o lucrare de sinteză care pune pentru prima oară la îndemîna celor interesaţi principalele rezultate de pînă în prezent.

Lucrarea debutează cu un capitol introductiv consacrat prezentării ecuațiilor generale care urmează a fi utilizate în continuare. Pe baza acestora, în capitolul al doilea sînt deduse ecuațiile diferențiale ale presiunii și debitului masic. Acestea fiind neliniare, se indică și procedeele de liniarizare care au fost aplicate de diferiți autori. Capitolul al treilea, care este cel mai amplu, conține soluțiile aproximative obținute prin metode dezvoltate de autorul lucrării. Rezultatele sînt aplicate la o serie de probleme practice în care caracterul nestaționar al scurgerii intervine în mod decisiv. În capitolul următor, se studiază problema influenței inerției gazelor precum și aceea a scurgerii nestaționare în conducte cu diametrul și rugozitatea variabile pe porțiuni. Capitolul al cincilea este consacrat prezentării metodelor numerice de rezolvare și anume metoda diferențelor finite și aceea a dreptelor. În sfîrșit, ultimul capitol conține o serie de considerații asupra modelelor analogice, electrice sau hidraulice, care pot fi utilizate pentru studiul scurgerii nestaționare prin conducte.

Problemele teoretice sînt expuse în lucrare la un nivel corespunzător, păstrîndu-se rigoarea necesară. Aplicațiile practice sînt conduse pînă la faza rezultatelor numerice, exprimate prin numeroase tabele și grafice. Redactarea este clară și îngrijită, cu un accent deosebit asupra aspectelor fizice ale problemei tratate.

Lucrarea poate fi consultată cu un real folos de către specialiștii care vor să continue cercetările în acest domeniu cît și de către cei ce urmăresc diverse aplicații practice.

T. Oroveanu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1967

INDEX ALFABETIC

STUDII

	Tomul	Nr.	Pag.
ANASTASESCU DECEBAL, MUNTEANU ION, Efectul precomprimării în calculul cadrelor spaţiale	24	1	109
ANTON I., POPA O., Determinarea sensibilităţii la cavitaţie a unei reţele de profile de formă oarecare	24	2	255
APPELTAUER I., CUTEANU E., GIONCU V., GEIER A., SCHRAMM N., FRIEDRICH G., Flambajul prin încovoiere-răsucire al barelor de oţel cu secţiunea monosimetrică, solicitate de momente încovoietoare cu variaţie liniară	26	5	1045
AVRAM C., FILIMON I., MARINOV R., Nota I. Încercări privind plasticizarea parţială a elementelor încovoiate de beton	26	6	1283
AVRAM C., MARINOV R., Studiul fotoelastic şi analitic al concentrării tensiunilor la capătul fisurii într-o grindă supusă la încovoiere pură	26	5	1033
AVRAM C., MÎRŞU OVIDIU, BOB CORNELIU, Cadre dublu încastrate din beton armat în stadiu plastic	25	3	515
BĂRĂNESCU G., MANIŢIU RODICA, O generalizare a formulelor de analiză armonică a mărimilor cinematice ale bielei unui mecanism bielă-manivelă	24	1	27
BĂRĂNESCU G., ZĂTREANU GHEORGHE, O teorie a echilibrajului forţelor de inerţie la motoarele cu două linii în cilindri	26	5	991
BODNĂRESCU DAN, Asupra metodei Raskin şi Bogramov pentru dimensionarea garniturilor de prăjini de pompare la oboseală	24	2	361
BOGDAN R. C., HUNCHER T. V., Analiza armonică complexă a grupelor structurale binare de aspectul IV şi V în construcţia mecanismelor	24	1	53
BOGDAN R. C., HUNCHER T. V., Sistematizarea generală şi calculul unitar al mecanismelor fundamentale plane, pentalatere şi patrulatere	24	2	401
BOGDAN R. C., HUNCHER T. V., Mecanisme pentalatere şi patrulatere articulate cu unele cazuri particulare ale acestora	25	4	895
BOGDAN R. C., LARIONESCU D., Studiul analitic al mecanismelor cu cinci elemente de categoriile III şi IV prin metoda analizei armonice complexe	26	6	1221
BOGDAN VIRGIL, Expresiile eforturilor unitare care se produc în discuri în rotaţie solicitate prin eforturi care variază în lungul axei lor	26	5	1023
BUZDUGAN GH., BLUMENFELD M., STOICESCU L., FETCU L., Vibraţiile transversale libere ale grinzii pe două reazeme elastice lungi	25	4	853
CARAFOLI ELIE, MATEESCU DAN, Aplicarea mişcărilor cvasiconice la studiul sistemelor portante aripă-fuzelaj în regim supersonic	25	3	653
CARAFOLI ELIE, NĂSTASE ADRIANA, Aripa delta subţire, de rezistenţă minimă avînd viteză finită la bordurile de atac, în curent supersonic	26	5	971
CONSTANTINESCU V. N., DIMOFTE FL., MARIN GH., Asupra influenţei unor condiţii la limită în lubrificaţia cu gaze	24	1	203

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 26 NR. 6 P. 1383–1386 BUCUREŞTI 1967

CONSTANTINESCU V. N., DIMOFTE FL., Asupra influenței unor cîmpuri magnetice și electrice în lubrificația cu gaze 26 6 1193
CONSTANTINESCU V. N., GALETUȘE S., Asupra posibilităților de folosire a legilor universale de viteze la studiul lubrificației turbulente 25 4 797
CONSTANTINESCU V. N., SĂLCUDEAN MARTHA, O metodă pentru determinarea aproximativă a distribuției presiunilor în lagărele circulare lubrificate cu gaze, alimentate sub presiune printr-un șir central de orificii . . 25 3 631
CONSTANTINESCU V. N., SĂLCUDEAN MARTHA, Distribuția presiunilor în lagărele circulare lubrificate cu gaze, alimentate prin două șiruri de orificii 26 5 947
CRĂIFĂLEANU D., Aplicarea metodei parametrilor inițiali la studiul stabilității barelor solicitate la răsucire 26 6 1345
CRIȘAN S., SECARĂ GH., BONCOI GH., Cercetarea durității corpurilor abrazive 24 1 3
CSONKA P., Plăci curbe subțiri intersectate cu margini libere în consolă . . . 24 1 63
DROBOTA V., Calculul de stabilitate al grinzilor continue pendulare susținute prin tendoane articulate și încărcate cu convoaie de forțe 24 1 129
DUDIȚA FL., Vibrații torsionale autoparametrice în transmisiile mecanice cu articulații cardanice 25 4 917
FLORIAN V. Calculul la forțe orizontale al pereților cu un șir de goluri în poziție pronunțat disimetrică 24 1 71
GAFIȚEANU M. D., Considerații asupra gradului de acoperire la roțile dințate cilindrice cu dinți drepți 26 6 1249
HACKER T., Restabilirea rapidă a incidenței avionului în cazul mișcărilor de bază nestaționare 25 4 783
IFRIM M., LARIONESCU S., DOBRESCU AL., BĂRBULESCU I., O metodă simplificată de determinare a caracteristicilor dinamice ale structurilor etajate cu ajutorul calculatorului electronic cifric 26 5 1069
IONESCU D., Studiul teoretic și experimental al scurgerii turbulente dintre doi cilindri coaxiali, cilindrul interior fiind rotitor 25 4 747
IOSIPESCU N., Considerații asupra unui procedeu nou de încercare la forfecare pură a betonului 24 2 347
KEINTZEL EINAR, Contribuții la sistematizarea calculului la forțe orizontale ale diafragmelor și goluri la construcții multietajate 26 5 1085
LIBRESCU L., Asupra unei teorii a învelitorilor și plăcilor elastice, anizotrope 25 3 539
LIVOVSCHI L., Analiza mecanismelor automate cu elemente mecanice 25 3 601
MANEA C. I., Relații generale pentru determinarea unor parametri geometrici și cinematici ai motoarelor cu profil de lucru trocoidal 26 6 1235
MANGERON D., SILAȘ GH., BRÎNDEU A., HEGEDÜS A., Asupra mișcării staționare a unui sistem vibropercutant cînd ciocnirea nu se consideră instantanee 24 2 335
MARINESCU AL., Considerațiuni asupra unei probleme variaționale pentru manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite circulare 24 1 233
MARINESCU AL., Asupra vibrațiilor rachetei 26 5 1129
MATEESCU CRISTEA, Sensibilitatea la suprasarcini și siguranța construcțiilor 25 3 487
MATEESCU DAN, Aripi poligonale cu profil rombic în regim supersonic 24 2 291
MANOLESCU N. I., TEMPEA IOSIF, Sinteza structurală a lanțurilor cinematice plane cu articulații multiple și cinci grade de libertate $L_3 = 5$ „total"; $L_3^p = 5$ „parțial" și $L_3^{fr} = 5$ „fracționat". I 25 3 549
MANOLESCU N. I., TEMPEA IOSIF, Sinteza structurală și cinematică a mecanismelor motor plane cu articulații multiple și două grade de mobilitate $M_3 = 2$ „total" și $M_3^p = 2$ „parțial". II. 26 5 1101
NĂSTASE M. GR., Stabilirea pe cale radiometrică a condițiilor de utilizare optimă a surselor radioactive în gamadefectoscopie 24 2 443
ONU GELU, Asupra calculului rețelelor de grinzi prin iterație 26 6 1303
ORĂNESCU AMEDEU, Metoda schimbării elementului conducător, aplicată la integrarea ecuației de mișcare a mașinei 25 3 625
OROVEANU TEODOR, Unele aspecte ale scurgerii lichidelor compresibile prin medii poroase 25 3 669
OROVEANU TEODOR, Utilizarea funcției de curent în studiul scurgerilor plane cu rotor constant prin mediile poroase cu permeabilitate variabilă 26 6 1173

PÎRVULESCU S. N., Curgerea continuă a fluidului bifazic prin tuburi verticale 24 5 981
PASCAL H., Curgerea unui amestec compresibil de lichid şi gaz printr-un mediu poros în regim tranzitoriu 24 2 271
PATRAULEA N. N., Echilibrul relativ al unui sistem de ioni faţă de un reper rotitor 24 1 161
PAVEL A., Contribuţii şi precizări la calculul rezervoarelor cilindrice verticale cu capac autoportant fără moment 25 4 863
PAVELESCU D., Principalii parametri ai uzurii suprafeţelor plane în mişcare alternativă de alunecare. Instalaţie de modelare şi măsură (I) 24 2 369
PELECUDI CHR., Folosirea acceleraţiilor compuse superioare în studiul multipolilor şi mecanismelor plane 24 2 423
PELECUDI CHR., Metoda contururilor în sinteza numerică şi structurală a lanţurilor cinematice 25 3 573
PETCU VALERIU, Momentele plastice ale secţiunilor elementelor de oţel I şi [laminate în România 26 6 1291
PETCU VALERIU, MINEA SILVIA, Calculul plastic al plăcilor inelare de beton armat solicitate de încărcări uniform distribuite 25 4 821
PETRE AUGUSTIN, Divergenţa hidroelastică datorită portanţei în cazul aripilor subacvatice 25 4 777
POPA OCTAVIAN, Contribuţii la calculul reţelelor de profile cu ajutorul metodei singularităţilor 25 4 725
POPINCEANU N. G., GAFIŢEANU M. D., Contribuţii asupra noilor metode de încercare a rulmenţilor 24 2 381
RĂUTU SANDU, Consideraţiuni asupra calculului structurilor static nedeterminate 25 4 839
SANDU IOAN GH., Aspecte noi în teoria reţelelor structurale 26 6 1269
SĂVULESCU ŞT. N., TOMA V., Unele aspecte ale tranziţiei în stratul-limită la numere Reynolds mici 26 5 961
SOCOLESCU DAN, Asupra mişcării subsonice în jurul unui cilindru eliptic . . 25 4 763
STĂNESCU C., Consideraţiuni asupra unei teorii a plăcilor 25 3 527
STĂNESCU EUGEN, MUNTEANU ALA, MILITARU AL., Metodologia determinării în laborator a rezistenţei la forfecare a rocilor stîncoase . . . 24 1 139
TEODORESCU-ŢINTEA C., Asupra unui nou principiu funcţional în teoria turbinelor cu gaze bazat pe efectul Coandă : Turbina cu palete depresive 24 1 187
TEODOSIU C., Contribuţii la teoria macroscopică a dislocaţiilor şi tensiunilor iniţiale I 26 5 1005
TEODOSIU C., Contribuţii la teoria macroscopică a dislocaţiilor şi tensiunilor iniţiale. — II 26 6 1327
TOMA V., SĂVULESCU ŞT. N., Studiul experimental al optimizării repartiţiei de viteze în macheta unui electrofiltru 24 1 173
VASILCA GH., Asupra condiţiilor de aplicare şi persistenţă a bisulfurii de molibden pe suprafeţele de alunecare 26 6 1207
VASILESCU AL. A., Distribuţia vitezelor în conductele circulare cu pereţi netezi şi cu pereţi rugoşi 26 6 1187
WOINAROSKI R., Cinematica solidului rigid fără punct fix în spaţiul euclidian cu patru dimensiuni 24 2 319

NOTE

ORLOVSCHI NICOLAE, Determinarea prin metoda modelării electrice a liniilor de influenţă la sistemele static nedeterminate 26 6 1365
POP I., Asupra stratului-limită nestaţionar în apropierea unui disc care se roteşte în jurul unei axe 25 3 689
REDLOV T. G., Vectori cvasiliberi şi poligoane funiculare spaţiale 24 2 455

REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

NICA AL., Asupra bazelor fizice ale proceselor de frecare și ungere. III. Ungerea semifluidă 25 3 697
MÎNDRU ILIE, HUIDU THEODOR, Asupra folosirii rășinilor epoxidice în fotoelasticitate 25 3 705

MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE

Centenarul Academiei Republicii Socialiste România. Sesiunea generală științifică din 21—24 septembrie 1966. Comunicări din domeniul mecanicii aplicate 24 2 461
MARCU VASILE, CIOBANU TRAIAN, A 5-a Conferință internațională de metalizare prin pulverizare 26 5 1149

RECENZII 24 1 247
24 2 473
25 3 715
25 4 939
26 5 1165
26 6 1377

PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE 24 2 481